

3次元空間  $\mathbb{R}^3$  における Navier-Stoke 方程式の大きな初期データに対する時間大域的な弱解の存在は、1934年に Leray によって証明された。彼は流体の全運動エネルギーと粘性による散逸が有限であるという範囲で解を見いだすことの妥当性を主張した。後に Hopf, Ladyzhenskaya, Lions, 増田等により、この範囲で弱解は  $\mathbb{R}^3$  における任意の領域で時間大域的に存在することが明らかにされた。彼（彼女）等の構成した解は、Leray-Hopf の弱解と呼ばれ、今日も Navier-Stoke 方程式の数理解析的研究の原点となっている。幾多の努力にもかかわらず、これまでのところ Leray-Hopf の弱解の一意性と正則性は未解決である（Clay 研究所 Millennium 問題）。そこで、弱解の中で性質の良いクラスを発見することが重要な課題となる。Leray は全空間  $\mathbb{R}^3$  において流体の運動エネルギーが時間の単調減少関数であるような弱解を構成し、"Turbulent solution" と名付けた。Turbulent solution は方程式を超関数の意味で満たす弱解ではあるが、殆ど至るところの時刻において空間の関数として  $C^\infty$ -級であり、かつ時間が十分経過した以降は本当に  $C^\infty$  関数となるような良い解である。さらに、Leray 自身が提唱しながらも証明には至らず、その解決に50年を要した「解のエネルギー減衰問題」にも Turbulent solution は重要な役割を演じる。

これまでのところ、Leray-Hopf の弱解に比べて Turbulent solution の存在証明には領域の形状に制限が課されていた。実際、Leray-Hopf の弱解の構成には  $L^2$ -理論の適用で十分であるが、Turbulent solution に対しては、ベクトル場の Helmholtz 分解、線形 Stokes 作用素の  $L^p$ -理論が必要となる。この  $L^p$ -理論は、全空間  $\mathbb{R}^3$ 、半空間  $\mathbb{R}_+^3$  や領域の境界がコンパクトな曲面である内部または外部領域において確立されているが、無限に境界が延びているような領域に対しては成立しないことが知られている。一方、 $p = 2$ 、すなわち  $L^2$ -空間においては Hilbert 空間の特殊性により、領域の形状によらず、種々の関数解析的手法が適用可能である。そこで、 $L^2$  からの摂動として、どのような  $p$  の値の範囲で、Stokes 方程式の  $L^p$ -空間における最大正則定理 (Maximal regularity theorem) が成り立つかという問題をまず考察する。実際、領域  $\Omega$  が一様に  $C^2$ -級であるならば、空間  $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  ( $2 \leq p \leq 6$ )、かつ  $L^2(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$  ( $6/5 \leq p' \leq 2$ ) において、Helmholtz 分解定理と Stokes 方程式に関する一意存在定理および最大正則定理が成り立つことが明らかにされる。その結果、一様  $C^2$ -級領域において、 $L^2$  に属する任意の初期データに対して時間大域的な Turbulent solution が少なくとも一つ存在することが証明できる。我々の構成した Turbulent solution は、同時に Caffarelli-Kohn-Nirenberg の提唱した suitable weak solution にもなっていることも分かる。従って、我々の解は時空間4次元の関数として見たとき、その特異点の1次元 Hausdorff 測度は高々ゼロであるような比較的良い性質の弱解である。