

完全非線形方程式の粘性解の最大値原理

小池茂昭（埼玉大学）

2006 年 11 月 29 日（熊本大学談話会）

粘性解は非発散型 2 階楕円型・放物型偏微分方程式の適切な弱解であり、それまで扱えなかった様々な非線形方程式の研究が格段に進展した。

ここでは、完全非線形だが一様楕円・放物型方程式における粘性解の最大値原理に関して最近の結果を述べる。

扱う方程式は、次のような方程式である。

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma(x)|Du|^m = f(x) \quad \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{P}^-(D^2u) - \gamma(t, x)|Du|^m = f(t, x) \quad Q := \Omega \times (0, T] \quad (2)$$

ここで、 $m \geq 1$ と $T > 0$ は定数、 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は有界領域とし、 γ や f は L^q や L^p に属する与えられた関数で、 $X \in S^n$ に対し (S^n は $n \times n$ の実対称行列全体)、Pucci 作用素 $\mathcal{P}^-(X)$ の値は次で与えられる。 ($0 < \lambda \leq \Lambda$ は固定する。)

$$\mathcal{P}^-(X) = \min\{-\text{trace}(AX) \mid A \in S^n, \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$$

(1) や (2) は、単純に見えるが、この方程式を扱っておけば最大値原理に関しては可測係数 (連続でない) をもった完全非線形方程式を扱っていることになるので、十分に一般性がある。

さて、ここで言う最大値の原理とは、

$$u \text{ が (1) の粘性 (劣) 解} \implies \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + O(\|f\|_p)$$

$$u \text{ が (2) の粘性 (劣) 解} \implies \sup_Q u \leq \sup_{\partial_p Q} u + O(\|f\|_p)$$

のことである。ただし、 $\partial_p Q$ は Q の放物境界とする。

ここでは、 $m \geq 1$ や p, q によって、最大値原理がどのような場合に成立するかを述べる。もちろん、 $m = 1$ のときは、 $O(\|f\|_p) = C\|f\|_p$ が期待される。

特に、 $m > 1$ の時に、開発した“逐次比較関数法”を紹介する。

これは、Andrzej Świąch(ジョージア工科大学) との共同研究である。