相転移ー非平衡・非線形の偏微分方程式（集中講義）

鈴木貴（大阪大学基礎工学研究科）

氷が水になり、水が氷になる現象は数理科学の古くて新しい研究領域である．美しいパターンが次々に成長する雪の結晶から想像されるように、この現象は非平衡状態を制御する原理であるエントロピーや自由エネルギーがわからないと理解することができない．一方、臨界状態における物質の状態（相）と温度との相互作用を記述する非線形の問題でもあり、潜熱によって界面（自由境界）の運動がその曲率で制御されることも議論されてきた．

本講義の目的はこうした相転移に関する専門的な研究を概観することではなく、この問題を「非平衡平均場階層における数学原理」の一例として位置づけることである．この着想は細胞性粘菌が走化性のもとに胞子を形成する過程の数理的研究 [3] において「コラプスマスの量子化」が成り立つことが証明されたことから得られた．

一般に多数粒子の平均場は、粒子（ミクロ）・カイネティック（メゾスコピック）・マクロの 3 つの階層を形成し、マクロ階層からさらに定常、凝縮の二つの階層が枝分かれする．最後の凝縮の階層はミクロと同系の数学モデルで記述されるので、全体としてほぼ循環的な世界像を描く．各階層は、質量、運動量、エネルギーなどの保存則や、自由エネルギーなどの散逸則など、最初の粒子が支配される物理法則に統一的に支配され、その組み合わせにより異なる主導原理を持つ階層のセット（系列）ができる．大切なことは、各系列を導出する原理とそこから得られる原理が異なっていることである．また、階層の間には連続と共に断絶があり、ひとつの階層で証明されたことは他の階層でそのまま成り立つわけではない．階層と系列で位置づけられた各世界の主題を、その世界の中で数学的に明らかにするのが我々の課題である．

講義は 5 つの部分に分かれている．第 1 回で述べるのは 2 相ステファン問題である．熱伝導方程式とステファン条件をレベルセットの方法で導出し、エンタルピーを用いて弱形式に変換する．第 2 回では Ginzburg-Landau 理論を述べる．相平均場方程式を導出し、開いた系の定常解をタイムマップを用いて解析する方法を説明する．現象論的方程式であるので、自由エネルギーについては直観が働くようにする．第 3 回は Penrose-Fife 理論である．基本原理を自由エネルギーからエントロピーに変更するために、非平衡熱力学の基本的な部分を説明しなければならない．以上の準備のもとで、本題である「双対変分原理」にはいる．

一般に孤立系では平衡解が力学系を支配するのに対し、閉じた系では定常解が時間発展を支配する．定常問題は非局所項をもち、保存量をパラメータとする非線形固有値問題である．この一群の方程式は数学的には新しく、従来の非線形偏微分方程式の理論の枠組みには収まらない．このパラダイムを「非線形スペクトル力学」という．一方、散逸系は「自由エネルギー」をもつ．Landau-Ginzburg や Penrose-Fife のような相平均場理論では、平衡状態において自由エネルギーが縮退して、先に述べた非線形固有値問題の変分汎関数となり、このことから定常解のスペクトル安定と力学安定との同値性が導出される．これが双対変分原理である．第 4 回で相転移方程式についてこの構造を明らかにし、第 5 回でこのパラダイムに基づいた新しい数学的結果の証明のアイデアを述べる．

物理学、化学、生物学など、基礎科学の広い範囲の時空スケールや研究領域の問題には驚くほどの類似性がある．講義では「基本」に徹し、数理科学についてはもちろん、解析学を中心とする数学に関しても特別な知識は一切要求しない．ただし、毎回簡単な演習問題を 1 問だけ出すので、真剣に考えて欲しい．

[1] Mean Field Theories and Dual Variation, Elsevier, in preparation. [2] 非線形偏微分方程式講義：半線形楕円型方程式入門, 培風館, 東京, 2005. [3] Free Energy and Self-Interacting Particles, Birkhäuser, Boston, 2005. [4] Applied Analysis, Mathematical Methods in Natural Science, Imperial College Press, London, 2003.