RICCI 曲率が下に有界な測度距離空間の正則性

北別府 悠

1. 導入

リーマン多様体上に曲率を定義することを考える．まず Levi-Civita 接続を考え，リーマン曲率テンソルを定義し，そこから断面曲率，Ricci 曲率，scalar 曲率を定義して... というのがもっとも標準的な方法であろう．しかしながら，この定義だけでは曲率の幾何学的な意味が捉えにくい．断面曲率が下に有界であるような完備リーマン多様体を考えると，Toponogov の比較定理より三角形の "太り具合" によって曲率の下限が特徴付けられることに気づく．これを一般の距離空間に拡張したものが Alexandrov 空間である．Alexandrov 空間の研究は Gromov によって始められた距離空間の収束理論と相性がよく，断面曲率についての理解を深めることにつながった．他方 Ricci 曲率に関しては Alexandrov 空間のような "synthetic" な概念はしばらく知られていなかった．しかし Lott-Sturm-Villani [10,12,13] らによって，Entorpy 汎関数の凸性が Ricci 曲率の下限条件及び次元の上限条件と同値であることが示され，Ambrosio-Gigli-Savaré らの一連の研究を通して Bakry-Émery 理論との関連も示された [1]．これによって測度距離空間上に "Ricci 曲率が下に有界かつ次元が上に有界であり，接空間が Hilbert 空間である" という概念が定義された．この空間は RCD 空間と呼ばれ，Ricci limit 空間を含むような非常に広く，また性質のいいクラスである．このような空間は一般に非常に特異な空間である．しかし，ある条件下ではよい振る舞いをすることが知られている．そこで本講演では RCD 空間の正則性について話していきたい．

2. 測度距離空間上の微分構造

完備可分距離空間 (X, d) とその上の Borel 測度 m の組 (X, d, m) を**測度距離空間**という．次のようなものを考える: $f \in L^2(X, m)$ に対して，

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \inf \left\{ \liminf_{n \to \infty} \int_X \mathrm{Lip}(f_n)^2 \, dm \; ; \; f_n \xrightarrow{L^2} f \right\}$$

と定める．ここで g : 局所 Lipschitz 関数，$x \in X$ に対して

$$\mathrm{Lip}(g)(x) := \limsup_{d(x,y) \to 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

とする．$x \in X$ が孤立点の時は $\mathrm{Lip}(g)(x) = \infty$ とする．$\mathcal{D}(\mathsf{Ch}) := \{f \in L^2 \; ; \; \mathsf{Ch}(f) < \infty\}$ と定める．このときある L^2 関数 $|\nabla f|_w$ が存在して，$2\mathsf{Ch}(f) = \int |\nabla f|_w^2 \, dm$ が成り立つ．これにより $f \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ には微分が定まっていると考えることができる．従って $W^{1,2}(X, d, m) := \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ にノルム $\|f\|_{1,2}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + 2\mathsf{Ch}(f)$ を入れることで Sobolev 空間が定義できる．一般に $W^{1,2}$ は Banach 空間になることが知られているが，Hilbert 空間になるとは限らない (例えば リーマンでない Finsler 多様体上では $W^{1,2}$ は Banach 空間にしかならない)．そこで次の定義をする．

Definition 2.1 ([5])**.** 測度距離空間 (X, d, m) が *inifnitesimally Hilbertian* であるとは，Sobolev 空間 $W^{1,2}(X, d, m)$ が Hilbert 空間であることをいう．

The author is partly supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 15K17541.

3. RCD 空間

(X,d,m) を測度距離空間とする．X 上の Borel 確率測度であって

$$\int_X d^2(x,o)\,d\mu(x) < \infty$$

をある点 $o \in X$ に対して満たすような μ 全体の集合を $\mathcal{P}_2(X)$ で表すことにする．$\mathcal{P}_2(X)$ 上には距離 W_2 を定義することができ, (X,d) が測地的, すなわち与えられた 2 点を結ぶ最短曲線が必ず見つけられるような距離空間, であれば $\mathcal{P}_2(X)$ もそうなることが知られている．$\mathcal{P}_2(X)$ 上の汎関数 Ent_m を次のように定義する;

$$\mathsf{Ent}_m(\mu) := \begin{cases} \int_{\{\rho>0\}} \rho \log \rho \, dm & \text{if } \mu = \rho m \ll m \text{ かつ } (\rho\log\rho)_+ : \text{ integrable}, \\ +\infty. \end{cases}$$

エントロピー的曲率次元条件 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ *(*$K\in\mathbb{R}, N\in(1,\infty)$*)* を定義する．

Definition 3.1 ([4])**.** 測度距離空間 (X,d,m) がエントロピー的曲率次元条件 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ を満たすとは, 任意の $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ で $\mathsf{Ent}_m(\mu_i)<\infty$ を満たすものに対して, ある測地戦 $\{\mu_t\}_{t>0}$ が存在して,

$$\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_t)\right) \geq$$
$$\sigma^{(1-t)}_{K,N}(W_2(\mu_0,\mu_1))\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_0)\right) + \sigma^{(t)}_{K,N}(W_2(\mu_0,\mu_1))\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_1)\right)$$

が成り立つことを言う．ここで

$$\sigma^{(t)}_{K,N}(\theta) := \frac{\sin\left(t\theta\sqrt{\frac{K}{N}}\right)}{\sin\left(\theta\sqrt{\frac{K}{N}}\right)}$$

と定義されており, $K=0$ の時は単に $\sigma^{(t)}_{0,N}(\theta)=t$, $K<0$ の時は $\sin$ を $\sinh$ に変えた式で定義する．

$\mathsf{CD}^e(K,N)$ かつ infinitesimally Hilbertian な測度距離空間 (X,d,m) を $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間という．この $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ は Ricci 曲率が下から K, 次元が上から N で抑えられている多様体の一般化を与えている．実際, (M,g) を n 次元の完備なリーマン多様体とすると, (M,d_g,vol_g) が測度距離空間として $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ であることと, $\mathrm{Ric}_g \geq K$ かつ $n \leq N$ を満たすことは同値であることが知られている．

4. 測度付き Gromov(-Hausdorff) 収束と接空間

4.1. **pmG 収束.** 点付き測度距離空間列に対して収束概念を定義する．点付き測度距離空間とは測度距離空間 (X,d,m) とその上の点 $x \in \operatorname{supp} m$ からなる四つ組 (X,d,m,x) のことを指す．

Definition 4.1 ([6])**.** 点付き測度距離空間の列 $\{(X_n,d_n,m_n,\bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点付き測度距離空間 $(X_\infty,d_\infty,m_\infty,\bar{x}_\infty)$ に点付き *measured Gromov* 収束 *(pmG* 収束*)* するとは, ある完備可分距離空間 (Z,d_Z) 及び, 等長埋込 $\iota_n : X_n \to Z$, $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ が存在して, $\iota_n(\bar{x}_n)\to\iota_\infty(\bar{x}_\infty)$ かつ, $(\iota_n)_*m_n$ が $(\iota_\infty)_*m_\infty$ に弱収束, すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int_Z \psi\, d(\iota_n)_*m_n = \int_Z \psi\, d(\iota_\infty)_*m_\infty$$

が任意の有限な台を持つ Z 上の連続関数 $\psi \in C_{bs}(Z)$ で成り立つことをいう．

前節の RCD 空間は次の意味で pmG 収束に関して点列コンパクトである．

Theorem 4.2 ([6])**.** (X_n, d_n, m_n), $n \in \mathbb{N}$ は $\mathsf{RCD}^*(K_n, N)$ 空間であるとし, $K_n \to K \in \mathbb{R}$ とする. この時ある点付き測度距離空間 $(X_\infty, d_\infty, m_\infty, \bar{x}_\infty)$ が存在して $(X_n, d_n, m_n, \bar{x}_n) \xrightarrow{pmG} (X_\infty, d_\infty, m_\infty, \bar{x}_\infty)$ かつ $(X_\infty, d_\infty, m_\infty)$ は $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ である.

Example 4.3. (M_n, g_n) を N 次元の完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_{g_n} \geq K$ を満たすものだとする. $(M_n, d_n, \underline{\mathrm{vol}}_{g_n}) \xrightarrow{pmG} (Y, d_Y, \nu)$ が成り立つとき, (Y, d_Y, ν) を (K, N)-*Ricci limit* **空間**というが, Theorem 4.2 より, (K, N)-Ricci limit 空間 (Y, d_Y, ν) は $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間になっている.

4.2. **接空間.** 多様体における接空間にあたるものを定義する. (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とすると, 距離関数を拡大した空間 $(X, r^{-1}d, m)$ は $\mathsf{RCD}^*(r^2K, N)$ 空間になる. それに対して測度を定数倍しても曲率の下限も次元の上限もなんら変化しないことが示せる. そこで次の点付き測度距離空間の族を考える. $\{(X, r^{-1}d, \underline{m}, x)\}_{r>0}$. ここで $x \in \operatorname{supp} m$ であり, $\underline{m}$ は適当な正規化である. このようにすると Theorem 4.2 より適当な減少列 $\{r_n\}$ をとることで, 極限空間が存在し, しかもそれは $\mathsf{RCD}^*(0, N)$ 空間になっていることが示せる. そこで点 $x \in \operatorname{supp} m$ における接空間を

$$\mathsf{Tan}(X, x) := \Big\{(Y, d_Y, m_Y, \bar{y})\ ;\ (X, r_n^{-1}d, \underline{m}, x) \xrightarrow{pmG} (Y, d_Y, m_Y, \bar{y}) \text{ for some } r_n \downarrow 0\Big\}$$

によって定める. この集合が空でないことは先に述べたことから明らか. 次の結果が知られている.

Theorem 4.4 ([11])**.** (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とする. k-次元正則集合 $\mathcal{R}_k$ を

$$\mathcal{R}_k := \big\{x \in \operatorname{supp} m\ ;\ \mathsf{Tan}(X, x) = \{\mathbb{R}^k\}\big\}$$

で定める. すなわち, 接空間が一意で k 次元のユークリッド空間に同型になっているような点全体の集合を $\mathcal{R}_k$ で表す. この時

$$m\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{[N]} \mathcal{R}_k\right) = 0$$

が成り立つ.

Example 4.5. 例えば測度距離空間として n 次元完備リーマン多様体 (M, g) を考えれば明らかに $M = \mathcal{R}_n$ が成り立つ. また任意の (K, N)-Ricci limit 空間 (Y, d_Y, ν) はある $1 \leq k \leq N$ が存在して $\nu(Y \setminus \mathcal{R}_k) = 0$ を満たすことが知られている ([2, 3]).

5. 問題

前章の結果から自然に次の問いが浮かんでくる.

Problem 5.1. 与えられた $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間 (X, d, m) に対して $m(X \setminus \mathcal{R}_k) = 0$ なる $1 \leq k \leq N$ が存在するか?

今のところこの問いに対して完全な解答は得られていない. 今回の講演では以下の場合について考える.

(1) $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$,
(2) (X, d, m) が Bishop 型不等式を満たす,
(3) $\mathcal{R}_{[N]} \neq \emptyset$.

各々について結果を述べる.

Theorem 5.2 ([9])**.** (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とする. $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ である.

この帰結として $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ であることと $m(X \setminus \mathcal{R}_1) = 0$ が同値であることがわかる.

Theorem 5.3 ([7])**.** (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間 $(N \in \mathbb{N})$ とする．任意の $\epsilon > 0$, 及び $x \in X$ に対してある $r_{\epsilon,x} > 0$ が存在して

$$\underline{m}(B_s^{d_r}(x)) \leq (1+\epsilon)\underline{V}_{r^2K,N}(s)$$

が任意の $r \in (0, r_{\epsilon,x})$, $s \in (0,1)$ で成り立つとする．このとき $\mathcal{R} = \mathcal{R}_N$ が成り立つ．

$V_{K,N}(s)$ は N 次元で定断面曲率 $K/(N-1)$ を持つ空間形の半径 $s > 0$ の体積を表し, $\underline{V}$ はその正規化バージョンである．この定理は非崩壊 Ricci limit 空間の場合と対応している．

Theorem 5.4 ([8])**.** (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とする．$\mathcal{R}_k \neq \emptyset$ と仮定すると, $m(\cup_{i \geq k}\mathcal{R}_i) > 0$ が成り立つ．特に $N \in \mathbb{N}$ かつ $\mathcal{R}_N \neq \emptyset$ ならば $m(\mathcal{R}_N) > 0$ を満たす．

Remark 5.5. ある k に対して $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$ であることと $m(\mathcal{R}_k) > 0$ であることは一般にかなり異なる．しかし主結果により $k = N$ という場合にはこのようなことが起きるということがわかる．$k = N$ のとき $m(X \setminus \mathcal{R}_N) = 0$ となるかどうかは今の所分かっていない．

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, arXiv:1209.5786 **195** (2014), no. 2, 289–391, DOI 10.1007/s00222-013-0456-1. MR3152751

[2] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406–480. MR1484888 (98k:53044)

[3] T. H. Colding and A. Naber, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1173–1229, DOI 10.4007/annals.2012.176.2.10. MR2950772

[4] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-T. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces*, Invent. Math. **201** (2015), no. 3, 993–1071, DOI 10.1007/s00222-014-0563-7. MR3385639

[5] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015), no. 1113, vi+91, DOI 10.1090/memo/1113. MR3381131

[6] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129, DOI 10.1112/plms/pdv047. MR3477230

[7] Y. Kitabeppu, *A Bishop-type inequality on metric measure spaces with Ricci curvature bounded below*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 7, 3137–3151, DOI 10.1090/proc/13517. MR3637960

[8] Y. Kitabeppu, *A sufficient condition to a regular set of positive measure on RCD spaces*, arXiv:1708.04309.

[9] Y. Kitabeppu and S. Lakzian, *Characterization of low dimensional $RCD^*(K,N)$ spaces*, Anal. Geom. Metr. Spaces **4** (2016), 187–215, DOI 10.1515/agms-2016-0007. MR3550295

[10] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991, DOI 10.4007/annals.2009.169.903. MR2480619 (2010i:53068)

[11] A. Mondino and A. Naber, *Structure theory of metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds I*, arXiv:1405.2222v2.

[12] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131, DOI 10.1007/s11511-006-0002-8. MR2237206 (2007k:53051a)

[13] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177, DOI 10.1007/s11511-006-0003-7. MR2237207 (2007k:53051b)

熊本大学先端科学研究部

E-mail address: `ybeppu@kumamoto-u.ac.jp`