

階段行列

詳解

1 行基本変形による階段行列への変換については、最終結果として得られる階段行列はただ1通りに決まることが知られている。一方、階段行列に変換する途中経過は、ただ1通りではない。したがってこの詳解は1つの場合を与えているだけなので、この通りの途中経過でなければならないということではないことに注意されたい。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}: 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目の } (-4) \text{ 倍を加える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}: 2 \text{ 行目を } -\frac{1}{5} \text{ 倍する}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: 1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目の } (-2) \text{ 倍を加える}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}: 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目の } (-1) \text{ 倍を加える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: 1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目の } (-1) \text{ 倍を加える}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: 1 \text{ 行目を } \frac{1}{2} \text{ 倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}: 2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目の } (-3) \text{ 倍を加える}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: 1 \text{ 行目と } 2 \text{ 行目を入れ替える}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目を} \frac{1}{2} \text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}: \text{2行目に1行目の} (-4) \text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}: \text{2行目を} \frac{1}{2} \text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目に2行目の} (-1) \text{倍を加える}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目を} \frac{1}{2} \text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}: \text{2行目に1行目の} (-3) \text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}: \text{2行目を} (-1) \text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目に2行目の} (-2) \text{倍を加える}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{13}{3} & \frac{23}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{23}{11} \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{21}{11} & \frac{27}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{23}{11} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目を} \frac{1}{3} \text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}: \text{2行目に1行目の} (-2) \text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}: \text{2行目を} -\frac{3}{11} \text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{1行目に2行目の} -\frac{4}{3} \text{倍を加える}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目に1行目の}(-3)\text{倍を加える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目に1行目の}(-5)\text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目を} -\frac{1}{2} \text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の}(-2)\text{倍を加える}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目に2行目の}4\text{倍を加える}$$

ここで、 P_1 の操作と P_2 の操作は順番を入れ替えてもよい。さらに、これらの操作を同時に行うこともできる。それはどちらも同じ行（この場合は第1行）を何倍かして他の行に加える、という操作になっているからである。 P_1 の操作と P_2 の操作を同時に行う行列は、

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。実際に $P_{12} = P_2 P_1 = P_1 P_2$ が成り立つことが（行列の積の計算をすると）確かめられる。同様の理由で、 P_4 と P_5 の操作も同時に行うことができ、その操作を表す行列は

$$P_{45} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。以下ではこのようにまとめられる操作はまとめて行うことにする。

(9)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を} \frac{1}{3} \text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目に1行目の} (-1) \text{倍を加え, 4行目に1行目の} (-2) \text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目に2行目の} (-2) \text{倍を加え, 4行目に2行目の} (-5) \text{倍を加える}$$

(10)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を} \frac{1}{5} \text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目に1行目の} (-4) \text{倍を加え, 3行目に1行目の} (-3) \text{倍を加え,}$$

4行目に1行目の (-2) 倍を加える

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目を} -\frac{5}{8} \text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の} -\frac{2}{5} \text{倍を加え, 3行目に2行目の} -\frac{9}{5} \text{倍を加え, 4}$$

行目に2行目の $-\frac{26}{5}$ 倍を加える

(11)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目と2行目を入れ替える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を}\frac{1}{2}\text{倍する}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の}(-1)\text{倍を加える}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} : \text{3行目を}\frac{1}{3}\text{倍する}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に3行目の}(-1)\text{倍を加える}$$

(12)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{5} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{13} \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{13} \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を}\frac{1}{5}\text{倍する}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目に1行目の}(-2)\text{倍を加え, 3行目に1行目の}(-3)\text{倍を加える}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目を}\frac{5}{13}\text{倍する}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の}\frac{4}{5}\text{倍を加え, 3行目に2行目の}\frac{2}{5}\text{倍を加える}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{20} \end{pmatrix} : \text{3行目を}\frac{20}{13}\text{倍する}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{12}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に3行目の}\frac{12}{13}\text{倍を加え, 2行目に3行目の}\frac{15}{13}\text{倍を加える}$$

(13)

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{1行目と3行目を入れ替える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を}\frac{1}{2}\text{倍する}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目に1行目の}(-4)\text{倍を加える}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目を}\frac{1}{6}\text{倍する}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の}(-2)\text{倍を加え, 3行目に2行目の}(-2)\text{倍を加える}$$

(14)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目と2行目を入れ替える}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目を}\frac{1}{2}\text{倍する}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目に1行目の}(-1)\text{倍を加える}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{2行目を } (-1) \text{ 倍する}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に2行目の1倍を加え, 3行目に2行目の } (-2) \text{ 倍を加え, 4行}$$

目に2行目の (-3) 倍を加える

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{3行目を } \frac{1}{3} \text{ 倍する}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} : \text{1行目に3行目の1倍を加え, 2行目に3行目の1倍を加え, 4行目}$$

に3行目の (-6) 倍を加える

以下では, 変換を与える行列 P_i の役割の説明は省略する

(15)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{22}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}, P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(16)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 9 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 8 \\ 0 & -4 & -20 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -20 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(17)

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & -5 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & -5 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{34}{5} & 5 \\ 0 & -\frac{29}{5} & -\frac{22}{5} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{34}{5} & 5 \\ 0 & -\frac{29}{5} & -\frac{22}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{34}{5} & \frac{61}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{5} & \frac{49}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{305}{306} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{5} & \frac{49}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{305}{306} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{18}{17} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{305}{306} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & 1 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{18} \end{pmatrix}, P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{34} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{305}{306} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(18)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 5 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{37}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{74}{9} \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{74}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{127}{9} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{74}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
P_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{127} \end{pmatrix}, P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{74}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -18 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \\ 0 & -14 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & -14 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
P_5 &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{P_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
P_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{34}{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$