正規直交化法　問題 2　解答

$\boxed{1}$ 以下の部分空間 W に対し，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の正射影 $\boldsymbol{p}$ を求めよ．ここで内積は標準内積とする．

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

[解]:　$\boldsymbol{x}$ の正射影を $\boldsymbol{p}$ とし，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく．ベクトル $\boldsymbol{p}$ は部分空間 W 上にあるので，ある $s, t \in \mathbb{R}$ が取れて $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ と表せる． $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}$ とおけば，ベクトル $\boldsymbol{q}$ は W と直交する． したがって，$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0, \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0. \end{aligned}$$

つまり以下の内積を成分とする行列の方程式を解けば s, t が求められる．

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix}.$$

内積を計算すると，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1,\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 1,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

このことから逆行列によりパラメーター s, t を求めれば，

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

以上より正射影ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

[解]: $\boldsymbol{x}$ の正射影を $\boldsymbol{p}$ とし,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. ベクトル $\boldsymbol{p}$ は部分空間 W 上にあるので, ある $s, t \in \mathbb{R}$ が取れて $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ と表せる. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}$ とおけば, ベクトル $\boldsymbol{q}$ は W と直交する. したがって, $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つ. このとき,

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

つまり以下の内積を成分とする行列の方程式を解けば s, t が求められる.

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix}.$$

内積を計算すると,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 2,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1,\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 2,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 5,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 3.$$

このことから逆行列によりパラメーター s, t を求めれば,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上より正射影ベクトル $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 8/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

(3) $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

[解]: $\boldsymbol{x}$ の正射影を $\boldsymbol{p}$ とし,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく. ベクトル $\boldsymbol{p}$ は部分空間 W 上にあるので, ある $s, t \in \mathbb{R}$ が取れて $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ と表せる. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}$ とおけば, ベクトル $\boldsymbol{q}$ は W と直交する. したがって, $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = 0$ が成り立つ. このとき,

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0,$$

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+t(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=0.$$

つまり以下の内積を成分とする行列の方程式を解けば s,t が求められる.

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\end{pmatrix}.$$

内積を計算すると,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=3,\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-2,\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=2,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=-1,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=1.$$

このことから逆行列によりパラメーター s,t を求めれば,

$$\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

以上より正射影ベクトル $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}.$$

(4) $W=\left\langle\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\right\rangle,\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$

[解]: $\boldsymbol{x}$ の正射影を $\boldsymbol{p}$ とし,

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

とおく. ベクトル $\boldsymbol{p}$ は部分空間 W 上にあるので, ある $s,t\in\mathbb{R}$ が取れて $\boldsymbol{p}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ と表せる. $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}$ とおけば, ベクトル $\boldsymbol{q}$ は W と直交する. したがって, $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})=0$ が成り立つ. このとき,

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+t(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=0,$$
$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+t(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=0.$$

つまり以下の内積を成分とする行列の方程式を解けば s,t が求められる.

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\end{pmatrix}.$$

内積を計算すると,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=9,\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-4,\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=9,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=5,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})=-3.$$

このことから逆行列によりパラメーター s, t を求めれば,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 33 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 59 \\ -47 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

以上より正射影ベクトル $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 59/65 \\ -47/65 \\ 16/13 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 標準内積 n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の r 次元部分空間を V, s 次元部分空間を W とする. W の基底を成す列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ とし, $n \times s$ 行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_s)$ とおく.

(1) ${}^t AA$ は正則行列であることを示せ.

[解]: W の正規直交基底を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ とし, $n \times s$ 行列 U を $U = (\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_s)$ とする. このとき基底の取替行列として或る s 次正則行列 P が取れて, $A = UP$ と表せる. 正規直交性から,

$${}^t AA = {}^t P {}^t UUP = {}^t P I_s P = {}^t PP,$$

すなわち ${}^t AA$ は正則である.

(2) V のベクトルを W へ正射影したベクトルへ写す写像を p_{VW} とする. このとき任意の $\boldsymbol{b} \in V$ に対し

$$p_{VW}(\boldsymbol{b}) = (A \ ({}^t AA)^{-1} \ {}^t A)\boldsymbol{b}$$

が成り立つことを示せ.

(特に p_{VW} は V から W への線形写像となる.)

[解]: 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_s \in \mathbb{R}$ に対し基底の一次結合を

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{s} x_j \boldsymbol{a}_j \in W$$

とする. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ とおき, ベクトル $\boldsymbol{c}$ が W と直交するように x_i を決定すれば, $\boldsymbol{b}$ は部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ のベクトルの和で表せる:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \in W \oplus W^{\perp}.$$

このとき $\boldsymbol{a}$ が求める W への正射影のベクトルとなる. $\boldsymbol{c}$ は各 $\boldsymbol{a}_i$ と直交することから,

$$0 = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}) - \sum_{j=1}^{s} x_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j).$$

すなわち, 各 $i = 1, 2, \ldots, s$ に対し,

$$\sum_{j=1}^{s} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) x_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b})$$

を満たす x_j たちを求めれば良い. 行列による連立方程式に書き直すと,

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_s) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{a}_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix}.$$

ここで ${}^tAA = ({}^t\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j)_{i,j} = \big((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\big)_{i,j}$ なので, 列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_s)$ についての方程式

$${}^tAA\boldsymbol{x} = {}^tA\boldsymbol{b}$$

を得る. (1) より $\boldsymbol{x} = ({}^tAA)^{-1} \, {}^tA\boldsymbol{b}$ と求まる. したがって,

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{s} x_j \boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{x} = A\big({}^tAA\big)^{-1} \, {}^tA\boldsymbol{b}$$

となり, $p_{VW}(\boldsymbol{b}) = A({}^tAA)^{-1} \, {}^tA\boldsymbol{b}$ と表せる.