確率変数と確率分布　演習問題１　解答

ここでは，確率変数，確率分布を以下のように定義する*1.

定義．
- 変数 X であって，その取り得る値 x や区間 $[a,b]$ に対して，それぞれ確率

$$P(X=x), \quad P(a \leq X \leq b)$$

が与えられているものを**確率変数**という．確率変数の取り得る値や区間とその確率を合わせて（より正確には取り得る値や区間ごとに確率を対応させる規則のことを）**確率分布**または単に**分布**という.

- とくに確率変数 X が正の確率で取り得る値が高々可算（取りうる値が有限 $\{x_k\}_{k=1}^{N}$，もしくは可算無限 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ の形で表される）のとき，X を**離散型確率変数**といい，その分布を**離散型確率分布**という.

X が離散型確率変数で正の確率で取り得る値を $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ と表すとき，その確率分布は

$$\begin{gathered} P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots,N) \\ \left(p_k>0, \quad \sum_{k=1}^{N} p_k=1\right) \end{gathered} \tag{1.1}$$

と表される（粗っぽく言えば，数直線上で全部足して 1 となる確率がどのように散らばっているか・分布しているかを表している）．また，(1.1) の確率分布に対して，確率変数 Y も同じ確率分布となる，すなわち Y も正の確率で取り得る値が $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ で

$$\begin{gathered} P(Y=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots,N) \\ \left(p_k>0, \quad \sum_{k=1}^{N} p_k=1\right) \end{gathered}$$

をみたすとき，Y は確率分布 (1.1) にしたがう，または X と Y は同分布であるという．取り得る値が可算無限の場合も同様に定義される.

問題 1. 離散型確率変数 X の確率分布が

$$P(X=k)=\frac{1}{n} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

であるとき，この分布を**離散型一様分布**という.

- サイコロを投げたときの出た目を X（$n=6$）
- $1 \sim n$ までの番号を付けられた n 人から 1 人を選ぶとき，選ばれた人の番号を X

などとするときに X の分布として仮定されるものである．離散型一様分布が (1.1) を満たしていることを確認せよ.

---

*1 少し厳密に言えば確率空間上で定められた可測関数のことを確率変数といい，$\mathbb{R}$ などの標準的な空間上の確率測度を確率分布という．とくに確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実数値確率変数 X に対して，$X_*P=P\circ X^{-1}$ で定まる $\mathbb{R}$ 上の確率分布を X の確率分布という.

解答. n 以下の自然数 k に対して

$$P(X=k)=\frac{1}{n}>0$$

であり，確かに

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{n}=1$$

となる． ■

問題 2. $0<p<1$ とする．離散型確率変数 X の確率分布が

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,2,\cdots,n)$$

であるとき，この分布を**二項分布**という．ある試行の結果，起こる 1 つの事象を A とおき，A の起こる確率を p とする．この試行を独立に n 回繰り返したとき，n 回のうち A の起こった回数を X とすると，その確率分布として現れるものである．二項分布が (1.1) を満たしていることを確認せよ．

解答. n 以下の正整数 k に対して，

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}>0$$

であり，

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}=\{(1-p)+p\}^n=1.$$

ここで，直前の式の 1 番目の等号は二項定理を用いた． ■

問題 3. $\lambda>0$ とする．離散型確率変数 X の確率分布が

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

であるとき，この分布を母数 λ の**ポアソン分布**という．稀に起こる事象 A がある期間内に平均 λ 回起こるとされるとき，その期間内に A が起こる回数 X の分布として仮定されるものである．ポアソン分布が (1.1) を満たしていることを確認せよ．

解答. 正整数 k に対して

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}>0$$

である．また，指数関数のマクローリン展開

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

を思い出せば，

$$\sum_{k=0}^{N}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k}{k!}\to e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1\quad(N\to\infty),$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

を得る. ■