**実数と論理 (理学共通科目)** 平成２２年１０月６日

## 第１章　論理（その１）

### 1.1　命題

**問題**　次の命題 (a)~(h) が正しいか否かを判定せよ.

(a) $\sqrt{15}$ は 4 より大きい.

(b) 実数 $x$ が負であるかまたは 1 より大きいならば, $x^2 - x$ は正である.

(c) 行列式の値が 0 ではなくかつある列の成分が全て 0 である正方行列が存在する.

(d) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

(e) 数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束するならば, $a$ で連続な関数 $f(x)$ は $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ を満たす.

(f) 正方行列 $A$ の行列式の値が 0 であることと, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解が $\mathbf{0}$ に限ることは同値である.

(g) 任意の実数 $r$ に対して, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ が成り立つ.

(h) $n$ を 2 以上の整数とするとき, 対角化ができない $n$ 次正方行列が存在する.

**命題の結合**　幾つかの命題が与えられたとき, それらを組み合わせて別の命題を作ることができる. $P$, $Q$ を命題とするとき, 頻繁に用いられる組み合わせ方として,

「$P$ または $Q$」($P \vee Q$)　　「$P$ かつ $Q$」($P \wedge Q$)　　「$P$ の否定 ($P$ ではない)」($\neg P$)
「$P$ ならば $Q$」($P \Longrightarrow Q$)　　「$P$ と $Q$ は同値 ($P$ ならば $Q$, かつ $Q$ ならば $P$)」($P \Longleftrightarrow Q$)

がある. $P \Longrightarrow Q$ が真な命題であるとき, $Q$ を $P$ が真であるための **必要条件** といい, $P$ を $Q$ が真であるための **十分条件** という. $P \Longleftrightarrow Q$ のとき, $P$, $Q$ の一方を他方の **必要十分条件** という. また, $Q \Longrightarrow P$ を命題 $P \Longrightarrow Q$ の **逆** という.

**全称記号 ∀・存在記号 ∃**
ある記号 (ここでは例えば $x$ とする) の直前に **全称記号** $\forall$ があるときには, 「任意の $x$」を意味する, 但し大抵の場合 $x$ には「実数である」または「ある空間の元である」などの制限が予め与えられていて, その制限の下で「任意の $x$」を想起するのである. 例えば, 全称記号 $\forall$ は次のように用いられる.

(1) 「任意の実数 $a$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$ が成り立つ」は「$\forall a \in \boldsymbol{R}$ $(\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0)$」などと表される.

(2) 「$\boldsymbol{R}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqq 0$ が成り立つ」は「$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqq 0)$」などと表される.

また, ある記号 $x$ の直前に **存在記号** $\exists$ があるときには, 「ある (特定の) $x$」を意味する. 例えば, 存在記号 $\exists$ は次のように用いられる.

(i) 「関数 $f$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとき, $[a, b]$ のある点で $f$ は最大値をとる」の後半部は「$\exists x \in [a, b]$ ($f$ は $x$ で最大値をとる)」などと表される.

(ii) 上の命題 (h) は「$\exists A \in M_n(\boldsymbol{R})$ ($A$ は対角化ができない)」などと表される (但し $M_n(\boldsymbol{R})$ は実数を成分とする $n$ 次正方行列の集合である).

上の (1) の否定は「$\exists a \in \boldsymbol{R}$ $(\lim_{n\to\infty} a^n/n! \neq 0)$」であり, また上の (i) の否定は「$\forall x \in [a, b]$ ($f$ は $x$ で最大値をとらない)」である (一般に, $\neg(\forall x(P(x))) = \exists x(\neg P(x))$, $\neg(\exists x(P(x))) = \forall x(\neg P(x))$ が成り立つ).

**実数と論理 (理学共通科目)** 平成２２年１０月６日

## 第１章　論理（その２）

### 1.2　命題の変形

与えられた命題を変形することによって, 得たい結論にたどりつくことが容易になったり, 注目に値する新しい命題に到達する可能性が得られたりすることがある. しばしば用いられる変形として, 次のものがある.

**分配法則**　$P \vee (Q \wedge R) \;=\; (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \qquad P \wedge (Q \vee R) \;=\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
**二重否定**　$P \;=\; \neg\neg P$
**ド＝モルガンの法則**　$\neg(P \vee Q) \;=\; (\neg P) \wedge (\neg Q) \qquad \neg(P \wedge Q) \;=\; (\neg P) \vee (\neg Q)$
**対偶**　$(P \Longrightarrow Q) \;=\; ((\neg Q) \Longrightarrow (\neg P))$

**例１**　「関数 $f(x)$ が 開区間 $(a,b)$ で連続でありかつ $x=a$ または $x=b$ で連続ではない とする． このとき . . .」という文の下線部は、「$(a,b)$ で連続でありかつ $x=a$ で連続ではないかまたは $(a,b)$ で連続でありかつ $x=b$ で連続ではない」と書き換えることができる (分配法則).

**例２**　「$\boldsymbol{R}^2$ の点 $a$ は $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$ に含まれるかまたは二つの部分集合 $B$ と $C$ の共通部分に含まれるとする」を,「点 $a$ は $A$ または $B$ に含まれかつ $A$ または $C$ に含まれる」と書き換えることができる (分配法則).

**例３**　「$x=a$ が関数 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ の零点であるならば, $a>0$ である」を示すために, 下線部を「$a \leqq 0$ ではない」と書き換えてから示してみよう (二重否定).

**例４**　$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $V$ が部分空間であるとは,「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V \Longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$」かつ「$\boldsymbol{x} \in V, \alpha \in \boldsymbol{R} \Longrightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in V$」が真であるときにいう．従って, $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $V$ が部分空間ではないことを示すためには, $V$ が上の二つの条件のいずれかを満たさないことを示せばよい (ド＝モルガンの法則).

**例５**　「$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $D$ が縦線集合であるかまたは横線集合である ならば, $D$ 上の積分は累次積分で計算される」の下線部の否定は「$D$ は縦線集合でも横線集合でもない」と表わされる (ド＝モルガンの法則).

**例６**　$A$, $B$ は型が等しい正方行列で, $AB=O$ を満たすとする． $A$ が正則ならば, $B=O$ である．従って, $B \neq O$ ならば, $A$ は正則ではない (対偶).

### 1.3　演繹[1]

ある命題が真であることを証明[2]するために, 既に真であるとわかっている幾つかの命題を組み合わせたり変形したりする．そして

**三段論法**　$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

や **矛盾** ($P \wedge (\neg P)$ は正しくない命題) をよく用いる.

**例１**　[原岡] P43, 定理 3.1

**例２**　[井上] P17, 命題 1.9

[1] 演繹 (deduction): 前提された命題から, 経験にたよらず, 論理の規則に従って必然的な結論を導き出す思考の手続き
[2] 証明 (proof): ある命題を根本原理から導きだすこと

# 実数と論理 (理学共通科目)　第１章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a) 命題「$\forall a \in \boldsymbol{R}\ (\lim_{x\to\infty} x^a e^x = \infty)$」を通常の文章で記述せよ.

(b) (a) に現れた命題の否定を記述せよ.

(c) $A$ を $2\times 3$ 型行列とするとき, 命題「$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}\ (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$」を通常の文章で記述せよ.

(d) (c) に現れた命題の否定を記述せよ.

(e) 次の文章の (　　) の中に, 「必要」または「十分」の語を入れよ.

- $x^4 > 1$ は $x > 1$ であるための (　　　　) 条件である.
- $-1 < x < 3$ は $x < 4$ であるための (　　　　) 条件である.

(f) 命題「実数 $a$ は 1 以下である」の二重否定を記述せよ.

(g) 命題「$A$ が対称行列であるならば, $A$ の固有値は全て実数である」の対偶を記述せよ.

# 第２章　集合（その１）

## 2.1　集合の定義

集合の定義には, 外延的な定義と内包的な定義がある. **外延的な定義** とは, 与えられた集合の元を全て列挙するものである. 例えば, [井上] P62 の一つ目の集合や P67 問 4.1.5 に与えられた集合は外延的に定義されている. **内包的な定義** とは, あるものが与えられた集合の元であるための必要十分条件を明示するものである. 例えば, [原岡] P163 の縦線集合や P165 の横線集合, また [井上] P62 の二つ目の集合は内包的に定義されている. いずれもよく用いられる集合の定義の方法である. また数学の世界では,

$\boldsymbol{N}$　で全ての自然数 (正の整数) からなる集合を表し,
$\boldsymbol{Z}$　で全ての整数からなる集合を表し,
$\boldsymbol{Q}$　で全ての有理数からなる集合を表し,
$\boldsymbol{R}$　で全ての実数からなる集合を表し,
$\boldsymbol{C}$　で全ての複素数からなる集合を表す

ことになっている.

二つの集合 $A$, $B$ に対し, 「$x \in A \Longrightarrow x \in B$」が正しいとき, $A$ は $B$ の **部分集合** であるといい, このことを $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す. また $A \subset B$ が成り立つことを「$A$ は $B$ に含まれる」, 「$B$ は $A$ を含む」とも言い表す. $A \subset B$ は正しいが $B \subset A$ は正しくないとき, $A$ は $B$ の **真部分集合** であるといい, このことを $A \subsetneqq B$ で表す. $A \subset B$ も $B \subset A$ も正しいとき, $A$ と $B$ は **等しい** といい, このことを $A = B$ で表す.

## 2.2　集合の演算

二つの集合 $A$, $B$ の **共通部分** $A \cap B$ とは, $A$, $B$ の両方に含まれるものの全体である.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ かつ } x \in B$$

同様に, $n$ 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の共通部分 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ (または $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$) とは, どの $A_k$ にも含まれるものの全体である.

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \iff \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, x \in A_k$$

$A$ と $B$ の **和集合** $A \cup B$ とは, $A$ または $B$ のいずれかに含まれるものの全体である.

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ または } x \in B$$

同様に, $n$ 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の和集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (または $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$) とは, ある $A_k$ に含まれるものの全体である.

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \iff \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}, x \in A_k$$

二つの集合 $A$, $B$ の **差集合** $A \setminus B$ (または $A - B$) を $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ ($A$ の元で $B$ に含まれないものの全体) により定義する. **空集合** $\phi$ とは要素を持たない集合である.

## 第２章　集合（その２）

### 2.2　集合の演算（続き）

$A$, $B$, $C$ を集合とする．このとき, 次が成り立つ．

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{(可換則)}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad \text{(結合則)}$$

また, 次が成り立つ．

$$A \supset B \iff A \cup B = A \iff A \cap B = B$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad \text{(分配則)}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \qquad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{(ド＝モルガンの法則)}$$

「$A \supset B \iff A \cup B = A$」を示すためには, 「$A \supset B \implies A \cup B = A$」かつ「$A \cup B = A \implies A \supset B$」を示さなければならない．

<u>「$A \supset B \implies A \cup B = A$」の証明</u>　$B \subset A$ を仮定して, $A \cup B \supset A$ かつ $A \cup B \subset A$ を示したい．まず $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$ であるので, $A \cup B \supset A$ を得る．また $x \in A \cup B$ ならば $x \in A$ または $x \in B$ であるが, $x \in B$ のとき仮定から $x \in A$ がわかる．よって $A \cup B \subset A$ を得る．

<u>「$A \cup B = A \implies A \supset B$」の証明</u>　$A \cup B = A$ を仮定する．$x \in B$ ならば $x \in A \cup B$ であるので, 仮定 $A \cup B = A$ を用いて $x \in A$ を得る．よって $B \subset A$ を得る．

「$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$」を示すためには, 「$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$」かつ「$(A \cup B) \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C)$」を示さなければならない．

<u>「$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$」の証明</u>　$x \in (A \cup B) \cap C$ ならば, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$ である．$x \in A$ ならば $x \in A \cap C$ であり, $x \in B$ ならば $x \in B \cap C$ である．よって $x$ は $A \cap C$ または $B \cap C$ に含まれる．

<u>「$(A \cup B) \cap C \supset (A \cap C) \cup (B \cap C)$」の証明</u>　$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ならば, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$ である．$x \in A \cap C$ ならば, $x \in (A \cup B) \cap C$ である．同様に, $x \in B \cap C$ ならば, $x \in (A \cup B) \cap C$ である．

### 2.3　集合の直積

二つの集合 $A$, $B$ の <u>**直積**</u> $A \times B$ とは, $A$ から元 $x$ をとり, $B$ から元 $y$ をとって組にした

$$(x, y) \quad (x \in A,\ y \in B)$$

という形のものの全体である．$A$ と $B$ の直積 $A \times B$ の元 $(x, y)$ において, $x$ を <u>**第 1 成分**</u> といい, $y$ を <u>**第 2 成分**</u> という．$A \times B$ の各元 $(x, y)$ に対して, その第 1 成分または第 2 成分を対応させる写像を <u>**射影**</u> という. 集合 $A$ と同じ集合 $A$ の直積 $A \times A$ は $A^2$ とも書かれる．

三つ以上の集合の直積も同様に考えることができる．

## 実数と論理 (理学共通科目) 第２章演習問題

**学生番号:** ____________________ **氏名:** ____________________

(a) $A \supset B \iff A \cap B = B$ を示せ.

(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ を示せ.

(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ を示せ.

**実数と論理 (理学共通科目)** 平成２２年１０月２０日

## 第３章　写像（その１）

### 3.1　写像の基本事項

$A$, $B$ を集合とする．$A$ の各元に対し $B$ の元を一つ対応させるものを $A$ から $B$ への **写像** という．$A$ から $B$ への写像に対し, $A$ をこの写像の **定義域** といい, $B$ を **値域** という．$A$ から $B$ への写像に対し, それを表す一つの記号を用いることがよくある．例えばそれを $f$ とする．$f$ の定義域 $A$ や値域 $B$ を明記したいときには, $f$ を $f : A \longrightarrow B$ と記す．

$f$ によって $A$ の元 $x$ に対応する $B$ の元を $f(x)$ と記す．$f(x)$ を $x$ の $f$ による **像** という．また $A$ の部分集合 $A'$ に対し, $A'$ の全ての元の $f$ による像の集合を $A'$ の $f$ による **像** といい, $f(A')$ で表す: $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$. $f(A')$ は $B$ の部分集合である．$B$ の部分集合 $B'$ に対し, 像が $B'$ に属する $A$ の全ての元の集合を $B'$ の $f$ による **原像** または **逆像** といい, $f^{-1}(B')$ で表す: $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$. $f^{-1}(B')$ は $A$ の部分集合である．

**例**　**関数** とは通常 $\boldsymbol{R}$ を値域とする写像である．値域が $\boldsymbol{C}$ である場合には, **複素関数** または **複素数値関数** という．関数の値域が $\boldsymbol{R}$ である場合, そのことを強調したいときには, その関数を **実数値関数** ということもある．

**例**　値域が $\boldsymbol{R}^m$ または $\boldsymbol{C}^n$ である写像を **$\boldsymbol{R}^m$-値関数** または **$\boldsymbol{C}^n$-値関数** ということもある．

**例**　**線形写像** $X$ とは, 定義域 $V$ も値域 $W$ もともに $K = \boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間であり, 任意の $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V$ および任意の $c_1$, $c_2 \in K$ に対し $X(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1X(\boldsymbol{v}_1) + c_2X(\boldsymbol{v}_2)$ を満たすもののことである．

**例**　1 変数 $x$ の関数 $f$ を $f(x) = \sin x$ で定める．$f$ は $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像である．次が成り立つ．

- 区間 $[0, \pi]$ の $f$ による像は区間 $[0, 1]$ である: $f([0, \pi]) = [0, 1]$.
- 区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ の $f$ による像は区間 $[-1, 1]$ である: $f([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
- 1 点 0 からなる集合 $\{0\}$ の $f$ による逆像は $\{n\pi \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ である．
- 区間 $[0, 1]$ の $f$ による逆像は, 各整数 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $[2n\pi, (2n + 1)\pi]$ という区間を考えそして $n$ を動かして得られる和集合である:
$$f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n\pi, (2n + 1)\pi].$$
- 区間 $[-1, 1]$ の逆像は $\boldsymbol{R}$ 全体である: $f^{-1}([-1, 1]) = \boldsymbol{R}$.

**写像と集合の演算の関係**　$A$ から $B$ への写像 $f : A \longrightarrow B$, $A$ の部分集合 $A'$, $A'' \subset A$, および $B$ の部分集合 $B'$, $B'' \subset B$ に対し次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&A' \supset A'' \text{ ならば } f(A') \supset f(A''); \qquad B' \supset B'' \text{ ならば } f^{-1}(B') \supset f^{-1}(B'') \\
&B', B'' \subset f(A) \text{ かつ } B' \neq B'' \text{ ならば } f^{-1}(B') \neq f^{-1}(B'') \\
&f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A''); \qquad f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'') \\
&f(A' \cap A'') \subset f(A') \cap f(A''); \qquad f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'') \\
&f(A' \setminus A'') \supset f(A') \setminus f(A''); \qquad f^{-1}(B' \setminus B'') = f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'') \\
&f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A); \qquad f^{-1}(f(A')) \supset A'
\end{aligned}
$$

## 第３章　写像（その２）

### 3.1　写像の基本事項（続き）

前ページに挙げた基本事項の幾つかは次のように証明される．

「$A' \supset A''$ ならば $f(A') \supset f(A'')$」の証明　$y \in f(A'')$ に対し, $y = f(x)$ を満たす $x \in A''$ が存在する．$A' \supset A''$ ならば, $x \in A'$ でありよって $y = f(x) \in f(A')$ を得る．

「$f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$」の証明　$y \in f(A' \cup A'')$ に対し，ある $x \in A' \cup A''$ が存在して $y = f(x)$ が成り立つ．$x$ は $x \in A'$ または $x \in A''$ のいずれかを満たす．$x \in A'$ ならば, $y = f(x) \in f(A')$ であり, $x \in A''$ ならば, $y = f(x) \in f(A'')$ である．よって $y \in f(A') \cup f(A'')$ が成り立つ．また $y \in f(A') \cup f(A'')$ に対し, $y \in f(A')$ または $y \in f(A'')$ が成り立つ．$f(A') \subset f(A' \cup A'')$, $f(A'') \subset f(A' \cup A'')$ が成り立つので, $y \in f(A' \cup A'')$ を得る．

「$f^{-1}(B' \setminus B'') = f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'')$」の証明　$x \in f^{-1}(B' \setminus B'')$ に対し，$f(x) \in B' \setminus B''$ が成り立つ．よって $f(x) \in B'$ かつ $f(x) \notin B''$ が成り立つ．よって $x \in f^{-1}(B')$ かつ $x \notin f^{-1}(B'')$ が成り立ち，従って $x \in f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'')$ が成り立つ．また $x \in f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'')$ に対し，$x \in f^{-1}(B')$ かつ $x \notin f^{-1}(B'')$ が成り立つ．よって $f(x) \in B'$ かつ $f(x) \notin B''$ が成り立つ．よって $f(x) \in B' \setminus B''$ が成り立ち，従って $x \in f^{-1}(B' \setminus B'')$ が成り立つ．

### 3.2　いろいろな写像

以下に, 写像に関する幾つかの用語を挙げる．$A$, $B$, $C$ は集合である．

$A$ から $A$ への写像で, $x \in A$ に対し $x$ 自身を対応させるものを $A$ の **恒等写像** という．

$f$ を $A$ から $B$ への写像とする．$f(A) = B$ であるとき，写像 $f : A \longrightarrow B$ は **全射** であるまたは $B$ の **上への写像** であるという．また $A$ の異なる二つの元 $x$, $x'$ に対し $f(x) \neq f(x')$ が成り立つとき，写像 $f : A \longrightarrow B$ は **単射** であるまたは **一対一の写像** であるという．

**例**　$A = \boldsymbol{R}$ から $B = \boldsymbol{R}$ への写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sin x$ で定める．このとき $f(A) = [-1, 1] \neq B$ なので, $f$ は全射ではない．また $f(0) = f(\pi) = 0$ なので, $f$ は単射ではない．

**例**　$A = \boldsymbol{R}$ から $B = [-1, 1]$ への写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ で定める．このとき $f(A) = B$ なので, $f$ は全射である．

**例**　$A = [-\pi/2, \pi/2]$ から $B = \boldsymbol{R}$ への写像 $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sin x$ で定める．このとき $A$ の異なる二つの元 $x$, $x' \in [-\pi/2, \pi/2]$ に対し $f(x) \neq f(x')$ が成り立つので, $f$ は単射である．

$A$ から $B$ への写像 $f$ が全射でありかつ単射であるとき, $f$ は **全単射** であるという．$f : A \longrightarrow B$ が全単射であるとする．このとき $B$ の各元 $y$ に対して, $f$ が全射であることから, $A$ の元 $x$ が存在して $f(x) = y$ が成り立つ．そして $f$ が単射であることから, このような $A$ の元 $x$ は唯一つであることがわかる．こうして $B$ の各元 $y$ に対して $A$ の元 $x$ を対応させる写像を得る．これを普通 $f^{-1}$ で表し, $f$ の **逆写像** という．

$f : A \longrightarrow B$ を $A$ から $B$ への写像とし, $g : B \longrightarrow C$ を $B$ から $C$ への写像とする．このとき $A$ の各元 $x$ に対して $C$ の元 $g(f(x))$ を対応させる写像を $g \circ f$ で表し, $f$ と $g$ の **合成** または **合成写像** という．

$f : A \longrightarrow B$ を $A$ から $B$ への写像とし, $S$ を $A$ の部分集合とする．このとき $S$ の各元 $x$ に対して $B$ の元 $f(x)$ を対応させる写像を $f|_S$ で表し, $f$ の $S$ 上への **制限** という．

## 実数と論理 (理学共通科目) 第３章演習問題 (その１)

**学生番号:** ____________________ **氏名:** ____________________

(a) $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$ を示せ.

(b) $f(A' \cap A'') \subset f(A') \cap f(A'')$ を示せ. また $f(A' \cap A'') = f(A') \cap f(A'')$ が成り立たない例を挙げよ.

(c) $f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$ を示せ.

# 実数と論理 (理学共通科目) 第３章演習問題 (その２)

**学生番号:** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ **氏名:** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(d) $A$ を $m \times n$ 型行列とする.

(d1) $f_A : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ を $A$ が定める線形写像とする: $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. $f_A$ の核 $\mathrm{ker} f_A$ が零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなるとき, $f_A$ は単射であることを示せ.

(d2) $m = n$ としさらに $A$ が正則であるとき, $f_A$ は全単射であることを示せ.

(e) 次に与えられた写像が単射かどうか, および全射かどうかを判定せよ.

(e1) $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad f(x) = e^x$

(e2) $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad f(x) = \tan x$

(e3) $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad f(x) = ax^2 + 2x + 1 \ (a \in \boldsymbol{R})$

## 第４章　関係（その１）

### 4.1　関係の性質

$A$ を集合とする．$A \times A$ の部分集合 $R$ を ($A$ の元の間の、または $A$ における) **関係** という．$x$, $y \in A$ が $(x, y) \in R$ を満たすとき, $x$ と $y$ は **$R$ という関係にある** といい, このことを $xRy$ で表す．$A$ における関係 $R$ に対し,

- 任意の $x \in A$ が $xRx$ を満たすとき, $R$ は **反射的である** といい,
- $xRy$ を満たす $x$, $y \in A$ は必ず $yRx$ を満たすとき, $R$ は **対称的である** といい,
- $xRy$, $yRx$ の両方を満たす $x$, $y \in A$ は存在しないとき, $R$ は **非対称的である** といい,
- $xRy$, $yRz$ を満たす $x$, $y$, $z \in A$ に対し必ず $xRz$ が成り立つとき, $R$ は **推移的である** という．

**例**　実数の集合 $\boldsymbol{R}$ における関係 $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ を

$$xR_1y \iff x = y, \qquad xR_2y \iff x > y, \qquad xR_3y \iff x \geqq y, \qquad xR_4y \iff xy = 1$$

により定める．このとき,

- $R_1$, $R_3$ は反射的であり,
- $R_1$, $R_4$ は対称的であり,
- $R_2$ は非対称的であり,
- $R_1$, $R_2$, $R_3$ は推移的である．

**例**　$\boldsymbol{R}^2$ における関係 $R$ を

$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff 「x_1 > y_1 \text{ または}「x_1 = y_1 \text{ かつ } x_2 \geqq y_2」」$$

により定める．このとき $R$ は反射的でありかつ推移的である．

### 4.2　同値関係

集合 $A$ における関係 $R$ が反射的, 対称的かつ推移的であるとき, $R$ を **同値関係** という．$R$ が同値関係であるとき, $xRy$ は通常 $x \sim y$ と書かれる．従って,

- 任意の $x \in A$ に対し, $x \sim x$ が成り立ち,
- $x \sim y$ を満たす $x$, $y \in A$ は必ず $y \sim x$ を満たし,
- $x \sim y$, $y \sim z$ を満たす $x$, $y$, $z \in A$ に対し必ず $x \sim z$ が成り立つ．

**定理**　$\sim$ を集合 $A$ における同値関係とし, 各 $x \in A$ に対して, $C(x) := \{y \in A \mid x \sim y\}$ とおく．このとき, $x_1$, $x_2 \in A$ に対して, $C(x_1) = C(x_2)$ または $C(x_1) \cap C(x_2) = \emptyset$ が成り立つ．

## 第４章　関係（その２）

### 4.2　同値関係（続き）

証明　$C(x_1) \cap C(x_2) = \emptyset$ ではないと仮定すると, 次の (i)$\sim$ (iv) によって $C(x_1) = C(x_2)$ を証明できる.

(i) $C(x_1) \cap C(x_2) = \emptyset$ ではないと仮定する．このときある $a \in A$ が $C(x_1) \cap C(x_2)$ に含まれる.

(ii) $b \in C(x_1)$ を一つとる．このとき $x_1 \sim b$ が成り立つ．また $a \in C(x_1)$ であるので, $x_1 \sim a$ が成り立つが, $\sim$ は対称的なので, $a \sim x_1$ が成り立つ．$\sim$ は推移的なので, $a \sim b$ が成り立つ.

(iii) $a \in C(x_2)$ であるので, $x_2 \sim a$ が成り立つ．$\sim$ は推移的なので, $x_2 \sim b$ が成り立つ．これは $b \in C(x_2)$ を意味し, 従って $C(x_1) \subset C(x_2)$ を得る.

(iv) 同様に $C(x_2) \subset C(x_1)$ を得ることができ, よって $C(x_1) = C(x_2)$ を得る.

よって $x_1, x_2 \in A$ に対して, $C(x_1) = C(x_2)$ または $C(x_1) \cap C(x_2) = \emptyset$ が成り立つ. $\square$

　上の定理における $A$ の部分集合 $C(x)$ を同値関係 $\sim$ に関する **同値類** という．また全ての同値類からなる集合を $A$ の $\sim$ に関する **商集合** といい, $A/\sim$ で表す．$\sim$ に関する同値類の元を一つ選んだとき, これをその同値類の **代表元** という．また各同値類から代表元を一つずつ選び, それらを集めて作った $A$ の部分集合を $\sim$ に関する **代表系** という.

**例**　$p$ を整数とする．整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ における関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \exists n \in \boldsymbol{Z}\ (x - y = np)$$

によって定める．このとき $\sim$ は同値関係である:

**反射的であること**　任意の $x \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $\boldsymbol{Z}$ の元 $n = 0$ は $x - x = np = 0$ を満たすので, $x \sim x$ が成り立つ;

**対称的であること**　$x \sim y$ を満たす $x, y \in \boldsymbol{Z}$ に対し $x - y = np$ を満たす $n \in \boldsymbol{Z}$ が存在するので, $n' := -n$ に対し $y - x = n'p$ が成り立ち, 従って $y \sim x$ が成り立つ;

**推移的であること**　$x \sim y$ および $y \sim z$ を満たす $x, y, z \in \boldsymbol{Z}$ に対し $x - y = lp$ および $y - z = mp$ を満たす $l, m \in \boldsymbol{Z}$ が存在するので, $n := l + m \in \boldsymbol{Z}$ に対し $x - z = (x - y) + (y - z) = lp + mp = np$ が成り立ち, 従って $x \sim z$ が成り立つ.

**例**　$A := \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})$ における関係 $\sim$ を

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$

によって定める．このとき $\sim$ は同値関係である:

**反射的であること**　任意の $(m, n) \in A$ に対し, $m/n = m/n$ が成り立つので, $(m, n) \sim (m, n)$ が成り立つ;

**対称的であること**　$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ を満たす $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in A$ に対し $m_2/n_2 = m_1/n_1$ が成り立つので, $(m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)$ が成り立つ;

**推移的であること**　$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ および $(m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)$ を満たす $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in A$ に対し $m_1/n_1 = m_2/n_2 = m_3/n_3$ が成り立ち, 従って $(m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$ が成り立つ.

我々は, $A$ の $\sim$ に関する商集合 $A/\sim$ を, 全ての有理数からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ と同一視している.

## 実数と論理 (理学共通科目)　第４章演習問題

**学生番号:** ______________________ 　**氏名:** ______________________

(a) $V$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする. $\boldsymbol{R}^n$ における関係 $\sim$ を

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in V$$

により定める. $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ における関係 $\sim$ を

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \exists r \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},\ \boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x}$$

により定める. $\sim$ が同値関係であることを示せ.

**実数と論理 (理学共通科目)** 平成２２年１１月１０日

## 第５章　連続性（その１）

### 5.1　実数の連続性

第５章では「連続」という概念についての基本事項を扱う．連続であるものを数学の議論の中できちんと扱うために, まず実数の集合 $\boldsymbol{R}$ について考察する．実数には **有理数** と **無理数** という 2 種類の数がある．有理数は二つの整数 $m, n \in \boldsymbol{Z}$ (但し $n \neq 0$) を用いて $m/n$ と表されるものであり, 無理数は有理数ではない実数である．無理数の例は昔から様々なものが知られているが, 全ての無理数を知ることは容易ではない．しかし実数の集合 $\boldsymbol{R}$ が連続であると認識するためには, 無理数の存在を無視することはあり得ない.

$A$ を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする．$A$ が **上に (下に) 有界** であるとは, ある実数 $r \in \boldsymbol{R}$ が存在して任意の $a \in A$ に対し $a \leqq r$ $(a \geqq r)$ が成り立つときにいう．$A$ が上にも下にも有界であるとき, $A$ は **有界** であるという．$A$ が上に (下に) 有界であるとき, $r$ のような実数を $A$ の **上界 (下界)** という．$A$ の全ての上界 (下界) からなる集合を $U(A)$ $(L(A))$ で表す．$U(A)$ の最小値は存在するだろうか？$L(A)$ の最大値は存在するだろうか？これらの問いの答えは, 証明されるものではなく, 次の連続性公理を認めるというものである.

**実数の連続性公理**　$A \subset \boldsymbol{R}$ が上に (下に) 有界ならば, $U(A)$ $(L(A))$ の最小値 (最大値) が存在する.

$U(A)$ の最小値を $A$ の **上限** といい, $\sup A$ で表す．$L(A)$ の最大値を $A$ の **下限** といい, $\inf A$ で表す.

**注意**　$A$ を無理数 $\sqrt{2}$ より小さい全ての有理数からなる集合とする．$A$ は上に有界であり, $\sqrt{2} \in U(A)$ である．$\sqrt{2}$ は $A$ の上限 $\sup A$ である: $r < \sqrt{2}$ を満たす $r \in U(A)$ が存在すると仮定するとき, $1/10^n < \sqrt{2} - r$ を満たす自然数 $n \in \boldsymbol{N}$ が必ず存在するので, $\sqrt{2}$ の小数第 $n+1$ 位以下を全て 0 とおいた有理数を $q$ とすると,

$$r < \sqrt{2} - \frac{1}{10^n} < q < \sqrt{2}$$

が成り立ち, これは $r \in U(A)$ に反する．従って, $A$ の上限 $\sup A$ は $\sqrt{2}$ であり, 有理数ではない．これは, 有理数だけでは連続性公理は成り立たないことを意味する．しかしながら, 有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ は次のような著しい性質を有する: 任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ および任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $|a - q| < \varepsilon$ を満たす有理数 $q \in \boldsymbol{Q}$ が存在する．このことを「$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の中で **稠密** (ちゅうみつ) である」と言い表す.

### 5.2　数列の極限

$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $a$ による $\boldsymbol{N}$ の像を **数列** という．$n \in \boldsymbol{N}$ の像 $a(n)$ を通常 $a_n$ で表し, 数列を $\{a_n\}$ で表す．実数 $\alpha \in \boldsymbol{R}$ が $\{a_n\}$ の **極限** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して,

$$n \in \boldsymbol{N},\ n > n_0 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう．数列 $\{a_n\}$ が極限 $\alpha$ を有するとき, $\{a_n\}$ は $\alpha$ に **収束** するといい, このことを

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow \alpha\ (n \longrightarrow \infty)$$

と表す．収束しない数列は **発散** するという．特に, 数列 $\{a_n\}$ が **$\infty$ に発散** するとは, 任意の正数 $R > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n > R$ が成り立つときにいい, このことを $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ または $a_n \longrightarrow \infty$ $(n \longrightarrow \infty)$ と表す.

**例**　$a_n := 1/n$ に対し, $\alpha := 0$ は数列 $\{a_n\}$ の極限である．任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $1/\varepsilon$ より大きい自然数 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ をとると, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - \alpha| = 1/n < 1/n_0 < \varepsilon$ が成り立つ.

## 第５章 連続性（その２）

### 5.2 数列の極限（続き）

**例** $r > 1$ に対し $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ が成り立つ．$r > 1$ に対し $h := r - 1$ とおくと, $h > 0$ である．よって $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $r^n = (1+h)^n \geqq 1 + nh$ が成り立つ．従って任意の正数 $R > 0$ に対し $n_0 > (R-1)/h$ を満たす $n_0 \in \boldsymbol{N}$ をとると, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $r^n \geqq 1 + nh > 1 + n_0 h > R$ が成り立つ.

**定理** 収束する数列は有界である.

証明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする．正数 $\varepsilon > 0$ を一つとる．このときある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ より大きい $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．$|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|$ および $|\alpha - \varepsilon|$, $|\alpha + \varepsilon|$ の最大値を $M$ とすると, $|a_n| \leqq M$ が成り立つ. □

数列 $\{a_n\}$ が **単調増加 (単調減少)** であるとは, 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n \leqq a_{n+1}$ ($a_n \geqq a_{n+1}$) であるときにいう．数列 $\{a_n\}$ が **単調** であるとは, $\{a_n\}$ が単調増加または単調減少であるときにいう.

**定理** 有界な単調数列は収束する.

証明 数列 $\{a_n\}$ が上に有界ならば, $\{a_n\}$ の上限 $\alpha$ が存在する．このとき任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ を満たす $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在する ($\alpha$ は最小の上界であるから)．$\{a_n\}$ が単調増加ならば, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - \alpha| \leqq \alpha - a_{n_0} < \varepsilon$ が成り立つ. □

**例** $a > 0$ に対し, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ が成り立つ．$a > 1$ に対しこれを示したい．$c_n := a^{1/n}$ とおくと, $c_n^{n(n+1)} = a^{n+1} > a^n = c_{n+1}^{n(n+1)}$ が成り立つので, $c_n > c_{n+1}$ がわかる．よって $\{c_n\}$ は単調減少である．また $a > 1$ なので, $c_n > 1$ が成り立つ．よって $\{c_n\}$ は有界である．従って上の定理から, $\{c_n\}$ は極限 $\alpha$ を有する．$\alpha$ は $\{c_n\}$ の下限 (最大の下界) であり, 1 は下界の一つなので, $\alpha \geqq 1$ が成り立つ．$c_n \geqq \alpha$ から $a \geqq \alpha^n$ がわかるが, 仮に $\alpha > 1$ とすると $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ が成り立ち矛盾が生じる．従って $\alpha = 1$ を得る.

数列 $\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (または **基本列**) であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して,

$$m, n \in \boldsymbol{N},\ m > n_0,\ n > n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう．次の定理が成り立つことを,「実数の集合 $\boldsymbol{R}$ は **完備** である」という.

**定理** 数列 $\{a_n\}$ が収束することと, $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることは同値である.

証明 $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束するとする．このとき任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ が成り立つ．よって $m > n_0$, $n > n_0$ を満たす $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$|a_m - a_n| \leqq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立ち, 従って $\{a_n\}$ は Cauchy 列である．逆に, $\{a_n\}$ が Cauchy 列であると仮定する．各 $k \in \boldsymbol{N}$ および $\varepsilon := 1/2^k$ に対し, ある $l_k \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $m > l_k$, $n > l_k$ を満たす $m$, $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_m - a_n| < 1/2^k$ が成り立つ．特に $n > l_k$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - a_{l_k+1}| < 1/2^k$ が成り立つので, $\{a_n\}$ は有界である．$l_{k+1} > l_k$ を仮定してよい．$s_k := \sup\{a_n\}_{n \geqq l_k}$ とおく．このとき $\{s_k\}$ は有界な単調減少数列である．よって $\{s_k\}$ は極限 $\alpha$ を有する．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $1/2^k < \varepsilon$ および $|s_{k+2} - \alpha| < \varepsilon/2$ を満たす $k \in \boldsymbol{N}$ をとると, $n > l_{k+2}$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$|a_n - \alpha| \leqq |a_n - a_{l_{k+2}+1}| + |a_{l_{k+2}+1} - s_{k+2}| + |s_{k+2} - \alpha| < \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

が成り立つ．よって $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束する. □

## 第５章　連続性（その３）

### 5.3　関数の極限

$f$ を定義域が $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $I$ である実数値関数とする ($I$ としては有限個の区間の和を想起すれば十分である). 実数 $\alpha$ が点 $a$ における $f$ の **極限** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$x \in I,\ |x-a| < \delta \implies |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう. $a$ は $I$ の点である必要はない. $\alpha$ が $a$ における $f$ の極限であるとき, このことを

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \alpha\ (x \longrightarrow a)$$

と表す.

**例**　$I := \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := \sin(1/x)$ で定義する. このとき $a = 0$ における $f$ の極限は存在しない. 仮に実数 $\alpha$ が極限であるとし, 0 以上であるとする. 正数 $\varepsilon$ として $\varepsilon := 1/2$ をとる. このときどんな正数 $\delta > 0$ に対しても $2/(4n+3)\pi < \delta$ を満たす自然数 $n$ が存在し, このような $n$ に対し $|f(2/(4n+3)\pi) - \alpha| \geqq \varepsilon$ が成り立つ. これは $\alpha$ が極限であることに反する. $\alpha$ が負であるときにも同様に矛盾が生じる.

**例**　$I := \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := x\sin(1/x)$ で定義する. このとき $\alpha := 0$ は $a = 0$ における $f$ の極限である. 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 正数 $\delta$ を $\delta := \varepsilon$ で定める. このとき $x \in I$ かつ $|x| < \delta$ ならば, $|f(x)| \leqq |x| < \delta = \varepsilon$ が成り立つ.

**参考**　実数 $\alpha$ が点 $a$ における $f$ の **左極限 (右極限)** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

$$x \in I,\ -\delta < x-a < 0\ (0 < x-a < \delta) \implies |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう. $\alpha$ が $a$ における $f$ の左極限 (右極限) であるとき, $\alpha$ を

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x)\right)$$

と表す.

$I$ の点 $a$ で $f$ が **連続** であるとは, $\alpha := f(a)$ が $a$ における $f$ の極限であるときにいう. $f$ が $I$ の各点で連続であるとき, $f$ は **$I$ 上連続** であるという.

**例**　$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := \sin x$ で定める. $f$ は $\boldsymbol{R}$ 上連続である. $a \in \boldsymbol{R}$ を一つとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta := \varepsilon$ とおくと, $|x-a| < \delta$ を満たす $x \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$|f(x)-f(a)| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} \cdot 1 < \varepsilon$$

が成り立つ.

**注意**　指数関数 $f(x) := a^x$ $(a > 0)$ の定義には注意を要する. $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$ に対し, $a$ の $m/n$ 乗 $a^{m/n}$ は問題なく定義される. 無理数 $x$ に対しては, $\boldsymbol{Q}$ が $\boldsymbol{R}$ の中で稠密であることを用いて, $a$ の $x$ 乗 $a^x$ を定義できる. $a = 1$ の場合, $a^x = 1$ と定める. $a > 1$ $(a \in (0,1))$ の場合, 有理数からなる数列 $\{x_n\}$ が有界かつ単調増加であるならば, 数列 $\{a^{x_n}\}$ は有界かつ単調増加 (減少) である. $\{x_n\}$ が $x$ に収束するとき, $\{a^{x_n}\}$ の極限を $a^x$ と定める.

# 実数と論理 (理学共通科目) 第５章演習問題

(a) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束するとし, $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおく. このとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{3}$$

を示せ, 但し(3) においては $b_n \neq 0$ および $\beta \neq 0$ を仮定する.

(b) $a_n := (-1)^n$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ は極限を持たないことを示せ.

(c) $r \in (0, 1)$ に対し $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を示せ.

(d) $a \in (0, 1)$ に対し, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ を示せ.

(e) $a_n := (1 + 1/n)^n$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ は単調増大でありかつ有界であることを示せ (よって $\{a_n\}$ は極限 $e$ を持ち, $e$ は **Napier の数** または **自然対数の底** と呼ばれる実数である).

(f) $f$, $g$ を $\boldsymbol{R}$ 上の実数値関数とする. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき,

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{6}$$

を示せ, 但し(6) においては $g(x) \neq 0$ および $\beta \neq 0$ を仮定する.

(g) $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := x^n$ で定める. $f$ は $\boldsymbol{R}$ 上連続であることを示せ.

(h) $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := \cos x$ で定める. $f$ は $\boldsymbol{R}$ 上連続であることを示せ.

(i)* $a > 1$ ($a \in (0, 1)$) のとき, 指数関数 $f(x) := a^x$ が単調増加 (減少) でありかつ連続であることを示せ. また有理数 $p$, $q$ に対して $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ が成り立つことを既知として, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ($x$, $y \in \boldsymbol{R}$) を示せ.

## 第６章 群としての整数の集合（その１）

### 6.1 群の定義

第６章では演算が付与された集合 (代数系) である群についての基本事項を扱う.

集合 $A$ の **演算** とは $A \times A$ から $A$ への写像のことである. 一つの演算が付与された集合 $A$ が与えられたとし, 演算による $(a,b) \in A \times A$ の像を $a * b$ で表すとする. このとき $A$ が **群** であるとは, $A$ の演算が **結合則** を満たしかつその演算に関する **単位元** および **逆元** が存在するときにいう.

**結合則:** $a, b, c \in A$ に対し, $(a * b) * c = a * (b * c)$ が成り立つ
**単位元の存在:** $A$ のある元 $e$ は, 任意の $a \in A$ に対し $a * e = e * a = a$ を満たす
**逆元の存在:** 各 $a \in A$ に対し, $A$ の元 $a^{-1}$ が存在して $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ を満たす

群は数学の様々な議論において現れる.

**例１** $\boldsymbol{Z}$ は加法 $(a,b) \longmapsto a+b$ を演算とする群である:

- $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立つ;
- $\boldsymbol{Z}$ の元 $0$ は, 任意の $a \in \boldsymbol{Z}$ に対し $a+0 = 0+a = a$ を満たす;
- 各 $a \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $\boldsymbol{Z}$ の元 $-a$ が $a+(-a) = (-a)+a = 0$ を満たす.

**例２** 実数を成分とする $n$ 次正方行列の全体からなる集合を $M_n(\boldsymbol{R})$ で表す. $M_n(\boldsymbol{R})$ の元で, 行列式が $0$ ではないものの全体からなる集合を $GL_n(\boldsymbol{R})$ で表す:

$$GL_n(\boldsymbol{R}) := \{X \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid \det(X) \neq 0\}.$$

$GL_n(\boldsymbol{R})$ の 2 元 $X, Y$ に対し, $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$ を用いて, 積 $XY$ は $GL_n(\boldsymbol{R})$ の元であることがわかる. こうして行列の積によって $GL_n(\boldsymbol{R})$ の演算が定義される. $GL_n(\boldsymbol{R})$ は群である:

- $X, Y, Z \in GL_n(\boldsymbol{R})$ に対し $(XY)Z = X(YZ)$ が成り立つので, $GL_n(\boldsymbol{R})$ の演算は結合則を満たす;
- $E_n$ を $n$ 次単位行列とすると, 任意の $X \in GL_n(\boldsymbol{R})$ に対し $XE_n = E_nX = X$ が成り立つので, $E_n$ は $GL_n(\boldsymbol{R})$ の単位元である;
- 各 $X \in GL_n(\boldsymbol{R})$ に対し, $X$ の逆行列 $X^{-1}$ が存在して $XX^{-1} = X^{-1}X = E_n$ を満たすので, $X$ の逆元 $X^{-1}$ が存在する.

**例３** $A$ を集合とし, $G_3$ を $A$ から $A$ 自身への全ての全単射からなる集合とする. $G_3$ の演算を

$$G_3 \times G_3 \longrightarrow G_3, \qquad (f,g) \longmapsto g \circ f \ (= f \text{ と } g \text{ の合成})$$

によって定める. このとき $G_3$ は群である:

- $a \in A$ および $f, g, h \in G_3$ に対し
$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$$
が成り立つので, 上に定めた $G_3$ の演算は結合則を満たす;
- $A$ の恒等写像を $\mathrm{id}$ で表すと, $a \in A$ および $f \in G_3$ に対し $(\mathrm{id} \circ f)(a) = (f \circ \mathrm{id})(a) = f(a)$ が成り立つので, $\mathrm{id}$ は $G_3$ の単位元である;
- $f \in G_3$ に対し $f$ の逆写像 $f^{-1}$ は $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ を満たすので, $f^{-1}$ は $f$ の逆元である.

**実数と論理 (理学共通科目)** 平成２２年１２月１５日

## 第６章　群としての整数の集合（その２）

### 6.1　群の定義（続き）

**例 4**　$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への 4 つの写像 $T_0, T_1, T_2, T_3$ を次のように定義する: $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し,

$$T_0(x, y) := (x, y), \quad T_1(x, y) := (-x, y), \quad T_2(x, y) := (x, -y), \quad T_3(x, y) := (-x, -y)$$

とおく. これら 4 つの写像からなる集合を $G_4$ とする: $G_4 := \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$. 写像の合成によって $G_4$ に演算を定義することができる:

$$T_0 \circ T_k = T_k \circ T_0 = T_k, \quad T_k \circ T_k = T_0 \quad (k = 1, 2, 3),$$
$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = T_3, \quad T_2 \circ T_3 = T_3 \circ T_2 = T_1, \quad T_3 \circ T_1 = T_1 \circ T_3 = T_2.$$

このとき $G_4$ は群である: 例 3 と同様に, $G_4$ の演算は結合則を満たす; $T_0$ は $G_4$ の単位元である; $T_k$ の逆元は $T_k$ そのものである.

**例 5**　$n \in \boldsymbol{Z}$ を一つとる. $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $R$ で, $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とし, 正の方向に $2\pi/n$ だけ回転させるものを考える: $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し,

$$R(x, y) := \left(x \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - y \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ x \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + y \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

そして $n$ 個の写像 $R$, $R^2$, $R^3, \cdots, R^n$ からなる集合を $G_5$ とする, 但し $R^2 := R \circ R$ であり, そして $R^k := R^{k-1} \circ R$ によって帰納的に $R^k$ を定義する: $G_5 := \{R^k\}_{k=1}^n$. 写像の合成によって $G_5$ に演算を定義することができる. このとき $G_5$ は群である: 結合則は明らかに成り立つ; $I := R^n$ は $G_5$ の単位元である; $R^k$ の逆元は $R^{n-k}$ である.

**例 6**　$n \in \boldsymbol{Z}$ を一つとる. そして $\boldsymbol{Z}$ における関係 $\equiv$ を

$$a, b \in \boldsymbol{Z} \text{ に対し, } a \equiv b \iff a - b \text{ は } n \text{ の整数倍と表すことができる}$$

によって定義する. 第 4 章で説明したとおり, これは同値関係である. $a \equiv b$ が成り立つことをしばしば「$a$ と $b$ は <u>**$n$を法として合同である**</u>」といい, 「$a \equiv b \pmod n$」と表す. $\boldsymbol{Z}$ の $\equiv$ による商集合を $\boldsymbol{Z}_n$ で表す. $a \in \boldsymbol{Z}$ を含む $\equiv$ の同値類を $[a]$ で表す. 二つの $[a], [b] \in \boldsymbol{Z}_n$ に対し, $\boldsymbol{Z}_n$ の元 $[a] + [b]$ を $[a] + [b] := [a + b]$ により定義したい. ここで問題になることは, $[a + b]$ は $a \in [a]$ や $b \in [b]$ の取り方に依らずそして $[a], [b]$ のみによって定まるかどうかである. そこで $a' \in [a], b' \in [b]$ をとると,

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) = kn + ln = (k + l)n$$

$(k, l \in \boldsymbol{Z})$ であるので, $a' + b' \equiv a + b \pmod n$ がわかり, よって $[a' + b'] = [a + b]$ が成り立つ. こうして $([a], [b])$ に $[a] + [b] = [a + b]$ を対応させる $\boldsymbol{Z}_n$ の演算を定義することができた. このとき $\boldsymbol{Z}_n$ は群である.

**例 7**　正三角形 (の形をした板) が机の上に置いてある. これを手にとって動かしたのち, 再び机の上に置く, 但し各頂点を置くところは元々置いてあった正三角形の頂点の一つがあった点とする. 三つの頂点が置いてあった机上の点を $v_1, v_2, v_3$ とする. このとき, これらの点に置いてあった頂点の移り先としては, 次の 6 通りが考えられる:

$$(v_1, v_2, v_3), \quad (v_1, v_3, v_2), \quad (v_3, v_2, v_1), \quad (v_2, v_1, v_3), \quad (v_2, v_3, v_1), \quad (v_3, v_1, v_2).$$

こうして集合 $S := \{v_1, v_2, v_3\}$ から $S$ 自身への全ての全単射写像からなる集合 $G_7$ を得る. 写像の合成によって $G_7$ に演算を定義することができる. このとき $G_7$ は群である.

## 第６章　群としての整数の集合（その３）

### 6.2　群の同型

二つの群 $G$, $H$ が与えられたとき, どのような場合に $G$, $H$ を「同じもの」と思うことができるだろうか？上に挙げた例を見てもわかるとおり群は様々な状況において現れるが, 群が現れた状況にはこだわらずに, 演算が与えられた集合である群として同じものとみなせるかどうかを考えたい. 次のような写像 $f : G \longrightarrow H$ が存在するときに, $G$ と $H$ は **同型** であるといい, $f$ を **同型写像** という:

(i) $f$ は全単射である;

(ii) $G$ の演算による $(a, b) \in G \times G$ の像を $a * b$ で表し, $H$ の演算による $(c, d) \in H \times H$ の像を $c \star d$ で表すとき, $a, b \in G$ に対し

$$f(a * b) = f(a) \star f(b)$$

が成り立つ.

例４の群 $G_4$ の元の個数は 4 である. また例６の群 $\boldsymbol{Z}_4$ の元の個数も 4 である: $\boldsymbol{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$. $G_4$ と $\boldsymbol{Z}_4$ は同型であるかどうかを考えたい. 仮に $G_4$ と $\boldsymbol{Z}_4$ は同型であるとする. このとき同型写像 $f : G_4 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_4$ が存在する: $f$ は全単射であり, $T, T' \in G_4$ に対し

$$f(T \circ T') = f(T) + f(T')$$

が成り立つ. 特に $T' := T_0$ ($= G_4$ の単位元) とおくと, $T \circ T_0 = T$ を用いて

$$f(T) = f(T) + f(T_0)$$

を得る. この両辺に $f(T)$ の逆元を加えることによって, $f(T_0) = [0]$ を得る. また任意の $T \in G_4$ に対し

$$f(T \circ T) = f(T) + f(T)$$

が成り立つが, $T \circ T = T_0$ なので $f(T) + f(T) = [0]$ が成り立つことになる. しかし, ある $T \in G_4$ に対し $f(T) = [1]$ が成り立ち, そして $[1] + [1] = [2] \neq [0]$ であるので, 矛盾が生じた. よって同型写像 $f : G_4 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_4$ は存在せず, $G_4$ と $\boldsymbol{Z}_4$ は **同型ではない**.

**注意**　群 $G$ から群 $H$ への写像 $f : G \longrightarrow H$ が同型写像の条件の (ii) を満たしているとする ((ii) を満たす写像を **準同型写像** という). このとき $G$ の単位元 $e$ の $f$ による像は $H$ の単位元 $e'$ に等しい.

$n \in \boldsymbol{Z}$ を一つとる. そして例５の群 $G_5$ と例６の群 $\boldsymbol{Z}_n$ が同型であるかどうかを考えたい. $G_5$ の元の数と $\boldsymbol{Z}_n$ の元の数は等しいので, $G_5$ から $\boldsymbol{Z}_n$ への全単射 $f$ が存在する. $f$ が同型写像であると仮定する. このとき $f$ は $f(I) = [0]$ を満たす. $[a] := f(R)$ とおく. このとき $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対しては $R^k \neq I$ が成り立つことに注意すると, $[a]$ の $k$ 個の和 $k[a] = f(R^k)$ は $[0]$ とは異なる. $k[a] = [ka]$ であるので, $a$ と $n$ の最大公約数は 1 であることがわかる. 以上の議論においては $f$ が同型写像であると仮定したが, 全単射である $f$ を $f(R^k) := [k]$ で定めると $f$ は実際に同型写像であることがわかる. よって $G_5$ と $\boldsymbol{Z}_n$ は **同型である**.

**注意**　上の議論において $n$ を素数とする. このとき $[0]$ に含まれない $a \in \boldsymbol{Z}$ を任意にとり, $G_5$ から $\boldsymbol{Z}_n$ への写像 $f$ を $f(R^k) := k[a]$ によって定義する ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) と, $f$ は同型写像であることがわかる.

## 第６章　群としての整数の集合（その４）

### 6.2　群の同型（続き）

例６の群 $\boldsymbol{Z}_6$ と例７の群 $G_7$ が同型であるかどうかを考えたい．$\boldsymbol{Z}_6$ の元の数と $G_7$ の元の数は等しいので, $\boldsymbol{Z}_6$ から $G_7$ への全単射 $f$ が存在する．$f$ が同型写像であると仮定する．このとき $f([0]) = I$ ($G_7$ の単位元) が成り立つ．また $G_7$ の元 $T$ で $f([1]) = T$ を満たすものが存在する．よって $f([k]) = T^k$ が成り立つ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), 但し $T^k$ は $T$ を $k$ 個合成したものである．この $T$ に対し, $T^2$ または $T^3$ のいずれかが $I$ であるが, 一方で [2], [3] はいずれも [0] とは異なる．これは $f$ が全単射であることに反する．よって同型写像 $f : \boldsymbol{Z}_6 \longrightarrow G_7$ は存在せず, $\boldsymbol{Z}_6$ と $G_7$ は **同型ではない**.

**注意**　$n$ 個の元の集合からそれ自身への全ての全単射写像 (この場合, 置換ともいう) からなる集合は群をなす．これを $n$ 次の **対称群** という．例７の群を３次の対称群とみなすことができる．

# 実数と論理 (理学共通科目) 第６章演習問題

**学生番号:** ______________________ **氏名:** ______________________

(a) 正方形の形をした板が机の上に置いてある. これを手にとって動かした後, 再び机の上に置く, 但し各頂点を置くところは元々置いてあった正方形の頂点の一つがあった点とする. 四つの頂点が置いてあった机上の点を $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ とする.
(1) これらの点に置いてあった頂点の移り先を全て求めよ.
(2) 集合 $S := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ から $S$ 自身への全単射写像のうち (1) で得られたものからなる集合を $G$ とする. 写像の合成によって $G$ に演算を定義するとき, $G$ は群であることを示せ.
(3) $G$ の元の個数を $n$ とする. $G$ と $\boldsymbol{Z}_n$ は同型であるかどうかを判定せよ.

(b) $\boldsymbol{Z}_n \times \boldsymbol{Z}_n$ の二つの元 $([a_1], [b_1])$, $([a_2], [b_2])$ に対し, $\boldsymbol{Z}_n \times \boldsymbol{Z}_n$ の元 $([a_1], [b_1]) + ([a_2], [b_2])$ を

$$([a_1], [b_1]) + ([a_2], [b_2]) := ([a_1 + a_2], [b_1 + b_2])$$

により定義する.
(1) この演算が与えられた $\boldsymbol{Z}_n \times \boldsymbol{Z}_n$ は群であることを示せ.
(2) 6.1 節の例４に挙げられた群 $G_4$ と $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2$ は同型であるかどうかを判定せよ.

# 実数と論理 中間試験（２０１０年１２月８日実施)

学生番号・氏名： ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ・ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**[1]** (a) $\boldsymbol{R}$ から閉区間 $[0,1]$ への写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow [0,1]$ を $f(x) := 1/(x^4+1)$ で定める $(x \in \boldsymbol{R})$. このとき $f$ が全射であるかどうか, および単射であるかどうかを判定せよ. 理由も説明すること.
(b) $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $f(t) := (t^3, t^2)$ で定める $(t \in \boldsymbol{R})$. このとき $f$ が全射であるかどうか, および単射であるかどうかを判定せよ. 理由も説明すること.

**[2]** 集合 $A$, $B$, $C$ に対し, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ を示せ.

**[3]** (a) 命題「$\forall x \in \boldsymbol{R}\ (x^2 + x + 1 > 1/2)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(b) 命題「$\exists n \in \boldsymbol{N}\ (n^3 e^{-n} \geqq 1)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(c) 「1 変数関数 $f$, $g$ の両方が微分可能ならば, $f$ と $g$ の積 $fg$ は微分可能である」の対偶を記述せよ.

**[4]** 全ての正の実数からなる集合を $\boldsymbol{R}_+$ で表す: $\boldsymbol{R}_+ := \{r \in \boldsymbol{R} \mid r > 0\}$. $\boldsymbol{R}_+$ における関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff \exists m \in \boldsymbol{Z}\ (b = 2^m a)$$

によって定める. このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ.

**[5]** 集合 $A$ から集合 $B$ への写像 $f : A \longrightarrow B$ が与えられているとする. $B$ の部分集合 $B', B'' \subset B$ に対し, $f^{-1}(B' \setminus B'') = f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(B'')$ を示せ.

# 実数と論理　期末試験（２０１１年２月２日実施)

学生番号・氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿・＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**[1]**　以下の問いに答えよ.

(a) 命題「$\forall x \in \boldsymbol{R}\ (\log(2+x+x^2) > 0)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(b) 命題「$\exists n \in \boldsymbol{N}\ (1+1/n)^n > 2.5)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(c) $A$, $B$ を $n$ 次正方行列とする. また $|A|$, $|B|$ をそれぞれ $A$, $B$ の行列式とし, $|AB|$ を $A$, $B$ の積 $AB$ の行列式とする. このとき命題「 $|AB| = 0$ ならば, $|A| = 0$ または $|B| = 0$ が成り立つ」の対偶を記述せよ.

**[2]**　集合 $A$ から集合 $B$ への写像 $f : A \longrightarrow B$ が与えられているとする. このとき $A$ の部分集合 $A'$, $A'' \subset A$ に対し, $f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$ を示せ.

**[3]**　$\boldsymbol{R}$ における関係 $\sim$ を「$x \sim y \iff \exists m \in \boldsymbol{Z}, \exists n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}\ (x - y = m/n)$」によって定める. このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ.

**[4]** 集合 $A$ を $A := \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2$ で定める.

(a) $A$ の二つの元 $([a_1], [b_1])$, $([a_2], [b_2])$ に対し, $A$ の元 $([a_1], [b_1]) + ([a_2], [b_2])$ を $([a_1], [b_1]) + ([a_2], [b_2]) := ([a_1 + a_2], [b_1 + b_2])$ で定める. このやり方で定まる $A$ の演算に関して, $A$ は群であることを示せ.

(b) $A$ の元の個数を $n$ とするとき, $A$ と $\boldsymbol{Z}_n$ は同型であるかどうかを判定せよ.

**[5]** 以下の問いに答えよ.

(a) 各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n := (-1)^n/n$ とおく. このとき数列 $\{a_n\}$ は極限を持つことを示せ.

(b) 数列 $\{a_n\}$ は極限 $\alpha$ を持つとする. このとき $\{a_n\}$ は有界であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := \sin 2x \cos(1/x)$ で定義する. このとき $\alpha = 0$ は $a = 0$ における $f$ の極限であることを示せ.

# 実数と論理 再試験（２０１１年２月１６日実施)

学生番号・氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿・＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**[1]** 以下の問いに答えよ.

(a) 命題「$\forall x \in \boldsymbol{R}\ (x^2+1>0)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(b) 命題「$\exists n \in \boldsymbol{N}\ (n^{1/n}>1.3)$」の否定を通常の文章で記述せよ.

(c) $A$, $B$ を $n$ 次正方行列とする. このとき命題「$A$ と $B$ の積 $AB$ が正則行列ではないならば, $A$ と $B$ のいずれかは正則行列ではない」の対偶を記述せよ.

**[2]** 集合 $A$ から集合 $B$ への写像 $f: A \longrightarrow B$ が与えられているとする. このとき $B$ の部分集合 $B'$, $B'' \subset B$ に対し, $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$ を示せ.

**[3]** $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ における関係 $\sim$ を「$x \sim y \iff \exists q \in \boldsymbol{Q} \setminus \{0\}\ (y = qx)$」によって定める (但し $\boldsymbol{Q}$ は全ての有理数からなる集合である). このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ.

**[4]** 3 個の文字 $x$, $y$, $z$ からなる集合を $X$ とする: $X = \{x, y, z\}$.

(a) $X$ から $X$ 自身への全単射写像を全て挙げよ (各全単射写像による $x$, $y$, $z$ の像を具体的に記せ).

(b) (a) で挙げた写像からなる集合を $G$ とする. 写像の合成によって $G$ に演算を定義するとき, $G$ は群であることを示せ.

(c) $G$ の元の個数を $n$ とするとき, $n$ を求め, さらに $G$ と $\boldsymbol{Z}_n$ は同型であるかどうかを判定せよ.

**[5]** 以下の問いに答えよ.

(a) 各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n := 3^n$ とおく. このとき数列 $\{a_n\}$ は $\infty$ に発散することを示せ.

(b) 数列 $\{a_n\}$ は $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に収束するとし, 数列 $\{b_n\}$ は $\beta \in \boldsymbol{R}$ に収束するとする. このとき, 数列 $\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束することを示せ.

(c) $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f$ を $f(x) := \sin 2x$ で定める. このとき $f$ は $a = 0$ で連続であることを示せ.