計算機科学 II 平成２４年１１月３０日

第１章　Boole 代数

1.1　集合と写像

集合の定義には, 外延的な定義と内包的な定義がある. **外延的な定義** とは, 与えられた集合の元を全て列挙するものである. 例えば, 集合 A を $A = \{0, 1\}$ で定めたならば, A は外延的に定義されたことになる. **内包的な定義** とは, あるものが与えられた集合の元であるための必要十分条件を明示するものである. 例えば, 集合 A' を $A' = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x^2 - x = 0\}$ で定めたならば, A' は内包的に定義されたことになる ($\boldsymbol{Z}$ は全ての整数からなる集合を表す). あるもの x が集合 A の元である (x が A に含まれる) ことを $x \in A$ で表す. 元を持たない集合を **空集合** といい, $\emptyset$ で表す.

二つの集合 A, B に対し,「$x \in A \Longrightarrow x \in B$」が真であるとき, A は B の **部分集合** であるといい, このことを $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す. また $A \subset B$ が成り立つことを「A は B に含まれる」,「B は A を含む」とも言い表す. $A \subset B$ は正しいが $B \subset A$ は正しくないとき, A は B の **真部分集合** であるといい, このことを $A \subsetneqq B$ で表す. $A \subset B$ も $B \subset A$ も正しいとき, A と B は **等しい** といい, このことを $A = B$ で表す. 空集合 $\emptyset$ は全ての集合に含まれると考えることになっている.

A, B を集合とする. A の各元に対し B の元を一つ対応させるものを, A から B への **写像** という. A から B への写像に対し, A をこの写像の **定義域** といい, B を **値域** という. A から B への写像に対し, それを表す一つの記号を用いることがよくある. 例えばそれを f とする. f の定義域 A や値域 B を明記したいときには, f を $f : A \longrightarrow B$ と記す. f によって A の元 x に対応する B の元を $f(x)$ と記す. $f(x)$ を x の f による **像** という.

A を集合とし, $A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$ とおく. このとき A^2 から A への写像を A の **演算** という.

1.2　順序

集合 A に対し, A^2 の部分集合 R を A 上の **関係** という. $(x, y) \in A^2$ が R の元であるとき, このことを xRy で表し, x と y は関係 R にあるという. A 上の関係 R が次の条件 (a), (b), (c) を満たすとき, R を A 上の **順序** という: 任意の $x, y, z \in A$ に対し,

(a) xRx;

(b) xRy かつ yRx ならば, $x = y$;

(c) xRy かつ yRz ならば, xRz.

R が A 上の順序であるとき, 通常 R を $\leqq$ で表す. また A を順序 $\leqq$ に関する **順序集合** という. $\leqq$ が A の順序であるとする. $x, y \in A$ が $x \leqq y$ および $x \neq y$ を満たすとき, $x < y$ と書く.

例　$\boldsymbol{R}$ を全ての実数からなる集合とする. $\boldsymbol{R}$ 上の関係である $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x$ は y 以下 $\}$ を普通 $\leqq$ と表す.

例　集合 A に対して, A の全ての部分集合を集めて作った集合族を A の **べき集合** といい, 2^A で表す. 例えば,

○ $A = \{a, b\}$ ならば, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ であり,

○ $A = \{a, b, c\}$ ならば,

$$2^A = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ \{a, b, c\}\}$$

である.

2^A 上の関係である包含関係 $\subset$ は 2^A 上の順序である.

第１章 Boole 代数

1.3 束

A を順序集合とし, S を A の部分集合とする.

○ A の元 a が S の **上界** (**下界**) であるとは, S の任意の元 x に対し $x \leqq a$ ($a \leqq x$) が成り立つときにいう.

○ a が S の **最大元** (**最小元**) であるとは, a は S の元でありかつ S の上界 (下界) であるときにいい, このとき a を $\max S$ ($\min S$) で表す.

○ a が S の **上限** (**下限**) であるとは, a が S の全ての上界からなる集合の最小元 (全ての下界からなる集合の最大元) であるときにいい, このとき a を $\sup S$ ($\inf S$) で表す.

順序集合 A が **束** であるとは, A の任意の 2 元 x, y に対し $\{x, y\}$ の上限 $\sup\{x, y\}$ および下限 $\inf\{x, y\}$ が存在するときにいう. A が束であるとき,

$$x \cup y := \sup\{x, y\}, \qquad x \cap y := \inf\{x, y\}$$

とおく. これらの定義から, 直ちに次の命題を得ることができる.

命題 A を束とする. このとき任意の $x, y, z \in A$ に対し, 次が成り立つ:

○ $x \leqq x \cup y$, $y \leqq x \cup y$;

○ $x \cap y \leqq x$, $x \cap y \leqq y$;

○ $x \leqq z$, $y \leqq z$ ならば, $x \cup y \leqq z$;

○ $z \leqq x$, $z \leqq y$ ならば, $z \leqq x \cap y$.

さらに次の命題が成り立つ.

命題 A を束とする. このとき任意の $x, y, z \in A$ に対し, 次が成り立つ:

(a0) $x \cup x = x,\ \ x \cap x = x$;

(a1) $x \cup y = y \cup x,\ \ x \cap y = y \cap x$;

(a2) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z,\ \ x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$;

(a3) $x \cup (x \cap y) = x,\ \ x \cap (x \cup y) = x$.

そして次の定理が成り立つため, 二つ目の命題における (a1), (a2), (a3) を **束の公理** という.

定理 A を空ではない集合とする. α, β を A の演算とする. $x, y \in A$ に対し

$$x \cup y := \alpha(x, y), \qquad x \cap y := \beta(x, y)$$

とおいたとき, 二つ目の命題における (a1), (a2), (a3) が成り立つとする. このとき同じ命題における (a0) も成り立つ. そして A 上の関係 $\leqq$ を「$x \leqq y \iff x \cup y = y$」で定めると, $\leqq$ は A 上の順序であり, そして A はこの順序に関して束である.

束 B が **分配束** であるとは, 任意の $x, y, z \in B$ に対し次が成り立つときにいう:

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z), \qquad x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z). \tag{1}$$

(1) を **分配法則** という.

第１章 Boole 代数

1.4 Boole 代数の定義

命題 B は分配束で, 最大元 I および最小元 O を持つとする. このとき B の各元 x に対し $x \cup y = I, x \cap y = O$ を満たす $y \in B$ が存在するならば, そのような y は唯一つ存在する.

上の命題における y を $\bar{x}$ で表し, x の **補元** という.

Boole 代数の定義 B は少なくとも二つの元 I, O を持つ集合であるとする. α, β を B の演算とし, $x, y \in B$ に対し $x \cup y := \alpha(x, y)$, $x \cap y := \beta(x, y)$ とおく. さらに γ を B から B 自身への写像とし, 各 $x \in B$ に対し $\bar{x} := \gamma(x)$ とおく. B が **Boole 代数** であるとは, B が束の公理, 分配法則および次を満たすときにいう:

$$x \cup I = I, \quad x \cap O = O, \quad x \cup O = x, \quad x \cap I = x, \quad x \cup \bar{x} = I, \quad x \cap \bar{x} = O. \tag{2}$$

束の公理, 分配法則 (1) および上の (2) を合わせて **Boole 代数の公理** という.

最大元, 最小元および各元の補元を持つ分配束は Boole 代数である. 逆に, Boole 代数 B は束の公理および分配法則を満たすので分配束であることがわかり, さらに (2) から B は最大元, 最小元および各元の補元を持つことがわかる. よって **Boole 代数とは, 最大元, 最小元および各元の補元を持つ分配束である**.

例 $B_1 := \{0, 1\}$ とおく. また B_1 の演算 α, β を

$$\alpha(0,0) := 0, \quad \alpha(0,1) := 1, \quad \alpha(1,0) := 1, \quad \alpha(1,1) := 1,$$
$$\beta(0,0) := 0, \quad \beta(0,1) := 0, \quad \beta(1,0) := 0, \quad \beta(1,1) := 1$$

で定め, $x \cup y := \alpha(x, y)$, $x \cap y := \beta(x, y)$ とおく. そして $\bar{0} := 1$, $\bar{1} := 0$, $I := 1$, $O := 0$ とおく. このとき B_1 は Boole 代数の公理の全てを満たすので, B_1 は Boole 代数である.

参考 B_1 の演算 α, β は命題の真理値と関係がある. **命題** とはそれが正しいか或いは間違っているかを判定できる文章, 陳述のことである. 正しい命題は **真** であると言われ, 間違っている命題は **偽** であると言われる. 真である命題に値 1 を, 偽である命題に値 0 をそれぞれ対応させる. このように対応する値を命題の **真理値** という (1 の代わりに T (true の頭文字) を, 0 の代わりに F (false の頭文字) を用いる流儀が広く用いられているが, ここでは Boole 代数との関係を説明するために 1, 0 を用いる). 命題 P に対しその真理値を $v(P)$ で表す. このとき二つの命題 P, Q に対し, 次が成り立つ:

$$v(P \text{ または } Q) = v(P) \cup v(Q), \quad v(P \text{ かつ } Q) = v(P) \cap v(Q).$$

例 自然数 n に対し

$$B_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B_1, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

とおき, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B_n$ に対し

$$x \cup y := (x_1 \cup y_1, x_2 \cup y_2, \ldots, x_n \cup y_n), \quad x \cap y := (x_1 \cap y_1, x_2 \cap y_2, \ldots, x_n \cap y_n),$$
$$\bar{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n), \quad I := (1, 1, \ldots, 1), \quad O := (0, 0, \ldots, 0)$$

とおくと, B_n は Boole 代数の公理の全てを満たすので, B_n は Boole 代数である.

第１章　Boole 代数

1.5　Boole 関数

n を自然数とする. B_n から B_1 への写像を n 変数 **Boole 関数** という.

例　1 変数 Boole 関数とは B_1 から B_1 自身への写像である. このような写像は, 任意の $x \in B_1$ に対し
○ 0 を対応させるもの (0 で表す),
○ x を対応させるもの (x で表す),
○ $\bar{x}$ を対応させるもの ($\bar{x}$ で表す),
○ 1 を対応させるもの (1 で表す)
の 4 個が存在する.

例　2 変数 Boole 関数とは B_2 から B_1 への写像である. このような写像は, $(x_1, x_2) \in B_2$ に対し

$$0,\quad \bar{x}_1 \cap \bar{x}_2,\quad \bar{x}_1 \cap x_2,\quad \bar{x}_1,\quad x_1 \cap \bar{x}_2,\quad \bar{x}_2,\quad (x_1 \cap \bar{x}_2) \cup (\bar{x}_1 \cap x_2),\quad \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2,$$
$$x_1 \cap x_2,\quad (\bar{x}_1 \cup x_2) \cap (x_1 \cup \bar{x}_2),\quad x_2,\quad \bar{x}_1 \cup x_2,\quad x_1,\quad x_1 \cup \bar{x}_2,\quad x_1 \cup x_2,\quad 1$$

を対応させる 16 個が存在する.

一般に, 全ての n 変数 Boole 関数の数は 2^{2^n} である.
どんな n 変数 Boole 関数も $\cup, \cap$ および $^-$ の組み合わせで表すことができる.

定理　f を n 変数 Boole 関数とし,

$$I_f := \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B_n \mid f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1\}$$

とおく. このとき

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I_f} x_1^{t_1} \cap x_2^{t_2} \cap \cdots \cap x_n^{t_n}$$

が成り立つ, 但し $x \in B_1$ に対し x^t は $t = 1$ のとき x で $t = 0$ のとき $\bar{x}$ であるとする.

定理　f を n 変数 Boole 関数とし,

$$O_f := \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B_n \mid f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0\}$$

とおく. このとき次が成り立つ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcap_{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in O_f} x_1^{1-t_1} \cup x_2^{1-t_2} \cup \cdots \cup x_n^{1-t_n}.$$

例　3 変数 Boole 関数 f は $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ で 1 に等しく, 他の点では 0 に等しいとする. このとき f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap \bar{x}_2 \cap x_3)$$

と表すことができる.

例　3 変数 Boole 関数 f は $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ で 0 に等しく, 他の点では 1 に等しいとする. このとき f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_3) \cap (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3)$$

と表すことができる.

計算機科学 II　第１章演習問題

(a) Boole 代数 B_5 の元 $a := (1,0,0,1,1)$, $b := (1,1,0,1,0)$, $c := (0,1,1,1,0)$ に対し, $a \cup b$, $b \cup c$, $c \cup a$, $a \cap b$, $b \cap c$, $c \cap a$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ を求めよ.

(b) 1.5 節で挙げた 16 個の 2 変数 Boole 関数は互いに異なることを示せ.

(c) 4 変数 Boole 関数 f を

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_4) \cap (\bar{x}_1 \cup x_3) \cap (\bar{x}_2 \cup x_3) \cap (\bar{x}_3 \cup x_4)$$

で定義する．このとき $f(0,0,0,1)$, $f(0,0,1,1)$, $f(0,1,0,1)$, $f(0,1,1,1)$, $f(1,0,1,0)$ を求めよ.

(d) 以下の問いに答えよ.

(d1) 3 変数 Boole 関数 f は $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ で 1 に等しく, 他の点では 0 に等しいとする．このとき f を変数 x_1, x_2, x_3 を用いて表せ.

(d2) 3 変数 Boole 関数 f は $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ で 0 に等しく, 他の点では 1 に等しいとする．このとき f を変数 x_1, x_2, x_3 を用いて表せ.

(e) 以下の問いに答えよ.

(e1) ある会社の運営会議は, 社長, 副社長, 専務, 常務の４名からなるとする．この会議における議題は,

○ ３名以上が賛成するか,

○ 社長を含む２名が賛成する

場合に承認され, これら以外の場合には承認されないとする．各議題に対し４名の各々は賛成ならば 1, 反対ならば 0 と表示するとき, 議題が承認されたときに 1, 承認されなかったときに 0 である 4 変数 Boole 関数を求めよ.

(e2) ある町の都市開発会議は, 町長, 有識者 (都市計画の専門家), 事務局長, 自治会長の４名からなるとする．この会議における議題は,

○ ３名以上が反対するか,

○ 町長と有識者の２名が反対する

場合に承認されず, これら以外の場合には承認されるとする．各議題に対し４名の各々は賛成ならば 1, 反対ならば 0 と表示するとき, 議題が承認されたときに 1, 承認されなかったときに 0 である 4 変数 Boole 関数を求めよ.

計算機科学 II 平成２４年１２月２１日

第２章　オートマトン

2.1　形式言語

記号の有限集合をここでは **アルファベット** とよぶ．アルファベット Σ に対し，$|\Sigma|$ は Σ の元の数を表すとする．

例 $\Sigma := \{0, 1\} \implies |\Sigma| = 2$
$\Sigma := \{$ あ, い, う, え, お $\} \implies |\Sigma| = 5$
$\Sigma := \{$ 松, 竹, 梅 $\} \implies |\Sigma| = 3$

Σ をアルファベットとし，n を自然数とする．各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，Σ の元 a_i を一つとり，$1, 2, \ldots, n$ の順に応じて並べたもの $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を Σ の上の長さが n の **語** という．語 α の長さを $|\alpha|$ で表す．

例 $\Sigma := \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ とする．このとき

$$(\mathrm{s, y, m, b, o, l}) \qquad (\mathrm{a, l, p, h, a, b, e, t}) \qquad (\mathrm{w, o, r, d})$$

はいずれも Σ の上の語である．

空語 とは長さが 0 の語であり，どのようなアルファベットの上でも存在すると考える．空語を ε $(:= (\ ))$ で表す．任意のアルファベット Σ に対し，$\varepsilon \notin \Sigma$ とする．

アルファベット Σ の上の二つの語 $\alpha := (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\beta := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対し，

$$\alpha \cdot \beta := (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

を α と β の **連接** という．このとき空語 ε に対し，$\varepsilon \cdot \alpha = \alpha \cdot \varepsilon = \alpha$ が成り立つ．また $\alpha^0 := \varepsilon$, $\alpha^1 := \alpha$ とおき，自然数 n に対し $\alpha^n := \alpha \cdot \alpha^{n-1}$ とおく．

非負整数 n に対し，アルファベット Σ の上の長さが n の語を全て集めて作った集合を Σ^n で表す．そして

$$\Sigma^* := \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n, \qquad \Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$$

とおく．Σ^* の部分集合を Σ の上の **言語** という．Σ の上の言語 A, B に対し，

$$A \cdot B := \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in A,\ \beta \in B\}$$

を A と B の **連接** という．$A^0 := \{\varepsilon\}$, $A^1 := A$ とおき，自然数 n に対し $A^n := A \cdot A^{n-1}$ とおく．$A^* := \bigcup_{n \geq 0} A^n$ を A の **$*$ 閉包** という．

以下においては，Σ の上の語 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Sigma^*$ を $a_1 a_2 \ldots a_n$ で表す．

第２章　オートマトン

2.2　有限オートマトン

有限オートマトン M とは, 次の五つから構成される:

Q: **状態** と呼ばれる記号の有限集合;
Σ: 状態を変更するために用いられる **入力記号** と呼ばれるものの有限集合;
$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$: **状態遷移関数** (入力記号が状態をどのように変更するのかを定めるもの);
q_0: **初期状態** と呼ばれる Q の元;
F: **受理状態** と呼ばれる Q の部分集合.

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を有限オートマトンとする. $q \in Q$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \Sigma$ に対し

$$\delta(q, \varepsilon) := q, \qquad \delta(q, a_1 a_2 \ldots a_k) := \delta(\delta(q, a_1), a_2 \ldots a_k)$$

とおき, 状態遷移関数 δ の定義域 $Q \times \Sigma$ を $Q \times \Sigma^*$ に拡張する. そして Σ の上の言語 $T(M)$ を

$$T(M) := \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, \alpha) \in F\}$$

で定める.

例　ある自動販売機では, 120 円で飲料水 500ml を購入できる. この自動販売機は 10 円, 50 円および 100 円の３種類の硬貨に対応している. ちょうど 120 円が投入されたときに飲料水が入った容器を取り出すことができ, 120 円を超えた金額が投入された場合には, 超えた分の硬貨は返却されるとする. このとき

$Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$ とおき,
$\Sigma := \{a, b, c\}$ (但し a, b, c はそれぞれ 10 円, 50 円, 100 円に相当する) とおき,
$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を $\delta(q_i, a) := q_{i+1}$, $\delta(q_i, b) := q_{i+5}$, $\delta(q_i, c) := q_{i+10}$ (但しそれぞれの右辺の添え字が 12 を超える場合には, 右辺を q_i とする) で定め,
$F := \{q_{12}\}$ とおく

ならば, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ は有限オートマトンである. そして $\alpha \in \Sigma^*$ が $T(M)$ の元である (例えば $\alpha := (c, a, a)$) とき, α に対応する硬貨の自動販売機への投入によって飲料水入り容器を取り出すことができる.

例　有限オートマトンとして, 次のようなものを考える. まず状態の集合 Q および入力記号の集合 Σ を

$Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma := \{0, 1\}$

で定める. また状態遷移関数 $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を

$\delta(q_i, 0) := q_0$ $(i \in \{0, 1, 2, 3\})$, $\delta(q_i, 1) := q_{i+1}$ $(i \in \{0, 1, 2, 3\})$, $\delta(q_4, 0) := q_4$, $\delta(q_4, 1) := q_4$

で定める. また q_0 を初期状態とし, 受理状態は q_3 のみであるとする: $F := \{q_3\}$. このとき

$\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$, $\delta(q_0, 00) = q_0$, $\delta(q_0, 01) = q_1$, $\delta(q_0, 10) = q_0$, $\delta(q_0, 11) = q_2$,
$\delta(q_0, 000) = q_0$, $\delta(q_0, 001) = q_1$, $\delta(q_0, 010) = q_0$, $\delta(q_0, 011) = q_2$,
$\delta(q_0, 100) = q_0$, $\delta(q_0, 101) = q_1$, $\delta(q_0, 110) = q_0$, $\delta(q_0, 111) = q_3$,
$\delta(q_0, 0000) = q_0, \ldots, \delta(q_0, 1111) = q_4, \ldots,$

であるので, $T(M)$ の元としては例えば 111, 0111, 1010111 等を挙げることができる.

第２章　オートマトン

2.3　正規表現と正規言語

Σ をアルファベットとする. Σ の上の **正規表現** の全てからなる集合 R-exp(Σ) を次のように定義する:

$\varepsilon, \emptyset \in \text{R-exp}(\Sigma)$,
$a \in \Sigma \implies a \in \text{R-exp}(\Sigma)$,
$E, F \in \text{R-exp}(\Sigma) \implies E+F,\ EF,\ E^* \in \text{R-exp}(\Sigma)$.

例　$\Sigma := \{0,1\} \implies 0, 1, 0+0,\ 0+1,\ 1+0,\ 1+1,\ 00, 01, 10, 11, 0^*, 1^* \in \text{R-exp}(\Sigma)$.

Σ の上の正規表現 $E \in \text{R-exp}(\Sigma)$ が表す言語 $\|E\|$ (**正規言語** という) を次のように定義する:

$\|\varepsilon\| := \{\varepsilon\}$,　$\|\emptyset\| := \{\ \}$ (空集合),　$\|a\| := \{a\}$ $(a \in \Sigma)$,
$\|E+F\| := \|E\| \cup \|F\|$,　$\|EF\| := \|E\| \cdot \|F\|$,　$\|E^*\| := \|E\|^*$.

例　アルファベット $\Sigma := \{0,1\}$ の上の正規表現 $E := (0+1)^* \in \text{R-exp}(\Sigma)$ が表す正規言語 $\|(0+1)^*\|$ は

$$\|(0+1)^*\| = \|0+1\|^* = (\|0\| \cup \|1\|)^* = (\{0\} \cup \{1\})^* = \{0,1\}^*$$

であり, 従って正規言語 $\|(0+1)^*\|$ は Σ の上の全ての語からなる集合である.

例　アルファベット $\Sigma := \{0,1\}$ の上の正規表現 $E := 0^*1 \in \text{R-exp}(\Sigma)$ が表す正規言語 $\|0^*1\|$ は

$$\|0^*1\| = \|0^*\| \cdot \|1\| = \|0\|^* \cdot \|1\| = \{0\}^* \cdot \{1\} = \{0^n 1 \mid n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$$

であり, 従って正規言語 $\|0^*1\|$ は 0 が有限個続いた後で 1 が一つ現れる形をした全ての語からなる集合である.

例　アルファベット $\Sigma := \{0,1\}$ の上の正規表現 $E := (0+(10)+(110)+(1110))^* \in \text{R-exp}(\Sigma)$ が表す正規言語 $\|(0+(10)+(110)+(1110))^*\|$ は

$$\begin{aligned}\|(0+(10)+(110)+(1110))^*\| &= \|(0+(10)+(110)+(1110))^*\| \\ &= \|0+(10)+(110)+(1110)\|^* \\ &= (\|0\| \cup \|10\| \cup \|110\| \cup \|1110\|)^* \\ &= (\{0\} \cup \{10\} \cup \{1^2 0\} \cup \{1^3 0\})^* \\ &= \{0, 10, 1^2 0, 1^3 0\}^*\end{aligned}$$

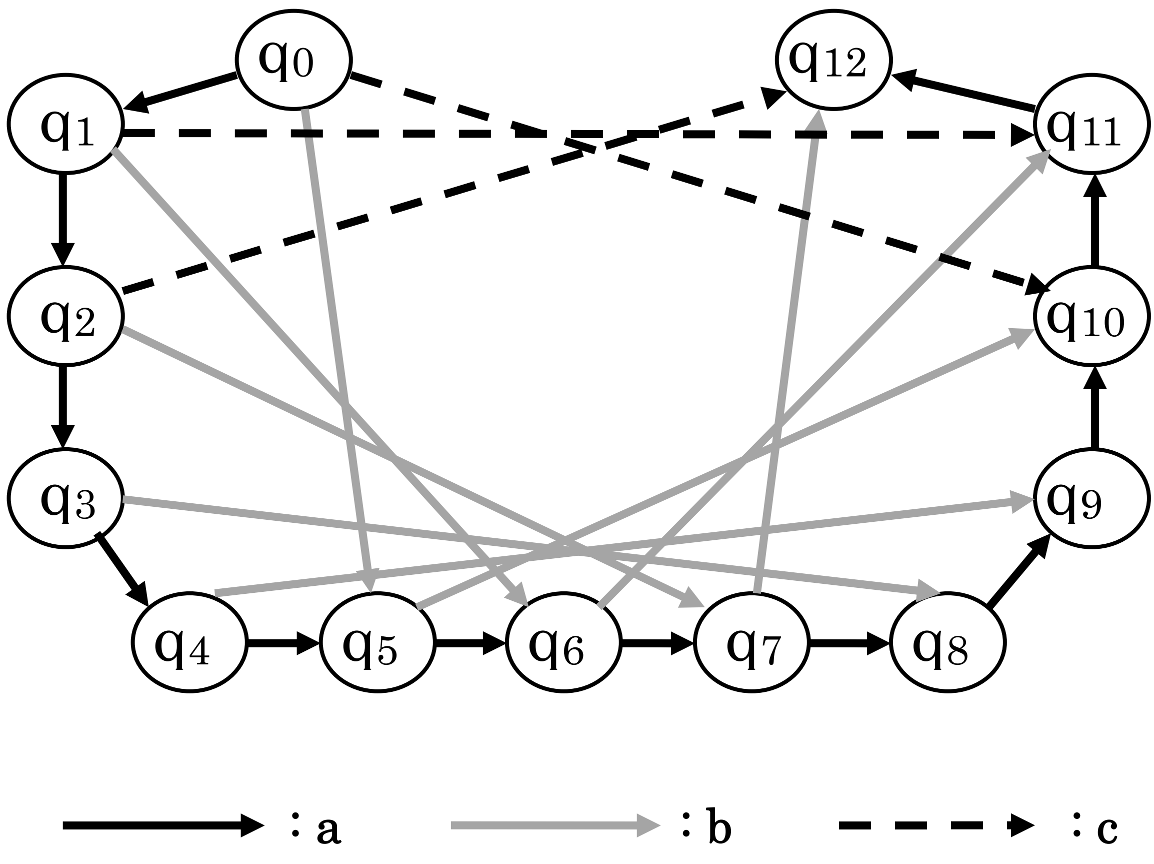
である. 従って正規言語 $\|(0+(10)+(110)+(1110))^*\|$ は Σ の上の言語で, 1 が 4 回続くことはなく, かつ最後に 0 が続く形をした Σ の上の語を全て集めて作った集合である.

次の二つの定理が知られている.

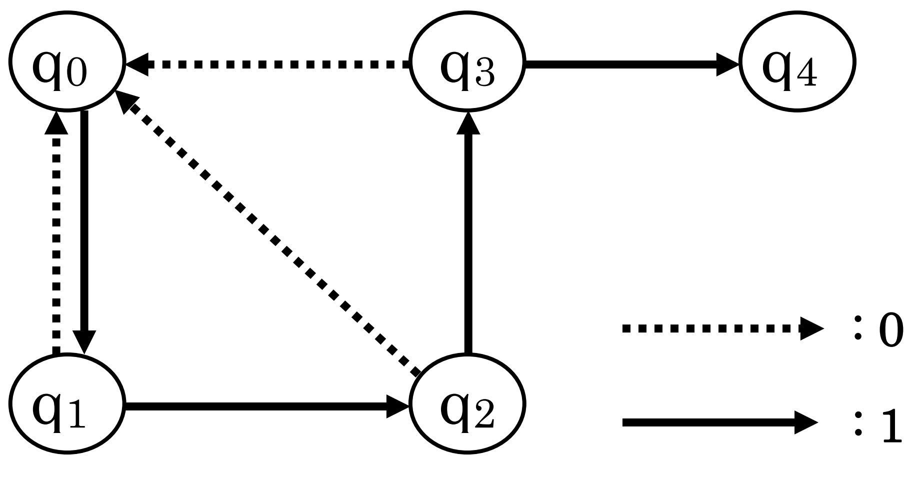
定理　アルファベット Σ の上の任意の正規表現 E に対し, Σ を入力記号の集合とするある有限オートマトン M が $T(M) = \|E\|$ を満たす.

定理　M を有限オートマトンとし, Σ を M の入力記号の集合とする. このとき Σ の上のある正規表現 E が $\|E\| = T(M)$ を満たす.

2.2 節の一つ目の例（自動販売機）



2.2 節の二つ目の例



注：始点と終点が同じ矢印は省略されている。

計算機科学 II　第２章演習問題

(a)　有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を次のように定める:
Q は 4 つの元 q_0, q_1, q_2, q_3 からなり ($Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$), $F := \{q_2\}$ とおく;
$\Sigma := \{0, 1\}$ とおく;
$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を次のように定める:

$$\delta(q_0, 0) := q_0, \quad \delta(q_0, 1) := q_1, \quad \delta(q_1, 0) := q_1, \quad \delta(q_1, 1) := q_2,$$
$$\delta(q_2, 0) := q_2, \quad \delta(q_2, 1) := q_3, \quad \delta(q_3, 0) := q_3, \quad \delta(q_3, 1) := q_3.$$

(a1)　Σ^* の元 01, 10, 11, 000, 011, 110, 111 の各々は $T(M)$ に含まれるかどうかを判定せよ.
(a2)　$T(M)$ を求めよ.
(a3) $T(M) = \|E\|$ を満たす Σ の上の正規表現 E を求めよ.

(b)　有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を次のように定める:
Q は 4 つの元 q_0, q_1, q_2, q_3 からなり, $F := \{q_3\}$ とおく;
$\Sigma := \{0, 1\}$ とおく;
$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を次のように定める:

$$\delta(q_0, 0) := q_1, \quad \delta(q_0, 1) := q_2, \quad \delta(q_1, 0) := q_2, \quad \delta(q_1, 1) := q_3,$$
$$\delta(q_2, 0) := q_3, \quad \delta(q_2, 1) := q_2, \quad \delta(q_3, 0) := q_3, \quad \delta(q_3, 1) := q_3.$$

(b1)　Σ^* の元 01, 10, 11, 000, 011, 110, 111 の各々は $T(M)$ に含まれるかどうかを判定せよ.
(b2)　$T(M) = (\{01\} \cup A) \cdot \{0, 1\}^*$ が成り立つように Σ の上の言語 A を求めよ.
(b3) $T(M) = \|E\|$ を満たす Σ の上の正規表現 E を求めよ.

(c)　2.2 節の二つ目の例に現れる有限オートマトン M に対し $T(M)$ を求め, さらに $T(M) = \|E\|$ を満たす Σ の上の正規表現 E を求めよ (2.3 節の最後の例を参考にすること).

(d)　有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を次のように定める:
Q は 4 つの元 q_0, q_1, q_2, q_3 からなり, $F := \{q_2\}$ とおく;
$\Sigma := \{0, 1\}$ とおく;
$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を次のように定める:

$$\delta(q_0, 0) := q_0, \quad \delta(q_0, 1) := q_1, \quad \delta(q_1, 0) := q_1, \quad \delta(q_1, 1) := q_2,$$
$$\delta(q_2, 0) := q_1, \quad \delta(q_2, 1) := q_3, \quad \delta(q_3, 0) := q_3, \quad \delta(q_3, 1) := q_0.$$

(d1)　Σ^* の元 010, 011, 101, 110, 111, 1011, 1101, 1111011 の各々は $T(M)$ に含まれるかどうかを判定せよ.
(d2)　$T(M)$ を求めよ.
(d3)　$T(M) = \|E\|$ を満たす Σ の上の正規表現 E を求めよ.

計算機科学 II　期末試験　(平成２５年２月１日実施)

学生番号・氏名： ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ・ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の問いに答えよ．答えを求める過程をできる限りていねいに記述すること．

[1] (1) Boole 代数 B_4 の元 $a := (0,0,1,0)$, $b := (1,0,1,1)$ に対し，$a \cup b$, $b \cap \bar{a}$, $\bar{a} \cup \bar{b}$, $\bar{b} \cap a$ を求めよ．

(2) 3 変数 Boole 関数 f を $f(x_1, x_2, x_3) := (\bar{x}_1 \cap \bar{x}_2) \cup (x_2 \cap \bar{x}_3) \cup (x_3 \cap \bar{x}_1)$ で定める．このとき $f(0,1,0)$, $f(1,0,1)$, $f(1,1,0)$ を求めよ．

(3) 3 変数 Boole 関数 f は $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ で 1 に等しく，他の点では 0 に等しいとする．このとき f を変数 x_1, x_2, x_3 を用いて表せ．

(4) 3 変数 Boole 関数 f は $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ で 0 に等しく，他の点では 1 に等しいとする．このとき f を変数 x_1, x_2, x_3 を用いて表せ．

[2] 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を次のように定める:

· $Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ とおき, q_0 を初期状態とし, $F := \{q_3\}$ とおく;

· $\Sigma := \{0, 1\}$ とおく;

· $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ を $\delta(q_0, 0) := q_0$, $\delta(q_0, 1) := q_1$, $\delta(q_1, 0) := q_2$, $\delta(q_1, 1) := q_3$, $\delta(q_2, 0) := q_2$, $\delta(q_2, 1) := q_3$, $\delta(q_3, 0) := q_3$, $\delta(q_3, 1) := q_3$ で定める.

(1) Σ^* の元 01, 10, 11, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 の各々は $T(M)$ に含まれるかどうかを判定せよ.

(2) $T(M)$ を求めよ.

(3) $T(M) = \|E\|$ を満たす Σ の上の正規表現 E を求めよ.