## 第１章 Euclid 空間（その１）

### 1.1 数直線の開集合

Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は最も基本的な位相空間である．まず $n=1$ の場合の Euclid 空間, つまり数直線 $\boldsymbol{R}$ を考えよう．$a$ を $\boldsymbol{R}$ の 1 点とし, $\varepsilon$ を正の数とする．このとき $a$ を含む開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ を $a$ の **$\varepsilon$-近傍** という．我々は, $a$ の近くの点, または近いところにある点と言うときには, 十分小さい (と我々が思える) 正数 $\varepsilon > 0$ に対し $a$ の $\varepsilon$-近傍に含まれる点を自然に想起している．

$\varepsilon$-近傍のような $\boldsymbol{R}$ の各点の近くを定める部分集合の族に着目することが, 一般に「位相」というものを考える出発点である．そして「$\varepsilon$-近傍の一般化」と言える開集合の概念は, 本講義において現れる殆どの概念について言及するために必要である．

**定義** $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ が **開集合** であるとは, $A$ の各点 $a$ に対しある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $a$ の $\varepsilon$-近傍 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が $A$ に含まれるときにいう．

$$\boxed{A \text{ が開集合である} \overset{\text{定義}}{\iff} \text{「} a \in A \implies \exists \varepsilon > 0, (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A \text{」}}$$

**例** 開区間 $(c,d)$ は開集合である．なぜならば, $a \in (c,d)$ に対し二つの正数 $a-c$ と $d-a$ の小さい方を $\varepsilon$ とおくと, $\varepsilon$ は正数でありそして $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (c,d)$ が成り立つからである．

**注意** 開集合 $A$ は幾つかの開区間の和集合として表される．なぜならば, 各 $a \in A$ に対し $(a-\varepsilon_a, a+\varepsilon_a) \subset A$ を満たす正数 $\varepsilon_a > 0$ が存在するので, $A$ を $A = \displaystyle\bigcup_{a \in A} (a-\varepsilon_a, a+\varepsilon_a)$ と表すことができるからである．

**定理** (a) 空集合 $\emptyset$ および $\boldsymbol{R}$ 全体は開集合である．
(b) 有限個の開集合の共通部分は開集合である．
(c) 有限または無限個の開集合の和集合は開集合である．

(a) の証明　任意の $a \in \boldsymbol{R}$ および正数 $\varepsilon > 0$ に対し $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \boldsymbol{R}$ が成り立つので, $\boldsymbol{R}$ は開集合である．空集合 $\emptyset$ については, 空集合は元を一つも含まないので開集合の定義における仮定「$a \in A$」を満たしていない．一般に $P \Longrightarrow Q$ という形の命題において $P$ が正しくない命題であるときには, $P \Longrightarrow Q$ は正しい命題であると考えることになっている．従って, 空集合 $\emptyset$ は開集合である (単に「空集合は開集合である」と思い込んでしまっても良い)．　□

(b) の証明　$O_1, O_2, \ldots, O_n$ を $n$ 個の開集合とする．$a$ を共通部分 $B := \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ の元とする．このとき各 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し, ある正数 $\varepsilon_k > 0$ が存在して $(a-\varepsilon_k, a+\varepsilon_k) \subset O_k$ が成り立つ．$\varepsilon$ を $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ の最小値とすると, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset O_k$ が成り立つ．よって $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset B$ が成り立つ．よって $B$ は開集合である．　□

(c) の証明　$\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を有限または無限個の開集合の族とする．添字の集合 $\Lambda$ としては, 例えば有限個の数字の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$, 自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ または実数の集合 $\boldsymbol{R}$ を想起すれば十分である．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し開集合 $O_\lambda$ が定まり, $\lambda \in \Lambda$ を動かして得られる開集合を集めて作った族が $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ である．$a$ を和集合 $C := \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ の元とする．このときある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $a \in O_{\lambda_0}$ が成り立つ．$O_{\lambda_0}$ は開集合なので, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$ が成り立つ．よって $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset C$ が成り立つ．よって $C$ は開集合である．　□

## 第１章　Euclid 空間（その２）

### 1.2　数直線の閉集合

**定義**　$A$ を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする．$a \in \boldsymbol{R}$ が $A$ の **集積点** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $a$ の $\varepsilon$-近傍 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が $a$ と異なる $A$ の点を含むときにいう．

$$\boxed{a \in \boldsymbol{R} \text{ が } A \text{ の集積点である} \overset{\text{定義}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset}$$

$a \in \boldsymbol{R}$ が $A$ の集積点であるということを感覚的には「$a$ のどんなに近くにも $a$ と異なる $A$ の点が存在する」と言うことができる．上の定義において, $a$ は $A$ の点である必要はない．

**例**　$A := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}$ とおく．このとき $a := 0$ は $A$ の集積点である．なぜならば, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $(-\varepsilon, \varepsilon)$ は $a = 0$ と異なる $A$ の点 (例えば $\varepsilon/2$) を含むからである．

**定義**　$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ が **閉集合** であるとは, $A$ の集積点が全て $A$ に含まれるときにいう．

$$\boxed{A \text{ が閉集合である} \overset{\text{定義}}{\iff} \text{「} a \text{ が } A \text{ の集積点である} \implies a \in A \text{」}}$$

**例**　閉区間 $[c, d]$ は閉集合である．$a \notin [c, d]$ に対し二つの正数 $|a-c|$, $|a-d|$ の小さい方を $\varepsilon > 0$ とおくと, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ は $[c, d]$ の点を含まない, すなわち $a$ は $[c, d]$ の集積点ではない．従って対偶を考えることで, $a$ が $[c, d]$ の集積点であるならば $a \in [c, d]$ がわかる．

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ の **補集合** $A^c$ とは, $\boldsymbol{R}$ と $A$ の差集合 $\boldsymbol{R} \setminus A$ のことである．一般に, 「補集合」という言葉は, 「全体」とみなされる集合 (今の話では $\boldsymbol{R}$) がまずあってその部分集合に対し上述のように用いられる．また「全体」とみなされる集合を **空間** と呼ぶことが多い．

**定理**　$\boldsymbol{R}$ の開集合の補集合は閉集合であり, 閉集合の補集合は開集合である．

前半の証明　$O$ を開集合とする．$O$ の補集合 $O^c$ が閉集合であることを示すには, $O^c$ に含まれない点が $O^c$ の集積点ではないことを示せばよい．$a$ を $O^c$ に含まれない点とすると, $a \in O$ が成り立つ．$O$ は開集合なので, 正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset O$ が成り立つ．よって $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap O^c = \emptyset$ が成り立つので, $a$ は $O^c$ の集積点ではない．　□

後半の証明　$F$ を閉集合とする．このとき $F$ に含まれない点 $a$ は $F$ の集積点ではない．よってある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap F = \emptyset$ が成り立つ．よって $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset F^c$ が成り立つので, $F^c$ は開集合である．　□

**定義**　$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ の **閉包** $\bar{A}$ とは, $A$ に $A$ の全ての集積点を加えた集合のことである．

**定理**　$A$ の閉包 $\bar{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合である．

$\bar{A}$ は閉集合であることの証明　$a$ を $\bar{A}$ に含まれない点とする．このとき $a$ は $A$ に含まれず, かつ $A$ の集積点でもない．よってある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A = \emptyset$ が成り立つ．$a$ が $\bar{A}$ の集積点であると仮定する．このとき $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ が成り立つ．これは $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が $A$ の集積点を含むことを意味する．$b$ をそのような点の一つとする．開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ は開集合なので, 正数 $\varepsilon' > 0$ が存在して $(b-\varepsilon', b+\varepsilon') \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ が成り立つ．$b$ は $A$ の集積点なので, $(b-\varepsilon', b+\varepsilon')$ は $A$ の点を含むことになるが, これは $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A = \emptyset$ に反する．よって $a$ は $\bar{A}$ の集積点ではない．よって $A$ の閉包 $\bar{A}$ は閉集合である．　□

$A$ を含む閉集合は $\bar{A}$ を含むことの証明　$F$ は閉集合で $A$ を含むとする．$a$ を $A$ の集積点とするとき, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ が成り立つ．$A \subset F$ なので, $a$ は $F$ の集積点である．$F$ は閉集合なので, $a \in F$ が成り立つ．よって $\bar{A} \subset F$ が成り立つ．　□

**幾何概論 I** 平成２４年４月１１日

## 第１章 Euclid 空間（その３）

### 1.3 一般の Euclid 空間の開集合・閉集合

一般の $n \in \boldsymbol{N}$ に対する Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ についても 1.1 節, 1.2 節と同様の議論を行なうことができる. $a$ を $\boldsymbol{R}^n$ の 1 点とする. $\boldsymbol{R}^n$ の点 $x$ に対し,

$$|x-a| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)^2} \qquad (\text{但し } a := (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \ x := (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

とおく. 正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 集合 $B_\varepsilon(a) := \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid |x-a| < \varepsilon\}$ を $a$ の **$\varepsilon$-近傍** という. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $A$ が **開集合** であるとは, $A$ の各点 $a$ に対し正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ が $A$ に含まれるときにいう.

$$\boxed{A \text{ が開集合である} \overset{\text{定義}}{\iff} 「a \in A \implies \exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(a) \subset A」}$$

この定義は 1.1 節における開集合の定義を含む.

**例** $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$ を $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ とする. $a := (a_1, a_2)$ を $A$ の点とする. このとき $\varepsilon := 1 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ とおくと, $\varepsilon$ は正数でありそして $B_\varepsilon(a)$ は $A$ に含まれる. よって $A$ は開集合である.

一般に, 正数 $\varepsilon > 0$ に対し $\boldsymbol{R}^n$ の各点 $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ は開集合である.

1.1 節と同様にして, 次の定理を示すことができる.

**定理** (a) 空集合 $\emptyset$ および $\boldsymbol{R}^n$ 全体は開集合である.
(b) $\boldsymbol{R}^n$ の有限個の開集合の共通部分は開集合である.
(c) $\boldsymbol{R}^n$ の有限または無限個の開集合の和集合は開集合である.

$A$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする. $a \in \boldsymbol{R}^n$ が $A$ の **集積点** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ が $a$ と異なる $A$ の点を含むときにいう.

$$\boxed{a \in \boldsymbol{R}^n \text{ が } A \text{ の集積点である} \overset{\text{定義}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset}$$

$A$ が **閉集合** であるとは, $A$ の集積点が全て $A$ に含まれるときにいう.

$$\boxed{A \text{ が閉集合である} \overset{\text{定義}}{\iff} 「a \text{ が } A \text{ の集積点である} \implies a \in A」}$$

**例** $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$ を $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}$ とする. $a := (a_1, a_2)$ を $A$ に含まれない点とする. このとき $a_1^2 + a_2^2 > 1$ が成り立つ. よって $\varepsilon := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - 1$ とおくと, $\varepsilon$ は正数でありそして $B_\varepsilon(a)$ は $A$ の点を含まない. よって $a$ は $A$ の集積点ではないことがわかる. よって $A$ は閉集合である.

1.2 節と同様にして, 次の定理を示すことができる.

**定理** $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 $O$ の補集合 $O^c$ は閉集合であり, 閉集合 $F$ の補集合 $F^c$ は開集合である.

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $A$ の **閉包** $\bar{A}$ とは, $A$ に $A$ の全ての集積点を加えた集合のことである. 1.2 節と同様にして, 次の定理を示すことができる.

**定理** $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $A$ の閉包 $\bar{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合である.

## 幾何概論 I　第１章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a) 閉区間 $[c,d]$ は開集合ではないことを示せ. また開区間 $(c,d)$ は閉集合ではないことを示せ.

(b) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ が上に有界であるとする. $A$ の上限 $\sup A$ が $A$ に含まれないとき, $\sup A$ は $A$ の集積点であることを示せ.

(c) 全ての有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ の閉包 $\overline{\boldsymbol{Q}}$ は $\boldsymbol{R}$ に等しいことを示せ.

(d) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A := \{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$ は開集合であることを示し, また閉集合ではないことを示せ. また $B := \{(x,y) \mid |x|<1,\ |y|<1\}$ についても考えよ.

(e) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $C := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geqq 1\}$ は閉集合であることを示し, また開集合ではないことを示せ. また $D := \{(x,y) \mid |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1\}$ についても考えよ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/H24igI.html

## 第２章　距離空間（その１）

### 2.1　距離の公理

$\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 $a, b$ に対し,

$$d(a,b) := |a-b| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2} \qquad (a := (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \ b := (b_1, b_2, \ldots, b_n))$$

とおく．この式が定める $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $d : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は次の (i), (ii), (iii) を満たす:

(i) $d(a,b) \geqq 0$ かつ「$d(a,b) = 0 \iff a = b$」,

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$,

(iii) $d(a,c) \leqq d(a,b) + d(b,c)$.

(i), (ii) が成り立つことは明らかである．(iii) を示したい．$x := a-b$, $y := b-c$ とおくと, $(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|x||y| - x\cdot y)$ が成り立つ, 但し $x \cdot y$ は $x$ と $y$ の内積 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ である．この右辺は Schwartz の不等式によって 0 以上である．よって $|x+y| \leqq |x| + |y|$ がわかり，これは $d(a,c) \leqq d(a,b) + d(b,c)$ である．

一般に, 空間 $S$ に対し, $S \times S$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $d : S \times S \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で, $a, b, c \in S$ に対し上の (i), (ii), (iii) が成り立つものを $S$ の **距離** という．そして一つの距離が付与された空間を **距離空間** という．上の (i), (ii), (iii) を **距離の公理** という．前段落における $d$ は $\boldsymbol{R}^n$ の距離である．

**例**　$\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 $a, b$ に対し,

$$d(a,b) := \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \qquad (a := (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \ b := (b_1, b_2, \ldots, b_n))$$

とおく．このとき $d : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の距離である．明らかに $d(a,b) \geqq 0$ である．また $d(a,b) = 0$ ならば, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し $a_k - b_k = 0$ なので, $a = b$ が成り立つ．また $a = b$ ならば $d(a,b) = 0$ である．よって $d$ は (i) を満たす．また明らかに $d(a,b) = d(b,a)$ であるので, $d$ は (ii) を満たす．また

$$d(a,c) = \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k| \leqq \sum_{k=1}^{n}(|a_k - b_k| + |b_k - c_k|) = d(a,b) + d(b,c)$$

より, $d$ は (iii) を満たすことがわかる．

**例**　$\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 $a, b$ に対し,

$$d(a,b) := \max_{k=1,2,\ldots,n} |a_k - b_k| \qquad (a := (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \ b := (b_1, b_2, \ldots, b_n))$$

とおく．このとき $d : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の距離である．(i), (ii) については一つ前の例と同様に考えればわかる．(iii) については, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し $|a_m - c_m| = \displaystyle\max_{k=1,2,\ldots,n} |a_k - c_k|$ が成り立つとすると,

$$d(a,c) = |a_m - c_m| \leqq |a_m - b_m| + |b_m - c_m| \leqq \max_{k=1,2,\ldots,n} |a_k - b_k| + \max_{k=1,2,\ldots,n} |b_k - c_k| = d(a,b) + d(b,c)$$

よりわかる．

## 第２章　距離空間（その２）

### 2.2　距離空間の位相

距離空間についても第１章と同様の議論を行なうことができる．$S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする．$S$ の点 $a$ および正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 集合 $B_\varepsilon(a) := \{x \in S \mid d(x,a) < \varepsilon\}$ を $a$ の **ε-近傍** という．$S$ の部分集合 $A$ が **開集合** であるとは, $A$ の各点 $a$ に対し正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ が $A$ に含まれるときにいう．

**例**　$a$ を $S$ の点とし, $S$ の部分集合 $A$ を $A := B_1(a)$ とおく．$b$ を $A$ の点とし, $\varepsilon := 1 - d(a,b)$ とおく．このとき $B_\varepsilon(b)$ の点 $c$ に対し, 距離の公理 (iii) を用いて

$$d(a,c) \leqq d(a,b) + d(b,c) < d(a,b) + \varepsilon = 1$$

を得る．よって $c \in A$ なので, $B_\varepsilon(b) \subset A$ を得る．よって $A$ は開集合である．一般に, 正数 $\varepsilon > 0$ に対し $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ は開集合である．

第１章の 1.1 節と同様にして, 次の定理を示すことができる．

**定理**　(a) 空集合 $\emptyset$ および $S$ 全体は開集合である．
(b) $S$ の有限個の開集合の共通部分は開集合である．
(c) $S$ の有限または無限個の開集合の和集合は開集合である．

$A$ を $S$ の部分集合とする．$a \in S$ が $A$ の **集積点** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ が $a$ と異なる $A$ の点を含むときにいう．$A$ が **閉集合** であるとは, $A$ の集積点が全て $A$ に含まれるときにいう．第１章の 1.2 節と同様にして, 次の定理を示すことができる．

**定理**　$S$ の開集合の補集合は閉集合であり, 閉集合の補集合は開集合である．

$S$ の部分集合 $A$ の **閉包** $\bar{A}$ とは, $A$ に $A$ の全ての集積点を加えた集合のことである．第１章の 1.2 節と同様にして, 次の定理を示すことができる．

**定理**　$S$ の部分集合 $A$ の閉包 $\bar{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合である．

**注意**　距離空間は, 2 点がどれだけ近いか (遠いか) を数値で表すことができるという観点では, わかりやすい空間であると言うことができる．距離空間特有の議論の対象もあり, 距離空間について理解することで位相空間論の多くの事柄を理解できる．一方で, 距離空間であるとは限らない位相空間も議論の対象になることがある．また開集合に着目して議論するとき, 特定の距離の性質が重要ではないこともある．2.1 節の冒頭に挙げた $\boldsymbol{R}^n$ の距離やその後で挙げた $\boldsymbol{R}^n$ の別の二つの距離が定める各点の $\varepsilon$-近傍は互いに異なるにもかかわらず, これらの距離が定める開集合は全く同一なのである (つまり, 上述のある距離について $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合が開集合であるならば, 残りの距離に関しても開集合なのである)．ある集合に複数の距離を与えることができるとしても, どの部分集合が開集合であるかにのみ依存する性質が存在する．第３章では, 距離の存在を仮定せず, 「開集合」とみなされる部分集合が予め指定されている空間について考察する．

# 幾何概論 I　第２章演習問題

**学生番号:** ______________________　　**氏名:** ______________________

(a) $\boldsymbol{R}^2$ の距離 $d_1$, $d_2$ を

$$d_1(a,b) := \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}, \qquad d_2(a,b) := \max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$$

とおく, 但し $a := (a_1, a_2)$, $b := (b_1, b_2)$ である. 距離 $d_1$ に関する開集合は距離 $d_2$ に関する開集合であることを示せ. また距離 $d_2$ に関する開集合は距離 $d_1$ に関する開集合であることを示せ.

(b) $S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする. 点 $a \in S$ に対し,

$$A := \{x \in S \mid d(x,a) \leqq 1\}, \qquad B := \{x \in S \mid 1 < d(x,a) < 2\}$$

とおく. このとき $A$ は閉集合であることを示せ. また $B$ は開集合であることを示せ.

(c) $C[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体からなる集合とする. $f$, $g \in C[0,1]$ に対し,

$$d(f,g) := \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|, \qquad d'(f,g) := \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

とおく. このとき $d$, $d'$ は $C[0,1]$ の距離であることを示せ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

## 第３章　一般の位相空間（その１）

### 3.1　位相空間の開集合・閉集合

空間 $S$ の **開集合系** (または **位相**) とは, $S$ の部分集合の族 $\mathcal{O}$ で次の性質を持つもののことである:

(i) $\emptyset, S \in \mathcal{O}$,

(ii) 有限個の $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{O}$ に対し, これらの共通部分 $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ は $\mathcal{O}$ の元である,

(iii) 集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ O_\lambda \in \mathcal{O}\}$ に対し, 和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は $\mathcal{O}$ の元である.

開集合系を付与された空間を **位相空間** という.「$S$ が位相空間である」ことを「$S$ には位相が導入されている」ということもある. $S$ が位相空間であるとき, 開集合系 $\mathcal{O}$ の各元を $S$ の **開集合** という. 上の (i), (ii), (iii) を **開集合系の公理** という.

**例** 2.2 節で見たように距離空間は開集合系を持つので, 距離空間は位相空間である.

**注意** $\boldsymbol{R}^n$ には自然な距離がありまた 2.1 節で他に二つの距離の例を挙げたが, これらが定める開集合系は同一である. よってこれらの距離から得られる位相空間は同一である.

**例** 空間 $S$ に対し, $\mathcal{O} := \{\emptyset, S\}$ は明らかに開集合系である. この開集合系を **密着位相** という.

**例** 空間 $S$ に対し, $S$ の部分集合全体からなる集合 (べき集合という) は開集合系である. この開集合系を **離散位相** という.

$S$ を位相空間とする. $S$ の点 $a$ に対して, $a$ を含む開集合を $a$ の **近傍** という. $a$ の近傍の全体からなる集合を $a$ の **全近傍系** といい, $\mathcal{U}(a)$ で表す. また $\mathcal{U}(a)$ の部分集合 $\mathcal{V}(a)$ が **基本近傍系** であるとは, 任意の $U \in \mathcal{U}(a)$ に対しある $V \in \mathcal{V}(a)$ が存在して $V \subset U$ が成り立つときにいう.

$$\boxed{\mathcal{V}(a) \text{ が基本近傍系である} \overset{\text{定義}}{\iff} \forall U \in \mathcal{U}(a), \exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset U}$$

距離空間の各点 $a$ の基本近傍系 $\mathcal{V}(a)$ として $\{B_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$ を採用することができる.

**定理** $S$ を位相空間とし, $S$ の各点 $a$ の基本近傍系 $\mathcal{V}(a)$ が与えられているとする. このとき $S$ の部分集合 $A$ が開集合であることと, $A$ の各点 $a$ に対しある $V \in \mathcal{V}(a)$ が存在して $V \subset A$ が成り立つことは同値である.

$$\boxed{A \subset S \text{ が開集合である} \iff \forall a \in A, \exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset A}$$

証明　$A$ が開集合であるとする. このとき各点 $a \in A$ に対し, $A$ は $a$ の全近傍系 $\mathcal{U}(a)$ の元である. よってある $V \in \mathcal{V}(a)$ が存在して $V \subset A$ が成り立つ. 逆に, 各点 $a \in A$ に対しある $V_a \in \mathcal{V}(a)$ が存在して $V_a \subset A$ が成り立つとする. このとき開集合系の公理 (iii) から和集合 $\displaystyle\bigcup_{a \in A} V_a$ は開集合であることがわかり, そしてこの集合は $A$ に等しい. よって $A$ は開集合である. □

位相空間 $S$ の部分集合 $F$ が **閉集合** であるとは, $F$ の補集合 $F^c$ が $S$ の開集合であるときにいう.

## 第３章　一般の位相空間（その２）

### 3.2　閉包および開核

$S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の部分集合とする. $S$ の点 $a$ に対し,

- $a$ のある近傍が $A$ に含まれるとき, $a$ を $A$ の **内点** といい,
- $a$ の任意の近傍が $A$ の点を含むとき, $a$ を $A$ の **触点** といい,
- $a$ の任意の近傍が $a$ とは異なる $A$ の点を含むとき, $a$ を $A$ の **集積点** といい,
- $a$ の任意の近傍が $A$ の点を含みかつ $A^c$ の点も含むとき, $a$ を $A$ の **境界点** といい,
- $a \in A$ でありかつ $a$ のある近傍が $a$ 以外に $A$ の点を含まないとき, $a$ を $A$ の **孤立点** という.

$A$ の **閉包** $\bar{A}$ とは, $A$ の触点全体からなる集合である, つまり $A$ に $A$ の集積点を全て加えた集合である.

**定理**　$A$ の閉包 $\bar{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合である.

$\bar{A}$ が閉集合であることの証明　$\bar{A}$ に含まれない点 $a$ は $A$ の触点ではない. よって $a$ のある近傍 $V$ が $A \cap V = \emptyset$ を満たす. $b \in V$ に対し $V$ は $b$ の近傍でありそして $A$ の点を含まないので, $b$ は $A$ の触点ではない. よって $\bar{A} \cap V = \emptyset$ つまり $V \subset (\bar{A})^c$ が成り立つ. これは $(\bar{A})^c$ が開集合であることを意味する. よって $\bar{A}$ は閉集合である. □

$A$ を含む閉集合は $\bar{A}$ を含むことの証明　$F$ は閉集合で $A$ を含むとする. $F^c$ は開集合なので, $a \in F^c$ に対し $F^c$ は $a$ の近傍である. $A \cap F^c = \emptyset$ なので, $a$ は $A$ の触点ではない, つまり $a \in (\bar{A})^c$ が成り立つ. よって $a \in \bar{A}$ ならば $a \in F$ が成り立つ, つまり $\bar{A} \subset F$ が成り立つ. □

この定理を用いて, 次の定理を示すことができる.

**定理**　$A$ が閉集合であることと, $A = \bar{A}$ が成り立つことは同値である.

$A$ の **開核** (または **内部**) $A^\circ$ とは, $A$ の内点全体からなる集合である. $S$ の点 $a$ が $A$ の内点ではないことと, $a$ は $A^c$ の触点であることは同値である. よって次の定理を得る.

**定理**　$(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

この定理を用いて, 次の二つの定理を示すことができる.

**定理**　$A$ の開核 $A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の開集合である.

**定理**　$A$ が開集合であることと, $A = A^\circ$ が成り立つことは同値である.

$A$ の **境界** $\partial A$ とは, $A$ の境界点全体からなる集合である. $a \in \partial A$ であることと, $a$ が $A$ の触点でもありかつ $A^c$ の触点でもあることは同値である. よって $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ を用いて次の定理を得る.

**定理**　$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} \setminus A^\circ$.

$A$ の部分集合 $B$ が $A$ において **稠密** であるとは, $\bar{B} \supset A$ が成り立つときにいう. 特に, $S$ の部分集合 $D$ が $S$ において稠密であるとき, $D$ は **いたるところ稠密** であるという. また $\bar{D}$ が内点を持たない, すなわち $(\bar{D})^\circ = \emptyset$ であるとき, $D$ は **いたるところ非稠密** であるという. 例えば, 数直線 $\boldsymbol{R}$ において有理数全体からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ はいたるところ稠密であり, 整数全体からなる集合 $\boldsymbol{Z}$ はいたるところ非稠密である.

## 幾何概論 I　第３章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a)　$S$ を位相空間とする. 次の (a1), (a2), (a3) を示せ:

(a1) 空集合 $\emptyset$ および $S$ は閉集合である;

(a2) $S$ の有限個の閉集合 $F_1, F_2, \ldots, F_n$ に対し, これらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ は閉集合である;

(a3) 集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ F_\lambda$ は $S$ の閉集合$\}$ に対し, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合である.

(b)　$A$ を位相空間 $S$ の部分集合とする. 次の (b1), (b2), (b3) を示せ:

(b1) $A$ が閉集合であることと, $A = \bar{A}$ が成り立つことは同値である;

(b2) $A$ の開核 $A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の開集合である;

(b3) $A$ が開集合であることと, $A = A^\circ$ が成り立つことは同値である.

(c)　$S$ を位相空間とし, $A$, $B$ を $S$ の部分集合とする. 次を示せ:

$$\bar{A} = \bar{\bar{A}}\,, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \bar{\emptyset} = \emptyset, \quad A^\circ = (A^\circ)^\circ, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \quad S^\circ = S.$$

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

## 第４章　極限および連続性（その１）

### 4.1　点列の極限

空間 $S$ の **点列** とは, 自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ から $S$ への写像, またはこのような写像 $a$ による $\boldsymbol{N}$ の像の元を $\boldsymbol{N}$ の元の順序に応じて並べたもの $a(1), a(2), \ldots$ である. 普通, $n \in \boldsymbol{N}$ に対応する点 $a(n)$ を $a_n$ と記し, 点列 $a(1), a(2), \ldots$ を $\{a_n\}$ と記す.

位相空間 $S$ において, 点列 $\{a_n\}$ が点 $a \in S$ に **収束** するとは, $a$ の任意の近傍 $V$ に対しある自然数 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して $n \geqq n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n \in V$ が成り立つときにいう.

$$\boxed{\{a_n\} \text{ が } a \in S \text{ に収束する} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall V \in \mathfrak{U}(a), \exists n_0 \in \boldsymbol{N}\ (n \in \boldsymbol{N}, n \geqq n_0 \implies a_n \in V)}$$

点列 $\{a_n\}$ が $a \in S$ に収束するとき, このことを

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow a \quad (n \longrightarrow \infty)$$

で表し, $a$ を $\{a_n\}$ の **極限** という.

**例** 距離空間 $S$ の点列 $\{a_n\}$ が点 $a \in S$ に収束することは, $a$ の基本近傍系である $\{B_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$ ($B_\varepsilon(a)$ は $a$ の $\varepsilon$-近傍) の元 $V$ を任意にとったときこれに応じて上のような $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在することと同値である.

$$\boxed{\{a_n\} \text{ が } a \in S \text{ に収束する} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \boldsymbol{N}\ (n \in \boldsymbol{N}, n \geqq n_0 \implies a_n \in B_\varepsilon(a))}$$

$S$ が自然な距離を備えた数直線 $\boldsymbol{R}$ である場合には, 点列 $\{a_n\}$ は実数列であり, $a$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(a)$ は $B_\varepsilon(a) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ で与えられる. 従って上に述べた点列の収束の定義は実数列の収束の定義を含む.

**例** 空間 $S$ に離散位相を導入する: 開集合系をべき集合 ($S$ の部分集合全体からなる集合) とする. このとき $S$ の点列 $\{a_n\}$ が $S$ の点 $a$ に収束することと, ある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して $n \geqq n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n = a$ が成り立つことは同値である, というのは $a$ の近傍 $V$ として $V = \{a\}$ をとることができるからである.

**例** 空間 $S$ に密着位相を導入する: 開集合系を $\{\emptyset, S\}$ とする. このとき $S$ の任意の点 $a$ および任意の点列 $\{a_n\}$ に対し, $\{a_n\}$ は $a$ に収束する: $V := S$ は $a$ の唯一の近傍であり, $a_n$ は必ず $a_n \in V$ を満たす.

密着位相が導入された位相空間においては, 点列の極限に関する論点はあまりないように思われる. 実際の考察対象となる位相空間は Hausdorff の分離公理を満たしている場合が多い.

**Hausdorff の分離公理** 位相空間 $S$ の異なる 2 点 $a, b$ に対し, $a$ の近傍 $U$ および $b$ の近傍 $V$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を満たす.

Hausdorff の分離公理を満たす位相空間を **Hausdorff 空間** という.

**定理** Hausdorff 空間の点列が収束するならば, その極限は唯一つである.

証明　$\{a_n\}$ を Hausdorff 空間の点列とし, $a$ にも $b \neq a$ にも収束しているとする. このとき $a$ の近傍 $U$ および $b$ の近傍 $V$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を満たす. $\{a_n\}$ は $a$ に収束しているので, $U$ に対して $n_U \in \boldsymbol{N}$ が存在して $n \geqq n_U$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n \in U$ が成り立つ. また $\{a_n\}$ は $b$ にも収束しているので, $V$ に対して $n_V \in \boldsymbol{N}$ が存在して $n \geqq n_V$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n \in V$ が成り立つ. $n_0 := \max\{n_U, n_V\}$ とおくと, $n \geqq n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_n \in U \cap V$ が成り立つことになるが, これは $U \cap V = \emptyset$ に反する. よって $\{a_n\}$ が収束するならば, その極限は唯一つである. □

## 第４章　極限および連続性（その２）

### 4.2　写像の連続性

　$S, T$ を位相空間とする．$S$ から $T$ への写像 $f : S \longrightarrow T$ が点 $a \in S$ で **連続** であるとは，$f(a)$ の任意の近傍 $W$ に対して $a$ の近傍 $V$ が存在して $f(V) \subset W$ が成り立つときにいう．

$$\boxed{f : S \longrightarrow T \text{ が } a \in S \text{ で連続である } \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall W \in \mathcal{U}(f(a)),\ \exists V \in \mathcal{U}(a),\ f(V) \subset W}$$

写像 $f : S \longrightarrow T$ が **連続** であるとは，$S$ の各点で連続であるときにいう．

**例**　$S, T$ を距離空間とする．このとき $S$ から $T$ への写像 $f : S \longrightarrow T$ が点 $a \in S$ で連続であることは，$f(a)$ の基本近傍系である $\{B_\varepsilon(f(a)) \mid \varepsilon > 0\}$ の元 $W$ を任意にとったときこれに応じて $a$ の基本近傍系である $\{B_\delta(a) \mid \delta > 0\}$ の元 $V$ が存在して $f(V) \subset W$ が成り立つことと同値である．

$$\boxed{f : S \longrightarrow T \text{ が } a \in S \text{ で連続である } \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))}$$

$S$ も $T$ も自然な距離を備えた数直線 $\boldsymbol{R}$ である場合には，写像 $f : S \longrightarrow T$ は 1 変数関数である．従って上に述べた写像の連続性の定義は 1 変数関数の連続性の定義を含む．

**定理**　位相空間 $S$ から位相空間 $T$ への写像 $f : S \longrightarrow T$ に対し，次の (a), (b), (c) は互いに同値である:
(a) $f$ は連続である;
(b) $T$ の開集合 $O$ の $f$ による逆像 $f^{-1}(O)$ は $S$ の開集合である;
(c) $T$ の閉集合 $F$ の $f$ による逆像 $f^{-1}(F)$ は $S$ の閉集合である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) の証明　$T$ の開集合 $O$ および $f^{-1}(O)$ の点 $a$ に対し，$O$ は $f(a)$ の近傍である．(a) を仮定する．このとき $a$ のある近傍 $V$ が $f(V) \subset O$ を満たす．よって $V \subset f^{-1}(O)$ が成り立ち，$f^{-1}(O)$ は開集合であることがわかる．□
(b) $\Longrightarrow$ (a) の証明　(b) を仮定する．このとき $S$ の各点 $a$ に対し，$f(a)$ の近傍 $W$ の逆像 $f^{-1}(W)$ は $S$ の開集合である．よって $V := f^{-1}(W)$ は $a$ の近傍であり $f(V) \subset W$ を満たすので，$f$ は $a$ で連続であることがわかる．□

(b) $\Longrightarrow$ (c) の証明　(b) を仮定する．このとき $T$ の閉集合 $F$ に対し，$f^{-1}(F^c)$ は開集合である．よって

$$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(T \setminus F) = f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(F) = S \setminus f^{-1}(F) = (f^{-1}(F))^c$$

から，$f^{-1}(F)$ は $S$ の閉集合であることがわかる．□
(c) $\Longrightarrow$ (b) の証明　(c) を仮定する．このとき $T$ の開集合 $O$ に対し，$f^{-1}(O^c)$ は閉集合である．よって $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$ から，$f^{-1}(O)$ は $S$ の開集合であることがわかる．□

　この定理を用いて，次の定理を示すことができる．

**定理**　$S_1, S_2, S_3$ を位相空間とし，写像 $f_1 : S_1 \longrightarrow S_2$, $f_2 : S_2 \longrightarrow S_3$ は連続であるとする．このとき合成写像 $f := f_2 \circ f_1$ は連続である．

　$S, T$ を位相空間とする．このとき $S$ から $T$ への写像 $f : S \longrightarrow T$ が **同相写像** (または **位相写像**) であるとは，$f$ が全単射でありかつ $f$ も $f$ の逆写像 $f^{-1}$ も連続であるときにいう．また $S$ から $T$ への同相写像が存在するとき，$S$ と $T$ は **位相同型** (または **同相**) であるという．

# 幾何概論 I　第４章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a)　距離空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

(b)　空間 $S$ に離散位相を導入して得られる位相空間を $S_1$ とし, 密着位相を導入して得られる位相空間を $S_2$ とする. $S$ の恒等写像 Id を $S_1$ から $S_2$ への写像とみなしたとき, $\mathrm{Id}: S_1 \longrightarrow S_2$ は連続であることを示せ.

(c)　$S_1, S_2, S_3$ を位相空間とし, 写像 $f_1 : S_1 \longrightarrow S_2$, $f_2 : S_2 \longrightarrow S_3$ は連続であるとする. このとき合成写像 $f := f_2 \circ f_1$ は連続であることを示せ.

(d)　$S$ を位相空間とし, $f$ を $S$ 上で定義された実数値連続関数とする. このとき $\{a \in S \mid f(a) = 0\}$ は閉集合であることを示せ.

(e)　$S, T$ を位相空間とし, $f : S \longrightarrow T$ を $S$ から $T$ への連続写像とする. このとき $T$ の部分集合 $A \subset T$ に対し, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})$ および $f^{-1}(A^\circ) \subset (f^{-1}(A))^\circ$ を示せ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

## 第５章　様々な位相空間（その１）

### 5.1　部分空間

$S$ を位相空間とし, $\mathcal{O}$ を $S$ の開集合系とする．このとき $A \subset S$ に対し, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ は開集合系をなす．$\mathcal{O}_A$ を $A$ の $S$ からの **相対位相** という．$A$ に $\mathcal{O}_A$ を与えて位相空間とみなしたとき, $A$ を $S$ の **部分空間** という．

**注意**　相対位相に着目すると, 一つの集合に複数の位相を導入できることがわかる．例として, 数直線 $\boldsymbol{R}$ について考える．$\boldsymbol{R}$ には自然な位相 $\mathcal{O}$ を導入することができる．別の位相を導入するために, 写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $f(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$ で定義し, $f$ の像 $f(\boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}^2$ からの相対位相 $\mathcal{O}_f$ を導入する．このとき $\mathcal{O}' := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{O}_f\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合系をなす (開集合系の公理を満たす)．開集合系 $\mathcal{O}'$ を付与することによって $\boldsymbol{R}$ を位相空間とみなすことができるが, この位相空間は自然な位相 $\mathcal{O}$ が導入された $\boldsymbol{R}$ とは異なる．

**定理**　$S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の部分空間とする．このとき $A$ の部分集合 $X$ の $A$ における閉包は $\bar{X} \cap A$ で与えられる, 但し $\bar{X}$ は $X$ の $S$ における閉包である．

証明　まず $S$ の閉集合 $F$ に対し $F \cap A$ は $A$ の閉集合であり, そして $A$ の閉集合はこのように表されることに注意する．特に $\bar{X} \cap A$ は $A$ の閉集合である．$Y \subset A$ は $X$ を含む $A$ の閉集合であるとする．このとき $S$ の閉集合 $F$ が存在して $Y = F \cap A$ が成り立つ．従って $F$ は $X$ を含む．$\bar{X}$ は $X$ を含む $S$ における最小の閉集合なので, $F$ は $\bar{X}$ を含む．よって $Y = F \cap A$ は $\bar{X} \cap A$ を含む．これは $\bar{X} \cap A$ が $X$ を含む $A$ における最小の閉集合であることを意味する．　□

### 5.2　位相の強弱

空間 $S$ に二つの開集合系 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を考えることができるとする．$\mathcal{O}_1$ を与えて得られる位相空間を $S_1$ とし, $\mathcal{O}_2$ を与えて得られる位相空間を $S_2$ とする．$S$ の恒等写像 Id を $S_1$ から $S_2$ への写像 $\mathrm{Id} : S_1 \longrightarrow S_2$ とみなすことができる．Id が連続であるとき, 位相 $\mathcal{O}_1$ は位相 $\mathcal{O}_2$ より **強い** (または **細かい**) といい, また 位相 $\mathcal{O}_2$ は位相 $\mathcal{O}_1$ より **弱い** (または **粗い**) という．

**例**　どんな空間 $S$ にも離散位相および密着位相を導入することができる．離散位相は密着位相より強い: 離散位相および密着位相を与えて得られる位相空間をそれぞれ $S_1$, $S_2$ とすると, $\mathrm{Id} : S_1 \longrightarrow S_2$ は連続である．

**例**　$S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の部分集合とする．$A$ の恒等写像 Id を $A$ から $S$ への写像とみなしたとき, $\mathrm{Id} : A \longrightarrow S$ が連続であるような $A$ の位相は $S$ からの相対位相に等しいかまたはより強い．5.1 節の注意で $\boldsymbol{R}$ の 2 種類の位相を考えたが, $\boldsymbol{R}$ に自然に導入されている位相は相対位相より強い．

**定理**　位相 $\mathcal{O}_1$ が位相 $\mathcal{O}_2$ より強いことと, $S_2$ の開集合が $S_1$ の開集合である (つまり $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ が成り立つ) ことは同値である．

証明　$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より強いとする．このとき $\mathrm{Id} : S_1 \longrightarrow S_2$ は連続である．よって $S_2$ の開集合 $O$ に対し, その Id による逆像である $O$ は $S_1$ の開集合である．また $S_2$ の開集合が $S_1$ の開集合であるとする．このとき $S_2$ の開集合の Id による逆像が $S_1$ の開集合であることになるので, Id は連続である．よって $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い．　□

# 第５章　様々な位相空間（その２）

## 5.3　直積空間

$S, T$ を位相空間とする．直積集合 $S \times T$ の部分集合 $A$ が **開集合** であるとは, 各 $(a, b) \in A$ に対し $a$ の $S$ におけるある近傍 $V$ および $b$ の $T$ における ある近傍 $W$ が $V \times W \subset A$ を満たすときにいうことにする．

$$A \subset S \times T \text{ が開集合である} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall (a,b) \in A,\ \exists V \in \mathfrak{U}(a),\ \exists W \in \mathfrak{U}(b),\ V \times W \subset A$$

$S \times T$ の全ての開集合からなる集合族は開集合系をなす．よって $S \times T$ を位相空間とみなすことができる．これを $S$ と $T$ の **直積空間** といい, 導入された位相を **直積位相** という．

$n$ 個の位相空間 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の直積空間の定義も同様に行なうことができる．

**定理** $p_S, p_T$ を $S \times T$ から $S$ および $T$ への射影とする．このとき $p_S, p_T$ は連続である．また $S \times T$ の開集合の $p_S, p_T$ による像は開集合である．

証明　$S \times T$ の点 $(a, b)$ に対し, $p_S(a, b) = a$ が成り立つ．$a$ の近傍 $V$ を任意にとる．このとき $V$ と $b$ の近傍 $W$ の直積 $V \times W$ は $(a, b)$ の近傍であり, そして $p_S(V \times W) \subset V$ が成り立つ．よって $p_S$ は連続である．$p_T$ についても同様に示すことができる．$A$ を $S \times T$ の開集合とする．$p_S(A)$ の点 $a$ に対し, $T$ の点 $b$ が存在して $(a, b) \in A$ が成り立つ．$A$ は開集合なので, $a$ の近傍 $V$ および $b$ の近傍 $W$ が存在して $V \times W \subset A$ が成り立つ．よって $V \subset p_S(A)$ が成り立つ．これより $p_S(A)$ は開集合であることがわかる． □

## 5.4　商空間

$S$ を空間とし, $\sim$ を $S$ における同値関係とする: $\sim$ は $S$ における関係で, 反射的, 対称的かつ推移的である．各 $a \in S$ に対し, $a$ を含む $\sim$ の同値類とは $[a] := \{x \in S \mid x \sim a\}$ である．$S$ の $\sim$ に関する商集合とは $\sim$ の全ての同値類からなる集合であり, これを $S/\sim$ で表すことが多い．ここでは $S' := S/\sim$ とおく．各 $x \in S$ に対し $[x] \in S'$ を対応させる写像を $\pi$ とする: $\pi(x) := [x]$．$\pi : S \longrightarrow S'$ は全射である．

$S$ を位相空間とする．このとき $S'$ の部分集合 $O'$ が **開集合** であるとは, $\pi^{-1}(O')$ が $S$ の開集合であるときにいうことにする．

$$O' \subset S' \text{ が開集合である} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \pi^{-1}(O') \text{ が } S \text{ の開集合である}$$

$S'$ の全ての開集合からなる集合族は開集合系をなす．よって $S'$ を位相空間とみなすことができる．これを $S$ の $\sim$ に関する **商空間** といい, 導入された位相を $\pi$ が定める **商位相** という．商位相は, $\pi$ が連続になるような $S'$ の位相のうち最も強いものである．

## 5.5　位相多様体

$S$ を Hausdorff 空間とする．自然数 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $S$ が $n$ 次元 **位相多様体** であるとは, $S$ の各点 $a$ に対し $a$ のある近傍が $\boldsymbol{R}^n$ のある開集合と同相であるときにいう．

$$S \text{ が } n \text{ 次元位相多様体である} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in S,\ \exists V \in \mathfrak{U}(a),\ V \text{ は } \boldsymbol{R}^n \text{ のある開集合と同相である}$$

## 幾何概論 I 第５章演習問題

**学生番号:** ____________________ **氏名:** ____________________

(a) $S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の部分空間とする. $A$ の恒等写像 Id を $A$ から $S$ への写像とみなしたとき, $\mathrm{Id} : A \longrightarrow S$ は連続であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $S^2$ を $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ で定義する. $S^2$ に $\boldsymbol{R}^3$ からの相対位相を導入する. このとき $S^2$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

(c) $S, T$ を位相空間とし, $S \times T$ に直積位相を導入する. また $A \subset S$, $B \subset T$ とする.

(c1) $A$, $B$ がそれぞれ $S, T$ の開集合ならば, $A \times B$ は $S \times T$ の開集合であることを示せ.

(c2) $A$, $B$ がそれぞれ $S, T$ の閉集合ならば, $A \times B$ は $S \times T$ の閉集合であることを示せ.

(c3) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ および $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ を示せ.

(d) $S, T$ を Hausdorff 空間とし, $S \times T$ に直積位相を導入する. このとき $S \times T$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

(e) $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ の同値関係 $\sim$ を次のように定義する: $a$, $b \in \boldsymbol{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し, 「$a \sim b \iff \exists \lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, b = \lambda a$」とする. $P^2 := (\boldsymbol{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\})/\sim$ に商位相を導入する ($P^2$ を **射影平面** という). このとき $P^2$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

# 幾何概論 I　中間試験　(平成２４年６月２０日実施)

**学生番号・氏名：** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ・ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**注意事項**

· ていねいな記述は, その程度に応じて加点の対象となります.

· 裏面を使用する場合には, どの問題に対する解答であるのかがわかるように記述すること.

**[1]**　$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A := \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x > 1,\ y < -1\}$ は開集合であり, また閉集合ではないことを示せ.

**[2]**　$S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする. このとき $S$ の 1 点 $a \in S$ に対し, $A := \{x \in S \mid d(x, a) > 1\}$ は開集合であることを示せ. また $B := \{x \in S \mid d(x, a) \geqq 1\}$ は閉集合であることを示せ.

**[3]** $S$ を位相空間とし, $A$, $B$ を $S$ の部分集合とする.

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ を示せ.

(b) $A$, $B$ が $S$ の閉集合であるとき, $A \cup B$ は $S$ の閉集合であることを示せ.

**[4]** $S$, $T$ を位相空間とし, $f : S \longrightarrow T$ を連続写像とする.

(a) $\{a_n\}$ を $S$ の点列とし, $S$ の点 $a_0$ に収束するとする. このとき $T$ の点列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a_0)$ に収束することを示せ.

(b) $A$ を $T$ の部分集合とする. $F$ は $A$ を含む $T$ の閉集合であるとする. このとき $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(F)$ を示せ.

**[5]** (a) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $\boldsymbol{Q}$ に相対位相を導入する. このとき $A := \{q \in \boldsymbol{Q} \mid |q| < 1\}$, $B := \{q \in \boldsymbol{Q} \mid |q| \leqq 1\}$, $C := \{q \in \boldsymbol{Q} \mid |q| \leqq \sqrt{2}\}$ の各々が $\boldsymbol{Q}$ の開集合であるかどうかを判定せよ.

(b) Hausdorff 空間 $S$ に対し, 直積空間 $S \times S$ の部分集合 $A := \{(p, p) \mid p \in S\}$ は閉集合であることを示せ.

# 第６章　コンパクト性（その１）

## 6.1　コンパクト性の定義

$S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の部分集合とする．このとき $S$ の部分集合族 $\mathcal{C} := \{C_\lambda \subset S \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $A$ を **被う** とは,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

が成り立つときにいい, このとき $\mathcal{C}$ を $A$ の **被覆** という．特に, $\mathcal{C}$ が開集合からなる族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ である場合, $\mathcal{C}$ を $A$ の **開被覆** という．$S$ の部分集合 $A$ が **コンパクト** であるとは, $A$ の任意の開被覆 $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ から有限個の元 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_N} \in \mathcal{C}$ を取り出して $A$ を被うことができるときにいう．

$$\boxed{A \subset S \text{ がコンパクトである} \overset{\text{定義}}{\iff} \forall \mathcal{C} := \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}\text{: } A \text{ の開被覆}, \ \exists \{O_{\lambda_k}\}_{k=1}^N \subset \mathcal{C},\ A \subset \bigcup_{k=1}^N O_{\lambda_k}}$$

## 6.2　数直線におけるコンパクト性

次の定理はコンパクト集合の最も基本的な例を与える．

**定理 (Heine-Borel の被覆定理)**　有界閉区間 $[a,b]$ $(a, b \in \boldsymbol{R},\ -\infty < a < b < \infty)$ はコンパクトである．

証明　$[a,b]$ の開被覆 $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を任意にとる．そして

$$A := \left\{ x \in [a,b] \ \middle|\ \exists \{O_{\lambda_k}\}_{k=1}^N \subset \mathcal{C},\ [a,x] \subset \bigcup_{k=1}^N O_{\lambda_k} \right\}$$

とおく．このとき $a \in A$ が成り立ち, 特に $A \neq \emptyset$ がわかる．$A$ は上に有界なので, $A$ の上限 $\sigma := \sup A$ が存在する．$\sigma \in [a,b]$ が成り立つ．$\mathcal{C}$ は $[a,b]$ の開被覆なので, $\sigma$ を含む $\mathcal{C}$ の元 $O_{\lambda_0}$ が存在する．$O_{\lambda_0}$ は開集合なので, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(\sigma - \varepsilon,\ \sigma + \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$ が成り立つ．$\sigma$ は $A$ の上限なので, $A$ のある元 $s$ が $(\sigma - \varepsilon,\ \sigma]$ に含まれる．$[a,s]$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_N}$ で被われるので, $[a,\sigma]$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_N}, O_{\lambda_0}$ で被われる．よって $\sigma \in A$ がわかる．$\sigma < b$ を仮定する．このとき 正数 $\varepsilon > 0$ は $(\sigma - \varepsilon,\ \sigma + \varepsilon) \subset [a,b]$ を満たすと仮定してよく, このとき $t \in (\sigma,\ \sigma + \varepsilon)$ に対し $[a,t]$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_N}, O_{\lambda_0}$ で被われることになる．これは $t \in A$ を意味するが, 一方で $\sigma$ が $A$ の上限であることに反する．よって $\sigma = b$ が成り立つ． □

より一般に, 次の定理が成り立つ．

**定理**　$\boldsymbol{R}$ の有界閉集合はコンパクトである．

証明　$A$ を有界閉集合とし, $\mathcal{C}$ を $A$ の開被覆とする．$a$ を $A$ の下界の一つとし, $b$ を $A$ の上界の一つとする．このとき $A \subset [a,b]$ が成り立つ．$A \neq [a,b]$ を仮定する．$A$ は閉集合なので, $A^c$ は開集合であり, $\mathcal{C}$ に $A^c$ を加えた開集合族 $\mathcal{C}'$ は $[a,b]$ の開被覆である．$[a,b]$ はコンパクトなので, $\mathcal{C}'$ から有限個の元を取り出して $[a,b]$ を被うことができる．今取り出した $\mathcal{C}'$ の有限個の元の中に $A^c$ がある場合には, $A^c$ を取り除いた有限個のものが $A$ を被っている．よって $A$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元で被われることがわかる． □

# 第６章　コンパクト性（その２）

## 6.2　数直線におけるコンパクト性 (続き)

そして次の定理から, $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合は以上のものに限られることがわかる.

**定理** $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合は有界閉集合である.

証明　$A$ をコンパクト集合とする. $A$ が有界でないとすると, $A$ の開被覆 $\{(n-1,n+1) \subset \boldsymbol{R} \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ からどのように有限個の元を選んでもそれらで $A$ を被うことはできない. よって $A$ は有界である. また $b \in A^c$ をとると, $\boldsymbol{R}$ は Hausdorff 空間であるので, $A$ の各点 $a$ に対し $a$ の近傍 $V_a$ および $b$ の近傍 $W_a$ が存在して $V_a \cap W_a = \emptyset$ が成り立つ. $\{V_a \mid a \in A\}$ は $A$ の開被覆であり $A$ はコンパクトなので, 有限個の $a_1, a_2, \ldots, a_N \in A$ が存在して $A$ は $V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_N}$ で被われる. このとき $W := \bigcap_{k=1}^{N} W_{a_k}$ は $b$ の近傍であり任意の $k \in \{1,2,\ldots,N\}$ に対し $W \cap V_{a_k} = \emptyset$ が成り立つ. よって $W \cap A = \emptyset$ つまり $W \subset A^c$ が成り立つ. よって $A^c$ は開集合であり, $A$ は閉集合である. □

次の定理は, 有界閉集合がコンパクトであることに立脚して示される.

**定理 (Bolzano-Weierstrass の定理)** $\boldsymbol{R}$ の有界無限集合は少なくとも一つの集積点を有する.

証明　$A$ を $\boldsymbol{R}$ の有界無限集合とする. $A$ は有界閉区間 $[a,b]$ に含まれていると仮定してよい. $A$ が集積点を持たないと仮定する. このとき $[a,b]$ の各点 $c$ の近傍 $V_c$ で $V_c \cap (A \setminus \{c\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する. $\{V_c \mid c \in [a,b]\}$ は $[a,b]$ の開被覆であり $[a,b]$ はコンパクトなので, 有限個の $c_1, c_2, \ldots, c_N \in [a,b]$ が存在して $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{c_k}$ が成り立つ. 各 $V_{c_k}$ に含まれる $A$ の元は高々一つなので, $A$ は高々有限個の元からなることになり, 矛盾が生じた. □

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ 上の関数 $f$ が **上に (下に) 有界** であるとは, $f(A)$ が上に (下に) 有界であるときにいう. $f$ が **有界** であるとは, $f(A)$ が上にも下にも有界であるときにいう.

**定理** $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合 $A$ 上の連続関数 $f$ は有界でありかつ $A$ 上で最大値および最小値をとる.

証明　$\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $f(A)$ の開被覆とする. $f$ は連続なので, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $f^{-1}(O_\lambda)$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合である. よって $\mathcal{C}' = \{f^{-1}(O_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は $A$ の開被覆である. $A$ はコンパクトなので, $\mathcal{C}'$ から有限個の元を取り出して $A$ を被うことができる. よって $\mathcal{C}$ から有限個の元を取り出して $f(A)$ を被うことができる. これは $f(A)$ がコンパクトであることを意味する. よって $f(A)$ は有界閉集合である. $M, m$ をそれぞれ $f(A)$ の上限および下限とする. $M \notin f(A)$ とすると, $f(A)^c$ は $M$ の近傍なので, ある正数 $\varepsilon > 0$ が $(M-\varepsilon, M+\varepsilon) \subset f(A)^c$ を満たす. このとき $(M-\varepsilon, M)$ の各点は $f(A)$ の上界であるが, これは $M$ が最小の上界であることに反する. よって $M \in f(A)$ が成り立ち, $M$ は $f$ の最大値である. 同様に $m \in f(A)$ が成り立ち, $m$ は $f$ の最小値である. □

## 第６章　コンパクト性（その３）

### 6.3　一般の位相空間におけるコンパクト性

**定理**　$A$ を位相空間 $S$ のコンパクト集合とする．このとき閉集合 $F$ に対し，$A\cap F$ はコンパクトである．

証明　$\mathcal{C}$ を $A\cap F$ の開被覆とする．$F$ は閉集合なので，$F^c$ は開集合であり，$\mathcal{C}$ に $F^c$ を加えた開集合族 $\mathcal{C}'$ は $A$ の開被覆である．$A$ はコンパクトなので，$\mathcal{C}'$ から有限個の元を取り出して $A$ を被うことができる．今取り出した $\mathcal{C}'$ の有限個の元の中に $F^c$ がある場合には，$F^c$ を取り除いた有限個のものが $A\cap F$ を被っている．よって $A\cap F$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元で被われることがわかる． □

**注意**　この定理は，$\boldsymbol{R}$ の有界閉集合がコンパクトであることの一般化を述べている．$A$ が有界閉区間に相当する．また $A$ を $S$ の部分空間とみなしたとき $A\cap F$ は $A$ の閉集合であり，これが $\boldsymbol{R}$ の有界閉集合に相当する．

6.2 節での議論をほとんど変更せずに，次の四つの定理を証明することができる．

**定理**　Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である．

**定理 (Bolzano-Weierstrass の定理の一般化)**　コンパクトな位相空間の無限集合は少なくとも一つの集積点を有する．

**定理**　$S, T$ を位相空間とし，$f : S \longrightarrow T$ を連続写像とする．このとき $S$ のコンパクト集合の $f$ による像はコンパクト集合である．

**定理**　位相空間 $S$ のコンパクト集合 $A$ 上の連続関数は有界でありかつ $A$ 上で最大値および最小値をとる．

### 6.4　相対コンパクト集合

$S$ を位相空間とする．$S$ の部分集合 $A$ が **相対コンパクト** であるとは，$A$ の閉包 $\bar{A}$ がコンパクトであるときにいう．

**例**　$\boldsymbol{R}$ の部分集合である開区間 $(0,1)$ の閉包は閉区間 $[0,1]$ である．$[0,1]$ はコンパクトであるので，$(0,1)$ は $\boldsymbol{R}$ において相対コンパクトである．同様に，半開区間 $(0,1]$, $[0,1)$ や閉区間 $[0,1]$ も $\boldsymbol{R}$ において相対コンパクトである．

**例**　$\boldsymbol{R}$ の部分集合である開区間 $(0,1)$ に相対位相を導入する．このとき $(0,1)$ の部分集合である $(0,1)$ の $(0,1)$ における閉包は $(0,1)$ 自身である．$(0,1)$ はコンパクトではないので，$(0,1)$ は $(0,1)$ において相対コンパクトではない．同じことを半開区間 $(0,1]$, $[0,1)$ についても言うことができる．

**注意**　$A$ が $S$ において相対コンパクトであるならば，$A$ の任意の部分集合も $S$ において相対コンパクトである．これは，コンパクト集合の閉集合がコンパクトであることからわかる．特に，$S$ がコンパクトである場合には，$S$ の任意の部分集合は $S$ において相対コンパクトである．

位相空間 $S$ が **局所コンパクト** であるとは，$S$ の各点のある近傍が $S$ において相対コンパクトであるときにいう．

**例**　$n$ を自然数とする．このとき Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は局所コンパクトである．より一般に，$n$ 次元位相多様体は局所コンパクトである．

## 第６章 コンパクト性（その４）

### 6.5 コンパクト化

ある位相空間について議論しようとするとき, それをコンパクトな位相空間の部分空間とみなすことができるならば, コンパクトな位相空間のコンパクト性に立脚して議論が進展することが期待される．コンパクト化とは元々の位相空間を上のようにしてより捉えやすくするためのものであると言える．

$S$ を Hausdorff 空間とし, $\mathcal{O}$ を $S$ の開集合系とする．$\infty$ を $S$ に含まれない点とし, $S^* := S \cup \{\infty\}$ とおく．$\mathcal{O}^*$ は $S^*$ の部分集合の族で, 次のように定義されるものとする:

$$\mathcal{O}^* := \mathcal{O} \cup \{S^* \setminus K \mid K \text{ は } S \text{ のコンパクト集合 }\}.$$

**定理** (a) $\mathcal{O}^*$ は $S^*$ の開集合系であり, 従って $S^*$ に位相を定める; (b) $S$ の元々の位相と $S^*$ からの相対位相は等しい; (c) $S$ がコンパクトでなければ, $S$ は $S^*$ で稠密である; (d) $S^*$ はコンパクトである; (e) $S$ が局所コンパクトならば, $S^*$ は Hausdorff 空間である．

上の定理における位相空間 $S^*$ を $S$ の <u>**1 点コンパクト化**</u> または <u>**Alexandrov のコンパクト化**</u> という．

定理の (a) の証明　まず $\emptyset \in \mathcal{O}$ なので, $\emptyset \in \mathcal{O}^*$ が成り立つ．また $\emptyset$ はコンパクト集合なので, $S^* \setminus \emptyset \in \mathcal{O}^*$ が成り立つ．$O_1$, $O_2, \ldots, O_n$ を $\mathcal{O}^*$ の元とする．$O_l, \ldots, O_n$ は $\mathcal{O}^* \setminus \mathcal{O}$ の元で, これら以外は $\mathcal{O}$ の元であるとする．このとき $S$ のコンパクト集合 $K_l, \ldots, K_n$ が存在して $O_j = S^* \setminus K_j$ が成り立つ $(j = l, \ldots, n)$．このとき $\displaystyle\bigcap_{j=l}^{n} O_j = S^* \setminus \bigcup_{j=l}^{n} K_j$ が成り立ち, $\displaystyle\bigcup_{j=l}^{n} K_j$ はコンパクトなので, $\displaystyle\bigcap_{j=l}^{n} O_j \in \mathcal{O}^*$ が成り立つ．Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合であることから $\displaystyle S \setminus \bigcup_{j=l}^{n} K_j \in \mathcal{O}$ がわかり, 従って $l > 1$ のとき $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$ がわかる．また $\mathcal{O}^*$ の元からなる集合族 $\{O^*_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, O^*_\lambda \in \mathcal{O}^*\}$ に対し, これが $\mathcal{O}$ に含まれていれば和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^*_\lambda$ は $\mathcal{O}$ に含まれる．またある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し $S$ のコンパクト集合 $K_{\lambda_0}$ が存在して $O^*_{\lambda_0} = S^* \setminus K_{\lambda_0}$ が成り立つとすると, $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} (O^*_\lambda)^c$ は $K_{\lambda_0}$ の閉集合であるのでコンパクト集合である．よって $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^*_\lambda = S^* \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (O^*_\lambda)^c$ は $\mathcal{O}^*$ に含まれる．□

定理の (b) の証明　Hausdorff 空間 $S$ のコンパクト集合 $K$ は閉集合であり従って $S \setminus K \in \mathcal{O}$ なので, $\{O^* \cap S \mid O^* \in \mathcal{O}^*\} = \mathcal{O}$ が成り立つ．従って $S$ の $S^*$ からの相対位相は $S$ の元々の位相に等しい．□

定理の (c) の証明　$S$ はコンパクトでないとする．このとき $\{\infty\}$ は $S^*$ の開集合ではないので, $\infty$ の $S^*$ における任意の近傍は $S$ の元を含む．よって $\infty$ は $S$ の集積点であり, $\bar{S} = S^*$ が成り立つ．□

定理の (d) の証明　$\mathcal{C}^*$ を $S^*$ の任意の開被覆とする．このとき $S$ のコンパクト集合 $K$ が存在して $O_\infty := S^* \setminus K$ は $\mathcal{C}^*$ に含まれる．$\mathcal{C}^*$ の有限個の元 $O_1, \ldots, O_n$ が $K$ を被うので, $O_1, \ldots, O_n$, $O_\infty$ は $S^*$ を被う．□

定理の (e) の証明　$S^*$ の異なる 2 点 $a$, $b$ をとる．$\{a, b\} \subset S$ ならば, $a$ の近傍 $V$ および $b$ の近傍 $W$ が存在して $V \cap W = \emptyset$ が成り立つ．$b = \infty$ を仮定する．$S$ は局所コンパクトなので, $S$ における $a$ の近傍 $V$ で $\bar{V}$ がコンパクトであるものが存在する．このとき $\infty$ の近傍 $W := S^* \setminus \bar{V}$ は $V \cap W = \emptyset$ を満たす．よって $S^*$ は Hausdorff 空間である．□

**例** 1 次元球面 $S^1$ はコンパクトな位相空間であり, $S^1$ から 1 点を除いた集合に $S^1$ からの相対位相を導入すると, それは数直線 $\boldsymbol{R}$ と同相になる．従って $S^1$ を $\boldsymbol{R}$ の 1 点コンパクト化とみなすことができる．

# 幾何概論 I　第 6 章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a)　$\{a_n\}$ を有界な実数列とする．このとき $\{a_n\}$ は収束する部分列を含むことを示せ.

(b)　$S$ を位相空間とし, $A$, $B$ を $S$ のコンパクト集合とする.

(b1) $A \cup B$ は $S$ のコンパクト集合であることを示せ.

(b2) $S$ が Hausdorff 空間ならば, $A \cap B$ は $S$ のコンパクト集合であることを示せ.

(c)　次の問いに答えよ.

(c1)* $S$, $T$ を位相空間とする．$A$ を $S$ のコンパクト集合とし, $B$ を $T$ のコンパクト集合とする．このとき $A \times B$ は 直積空間 $S \times T$ のコンパクト集合であることを示せ.

(c2) $S$, $T$ を局所コンパクト空間とする．このとき直積空間 $S \times T$ は局所コンパクトであることを示せ.

(c3) $A$ を $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする．このとき $A$ がコンパクトであることと $A$ が有界閉集合であることは同値であることを示せ, 但し $A \subset \boldsymbol{R}^2$ が有界であるとはある正数 $r > 0$ が存在して $A \subset B_r(\mathbf{0})$ が成り立つときにいう.

(c4) 次に与えられた $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合がコンパクトかどうかを判定すること:
$A := \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$,　$B := \{(n,0) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$,　$C := \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$,
$D := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$,　$E := \{(x,y) \mid x^2-y^2 \geqq 1\}$.

(d)　球面 $S^2$ および射影平面 $P^2$ はコンパクトであることを示せ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

## 第７章　連結性（その１）

### 7.1　連結性の基本事項

$S$ を位相空間とする．$S$ が **連結** であるとは, $S$ の部分集合 $A$ が開集合でありかつ閉集合であるならば $A$ は $S$ または空集合 $\emptyset$ に等しいときにいう．

$$S \text{ が連結である} \overset{\text{定義}}{\iff} \text{「}A \subset S \text{ が閉かつ開である} \implies A = S \text{ または } A = \emptyset\text{」}$$

$S$ の部分集合 $A$ が **連結** であるとは, $S$ からの相対位相に関して $A$ が連結であるときにいう．

**定理**　次の 3 条件は同値である:
(a) $S$ は連結である;
(b) $S$ の空ではない開集合 $A$, $B$ で $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ を満たすものは存在しない;
(c) $S$ の空ではない閉集合 $A$, $B$ で $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ を満たすものは存在しない．

証明　(a) を仮定し, また $S$ の空ではない開集合 $A$, $B$ が $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする．このとき $B = A^c$ なので, $B$ は閉集合である．$S$ は連結なので, $B = S$ が成り立つことになるが, このとき $A = \emptyset$ が成り立ってしまい, 仮定に反する．よって (b) が成り立つ．同様に, (a) を仮定したとき (c) が成り立つことがわかる．また (b) を仮定する．$S$ の部分集合 $A$ が開集合でありかつ閉集合であるとし, また $S$ とも $\emptyset$ とも異なるとする．このとき $B := A^c$ は空ではない開集合で, $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ を満たすことになるが, これは仮定に反する．よって $S$ は連結であり, (a) が成り立つ．同様に, (c) を仮定したとき (a) が成り立つことがわかる．□

**定理**　$A$ を $S$ の連結な部分集合とする．このとき $A \subset B \subset \bar{A}$ を満たす $B \subset S$ は連結である．

証明　$B_1$, $B_2$ は $B$ の開集合で, $B_1 \cup B_2 = B$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ を満たすとする．このとき $S$ の開集合 $O_1$, $O_2$ が存在して $B_i = B \cap O_i$ が成り立つ $(i = 1, 2)$．ここで $A_i := A \cap O_i$ とおくと, $A$ の点 $p$ に対し $p \in B = B_1 \cup B_2$ が成り立つので, $B_i \subset O_i$ から $p$ は $A_1$, $A_2$ のいずれかに含まれることがわかる．よって $A = A_1 \cup A_2$ がわかる．また $A_i \subset B_i$ より, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ がわかる．$A_1$, $A_2$ は $A$ の開集合であり $A$ は連結なので, $A_1$, $A_2$ のいずれかが空集合でありもう一方は $A$ に等しい．$A = A_1$ および $A_2 = \emptyset$ を仮定する．このとき $A \cap O_2 = \emptyset$ なので, $\bar{A} \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つ．$B \subset \bar{A}$ なので, $B_2 = B \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つ．よって $B$ は連結である．□

**注意**　上の定理から, 連結集合の閉包は連結であることがわかる．

**定理**　$S, T$ を位相空間とし, $f : S \longrightarrow T$ を $S$ から $T$ への連続写像とする．このとき $S$ の連結集合の $f$ による像は連結である．

証明　$A$ を $S$ の連結集合とする．$B_1$, $B_2$ は $f(A)$ の開集合で, $B_1 \cup B_2 = f(A)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ を満たすとする．このとき $T$ の開集合 $O_1, O_2$ が存在して $B_i = f(A) \cap O_i$ が成り立つ．$f$ は連続なので, $f^{-1}(O_i)$ は開集合である．$A_i := A \cap f^{-1}(O_i)$ とおく．$p \in A$ に対し $f(p)$ は $B_1 \subset O_1$, $B_2 \subset O_2$ のいずれかに含まれるので, $p$ は $A_1$, $A_2$ のいずれかに含まれる．よって $A = A_1 \cup A_2$ が成り立つ．また $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ から, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ がわかる．$A_i$ は $A$ の開集合であり $A$ は連結なので, $A = A_1$ および $A_2 = \emptyset$ を仮定してよい．このとき $B_2 = \emptyset$ が成り立つ．よって $f(A)$ は連結である．□

## 第７章　連結性（その２）

### 7.2　数直線の連結集合

**定理**　数直線 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A$ に対し, $A$ が連結であることと $A$ が区間であることは同値である.

証明　以下, $A$ は 2 つ以上の元を持つ集合であるとする. まず $A$ は連結であるとする. このとき $s, t \in A$ が $s < t$ を満たすならば, $[s,t] \subset A$ が成り立つ, というのは $r \in (s,t)$ が $r \notin A$ を満たすならば $A_1 := A \cap (-\infty, r)$, $A_2 := A \cap (r, \infty)$ は $A$ の開集合でありかつ $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすからである. このとき $A$ は区間であることがわかる. また $A$ が閉区間 $[a,b]$ であるとする. $A_1$, $A_2$ は $A$ の開集合で, $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすとする. $O_1$, $O_2$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合で, $A_i = A \cap O_i$ を満たすとする. $A_1$ が $a$ を含むとすると, $O_1$ は $a$ を含む. ここで $c := \sup\{x \in A \mid [a,x] \subset A_1\}$ とおく. $c > a$ が成り立つ. $c = b$ ならば, $[a,b] = A_1$ が成り立ち従って $A$ は連結である. $c < b$ を仮定する. このとき $c \in A_1$ または $c \in A_2$ が成り立つ. $c \in A_1$ を仮定すると, $c \in O_1$ が成り立つ. $O_1$ は開なので, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset A \cap O_1$ が成り立つ. このとき $(c, c+\varepsilon)$ の元 $s$ に対し $[a,s] \subset A_1$ が成り立つが, これは $c$ の定義に反する. よって $c \in A_2$ が成り立つことになるが, $O_2$ が開であることから同様に矛盾が生じる. よって $c = b$ が成り立ち, $A$ は連結である. $A$ が他の型の区間である場合にも, 同様の議論によって $A$ は連結であることがわかる. □

**定理 (中間値の定理)**　$S$ を位相空間とし, $A$ を $S$ の連結集合とする. このとき $A$ 上の実数値連続関数 $f$ が $A$ の 2 点で異なる二つの値 $a, b \in \boldsymbol{R}$ をとるならば, $A$ 上で $a$ と $b$ の間の任意の値をとる.

証明　$f(A)$ は連結なので区間である. よって $a, b \in f(A)$ が $a < b$ を満たすならば, $[a,b] \subset f(A)$ が成り立つ. □

### 7.3　連結成分

位相空間 $S$ の 2 点 $a, b$ に対し, $a, b$ を含む $S$ の連結集合が存在するとき, $a \sim b$ と書くことにする.

**命題**　$\sim$ は $S$ における同値関係である.

証明　1 点からなる集合は連結であるので, $a \in S$ に対し $a \sim a$ が成り立つ. また $a, b \in S$ に対し $a \sim b$ が成り立つならば, $a, b$ を含む $S$ の連結集合 $A$ が存在する. このとき $A$ は $b, a$ を含む $S$ の連結集合であるので, $b \sim a$ が成り立つ. $a, b, c \in S$ に対し, $a \sim b$ および $b \sim c$ が成り立つとする. $A$ は $a, b$ を含む $S$ の連結集合であるとし, $B$ は $b, c$ を含む $S$ の連結集合であるとする. このとき $A \cup B$ は連結である. これを示すために, $A \cup B$ の二つの開集合 $O_1$, $O_2$ が $A \cup B = O_1 \cup O_2$ および $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たすと仮定する. このとき $O_1$, $O_2$ のいずれかが $b$ を含む. ここでは $O_1$ が $b$ を含むとする. $A_i := A \cap O_i$ とおくと, $A_1$, $A_2$ は $A$ の開集合で $A = A_1 \cup A_2$ および $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たす. $A$ は連結なので, $A_1$, $A_2$ のいずれかが空集合である. $A_1$ は $b$ を含み従って空集合ではないので, $A_2 = \emptyset$ が成り立つ. よって $A \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つ. 同様に $B \cap O_2 = \emptyset$ が成り立ち, 従って $O_2 = \emptyset$ がわかる. こうして $A \cup B$ は連結であることが示された. $A \cup B$ は $a, c$ を含むので, $a \sim c$ が成り立つ. □

$S$ における同値関係 $\sim$ に関する同値類を $S$ の **連結成分** という. より一般に, $S$ の部分集合 $A$ を部分空間とみなしたときにその連結成分を $A$ の **連結成分** という.

**定理**　連結成分は閉集合であり, その各点を含む最大の連結集合である.

証明　$S$ の 1 点 $a$ を含む $S$ の連結成分を $C(a)$ で表す. $a$ を含む連結集合は $C(a)$ に含まれ, $C(a)$ は $a$ を含む連結集合の和と表される. このとき上の命題の証明を参考にすることで, $C(a)$ 自身が連結であることがわかる. 連結集合の閉包は連結であるので, $\overline{C(a)}$ も連結である. $\overline{C(a)}$ は $a$ を含むので, $\overline{C(a)} \subset C(a)$ がわかり, よって $\overline{C(a)} = C(a)$ がわかる. よって $C(a)$ は閉集合である. □

## 第７章　連結性（その３）

### 7.4　弧状連結性

$S$ を位相空間とし, $a$, $b$ を $S$ の 2 点とする. $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ が $\alpha < \beta$ を満たすとする. $f$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ から $S$ への連続写像で $f(\alpha) = a$ および $f(\beta) = b$ を満たすものとする. このとき $[\alpha, \beta]$ の $f$ による像を, $a$ と $b$ を結ぶ **曲線** という. $[\alpha, \beta]$ と $[0, 1]$ は同相なので, はじめから $\alpha = 0$ および $\beta = 1$ を仮定してよい.

位相空間 $S$ の任意の 2 点に対し, それらを結ぶ曲線が存在するとき, $S$ は **弧状連結** であるという.

**定理**　弧状連結な位相空間は連結である.

証明　$S$ を弧状連結な位相空間とし, $a$ を $S$ の 1 点とする. このとき $S$ の任意の点 $b$ と $a$ を結ぶ曲線が存在する. $a$ と $b$ を結ぶ曲線は, 連結集合である閉区間の連続写像による像であるので, やはり連結である. 従って $S$ は $a$ を含む連結集合の和と表される. よって 7.3 節を参考にすることで, $S$ は連結であることがわかる. □

**注意**　連結だが弧状連結ではない位相空間の例を挙げる. $p$, $q \in \boldsymbol{R}^2$ を $p := (0, 1)$, $q := (0, -1)$ とし,

$$A := \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0 \right\}, \qquad B := A \cup \{p, q\}$$

とする. このとき $A$ は連結集合であり, $B$ は $A \subset B \subset \bar{A}$ を満たすのでやはり連結である. しかし $B$ は弧状連結ではない. $B$ が弧状連結であると仮定すると, 閉区間 $[0, 1]$ から $B$ への連続写像 $f$ で $f(0) = p$ および $f(1) = q$ を満たすものが存在することになる. $f((0, 1)) \subset A$ を仮定してよい. $f$ は連続なので, 正数 $\varepsilon := 1/10$ に対しある正数 $\delta > 0$ が存在して $t \in [0, \delta)$ に対し $f(t) \in B_\varepsilon(p) \cap B$ が成り立つ. $t_1$, $t_2 \in (0, \delta)$ で $t_1 < t_2$ および $f(t_1) \neq f(t_2)$ を満たしさらに $f(t_1)$, $f(t_2)$ の第 2 座標が 1 であるようなものが存在する. このとき $A$ の定義からある $t_0 \in (t_1, t_2)$ に対し $f(t_0)$ の第 2 成分は $-1$ に等しいことがわかるが, このとき $f(t_0) \in B_\varepsilon(p) \cap B$ は成り立たない. よって $B$ は弧状連結ではない.

# 幾何概論 I　第 7 章演習問題

**学生番号:** ____________________　　**氏名:** ____________________

(a)　全ての有理数からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ に $\boldsymbol{R}$ からの相対位相を導入する．このとき $\boldsymbol{Q}$ は連結ではないことを示せ.

(b)*　$S, T$ を位相空間とする．$A$ を $S$ の連結集合とし, $B$ を $T$ の連結集合とする．このとき $A \times B$ は 直積空間 $S \times T$ の連結集合であることを示せ.

(c)　位相空間 $S$ の連結集合 $A, B, C$ が $A \cap B \neq \emptyset$ および $B \cap C \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき $A \cup B \cup C$ は連結であることを示せ.

(d)　$\boldsymbol{R}^2$ の原点 $\mathbf{0}$ の $\varepsilon$-近傍 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ は弧状連結であることを示せ．また $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ の補集合 $B_\varepsilon(\mathbf{0})^c$ は弧状連結であることを示せ.

(e)　$\boldsymbol{R}^2$ の連結開集合は弧状連結であることを示せ.

(f)　球面 $S^2$ および射影平面 $P^2$ は連結であることを示せ.

(g)　$S^2$ の $\boldsymbol{R}^3$ における補集合は連結ではないことを示せ.

(解答)

(必要に応じて裏面も使用して下さい)

## 第８章　距離空間の完備性（その１）

### 8.1　基本列 (Cauchy 列)

$S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする. $S$ の点列 $\{a_n\}$ が **基本列** または **Cauchy 列** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $m, n \in \boldsymbol{N}$ が $m > n_0$, $n > n_0$ を満たすならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ が成り立つときにいう.

$$\boxed{\{a_n\} \text{ が基本列である} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \boldsymbol{N} \text{「} n_0 \text{ より大きい } m, n \in \boldsymbol{N} \text{ に対し, } d(a_m, a_n) < \varepsilon \text{」}}$$

**定理**　収束する点列は基本列である.

証明　$\{a_n\}$ が $a \in S$ に収束するとする. このとき任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $n > n_0$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ が成り立つ. よって $m > n_0$, $n > n_0$ を満たす $m$, $n \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$d(a_m, a_n) \leqq d(a_m, a) + d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ. 従って $\{a_n\}$ は基本列である. □

距離空間 $S$ が **完備** であるとは, 任意の基本列が $S$ の元に収束するときにいう.

**例**　距離空間である $\boldsymbol{R}$ は完備である. $\{a_n\}$ を基本列とする. 各 $k \in \boldsymbol{N}$ および $\varepsilon := 1/2^k$ に対しある $l_k \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $m > l_k$, $n > l_k$ を満たす $m$, $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_m - a_n| < 1/2^k$ が成り立つ. 特に $n > l_k$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_n - a_{l_k+1}| < 1/2^k$ が成り立つので, $\{a_n\}$ は有界である. $l_{k+1} > l_k$ を仮定してよい. $s_k := \sup\{a_n \mid n \geqq l_k\}$ とおく. このとき $\{s_k\}$ は有界な単調減少数列である. よって $\{s_k\}$ は極限 $\alpha$ を有する. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $1/2^k < \varepsilon$ および $|s_{k+2} - \alpha| < \varepsilon/2$ を満たす $k \in \boldsymbol{N}$ をとると, $n > l_{k+2}$ を満たす $n \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$|a_n - \alpha| \leqq |a_n - a_{l_{k+2}+1}| + |a_{l_{k+2}+1} - s_{k+2}| + |s_{k+2} - \alpha| < \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

が成り立つ. よって $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束するので, $\boldsymbol{R}$ は完備である. $\boldsymbol{R}$ が完備であることから, $\boldsymbol{R}^n$ も完備であることがわかる.

**例**　閉区間 $[0,1]$ 上の全ての連続関数からなる集合を $C[0,1]$ で表す. $f$, $g \in C[0,1]$ に対し, $d(f,g) := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ とおく. このとき $d$ は $C[0,1]$ の距離であり (第２章演習問題 (c)), 従って $C[0,1]$ を距離空間とみなすことができる. そして距離空間 $C[0,1]$ は完備である. $\{f_n\}$ を $C[0,1]$ の基本列とする. このとき各 $x \in [0,1]$ に対し, 数列 $\{f_n(x)\}$ は基本列である. $\boldsymbol{R}$ は完備なので, $\{f_n(x)\}$ はある実数 $f(x)$ に収束する. $\{f_n\}$ は基本列なので, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $m, n \in \boldsymbol{N}$ が $m > n_0$, $n > n_0$ を満たすならば任意の $x \in [0,1]$ に対し $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$ が成り立つ. $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に収束するので, $n_0$ より大きい $m(x) \in \boldsymbol{N}$ に対し $|f_{m(x)}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ が成り立つ. よって

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq |f_n(x) - f_{m(x)}(x)| + |f_{m(x)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立ち, 従って $\{f_n\}$ は $f$ に一様収束する. 各 $f_n$ は $[0,1]$ 上の連続関数なので, $f$ も連続関数である. よって距離空間 $C[0,1]$ の基本列 $\{f_n\}$ は $C[0,1]$ の元 $f$ に収束する, つまり $C[0,1]$ は完備である.

**幾何概論 I** 平成２４年７月１１日

## 第８章　距離空間の完備性（その２）

### 8.2　完備化

全ての有理数からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ を距離空間とみなしたとき, $\boldsymbol{Q}$ は完備ではない．例えば, 無理数 $\sqrt{2}$ を $\sqrt{2} = 1.r_1r_2r_3\ldots$ と小数で表し, $a_n := 1 + \sum_{k=1}^{n} r_k 10^{-k}$ とおくと, $a_n \in \boldsymbol{Q}$ である．$\{a_n\}$ は $\sqrt{2}$ に収束するので, $\boldsymbol{Q}$ の基本列であるが, しかし $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{Q}$ の元には収束しない．

$\mathfrak{F}$ を $\boldsymbol{Q}$ の全ての基本列からなる集合とする．$\mathfrak{F}$ の 2 元 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ に対し $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ が成り立つとき, $a \sim b$ と書くことにする．このとき $\sim$ は $\mathfrak{F}$ における同値関係である．$\mathfrak{F}$ の $\sim$ による商集合を $\tilde{\mathfrak{F}}$ で表す: $\tilde{\mathfrak{F}} := \mathfrak{F}/\sim$. $a \in \mathfrak{F}$ を含む $\sim$ に関する同値類を $[a]$ で表す．$\tilde{\mathfrak{F}}$ の 2 元 $[a]$, $[b]$ に対し, $\{|a_n - b_n|\} \in \mathfrak{F}$ が成り立つ．$\boldsymbol{R}$ は完備なので, $\{|a_n - b_n|\}$ は極限 $\tilde{d}([a],[b]) \in \boldsymbol{R}$ を有する．$\tilde{d}([a],[b])$ は同値類 $[a]$, $[b]$ のみによって定まる．写像 $\tilde{d} : \tilde{\mathfrak{F}} \times \tilde{\mathfrak{F}} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は距離の公理を満たし, 従って $\tilde{d}$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の距離である．

**定理**　距離 $\tilde{d}$ が与えられた距離空間 $\tilde{\mathfrak{F}}$ は完備である．さらに $\boldsymbol{R}$ から $\tilde{\mathfrak{F}}$ の上へのある同相写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}$ が次を満たす: $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\tilde{d}(f(a), f(b)) = |a - b|$ が成り立つ (特に $f(\boldsymbol{Q})$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ において稠密である).

証明　$\{[a^{(n)}]\}$ を $\tilde{\mathfrak{F}}$ の基本列とし, $a^{(n)} := \{a_m^{(n)}\}$ とする．各 $a^{(n)}$ は $\boldsymbol{Q}$ の基本列であるので, 各 $n \in \boldsymbol{N}$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N(n) \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $p, q \in \boldsymbol{N}$ が $p > N(n)$, $q > N(n)$ を満たすならば $|a_p^{(n)} - a_q^{(n)}| < \varepsilon/4$ が成り立つ．$M(n) \in \boldsymbol{N}$ が $N(n)$ より大きいとき, $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対し $l \in \boldsymbol{N}$ が $l > N(m)$, $l > N(n)$ を満たすならば,

$$|a_{M(m)}^{(m)} - a_{M(n)}^{(n)}| \leqq |a_{M(m)}^{(m)} - a_l^{(m)}| + |a_l^{(m)} - a_l^{(n)}| + |a_l^{(n)} - a_{M(n)}^{(n)}| \leqq \frac{\varepsilon}{4} + |a_l^{(m)} - a_l^{(n)}| + \frac{\varepsilon}{4}$$

が成り立つ．$\{[a^{(n)}]\}$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の基本列なので, $N_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して $m, n \in \boldsymbol{N}$ が $m > N_0$, $n > N_0$ を満たすならば $\tilde{d}([a^{(m)}], [a^{(n)}]) < \varepsilon/4$ が成り立つ．$\tilde{d}([a],[b]) := \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|$ なので, 十分大きな $l \in \boldsymbol{N}$ に対し $|a_l^{(m)} - a_l^{(n)}| < \varepsilon/2$ が成り立つ．よって $m > N_0$, $n > N_0$ のとき, $|a_{M(m)}^{(m)} - a_{M(n)}^{(n)}| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $a := \{a_{M(m)}^{(m)}\}$ は $\boldsymbol{Q}$ の基本列である, すなわち $a \in \mathfrak{F}$ が成り立つ．このとき $\tilde{\mathfrak{F}}$ の基本列 $\{[a^{(n)}]\}$ は $[a] \in \tilde{\mathfrak{F}}$ に収束する．従って $\tilde{\mathfrak{F}}$ は完備である．
各 $q \in \boldsymbol{Q}$ に対し, $\{q_n\} \in \mathfrak{F}$ を $q_n := q$ で定める．$q$ に対し $\{q_n\}$ を含む同値類 $[\{q_n\}] \in \tilde{\mathfrak{F}}$ を $f(q)$ で表す．任意の $[a] \in \tilde{\mathfrak{F}}$ に対し, $a = \{a_n\} \in \mathfrak{F}$ の各元 $a_n$ は $\boldsymbol{Q}$ の元なので, $\{f(a_n)\}$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の基本列であり $[a]$ に収束する．よって $f(\boldsymbol{Q})$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ において稠密である．任意の $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\mathfrak{F}$ のある元 $a = \{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = r$ を満たす．このとき $f(r) := [a] \in \tilde{\mathfrak{F}}$ とおくと, 写像 $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}$ は同相で, 任意の $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対し $\tilde{d}(f(a), f(b)) = |a - b|$ を満たす． □

$S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする．$\mathfrak{F}$ を $S$ の全ての基本列からなる集合とする．$\mathfrak{F}$ の 2 元 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ に対し $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$ が成り立つとき, $a \sim b$ と書くことにする．$\sim$ は $\mathfrak{F}$ における同値関係である．$\tilde{\mathfrak{F}} := \mathfrak{F}/\sim$ とおく．$[a]$, $[b] \in \tilde{\mathfrak{F}}$ に対し, $\{d(a_n, b_n)\}$ は $\boldsymbol{R}$ の基本列である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $m, n \in \boldsymbol{N}$ が $m > n_0$, $n > n_0$ を満たすならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon/2$, $d(b_m, b_n) < \varepsilon/2$ なので,

$$|d(a_m, b_m) - d(a_n, b_n)| \leqq |d(a_m, b_m) - d(a_n, b_m)| + |d(a_n, b_m) - d(a_n, b_n)| \leqq d(a_m, a_n) + d(b_m, b_n) < \varepsilon$$

がわかる．$\{d(a_n, b_n)\}$ の極限を $\tilde{d}([a],[b])$ で表す．$\tilde{d}([a],[b])$ は同値類 $[a]$, $[b]$ のみによって定まり, $\tilde{d}$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の距離である．上の定理の証明を参考にして, 次の定理を証明することができる．

**定理**　距離 $\tilde{d}$ が与えられた距離空間 $\tilde{\mathfrak{F}}$ は完備である．さらに, $S$ から $\tilde{\mathfrak{F}}$ への単射な連続写像 $f : S \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}$ が存在して次を満たす: $f(S)$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ において稠密である; $a, b \in S$ に対し, $\tilde{d}(f(a), f(b)) = d(a, b)$ が成り立つ．

$\tilde{\mathfrak{F}}$ を $S$ の **完備化** という．従って $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{Q}$ の完備化とみなすことができる．

**幾何概論 I** 平成２４年７月１１日

## 第８章　距離空間の完備性（その３）

### 8.3　距離空間におけるコンパクト性

$S$ を距離空間とする．$S$ の部分集合 $A$ が **全有界** または **前コンパクト** であるとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し $S$ の有限個の点 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が存在して $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(a_k)$ が成り立つときにいう．

**定理**　$S$ を距離空間とする．このとき次の (a), (b), (c), (d) は同値である:
(a) $S$ はコンパクトである;
(b) $S$ の無限集合は少なくとも一つの集積点を有する;
(c) $S$ の任意の点列から収束する部分列を取り出すことができる;
(d) $S$ は全有界でありかつ完備である．

**注意**　$S$ をコンパクトな位相空間とする．このとき $S$ の無限集合は少なくとも一つの集積点を有する (Bolzano-Weierstrass の定理の一般化)．よって一般の位相空間に対し (a) を仮定したとき (b) が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (c) の証明　(b) を仮定する．$\{a_n\}$ を $S$ の点列とし, 集合として $\{a_n\}$ は無限集合であるとする．$a$ を $\{a_n\}$ の集積点とし, $a \neq a_n$ を仮定する．各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a$ の $(1/k)$-近傍 $B_{1/k}(a)$ はある $a_n$ を含む．このような $n$ の一つを $n(k)$ で表す．このとき $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n(k)}\}$ は $a$ に収束する．□

(c) $\Longrightarrow$ (d) の証明　(c) を仮定する．正数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$S$ が全有界ではないと仮定する．このとき $S$ の点 $a_1$ に対し, $B_\varepsilon(a_1)$ は $S$ を被っていない．よって $a_2 \in S \setminus B_\varepsilon(a_1)$ をとることができる．$a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ をとったとき, $S$ の点 $a_{n+1}$ を $a_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(a_k)$ となるようにとると, $S$ の点列 $\{a_n\}$ を得る．この点列のいかなる部分列も収束しないことがわかるが, これは仮定 (c) に反する．よって $S$ は全有界である．
また $\{b_n\}$ を $S$ の基本列とする．仮定 (c) より, $\{b_n\}$ のある部分列 $\{b_{n(k)}\}$ は収束する．$n(k) > k$ を仮定する．$\{b_{n(k)}\}$ の極限を $b$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $k \in \boldsymbol{N}$ が $k > k_0$ を満たすならば $d(b_{n(k)}, b) < \varepsilon/2$ が成り立つ．またある $l_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $l, m \in \boldsymbol{N}$ が $l > l_0$, $m > l_0$ を満たすならば $d(b_l, b_m) < \varepsilon/2$ が成り立つ．よって $m_0 := \max\{k_0, l_0\}$ とおくと, $m > m_0$ を満たす $m \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$d(b_m, b) \leqq d(b_m, b_{n(m)}) + d(b_{n(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．よって基本列 $\{b_n\}$ は $b$ に収束する．よって $S$ は完備である．□

(d) $\Longrightarrow$ (c) の証明　(d) を仮定する．$\{a_n\}$ を $S$ の点列とし, 集合として $\{a_n\}$ は無限集合であるとする．$S$ は全有界であるので, $S$ の有限個の点 $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,p}$ が存在して $S = \bigcup_{q=1}^{p} B_1(c_{1,q})$ が成り立つ．よってある $B_1(c_{1,q}) =: B$ が $\{a_n\}$ の無限個の元を含む．この無限個の元は $\{a_n\}$ の部分列をなす．これを $\{a_{n(1,l)}\}$ と表す．やはり $S$ が全有界であることから, $B$ のある点の $(1/2)$-近傍は $\{a_{n(1,l)}\}$ の部分列 $\{a_{n(2,l)}\}$ を含む．このように部分列を取り出す操作を繰り返して, 各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対し $B$ のある点の $(1/k)$-近傍が $\{a_{n(k-1,l)}\}$ の部分列 $\{a_{n(k,l)}\}$ を含むことがわかる．このとき点列 $\{a_{n(k,k)}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列であり基本列である．$S$ は完備であるので, $\{a_{n(k,k)}\}$ は収束する．□

(c) $\Longrightarrow$ (a) の証明　(c) を仮定する．$\mathcal{C} := \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $S$ の開被覆とする．各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $(1/n)$-近傍がどの $O_\lambda \in \mathcal{C}$ にも含まれないような点 $a_n \in S$ が存在すると仮定する．点列 $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n(k)}\}$ を持つ．$a$ を $\{a_{n(k)}\}$ の極限とする．$a$ はある $O_\lambda$ に含まれるので, ある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ に対し $B_{1/n_0}(a) \subset O_\lambda$ が成り立つ．$\{a_{n(k)}\}$ は $a$ に収束するので, $k_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して $k > k_0$ を満たす $k \in \boldsymbol{N}$ に対し $a_{n(k)} \in B_{1/2n_0}(a)$ が成り立つ．よって $n(k) > 2n_0$ を満たす $k$ に対し $B_{1/n(k)}(a_{n(k)}) \subset O_\lambda$ が成り立つが, これは $\{a_n\}$ の取り方に反する．よってある $n \in \boldsymbol{N}$ が存在して, $S$ の任意の点の $(1/n)$-近傍はある $O_\lambda$ に含まれる．このとき仮定 (c) から, $\mathcal{C}$ の有限個の元が $S$ を被うことがわかる．□

# 幾何概論 I　期末試験　(平成２４年８月１日実施)

**学生番号・氏名：** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿・＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**注意事項**

· ていねいな記述は, その程度に応じて加点の対象となります.
· 裏面を使用する場合には, どの問題に対する解答であるのかがわかるように記述すること.

**[1]** (a) 全ての有理数からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ に $\boldsymbol{R}$ からの相対位相を導入するとき, $\boldsymbol{Q}$ は連結ではないことを示せ.
(b) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$ に対し, $A$ がコンパクトであることと $A$ が有界閉集合であることは同値であることを示せ, 但し $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $[a,b] \times [c,d]$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \boldsymbol{R},\ a \leqq b,\ c \leqq d)$ がコンパクトであることを証明なしに用いてよい.

**[2]** $S$ を位相空間とする.
(a) $\{a_n\}$ は $S$ の点列で, $S$ の点 $a_0$ に収束するとする. このとき $\{a_n\}$ に $a_0$ を加えた集合はコンパクトであることを示せ.
(b) $S$ の連結な部分集合 $A$ に対し, その閉包 $\bar{A}$ は連結であることを示せ.

**[3]** $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$, $B$, $C$, $D$ を次のように定める:

$$A := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}, \qquad B := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$C := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2y^2 \leqq 1\}, \qquad D := \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)\}.$$

(a) $A$, $B$, $C$, $D$ の各々はコンパクトであるかどうかを判定せよ.
(b) $A$ の補集合 $A^c$, $B$ の補集合 $B^c$, $C$, $D$ の各々は連結であるかどうかを判定せよ.

**[4]** (a) $S$ を Hausdorff 空間とし, $a$ を $S$ の 1 点とする. $K$ は $S$ のコンパクト集合で, $a$ を含まないとする. このとき $a$ を含む開集合 $O_1$ および $K$ を含む開集合 $O_2$ で $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たすものが存在することを示せ.
(b) $S$ を空ではない連結な位相空間とする. $S$ 上の実数値連続関数 $f$ が $f(S) \subset \boldsymbol{Q}$ を満たすならば, $f$ は $S$ 上一定値をとることを示せ.
(c) $S$ を距離空間とする. $\{a_n\}$ が $S$ の収束する点列であるならば, $\{a_n\}$ は基本列であることを示せ.

# 幾何概論 I　課題1

**[1]** $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A := \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x > 1,\ y < -1\}$ は開集合であり, また閉集合ではないことを示せ.

**[2]** $S$ を距離空間とし, $d$ を $S$ の距離とする. このとき $S$ の 1 点 $a \in S$ に対し, $A := \{x \in S \mid d(x, a) > 1\}$ は開集合であることを示せ. また $B := \{x \in S \mid d(x, a) \geqq 1\}$ は閉集合であることを示せ.

**[3]** $S$ を位相空間とし, $A$, $B$ を $S$ の部分集合とする.
(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ を示せ.
(b) $A$, $B$ が $S$ の閉集合であるとき, $A \cup B$ は $S$ の閉集合であることを示せ.

**[4]** $S$, $T$ を位相空間とし, $f : S \longrightarrow T$ を連続写像とする.
(a) $\{a_n\}$ を $S$ の点列とし, $S$ の点 $a_0$ に収束するとする. このとき $T$ の点列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a_0)$ に収束することを示せ.
(b) $A$ を $T$ の部分集合とする. $F$ は $A$ を含む $T$ の閉集合であるとする. このとき $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(F)$ を示せ.

**[5]** $S$ を Hausdorff 空間とする.
(a) $A$ を $S$ の部分空間とする. このとき $A$ は Hausdorff 空間であることを示せ.
(b) 直積空間 $S \times S$ の部分集合 $\Delta := \{(p, p) \mid p \in S\}$ は閉集合であることを示せ.

# 幾何概論 I　課題 2

**[1]** (a) 全ての有理数からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ に $\boldsymbol{R}$ からの相対位相を導入するとき, $\boldsymbol{Q}$ は連結ではないことを示せ.
(b) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$ に対し, $A$ がコンパクトであることと $A$ が有界閉集合であることは同値であることを示せ, 但し $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $[a,b]\times[c,d]$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\boldsymbol{R},\ a\leqq b,\ c\leqq d)$ がコンパクトであることを証明なしに用いてよい.

**[2]** $S$ を位相空間とする.
(a) $\{a_n\}$ は $S$ の点列で, $S$ の点 $a_0$ に収束するとする. このとき $\{a_n\}$ に $a_0$ を加えた集合はコンパクトであることを示せ.
(b) $S$ の連結集合 $A$, $B$ が $A\cap B\neq\emptyset$ を満たすとする. このとき $A\cup B$ は連結であることを示せ.

**[3]** $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A$, $B$, $C$, $D$ を次のように定める:

$$A:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid\ |x|<1,\ |y|<1\},\qquad B:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid\ x^2+y^2=1\},$$
$$C:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid\ x^2y^2\leqq 1\},\qquad D:=\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)\}.$$

(a) $A$, $B$, $C$, $D$ の各々はコンパクトであるかどうかを判定せよ.
(b) $A$ の補集合 $A^c$, $B$ の補集合 $B^c$, $C$, $D$ の各々は連結であるかどうかを判定せよ.

**[4]** (a) $S$ を Hausdorff 空間とし, $a$ を $S$ の 1 点とする. $K$ は $S$ のコンパクト集合で, $a$ を含まないとする. このとき $a$ を含む開集合 $O_1$ および $K$ を含む開集合 $O_2$ で $O_1\cap O_2=\emptyset$ を満たすものが存在することを示せ.
(b) $S$ を空ではない連結な位相空間とする. $S$ 上の実数値連続関数 $f$ が $f(S)\subset\boldsymbol{Q}$ を満たすならば, $f$ は $S$ 上一定値をとることを示せ.