幾何学 II — 多様体論の基本事項 — 平成２６年１０月８日

第１章　可微分多様体の定義

M を Hausdorff 空間とし, m を自然数とする. M が m 次元 **位相多様体** であるとは, M の各点のある近傍が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同相であるときにいう.

M を m 次元位相多様体とする. M の点 a の近傍 U_a が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O_a と同相であるとする. $x_a : U_a \longrightarrow O_a$ を U_a から O_a の上への同相写像とする. このとき U_a と x_a の組 (U_a, x_a) を a の **座標近傍** という. U_a の各点 b に対し, $x_a(b)$ は m 個の実数の組 $\left(x_a^1(b), x_a^2(b), \ldots, x_a^m(b)\right)$ と表される. $x_a(b)$ を表す m 個の実数を座標近傍 (U_a, x_a) における b の **局所座標** という. また U_a 上の m 個の関数 $x_a^1, x_a^2, \ldots, x_a^m$ の組を (U_a, x_a) における **局所座標系** という.

m 次元位相多様体 M に対し, M の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で各 U_λ が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O_λ と同相であるようなものが存在する. $x_\lambda : U_\lambda \longrightarrow O_\lambda$ を U_λ から O_λ の上への同相写像とするとき, 座標近傍の族 $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の **座標近傍系** という.

M を m 次元位相多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda, \mu \in \Lambda$ が $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たすならば, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ の上への同相写像 $x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$ を考えることができる. $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が M の **C^∞ 級座標近傍系** であるとは, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し

$$x_\mu \circ x_\lambda^{-1} : x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

が C^∞ 級写像であるときにいう. また一つの C^∞ 級座標近傍系が指定された位相多様体を **C^∞ 級可微分多様体** という.

以下においては, C^∞ 級可微分多様体を単に **可微分多様体** または **滑らかな多様体** と呼ぶことにする. また可微分多様体 M の 1 点の座標近傍を取るときには, 予め M に指定されている C^∞ 級座標近傍系から取るものとする.

第２章 可微分多様体の例

例 $\boldsymbol{R}^m$ は m 次元可微分多様体である.

例 C を $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする. C の各点 a に対し, a の $\boldsymbol{R}^2$ における近傍 V_a および開区間 $I_a \subset \boldsymbol{R}$ が存在して, $V_a \cap C$ は $\{(s, g(s)) \mid s \in I_a\}$ または $\{(f(t), t) \mid t \in I_a\}$ と表されるとする, 但し f, g は 1 変数 C^∞ 級関数である. このとき C は 1 次元可微分多様体である.

例 S を $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合とする. S の各点 a に対し, a の $\boldsymbol{R}^3$ における近傍 V_a および $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O_a が存在して, $V_a \cap S$ は $\{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in O_a\}$, $\{(x, g(x, z), z) \mid (x, z) \in O_a\}$ または $\{(f(y, z), y, z) \mid (y, z) \in O_a\}$ のいずれかのように表されるとする, 但し f, g, h は 2 変数 C^∞ 級関数である. このとき S は 2 次元可微分多様体である.

例 m を自然数とし,

$$S^m := \{(r^1, r^2, \ldots, r^{m+1}) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid (r^1)^2 + \cdots + (r^{m+1})^2 = 1\}$$

とおく. このとき S^m は m 次元可微分多様体である. S^m を <u>**m 次元球面**</u> という.

例 $\boldsymbol{R}^{m+1} \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ の 2 点 p, q に対し, ある実数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して $q = \lambda p$ が成り立つとき, $p \sim q$ と書くことにする. $\sim$ は $\boldsymbol{R}^{m+1} \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ における同値関係である. このとき商集合 $P^m := (\boldsymbol{R}^{m+1} \setminus \{\boldsymbol{o}\})/\sim$ は商位相により Hausdorff 空間であることがわかり, さらに m 次元可微分多様体であることがわかる. P^m を <u>**m 次元 (実) 射影空間**</u> という.

例 M を m 次元可微分多様体とし, O を M の開集合とする. このとき O は m 次元可微分多様体である. O を M の <u>**開部分多様体**</u> という.

例 M, N を可微分多様体とし, これらの次元はそれぞれ m, n であるとする. このとき $M \times N$ は $m+n$ 次元可微分多様体である. $M \times N$ を M と N の <u>**積多様体**</u> という. 3 以上の自然数 k に対し, k 個の多様体 M_1, $M_2, \ldots, M_k$ の積多様体 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$ も考えることができる. 特に, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対し M_i が S^1 であるとき, 積多様体 $S^1 \times \cdots \times S^1$ を T^k で表し <u>**k 次元トーラス**</u> と呼ぶ.

第３章　可微分関数および可微分写像

M を m 次元可微分多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の C^∞ 級座標近傍系とする. U を M の開集合とし, f を U 上の連続関数とする. f が **C^∞ 級** (**可微分** または **滑らか**) であるとは, $U_\lambda \cap U \neq \emptyset$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ に対し $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\lambda(U_\lambda \cap U)$ 上の関数 $f \circ x_\lambda^{-1}$ が C^∞ 級であるときにいう.

注意　f が C^∞ 級であるかどうかは座標近傍の取り方には依らず, C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ の取り方にのみ依存する: $U_\lambda \cap U \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\mu \in \Lambda$ に対し, $x_\mu(U_\lambda \cap U \cap U_\mu)$ 上で

$$f \circ x_\mu^{-1} = (f \circ x_\lambda^{-1}) \circ (x_\lambda \circ x_\mu^{-1}) \tag{1}$$

が成り立ち, $x_\lambda \circ x_\mu^{-1} : x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ も $x_\mu \circ x_\lambda^{-1} : x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ も C^∞ 級であるので, $f \circ x_\lambda^{-1}$ が C^∞ 級であることと $f \circ x_\mu^{-1}$ が C^∞ 級であることは同値である.

f を M の開集合 U 上の C^∞ 級関数とする. このとき $U_\lambda \cap U \neq \emptyset$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ に対し, $x_\lambda(U_\lambda \cap U)$ 上の関数 $f_\lambda := f \circ x_\lambda^{-1}$ は C^∞ 級である. $(r^1, r^2, \ldots, r^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ の直交座標系とするとき, $x_\lambda(U_\lambda \cap U)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合なので, f_λ の r^i に関する偏導関数 $\partial f_\lambda / \partial r^i$ を考えることができる. 多様体論においては, 通常これを $\partial f / \partial x_\lambda^i$ と書く: より正確には, $U_\lambda \cap U$ の各点 a に対し

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda^i}(a) := \frac{\partial f_\lambda}{\partial r^i}(x_\lambda(a)) \tag{2}$$

と定めるということである.

$U_\lambda \cap U \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\mu \in \Lambda$ および $U_\lambda \cap U \cap U_\mu$ の点 a をとる. このとき (1) に注意して合成関数の微分法を用いることにより,

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial s^i}(x_\mu(a)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_\lambda}{\partial r^j}(x_\lambda(a)) \frac{\partial (x_\lambda^j \circ x_\mu^{-1})}{\partial s^i}(x_\mu(a)) \tag{3}$$

を得る, 但し $(s^1, s^2, \ldots, s^m)$ はやはり $\boldsymbol{R}^m$ の直交座標系である. (2) によると $(\partial(x_\lambda^j \circ x_\mu^{-1})/\partial s^i)(x_\mu(a))$ を $(\partial x_\lambda^j / \partial x_\mu^i)(a)$ と書くので, (2) を用いて (3) を

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu^i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^j}(a) \frac{\partial x_\lambda^j}{\partial x_\mu^i}(a)$$

と書くことができる. 以上の記号法については, 慣れれば問題ないが, 慣れるまでは記されたものが実際に表すものを適宜確認した方が良い.

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{(V_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をそれぞれ M, N の C^∞ 級座標近傍系とする. F を M から N への連続写像とする. M の 1 点 a に対し, $F(a) \in V_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ が存在し, F は連続なので a の近傍 U で $F(U) \subset V_\alpha$ を満たすものが存在する. F が **C^∞ 級** (**可微分** または **滑らか**) であるとは, M の各点 a および上のような設定のもと $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ に対し $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\lambda(U_\lambda \cap U)$ から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $y_\alpha(V_\alpha)$ への写像

$$y_\alpha \circ F \circ x_\lambda^{-1} : x_\lambda(U_\lambda \cap U) \longrightarrow y_\alpha(V_\alpha)$$

が C^∞ 級であるときにいう. F が C^∞ 級であるかどうかは C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$, $\{(V_\alpha, y_\alpha)\}$ の取り方にのみ依存する.

第４章　接ベクトル、関数の微分および写像の微分

4.1　接ベクトルの定義（その１）

M を m 次元可微分多様体とする．a を M の 1 点とし, (U_λ, x_λ) を a の座標近傍とする．a の近傍上で定義された C^∞ 級関数 f に対し a での偏微分係数 $(\partial f/\partial x_\lambda^i)(a)$ を対応させる作用素 $\partial/\partial x_\lambda^i|_a$ を考えることができる．より一般に, $(v_\lambda^1, v_\lambda^2, \ldots, v_\lambda^m) \in \boldsymbol{R}^m$ を 1 組とるとき,

$$v_\lambda^1 \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^1}(a) + v_\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^2}(a) + \cdots + v_\lambda^m \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^m}(a)$$

を対応させる作用素

$$v_\lambda^1 \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^1}\right|_a + v_\lambda^2 \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^2}\right|_a + \cdots + v_\lambda^m \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^m}\right|_a$$

を考えることができる．ここで

$$X_\lambda(a) := \left\{ v_\lambda^1 \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^1}\right|_a + v_\lambda^2 \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^2}\right|_a + \cdots + v_\lambda^m \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^m}\right|_a \;\middle|\; (v_\lambda^1, v_\lambda^2, \ldots, v_\lambda^m) \in \boldsymbol{R}^m \right\}$$

とおく．$X_\lambda(a)$ は m 次元ベクトル空間である．

(U_μ, x_μ) を a の (別の) 座標近傍とする．このとき $X_\lambda(a)$ の元 $v_\lambda = \sum_{i=1}^m v_\lambda^i \partial/\partial x_\lambda^i|_a$ に対し $X_\mu(a)$ の元 $v_\mu = \sum_{j=1}^m v_\mu^j \partial/\partial x_\mu^j|_a$ を

$$v_\mu^j := \sum_{i=1}^m v_\lambda^i \frac{\partial x_\mu^j}{\partial x_\lambda^i}(a)$$

で定める．このとき, a の近傍上の C^∞ 級関数 f に対し, 第 3 章で得た式において μ と λ を入れ替えたもの

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda^i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_\mu^j} \frac{\partial x_\mu^j}{\partial x_\lambda^i}$$

を用いて, $v_\lambda(f) = v_\mu(f)$ を得る．

上のように $X_\lambda(a)$ の元 v_λ に対し $X_\mu(a)$ の元 v_μ を対応させる写像 $T_{\mu\lambda}$ は線形でありそして正則である．このことを踏まえて, 次の定義を行なう: M の点 a での **接空間** $T_a(M)$ とは,

(i) m 次元ベクトル空間であり,

(ii) a の各座標近傍 (U_λ, x_λ) に対し, $T_a(M)$ から $X_\lambda(a)$ への同型写像 L_λ が付与されていて,

(iii) a の別の座標近傍 (U_μ, x_μ) に対し定まる同型写像 L_μ は $L_\mu = T_{\mu\lambda} \circ L_\lambda$ を満たす

ものである．よって a の近傍上の C^∞ 級関数 f および $T_a(M)$ の元 v に対し実数 $v(f) := (L_\lambda(v))(f)$ は座標近傍 (U_λ, x_λ) の取り方には依存しない．こうして接空間 $T_a(M)$ の各元は a の近傍上の可微分関数に実数を対応させる作用素とみなされる．接空間 $T_a(M)$ の各元を M の a での **接ベクトル** という．

以下においては, 混乱の恐れが無いときには $v \in T_a(M)$ と $L_\lambda(v) \in X_\lambda(a)$ を同一視する．そして $X_\lambda(a)$ の基底の 1 つを構成するベクトルの組 $\partial/\partial x_\lambda^1|_a$, $\partial/\partial x_\lambda^2|_a, \ldots, \partial/\partial x_\lambda^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底の一つを構成するとみなされる．

第４章　接ベクトル、関数の微分および写像の微分

4.2　接ベクトルの定義（その２）

$T_a(M)$ を m 次元可微分多様体 M の点 a での接空間とする. (U_λ, x_λ) を a の座標近傍とするとき, $T_a(M)$ の各元 v は $v = \sum_{i=1}^m v_\lambda^i \partial/\partial x_\lambda^i|_a$ と表される. 従って, a の近傍上の可微分関数 f, g および定数 $c \in \boldsymbol{R}$ に対し,

$$v(f+g) = v(f) + v(g), \quad v(cf) = cv(f), \quad v(fg) = v(f)g(a) + f(a)v(g) \tag{1}$$

が成り立つ. ここで a の近傍上の可微分関数に実数を対応させる v で (1) を満たすものの全てを集めて作った集合を $T'_a(M)$ で表す. このとき $T_a(M) \subset T'_a(M)$ が成り立ち, そして $T'_a(M)$ はベクトル空間であることがわかる. さらに, 実は $T'_a(M) = T_a(M)$ がわかる. こうして M の a での **接ベクトル** とは, a の近傍上の可微分関数全体からなる集合上の関数で (1) を満たすものであることがわかる.

4.3　可微分関数の微分

M を m 次元可微分多様体とし, f を $a \in M$ の近傍上の可微分関数とする. このとき a での各接ベクトル $v \in T_a(M)$ に対し, 実数 $df_a(v)$ を $df_a(v) := v(f)$ で定義する. このように定義される $T_a(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $df_a : T_a(M) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を f の a での **微分** という. df_a は線形関数であり, 従って df_a は $T_a(M)$ の双対空間 $T_a^*(M)$ の元である.

(U_λ, x_λ) を a の座標近傍とする. このとき $\partial/\partial x_\lambda^1|_a, \partial/\partial x_\lambda^2|_a, \ldots, \partial/\partial x_\lambda^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底の一つを形成する. この基底の双対基底を $dx_\lambda^1|_a, dx_\lambda^2|_a, \ldots, dx_\lambda^m|_a$ で表す. よって f の a での微分 df_a は $dx_\lambda^1|_a, dx_\lambda^2|_a, \ldots, dx_\lambda^m|_a$ の 1 次結合で表され, そして

$$df_a = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^i}(a) dx_\lambda^i|_a$$

が成り立つ.

4.4　可微分写像の微分

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする. M の点 a および $T_a(M)$ の元 v に対し, $T_{F(a)}(N)$ の元 $dF_a(v)$ を $(dF_a(v))(f) := d(f \circ F)_a(v)$ で定義する, 但し f は $F(a)$ の N における近傍上の可微分関数である. このように定義される $T_a(M)$ から $T_{F(a)}(N)$ への写像 $dF_a : T_a(M) \longrightarrow T_{F(a)}(N)$ を F の a での **微分** という. dF_a は線形写像である.

(U_λ, x_λ) を $a \in M$ の座標近傍とし, (V_α, y_α) を $F(a) \in N$ の座標近傍とする. このとき $T_a(M)$ の元 $\partial/\partial x_\lambda^i|_a$ の dF_a による像は

$$dF_a\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\right|_a\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_\alpha^j}{\partial x_\lambda^i}(a) \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha^j}\right|_{F(a)}$$

と表される, 但し $F_\alpha^j := y_\alpha^j \circ F$ である.

第５章　微分同型および逆関数の定理

5.1　微分同型およびその性質

M_1, M_2, M_3 を可微分多様体とし, $F_1 : M_1 \longrightarrow M_2$, $F_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ を可微分写像とする．このとき F_1 と F_2 の合成 $F_2 \circ F_1$ は M_1 から M_3 への可微分写像であり, M_1 の点 a に対し次が成り立つ:

$$d(F_2 \circ F_1)_a = (dF_2)_{F_1(a)} \circ (dF_1)_a. \tag{1}$$

M, N を可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする．F が M から N の上への **微分同型** であるとは, F が全単射でありかつ F の逆写像 F^{-1} も可微分であるときにいう．$F : M \longrightarrow N$ を M から N の上への微分同型とする．前段落において $M_1 := M$, $M_2 := N$, $M_3 := M$ としまた $F_1 := F$, $F_2 := F^{-1}$ とするとき, (1) から

$$d(\mathrm{Id}_M)_a = d(F^{-1})_{F(a)} \circ dF_a \tag{2}$$

を得る．また $M_1 := N$, $M_2 := M$, $M_3 := N$ としまた $F_1 := F^{-1}$, $F_2 := F$ とするとき, (1) から

$$d(\mathrm{Id}_N)_{F(a)} = dF_a \circ d(F^{-1})_{F(a)} \tag{3}$$

を得る．$d(\mathrm{Id}_M)_a = \mathrm{Id}_{T_a(M)}$, $d(\mathrm{Id}_N)_{F(a)} = \mathrm{Id}_{T_{F(a)}(N)}$ であるので, (2), (3) から

$$(dF_a)^{-1} = d(F^{-1})_{F(a)}$$

を得る．特に M と N の次元は等しいことがわかる．

5.2　逆関数の定理

$F : M \longrightarrow N$ を M から N の上への微分同型とし, m を M および N の次元とする．(U_λ, x_λ) を $a \in M$ の座標近傍とし, (V_α, y_α) を $F(a) \in N$ の座標近傍とする．このとき $T_a(M)$ の元 $\partial/\partial x_\lambda^j|_a$ の dF_a による像を

$$dF_a\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^j}\bigg|_a\right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_\alpha^i}{\partial x_\lambda^j}(a)\frac{\partial}{\partial y_\alpha^i}\bigg|_{F(a)}$$

と表すとき, dF_a は正則な線形写像であるので (i,j) 成分が $(\partial F_\alpha^i/\partial x_\lambda^j)(a)$ である m 次正方行列の行列式 $\det((\partial F_\alpha^i/\partial x_\lambda^j)(a))$ は 0 ではない．こうして F が微分同型であることから $\det((\partial F_\alpha^i/\partial x_\lambda^j)(a)) \neq 0$ が導かれたが, 次の逆関数の定理は局所的にこの逆が成り立つことを述べている．

逆関数の定理　F は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 D から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 E への可微分写像であり, D の各点で (i,j) 成分が $\partial F^i/\partial x^j$ である m 次正方行列の行列式は 0 ではないとする．このとき F は各 $a \in D$ のある近傍から $F(a)$ のある近傍の上への微分同型である．

f^1, $f^2, \ldots, f^m$ を M の点 a の近傍 U 上の可微分関数とし, U から $\boldsymbol{R}^m$ への可微分写像 F を $F = (f^1, \ldots, f^m)$ で定める．a の座標近傍 (U_λ, x_λ) に対し, (i,j) 成分が $(\partial f^i/\partial x_\lambda^j)(a)$ である m 次正方行列の行列式 $\det((\partial f^i/\partial x_\lambda^j)(a))$ は 0 ではないとする．このとき上の逆関数の定理から, U を十分小さくとり直して $U \subset U_\lambda$ が成り立ちかつ $x_\lambda(U)$ から $F(U)$ への写像 $F \circ x_\lambda^{-1}$ が微分同型であるようにできる．従って M の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ に (U, F) を加えたものはやはり M の C^∞ 級座標近傍系である．

第６章 ベクトル場および積分曲線

M を m 次元可微分多様体とする．M 上の **ベクトル場** V とは, M の各点 a に対し $T_a(M)$ の元 V_a を一つ対応させるものである．座標近傍 (U_λ, x_λ) に対し, M 上のベクトル場 V は U_λ 上で

$$V = \sum_{i=1}^{m} v_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}$$

と表される, 但し v_λ^i は U_λ 上の関数であり局所座標系 $(x_\lambda^1, x_\lambda^2, \ldots, x_\lambda^m)$ に関する V の **成分** という．ベクトル場 V が **連続** であるとは, 任意の座標近傍 (U_λ, x_λ) 上で v_λ^i が連続関数であるときにいい, V が **C^∞ 級** (または **滑らか**) であるとは, 任意の (U_λ, x_λ) 上で v_λ^i が C^∞ 級であるときにいう．

M 上の滑らかなベクトル場 V, W および滑らかな関数 f に対し, 滑らかなベクトル場 $V+W$, fV および滑らかな関数 Vf を

$$(V+W)_a := V_a + W_a, \quad (fV)_a := f(a)V_a, \quad (Vf)(a) := V_a(f)$$

$(a \in M)$ により定義することができる．座標近傍 (U_λ, x_λ) に対し U_λ 上で V, W を $V = \sum_{i=1}^m v_\lambda^i \partial/\partial x_\lambda^i$, $W = \sum_{i=1}^m w_\lambda^i \partial/\partial x_\lambda^i$ と表すとき, $V(Wf) - W(Vf)$ に対し

$$V(Wf) - W(Vf) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(v_\lambda^j \frac{\partial w_\lambda^i}{\partial x_\lambda^j} - w_\lambda^j \frac{\partial v_\lambda^i}{\partial x_\lambda^j} \right) \right) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^i}$$

が成り立ち, 従って $VW - WV$ は U_λ 上のベクトル場である．これを $[V, W]_\lambda$ と書くことにする．

命題 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす (U_μ, x_μ) に対し, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で $[V, W]_\mu = [V, W]_\lambda$ が成り立つ．

この命題から, M 上の滑らかなベクトル場 V, W に対し M 上のベクトル場 $[V, W]$ を各座標近傍 (U_λ, x_λ) 上で $[V, W] := [V, W]_\lambda$ とおくことによって定義できることがわかる．ベクトル場 $[V, W]$ を V と W の **交換子積** または **かっこ積** という．

V を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．I を開区間とし, $\gamma : I \longrightarrow M$ を C^∞ 級写像とする．γ が V の **積分曲線** であるとは, I の任意の点 t に対し

$$d\gamma_t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = V_{\gamma(t)} \tag{1}$$

が成り立つときにいう．$t_0 \in I$ に対し, (U_λ, x_λ) を $\gamma(t_0)$ の座標近傍とする．このとき t_0 を含む開集合 J で $\gamma(J) \subset U_\lambda$ を満たすものが存在する．$t \in J$ に対し

$$d\gamma_t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d\gamma_\lambda^i}{dt}(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \right|_{\gamma(t)}$$

が成り立つ, 但し $\gamma_\lambda^i := x_\lambda^i \circ \gamma$ である．よって, U_λ 上で V を $V = \sum_{i=1}^m v_\lambda^i \partial/\partial x_\lambda^i$ と表すと, $t \in J$ で (1) は

$$\frac{d\gamma_\lambda^i}{dt}(t) = V_\lambda^i(\gamma_\lambda^1(t), \ldots, \gamma_\lambda^m(t)) \tag{2}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$ と同値である, 但し $V_\lambda^i := v_\lambda^i \circ x_\lambda^{-1}$ である．(2) は正規形 1 階常微分方程式系であるので, $t_0 \in I$ および $x_\lambda(U_\lambda)$ の任意の点 $r_0 = (r_0^1, r_0^2, \ldots, r_0^m)$ に対し (2) の解 $(\gamma_\lambda^1, \ldots, \gamma_\lambda^m)$ で $\gamma_\lambda^i(t_0) = r_0^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を満たすものが t_0 の十分小さい近傍において一意に存在する．よって $t_0 \in I$ および $a \in M$ に対し, V の積分曲線 γ で $\gamma(t_0) = a$ を満たすものが t_0 の十分小さい近傍において一意に存在する．

演習問題１

[1] m を自然数とし,

$$P_+ := \{(r^1, r^2, \ldots, r^m, 1) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid (r^1, r^2, \ldots, r^m) \in \boldsymbol{R}^m\}$$
$$P_- := \{(r^1, r^2, \ldots, r^m, -1) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid (r^1, r^2, \ldots, r^m) \in \boldsymbol{R}^m\}$$

とおく. また $U_+ := S^m \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}$, $U_- := S^m \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ とおき, $\pi_+ : U_+ \longrightarrow P_+$, $\pi_- : U_- \longrightarrow P_-$ をそれぞれ $(0, \ldots, 0, -1)$, $(0, \ldots, 0, 1)$ からの立体射影とする: $\varepsilon \in \{+, -\}$, $r := (r^1, \ldots, r^{m+1}) \in U_\varepsilon$ および $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し,

$$x_\varepsilon^i(r) := \frac{2r^i}{1 + \varepsilon r^{m+1}}, \quad \pi_\varepsilon(r) := (x_\varepsilon^1(r), \ldots, x_\varepsilon^m(r), \varepsilon 1), \quad x_\varepsilon(r) := (x_\varepsilon^1(r), \ldots, x_\varepsilon^m(r))$$

とおく.
(a) $\{(U_+, x_+), (U_-, x_-)\}$ は S^m の C^∞ 級座標近傍系であることを示せ.
(b) $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 上の可微分関数である r^{m+1} を S^m に制限するとき, U_+ 上で $x_+^1, \ldots, x_+^m$ を用いて $\partial r^{m+1}/\partial x_+^i$ を表せ.
(c) $a \in U_+ \cap U_-$ での接ベクトル $\partial/\partial x_+^i \in T_a(S^m)$ を $\partial/\partial x_-^1, \ldots, \partial/\partial x_-^m$ の 1 次結合で表せ.

[2] 2 以上の自然数 m および $\boldsymbol{R}^m$ 上の C^∞ 級関数 f に対し, Z_f を f の全ての零点からなる集合とする: $Z_f := \{a \in \boldsymbol{R}^m \mid f(a) = 0\}$. Z_f の任意の点 a で関数 f の微分 df_a が零ではないとする. このとき Z_f は $(m-1)$ 次元可微分多様体であることを示せ.

[3] S^m から P^m への写像 $\pi : S^m \longrightarrow P^m$ を, $a \in S^m$ に対し $\pi(a)$ が a を含む P^m の元であるように定める. このとき π は可微分写像であることを示せ.

[4] M を m 次元可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^{m+1}$ を可微分写像とする. M の任意の点 a での F の微分 $dF_a : T_a(M) \longrightarrow T_{F(a)}(\boldsymbol{R}^{m+1})$ は単射であるとする. このとき各 $a \in M$ に対し, a の近傍 U_a が存在して, $F(U_a)$ はある m 変数関数のグラフと表されることを示せ.

[5] D を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, f を D 上の C^∞ 級関数とする. C^∞ 級写像 $F : D \longrightarrow \boldsymbol{R}^{m+1}$ を

$$F(x^1, \ldots, x^m) := (x^1, \ldots, x^m, f(x^1, \ldots, x^m)) \quad ((x^1, \ldots, x^m) \in D)$$

で定めるとき, D の任意の点での F の微分は単射であることを示せ.

[6] $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^4$ への可微分写像 $F : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^4$ を次で定める:

$$F(u, v) := (\cos 2u \cos v,\ \sin 2u \cos v,\ \cos 3u \sin v,\ \sin 3u \sin v).$$

(a) $F(\boldsymbol{R}^2) \subset S^3$ であることを示せ.
(b) $\boldsymbol{R}^2$ の任意の点での F の微分は単射であることを示せ.

演習問題１（続き）

[7] 可微分多様体 M, N を $M := (0,\infty) \times \boldsymbol{R}$, $N := \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定める．M から N への可微分写像 $F : M \longrightarrow N$ を $F(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定める ($(r,\theta) \in M$).
(1) M の各点 (r,θ) での F の微分 $dF_{(r,\theta)}$ の核 $\mathrm{Ker}\, dF_{(r,\theta)}$ を求めよ.
(2) M の各点 (r,θ) の近傍 U を選んで, F の U への制限 $F|_U$ は U から N のある開集合の上への微分同型であることを示せ.

[8] $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場 V, W を

$$V_{(x,y)} := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad W_{(x,y)} := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める ($(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$).
(1) V と W の交換子積 $[V,W]$ を求めよ.
(2) $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への可微分写像 γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 を

$$\gamma_1(t) := (t, 2t), \quad \gamma_2(t) := (e^t, e^{2t}), \quad \gamma_3(t) := (e^t, 2e^t),$$
$$\gamma_4(t) := (\cos t, \sin t), \quad \gamma_5(t) := (\cos t, -\sin t)$$

で定める．これらの各々が V または W の積分曲線であるかどうかを判定せよ.

[9] V_1, V_2, V_3 を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．このとき **Jacobi の恒等式**

$$[V_1,[V_2,V_3]] + [V_2,[V_3,V_1]] + [V_3,[V_1,V_2]] = 0$$

を示せ.

[10] 実数 ρ に対し, $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場 V を

$$V_{(x,y)} := \frac{\partial}{\partial x} + \rho\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める．$\gamma : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を V の積分曲線とする．$\boldsymbol{R}^2$ から 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ への可微分写像 F を $F(x,y) := (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y)$ で定める．このとき $(F \circ \gamma)(\boldsymbol{R})$ が T^2 における閉曲線である (S^1 に同相である) ための ρ に関する条件を求めよ.

[11] M, N を可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする．V_1, V_2 を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする．W_1, W_2 を N 上の C^∞ 級ベクトル場とし, M の任意の点 a に対し $dF_a((V_i)_a) = (W_i)_{F(a)}$ が成り立つとする ($i = 1,2$)．このとき M の任意の点 a に対し $dF_a([V_1,V_2]_a) = [W_1,W_2]_{F(a)}$ が成り立つことを示せ.

[12]
(a) $T^2 = S^1 \times S^1$ 上には零点を持たない C^∞ 級ベクトル場が存在することを示せ.
(b) S^3 上には零点を持たない C^∞ 級ベクトル場が存在することを示せ.
(c)* S^2 上の C^∞ 級ベクトル場は必ず零点を持つことを示せ.

第７章　テンソル場および微分形式

7.1　多重線形形式 (その１)

X をベクトル空間とし, p を正の整数とする. X^p 上の関数 f が **p 次線形形式** であるとは, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ および任意の $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p \in X$ に対し

$$f_i(x) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

($x \in X$) で定義される X 上の関数 f_i が X の双対空間 X^* の元であるときにいう. X 上の 1 次線形形式とはちょうど X^* の元であり, X 上の 2 次線形形式は **双線形形式** とも呼ばれる. またある $p \in \boldsymbol{N}$ に対して p 次線形形式であるものについて, p を明記する必要がない場合には, それを **多重線形形式** という.

二つの p 次線形形式 f, g に対し,

$$(f+g)(x_1, \ldots, x_p) := f(x_1, \ldots, x_p) + g(x_1, \ldots, x_p)$$

($x_i \in X$) で定義される X^p 上の関数 $f+g$ は p 次線形形式である. また実数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$(\lambda f)(x_1, \ldots, x_p) := \lambda f(x_1, \ldots, x_p)$$

で定義される X^p 上の関数 λf も p 次線形形式である. こうして X^p 上の全ての p 次線形形式からなる集合はベクトル空間をなすことがわかる. これを $\otimes^p X^*$ で表し, p 個の X^* の **テンソル積** という. $\otimes^0 X^* := \boldsymbol{R}$ とおく.

$p, q \in \boldsymbol{N}$ に対し, f を p 次線形形式とし g を q 次線形形式とする. このとき

$$(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) := f(x_1, \ldots, x_p) g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$$

で定義される X^{p+q} 上の関数 $f \otimes g$ は $p+q$ 次線形形式である. $f \otimes g$ を f と g の **テンソル積** という.

命題　$p, q, r \in \boldsymbol{N}$, $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, $f, f_i \in \otimes^p X^*$, $g, g_i \in \otimes^q X^*$, $h \in \otimes^r X^*$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \otimes g = \lambda_1 (f_1 \otimes g) + \lambda_2 (f_2 \otimes g), \\
&f \otimes (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 (f \otimes g_1) + \lambda_2 (f \otimes g_2), \\
&(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).
\end{aligned}$$

以下, X を有限次元ベクトル空間とし, X の次元を m とする. $e_1, \ldots, e_m \in X$ は X の基底を与えるとし, $e^1, \ldots, e^m \in X^*$ はこの基底に双対な X^* の基底を与えるとする: $e^i(e_j) = \delta^i_j$ ($i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$).

命題　$\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \mid i_1, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ は $\otimes^p X^*$ の基底である. 従って $\dim \otimes^p X^* = m^p$.

証明の概略　まず $\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}\}$ が 1 次独立であることについては,

$$\sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} c_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} = 0$$

($c_{i_1 \ldots i_p} \in \boldsymbol{R}$) とおき $c_{i_1 \ldots i_p} = 0$ を示すことによってわかる. また $\{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}\}$ が $\otimes^p X^*$ を生成することについては, 任意の $f \in \otimes^p X^*$ に対し

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} f_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$$

($f_{i_1 \ldots i_p} := f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$) が成り立つことからわかる. □

第７章　テンソル場および微分形式

7.2　多重線形形式 (その２)

$p \in \boldsymbol{N}$ に対し, G_p を p 個の文字 $1, 2, \ldots, p$ の全ての置換からなる群とする. $f \in \otimes^p X^*$ および $\sigma \in G_p$ に対し

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_p) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

$(x_i \in X)$ とおくと, $\sigma f \in \otimes^p X^*$ が成り立つ. f が **対称** であるとは, 任意の $\sigma \in G_p$ に対し $\sigma f = f$ が成り立つときにいう. また f が **交代** であるとは, 任意の $\sigma \in G_p$ に対し $\sigma f = \varepsilon_\sigma f$ が成り立つときにいう, 但し ε_σ は置換 σ の符号である.

全ての交代な p 次線形形式からなる集合を $\bigwedge^p X^*$ で表す. $\bigwedge^p X^*$ は $\otimes^p X^*$ の部分空間をなす.

ベクトル空間 $\otimes^p X^*$ の線形変換 A_p を

$$A_p f := \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma \sigma f$$

で定め, $\otimes^p X^*$ の **交代化作用素** と呼ぶ.

命題　次が成り立つ:

$$\operatorname{Im} A_p = \bigwedge^p X^*, \quad \otimes^p X^* = \operatorname{Im} A_p \oplus \operatorname{Ker} A_p.$$

$f \in \bigwedge^p X^*$, $g \in \bigwedge^q X^*$ に対し, $\bigwedge^{p+q} X^*$ の元 $f \wedge g$ を

$$f \wedge g := \frac{1}{p!q!} A_{p+q}(f \otimes g)$$

で定め, f と g の **外積** と呼ぶ.

命題　$p, q, r \in \boldsymbol{N}$, $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, $f, f_i \in \bigwedge^p X^*$, $g, g_i \in \bigwedge^q X^*$, $h \in \bigwedge^r X^*$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \wedge g = \lambda_1 (f_1 \wedge g) + \lambda_2 (f_2 \wedge g), \\
&f \wedge (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 (f \wedge g_1) + \lambda_2 (f \wedge g_2), \\
&(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).
\end{aligned}$$

この命題における最後の式以外は外積の定義および二つの多重線形形式のテンソル積の性質から直ちに得られる. 一方で, 最後の式を示すために, 次の補題を必要とする.

補題　$f \in \operatorname{Ker} A_p$, $g \in \otimes^q X^*$ に対し $f \otimes g \in \operatorname{Ker} A_{p+q}$ が成り立ち, $f \in \otimes^p X^*$, $g \in \operatorname{Ker} A_q$ に対し $f \otimes g \in \operatorname{Ker} A_{p+q}$ が成り立つ.

X を有限次元ベクトル空間とし, X の次元を m とする. $e_1, \ldots, e_m \in X$ は X の基底を与えるとし, $e^1, \ldots, e^m \in X^*$ はこの基底に双対な X^* の基底を与えるとする.

命題　$p > m$ ならば, $\bigwedge^p X^*$ は零ベクトルだけからなる. $p \leqq m$ ならば,

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \mid i_1, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, m\}, i_1 < \cdots < i_p\}$$

は $\bigwedge^p X^*$ の基底であり, 従って $\dim \bigwedge^p X^* = m!/p!(m-p)!$.

第７章 テンソル場および微分形式

7.3 多様体上のテンソル場

M を m 次元可微分多様体とする．M 上の p 次 **共変テンソル場** t とは, M の各点 a に対し a での接空間 $T_a(M)$ の p 次線形形式 $t_a \in \otimes^p T_a^*(M)$ を対応させるものである．$\otimes^0 T_a^*(M) = \boldsymbol{R}$ であるので, 0 次共変テンソル場とは M 上の関数である．

t, t' を M 上の p 次共変テンソル場とするとき, p 次共変テンソル場 $t + t'$ を $(t + t')_a := t_a + t'_a$ で定義できる (t と t' の **和**)．また f を M 上の関数とするとき, p 次共変テンソル場 ft を $(ft)_a := f(a)t_a$ で定義できる．s を M 上の q 次共変テンソル場とするとき, $p + q$ 次共変テンソル場 $t \otimes s$ を $(t \otimes s)_a := t_a \otimes s_a$ で定義できる (t と s の **テンソル積**)．

t を M 上の p 次共変テンソル場とし, (U, x) を座標近傍とする．このとき U 上で t は

$$t = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{m} t_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$$

と表される．$t_{i_1\ldots i_p}$ は U 上の関数で, $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ に関する t の **成分** という．t が **連続** であるとは, 任意の座標近傍 (U, x) 上で $t_{i_1\ldots i_p}$ が連続関数であるときにいい, t が **C^∞ 級** (または **滑らか**) であるとは, 任意の (U, x) 上で $t_{i_1\ldots i_p}$ が C^∞ 級であるときにいう．

7.4 微分形式およびその外微分

M 上の p 次 **微分形式** とは, 各 $a \in M$ に対し $\bigwedge^p T_a^*(M)$ の元を対応させるものである．M 上の p 次微分形式 ω および q 次微分形式 θ に対し, $p + q$ 次微分形式 $\omega \wedge \theta$ を $(\omega \wedge \theta)_a := \omega_a \wedge \theta_a$ で定義できる (ω と θ の **外積**)．

ω を M 上の p 次微分形式とし, (U, x) を座標近傍とする．このとき U 上で ω は

$$\omega = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と表される．ω が滑らかであることと U 上の関数 $\omega_{i_1\ldots i_p}$ $(1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m)$ が滑らかであることは同値である．M 上の全ての滑らかな p 次微分形式からなる集合を $A^p(M)$ で表す．$\omega \in A^p(M)$ に対し,

$$(d\omega)_U := \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{1}$$

とおく．$(d\omega)_U$ は $A^{p+1}(U)$ の元である．

命題 $(\tilde{U}, \tilde{x})$ は座標近傍で, $\tilde{U} \cap U \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき $U \cap \tilde{U}$ 上で, $(d\omega)_{\tilde{U}} = (d\omega)_U$ が成り立つ．

この命題から, 各 $\omega \in A^p(M)$ に対し $d\omega \in A^{p+1}(M)$ を各座標近傍 (U, x) 上で $d\omega := (d\omega)_U$ とおくことによって定義できることがわかる．微分形式 $d\omega$ を ω の **外微分** という．

命題 任意の $\omega \in A^p(M)$ に対し, $d(d\omega) = 0$.

命題 $\omega \in A^p(M)$ および $\theta \in A^q(M)$ に対し, $\omega \wedge \theta = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$.

第７章 テンソル場および微分形式

7.5 ベクトル場の空間上の p 次形式

$C^\infty(M)$ で M 上の全ての C^∞ 級関数からなる集合を表す. $C^\infty(M)$ は自然にベクトル空間をなす. また二つの関数の積を考えることができ, $f, g, h \in C^\infty(M)$ および $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し,

$$\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g), \quad (f+g)h = fh + gh, \quad f(g+h) = fg + fh, \quad f(gh) = (fg)h$$

が成り立つので, $C^\infty(M)$ は **多元環** をなす.

$V(M)$ で M 上の全ての C^∞ 級ベクトル場からなる集合を表す. $V(M)$ は自然にベクトル空間をなす. $V(M)$ の元 V および $C^\infty(M)$ の元 f に対し, $V(M)$ の元 fV を考えることができる. $f, g \in C^\infty(M)$, $V, W \in V(M)$ および $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し,

$$f(\lambda V) = (\lambda f)V = \lambda(fV),$$
$$f(V+W) = fV + fW, \quad (f+g)V = fV + gV, \quad f(gV) = (fg)V$$

が成り立つので, $V(M)$ は **$C^\infty(M)$ 加群** をなす.

T を p 個の $V(M)$ の直積 $V(M)^p$ から $C^\infty(M)$ への写像とする. $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ および $V, V_1, \dots, V_p \in V(M)$ に対し

$$T_i(V) := T(V_1, \dots, V_{i-1}, V, V_{i+1}, \dots, V_p)$$

とおく. 任意の $i \in \{1, \dots, p\}$, $f, g \in C^\infty(M)$ および $V, W \in V(M)$ に対し $T_i(fV + gW) = fT_i(V) + gT_i(W)$ が成り立つとき, T を $C^\infty(M)$ 加群 $V(M)$ 上の **p 次形式** という.

t を M 上の C^∞ 級 p 次共変テンソル場とし, $a \in M$ および $V_1, \dots, V_p \in V(M)$ に対し

$$t(V_1, \dots, V_p)(a) := t_a((V_1)_a, \dots, (V_p)_a)$$

とおく. このとき $t(V_1, \dots, V_p) \in C^\infty(M)$ であるので, t は $C^\infty(M)$ 加群 $V(M)$ 上の p 次形式を定める.

逆に次の定理が成り立つ.

定理 $C^\infty(M)$ 加群 $V(M)$ 上の p 次形式 T に対し, M 上の C^∞ 級 p 次共変テンソル場 t が存在して任意の $V_1, \dots, V_p \in V(M)$ に対し $T(V_1, \dots, V_p) = t(V_1, \dots, V_p)$ が成り立つ.

この定理の証明のために, 次の補題を必要とする.

補題 M の 1 点 a および a の任意の近傍 U に対し, a の近傍 U_a で $\bar{U}_a \subset U$ を満たすものおよび $C^\infty(M)$ の元 f で
· M 上で $0 \leqq f \leqq 1$,
· U_a 上で $f \equiv 1$,
· U^c 上で $f \equiv 0$
を満たすものが存在する.

この補題を用いて
· $V \in V(M)$ が M の開集合 U 上で $V \equiv 0$ ならば, 任意の $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ および任意の $V_1, \dots, V_p \in V(M)$ に対し U 上で $T_i(V) \equiv 0$ が成り立ち,
· $V \in V(M)$ および $a \in M$ に対し $V_a = 0$ ならば, 任意の $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ および任意の $V_1, \dots, V_p \in V(M)$ に対し $T_i(V)(a) = 0$ が成り立つ
ことを示すことによって, 上の定理を示すことができる.

演習問題２

[1] X を m 次元ベクトル空間とする $(m \in \boldsymbol{N})$.
(a) f を X 上の p 次交代形式とし, g を X 上の q 次交代形式とする $(p, q \in \boldsymbol{N})$. このとき

$$f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$$

を示せ. 特に, p が奇数であるとき, $f \wedge f = 0$ を示せ.
(b) (a) において $p = 1$ とする. このとき $x_1, \ldots, x_{q+1} \in X$ に対し,

$$(f \wedge g)(x_1, \ldots, x_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} f(x_i) g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{q+1})$$

を示せ.
(c) $x_1, \ldots, x_p \in X$, $f^1, \ldots, f^p \in X^*$ に対し,

$$(f^1 \wedge \cdots \wedge f^p)(x_1, \ldots, x_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(x_1) & f^2(x_1) & \cdots & f^p(x_1) \\ f^1(x_2) & f^2(x_2) & \cdots & f^p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1(x_p) & f^2(x_p) & \cdots & f^p(x_p) \end{pmatrix}$$

を示せ.
(d) $e^1, \ldots, e^p \in X^*$ とし, $f^j = \sum_{i=1}^p a_i^j e^i$ とする $(j = 1, \ldots, p)$. このとき

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^p = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & \cdots & a_p^p \end{pmatrix} e^1 \wedge \cdots \wedge e^p$$

を示せ. 特に, $p = m$ とするとき, X^* の m 個の元 $f^1, \ldots, f^m$ が X^* の基底をなすための必要十分条件は $f^1 \wedge \cdots \wedge f^m \neq 0$ で与えられることを示せ.

[2] (a) ω を $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級 1 次微分形式とし, $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$ と表されているとする. このとき

$$d\omega = \sum_{1 \leqq i < j \leqq 3} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

を示せ.
(b) ω を $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級 2 次微分形式とし, $\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2$ と表されているとする. このとき

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

を示せ.
(c) $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級関数 f に対し, $d(df) = 0$ を示せ. また $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級 1 次微分形式 ω に対し $d(d\omega) = 0$ を示せ.

演習問題２（続き)

[3] M を可微分多様体とする．$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ を M 上の C^∞ 級 1 次微分形式とする．このとき

$$\begin{aligned}&d(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4)\\&=(d\omega_1)\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4-\omega_1\wedge(d\omega_2)\wedge\omega_3\wedge\omega_4+\omega_1\wedge\omega_2\wedge(d\omega_3)\wedge\omega_4-\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge(d\omega_4).\end{aligned}$$

を示せ.

[4] Ω を $\boldsymbol{R}^4$ 上の C^∞ 級 2 次微分形式とし,

$$\Omega=\sum_{i<j}\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

と表す ($\Omega_{ij}\in C^\infty(\boldsymbol{R}^4)$, $i,j\in\{1,2,3,4\}$).
(a) $\boldsymbol{R}^4$ 上 $\Omega\wedge\Omega$ が零であることと, $\Omega_{12}\Omega_{34}-\Omega_{13}\Omega_{24}+\Omega_{14}\Omega_{23}$ が恒等的に零であることは同値であることを示せ.
(b) Ω の外微分 $d\Omega$ が恒等的に零であることと, $\boldsymbol{R}^4$ 上

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Omega_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial\Omega_{13}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Omega_{23}}{\partial x^1}=0,\quad \frac{\partial\Omega_{12}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Omega_{14}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Omega_{24}}{\partial x^1}=0,\\&\frac{\partial\Omega_{13}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Omega_{14}}{\partial x^3}+\frac{\partial\Omega_{34}}{\partial x^1}=0,\quad \frac{\partial\Omega_{23}}{\partial x^4}-\frac{\partial\Omega_{24}}{\partial x^3}+\frac{\partial\Omega_{34}}{\partial x^2}=0\end{aligned}$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

[5] M を m 次元可微分多様体とする．α を M 上の C^∞ 級 p 次微分形式とし, $d\alpha=0$ を仮定する．β を M 上の C^∞ 級 q 次微分形式とし, $q-1$ 次微分形式 ω に対し $d\omega=\beta$ が成り立つとする．このとき $p+q-1$ 次微分形式 θ が存在して, $\alpha\wedge\beta=d\theta$ が成り立つことを示せ.

第８章 多様体の向き

8.1 ベクトル空間の向き

X を m 次元ベクトル空間とする．X の **順序づけられた基底** とは, X の基底の一つを構成する m 個のベクトルがある順番で並べられたものである．例えば, $e_1, \ldots, e_m$ が X の基底をなすとき, 添え字の順に並べたもの $(e_1, \ldots, e_m)$ とはじめの二つを並べ替えたもの $(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_m)$ は順序づけられた基底としては区別する．$\mathrm{OB}(X)$ で X の全ての順序づけられた基底からなる集合を表す．$\mathrm{OB}(X)$ の 2 元 $e = (e_1, \ldots, e_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ に対し, 正則行列 $A = (a_{ij})$ で

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i \quad (j = 1, \ldots, m)$$

を満たすものが存在する．A の行列式 $\det A$ が正であるとき, $e \sim f$ と書くことにする．このとき $\sim$ は $\mathrm{OB}(X)$ における同値関係である．商集合 $\mathrm{OB}(X)/\sim$ はちょうど二つの元からなり, それぞれを X の **向き** という．いずれかの向きを選択しそれに含まれる $\mathrm{OB}(X)$ の元だけを扱って議論を進めることがある．特定の向きが指定されたベクトル空間は **向きづけられている** と言う．向きづけられているベクトル空間 X に対し, 指定された向きに含まれる $\mathrm{OB}(X)$ の元は **正** であるといい, 含まれないものは **負** であるという．

X 上の全ての交代な m 次線形形式の集合 $\bigwedge^m X^*$ は 1 次元ベクトル空間をなす．$\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ (但し 0 は $\bigwedge^m X^*$ の零元) の 2 元 α, β に対しある正数 c が $\beta = c\alpha$ を満たすとき, $\alpha \sim \beta$ と書くことにする．このとき $\sim$ は $\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ における同値関係である．商集合 $(\bigwedge^m X^* \setminus \{0\})/\sim$ はちょうど二つの元からなる．$\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ の 2 元 α, β に対し, $\alpha \sim \beta$ が成り立つことと任意の $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathrm{OB}(X)$ に対し

$$\alpha(e_1, \ldots, e_m)\beta(e_1, \ldots, e_m) > 0$$

が成り立つことは同値である．X が向きづけられているとき, $\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ の元 α が **正** であるとは, $\mathrm{OB}(X)$ の任意の正の元 $(e_1, \ldots, e_m)$ に対し $\alpha(e_1, \ldots, e_m) > 0$ が成り立つときにいう．$\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ の全ての正の元からなる集合は $(\bigwedge^m X^* \setminus \{0\})/\sim$ の二つの元のいずれかである．よって X が向きづけられているならば, $(\bigwedge^m X^* \setminus \{0\})/\sim$ の二つの元のいずれかを正と定めることができる．逆に, X がまだ向きづけられていない状況において, $(\bigwedge^m X^* \setminus \{0\})/\sim$ の二つの元のいずれかを選択することによって, その元が正であるように X の向きの一つを指定できる．こうして $\mathrm{OB}(X)$ の正の元を定めると $\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ の正の元が定まり, $\bigwedge^m X^* \setminus \{0\}$ の正の元を定めると $\mathrm{OB}(X)$ の正の元が定まることがわかった.

8.2 多様体の向きづけ可能性および向きづけられた多様体

M を m 次元可微分多様体とする．M が **向きづけ可能** であるとは, $A^m(M)$ の元 ω で M のどの点でも零にはならないものが存在するときにいう．M は向きづけ可能であるとし, M のどの点でも零にはならない $A^m(M)$ の全ての元からなる集合を $A^m(M)^*$ で表す．$A^m(M)^*$ の 2 元 α, β に対し $C^\infty(M)$ の元 f で正値なものが M 上 $\beta = f\alpha$ を満たすとき, $\alpha \sim \beta$ と書くことにする．このとき $\sim$ は $A^m(M)^*$ における同値関係であり, 商集合 $A^m(M)^*/\sim$ はちょうど二つの元からなる．$A^m(M)^*/\sim$ の各元を M の **向き** という．特定の向きが指定された可微分多様体は **向きづけられている** と言う．

M が向きづけられているとする．このとき指定された向きは **正** であるといい, 正の向きに含まれる $A^m(M)^*$ の元を **正** の m 次微分形式または **体積要素** (**体積形式**) という．ω を M 上の体積要素とし, (U, x) を座標近傍とする．$x = (x^1, \ldots, x^m)$ が **正** の局所座標系であるとは, U 上

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) > 0$$

が成り立つときにいう.

第９章 多様体上の積分

9.1 パラコンパクト多様体および単位の分割

S を位相空間とする．S の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が **局所有限** であるとは, S の各点 a に対し a の近傍 O_a を選んで $O_a \cap U_\lambda \neq \emptyset$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が有限個のみ存在するようにできるときにいう．$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, $\{V_i \mid i \in I\}$ を S の開被覆とする．$\{V_i \mid i \in I\}$ が $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の **細分** であるとは, 各 $i \in I$ に対し $V_i \subset U_\lambda$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が存在するときにいう．Hausdorff 空間 S が **パラコンパクト** であるとは, S の任意の開被覆に対しこの細分である局所有限な開被覆が存在するときにいう．

補題 M は可微分多様体でありそしてパラコンパクトであるとする．このとき M の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し, 同じ添字集合 Λ を持つ M の開被覆 $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$ を満たすものが存在する．

補題 可微分多様体 M のコンパクト集合 K および K を含む開集合 O に対し, 次の三つの条件を満たす $f \in C^\infty(M)$ が存在する:
· M 上で $0 \leqq f \leqq 1$;
· K 上で $f > 0$;
· O の補集合 O^c 上で $f = 0$.

M を可微分多様体とし, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の局所有限な開被覆とする．M 上の C^∞ 級関数の族 $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に従属した **単位の分割** であるとは, $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が次の三つの条件を満たすときにいう:
· 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, M 上 $0 \leqq f_\lambda \leqq 1$;
· 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, f_λ の台 $\overline{\{a \in M \mid f_\lambda(a) \neq 0\}}$ は U_λ に含まれる;
· M の任意の点 a に対し, $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(a) = 1$ (左辺においては, 有限個の項以外は 0 である).

命題 M をパラコンパクトな多様体とし, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の局所有限な開被覆とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\overline{U}_\lambda$ がコンパクトであるならば, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に従属した単位の分割が存在する．

証明 M の開被覆 $\{V_\lambda\}$, $\{W_\lambda\}$ で, 任意の λ に対し $\overline{W}_\lambda \subset V_\lambda$, $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$ を満たすものが存在する．$\overline{W}_\lambda$ はコンパクトなので, $C^\infty(M)$ の元 g_λ で
· M 上で $0 \leqq g_\lambda \leqq 1$;
· $\overline{W}_\lambda$ 上で $g_\lambda > 0$;
· V_λ の補集合 V_λ^c 上で $g_\lambda = 0$
を満たすものが存在する．このとき g_λ の台は U_λ に含まれる．$\{U_\lambda\}$ は局所有限なので, 各 $a \in M$ に対し $g_\lambda(a) \neq 0$ を満たす λ は有限個のみ存在する．よって $g(a) := \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda(a)$ とおくと, $g \in C^\infty(M)$ でありさらに M 上 $g > 0$ である．このとき $f_\lambda := g_\lambda / g$ とおくと, $\{f_\lambda\}$ は $\{U_\lambda\}$ に従属した単位の分割である． □

第９章　多様体上の積分

9.2　微分形式の積分

M を向きづけられたパラコンパクトな m 次元可微分多様体とする． Ω を $A^m(M)$ の元とし，Ω の台 $\mathrm{supp}(\Omega) := \overline{\{a \in M \mid \Omega_a \neq 0\}}$ がコンパクトであるとする．M 上での Ω の積分を定義するため，まず $\mathrm{supp}(\Omega)$ は座標近傍 (U, x) に含まれそして $(x^1, \ldots, x^m)$ は正の局所座標系であるとする． ある正数 ε が存在して，$x(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)^m$ が成り立つと仮定してよい．U 上で Ω を $\Omega = \alpha dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ と表す．このとき

$$\int_M \Omega := \int_{x(U)} \alpha \circ x^{-1} dr^1 \ldots dr^m = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha \circ x^{-1}(r^1, \ldots, r^m) dr^1 \ldots dr^m \tag{1}$$

は $\mathrm{supp}(\Omega)$ を含みかつ $(x^1, \ldots, x^m)$ が正の局所座標系である座標近傍 (U, x) の取り方には依らない: (V, y) を同じ条件を満たす座標近傍とし V 上で Ω を $\Omega = \beta dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m$ と表すとき，$\det(\partial y^i / \partial x^j) > 0$ を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{y(V)} \beta \circ y^{-1} ds^1 \ldots ds^m &= \int_{x(U)} (\beta \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}) \left| \frac{\partial(s^1, \ldots, s^m)}{\partial(r^1, \ldots, r^m)} \right| dr^1 \ldots dr^m \\
&= \int_{x(U)} (\beta \circ x^{-1}) \left(\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \circ x^{-1} \right) dr^1 \ldots dr^m \\
&= \int_{x(U)} \alpha \circ x^{-1} dr^1 \ldots dr^m
\end{aligned}$$

を得る．(1) における値を M 上での Ω の **積分** と定める．

次に $\mathrm{supp}(\Omega)$ は特定の座標近傍に含まれないとする．M はパラコンパクトであるので，M の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ に対し開被覆 $\{U_\lambda\}$ の細分である局所有限な開被覆が存在する．従って，以下においては $\{U_\lambda\}$ が局所有限であると仮定する．また $(x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^m)$ は正の局所座標系であると仮定する．各 λ に対し正数 ε_λ が存在して，$x_\lambda(U_\lambda) \subset (-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda)^m$ が成り立つと仮定してよい．従って $\overline{U}_\lambda$ はコンパクトであるので，$\{U_\lambda\}$ に従属した単位の分割 $\{f_\lambda\}$ が存在する．各 λ に対し，$\Omega_\lambda := f_\lambda \Omega$ とおく．このとき $\mathrm{supp}(\Omega_\lambda) \subset U_\lambda$ が成り立つ．U_λ 上で $\Omega_\lambda = \alpha_\lambda dx_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge dx_\lambda^m$ と表すとき，

$$\int_M \Omega := \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{x_\lambda(U_\lambda)} \alpha_\lambda \circ x_\lambda^{-1} dr_\lambda^1 \ldots dr_\lambda^m \tag{2}$$

は Ω にのみ依存し，$\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ や $\{U_\lambda\}$ に従属した単位の分割 $\{f_\lambda\}$ の取り方には依存しないことがわかる．(2) における値を M 上での Ω の **積分** と定める．

注意　M を向きづけられたパラコンパクトな m 次元可微分多様体とする．このとき可微分多様体としては M と同じもので M の向きとは異なる向きを持つ向きづけられた可微分多様体を考えることができる．これを $-M$ で表す．このとき次が成り立つ:

$$\int_{-M} \Omega = -\int_M \Omega.$$

第９章　多様体上の積分

9.3　Stokes の定理

D を M の連結な開集合とする．D が **滑らかな境界を持つ** とは, D の境界 ∂D の各点 a に対し a の座標近傍 (U,x) を選んで

$$U \cap \overline{D} = \{b \in U \mid x^m(b) \geqq x^m(a)\} \tag{3}$$

が成り立つようにできるときにいう．

注意　M に予め与えられている C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ が上のような座標近傍 (U,x) を含まないとしても, 上のような (U,x) を $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}$ に加えたものがやはり C^∞ 級座標近傍系であるならば, D は滑らかな境界を持つということにする．

M, N を可微分多様体とする．M が N の **部分多様体** であるとは, 次が成り立つときにいう:
· 集合としては, M は N の部分集合である;
· M から N への恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow N$ は C^∞ 級であり, そして単射である (可微分多様体としての M において異なる 2 点は N においても異なる);
· M の各点での id_M の微分は単射である．
N の部分多様体 M の位相が N からの相対位相に一致するとき M を N の **正規部分多様体** といい, さらに M が N の閉集合であるとき M を N の **閉部分多様体** という．

補題　M を m 次元可微分多様体とし, D を滑らかな境界を持つ M の連結な開集合とする．このとき D の境界 ∂D は M の $(m-1)$ 次元閉部分多様体である．さらに, M がパラコンパクトでありかつ向きづけ可能ならば, ∂D は向きづけ可能である．

M を向きづけられたパラコンパクトな多様体とし, D を滑らかな境界を持つ M の連結な開集合とする．∂D の各点 a に対し, (U,x) は (3) を満たす a の座標近傍であるとし, さらに $(x^1, \ldots, x^m)$ は正の局所座標系であるとする．このとき a の ∂D における近傍 $V := U \cap \partial D$ 上の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^{m-1})$ が正であるとするかどうかで ∂D の向きを定めることができる．以下においては,
· m が偶数ならば, $(x^1, \ldots, x^{m-1})$ は正であり,
· m が奇数ならば, $(x^1, \ldots, x^{m-1})$ は正ではない
とし, このように定まる ∂D の向きは **M の向きに順応している** ということにする．

M, N を可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする．各 $\omega \in A^p(N)$ に対し, $F^*\omega \in A^p(M)$ を $(F^*\omega)_a(v_1, \ldots, v_p) := \omega_{F(a)}(dF_a(v_1), \ldots, dF_a(v_p))$ で定める $(a \in M,\ v_i \in T_a(M))$．$F^*\omega$ を ω の F による **引き戻し** という．

以上の準備に立脚して, Stokes の定理を次のように述べることができる．

定理 (Stokes の定理)　M を向きづけられたパラコンパクトな m 次元多様体とする．D は滑らかな境界を持つ M の連結な開集合で, $\overline{D}$ はコンパクトであるとする．このとき $\omega \in A^{m-1}(M)$ に対して,

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \mathrm{id}_{\partial D}^* \omega$$

が成り立つ, 但しこの右辺における ∂D の向きは M の向きに順応しているとする．