**幾何学 II　期末試験　問題用紙（１枚目)**　　　　平成２７年１月２８日

以下の [1]〜[10] から <u>**２題以上選択し**</u>, それらに解答を与えること, 但し $S^m = \{(r^1, \ldots, r^{m+1}) \in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1}(r^i)^2 = 1\}$ である.

**[1]**　$f$ を $\boldsymbol{R}$ 上の $C^\infty$ 級正値関数とする. $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $S$ を

$$S := \{(r^1, r^2, r^3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (r^1)^2 + (r^2)^2 = f(r^3)\}$$

で定める. $S$ の部分集合 $U_{1,+}, U_{1,-}, U_{2,+}, U_{2,-}$ を

$$U_{i,+} := \{(r^1, r^2, r^3) \in S \mid r^i > 0\}, \quad U_{i,-} := \{(r^1, r^2, r^3) \in S \mid r^i < 0\}$$

で定める $(i = 1, 2)$. また $i \in \{1, 2\}$ および $\varepsilon \in \{+, -\}$ に対し, $U_{i,\varepsilon}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $x_{i,\varepsilon} : U_{i,\varepsilon} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を

$$x_{1,\varepsilon}(r^1, r^2, r^3) := (r^2, r^3), \quad x_{2,\varepsilon}(r^1, r^2, r^3) := (r^1, r^3)$$

で定める. このとき $\{(U_{i,\varepsilon}, x_{i,\varepsilon}) \mid i \in \{1, 2\},\ \varepsilon \in \{+, -\}\}$ は $S$ の $C^\infty$ 級座標近傍系であることを示せ.

**[2]**　$S^2$ 上の関数 $f$ を $f(r^1, r^2, r^3) := r^3$ で定める $((r^1, r^2, r^3) \in S^2)$. このとき $f$ が $S^2$ 上の可微分関数であることを示せ.

**[3]**　$S^2 \times S^1$ から $S^3$ への写像 $F$ を

$$F((r^1, r^2, r^3), (s^1, s^2)) = (s^1 r^1, s^1 r^2, s^1 r^3, s^2)$$

で定める $((r^1, r^2, r^3) \in S^2,\ (s^1, s^2) \in S^1)$. このとき $F : S^2 \times S^1 \longrightarrow S^3$ は可微分写像であることを示せ.

**[4]**　$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像 $F$ を

$$F(x, y) := ((x - y)^2,\ xy,\ (x - 1)(y - 1))$$

で定める $((x, y) \in \boldsymbol{R}^2)$. このとき $\boldsymbol{R}^2$ の各点 $(x, y)$ での写像 $F$ の微分 $dF_{(x,y)}$ の階数を求めよ.

**[5]**　$M_1$, $M_2$, $M_3$ を可微分多様体とする. $F_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ を $M_1$ から $M_2$ への可微分写像とし, $F_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ を $M_2$ から $M_3$ への可微分写像とする. このとき $F_1$ と $F_2$ の合成 $F_2 \circ F_1$ は可微分写像であり, さらに $M_1$ の任意の点 $a$ で

$$d(F_2 \circ F_1)_a = (dF_2)_{F_1(a)} \circ (dF_1)_a$$

が成り立つことを示せ.

**[6]** $\boldsymbol{R}^2$ 上の $C^\infty$ 級ベクトル場 $V$, $W$ を

$$V_{(x,y)} := \frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad W_{(x,y)} := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める $((x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$.
(1) $V$ と $W$ の交換子積 $[V,W]$ を求めよ.
(2) $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への可微分写像 $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$ を

$$\gamma_1(t) := (t,0), \quad \gamma_2(t) := (t, e^{t^2/2}), \quad \gamma_3(t) := (e^t, e^{-t}), \quad \gamma_4(t) := (e^{2t}, e^{-2t})$$

で定める. これらの各々が $V$ または $W$ の積分曲線であるかどうかを判定せよ.

**[7]** $\alpha$, $\beta$ を $\boldsymbol{R}^4$ 上の $C^\infty$ 級 1 次微分形式とし,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i dx^i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{4} \beta_i dx^i$$

と表す $(\alpha_i, \beta_i \in C^\infty(\boldsymbol{R}^4),\ i \in \{1,2,3,4\})$.
(1) $\boldsymbol{R}^4$ 上 $\alpha \wedge \beta$ が恒等的に零であることと, 任意の $i,j \in \{1,2,3,4\}$ に対し $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ が恒等的に零であることは同値であることを示せ.
(2) $\alpha$ の外微分 $d\alpha$ が恒等的に零であることと, 任意の $i,j \in \{1,2,3,4\}$ に対し $\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$ が恒等的に零であることは同値であることを示せ.

**[8]** $M$ を可微分多様体とする. $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ は $M$ 上の $C^\infty$ 級微分形式で, これらの次数はそれぞれ $p_1$, $p_2$, $p_3$ であるとする. このとき次を示せ:

$$\begin{aligned} &d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) \\ &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + (-1)^{p_1}\omega_1 \wedge (d\omega_2) \wedge \omega_3 + (-1)^{p_1+p_2}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge (d\omega_3). \end{aligned}$$

**[9]** $M$ を $m$ 次元可微分多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $M$ の $C^\infty$ 級座標近傍系とする. このとき $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ に対し,

$$dx_\mu^1 \wedge \cdots \wedge dx_\mu^m = \det\left(\frac{\partial x_\mu^j}{\partial x_\lambda^i}\right) dx_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge dx_\lambda^m$$

を示せ, 但し $\left(\dfrac{\partial x_\mu^j}{\partial x_\lambda^i}\right)$ は $\dfrac{\partial x_\mu^j}{\partial x_\lambda^i}$ を $(i,j)$ 成分とする $m$ 次正方行列である.

**[10]** $M$ を向きづけられたパラコンパクトな $m$ 次元可微分多様体とし, $D$ は滑らかな境界を持つ $M$ の連結な開集合であるとする. $\omega$ は $M$ 上の $C^\infty$ 級 $(m-1)$ 次微分形式で, $\omega$ の台 $\mathrm{supp}\,\omega$ は $D$ に含まれているとする. このとき次を示せ:

$$\int_D d\omega = 0.$$