幾何学 I — 位相幾何学入門 — 平成２８年４月１２日

第１週　ホモトピーおよび基本群

1.1　道

X を位相空間とする. 閉区間 $I=[0,1]$ から X への連続写像 $f:I\longrightarrow X$ を X の **道** という. X の道 f による像が 1 点 x からなるとき, f を **一定の道** といい, 0_x で表す. X の道 f に対し, X の点 $f(0)$, $f(1)$ をそれぞれ f の **始点** および **終点** という. 始点と終点が一致する道を **閉じた道** という. 各 $s\in I$ に対し $f^{-1}(s):=f(1-s)$ とおくことで X の道 f^{-1} を定義でき, これを f の **逆** という. また X の道 f,g が $f(1)=g(0)$ を満たすとき,

$$f*g(s):=\begin{cases} f(2s) & (s\in[0,1/2]),\\ g(2s-1) & (s\in[1/2,1])\end{cases}$$

によって X の道 $f*g$ が定まり, これを f と g の **積** という.

1.2　ホモトピー

f,g を X の道とし, 始点および終点を共有するとする: $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$. f と g が **ホモトープ** (または **ホモトピック**) であるとは, $I\times I$ から X への連続写像 $\Phi:I\times I\longrightarrow X$ で

$$\Phi(s,0)=f(s),\quad \Phi(s,1)=g(s),\quad \Phi(0,t)=f(0)=g(0),\quad \Phi(1,t)=f(1)=g(1)$$

を満たすものが存在するときにいう. f と g がホモトープであるとき, このことを $f\sim g$ で表し, 上の Φ のような写像を f と g の (または f から g への) **ホモトピー写像** という. X の 2 点 x,y に対し, 始点が x で終点が y である X の全ての道からなる集合を $\Omega(x,y)$ (空間を明示する必要がある場合には $\Omega_X(x,y)$) で表す. このとき次が成り立つ:

- 任意の $f\in\Omega(x,y)$ に対し, $f\sim f$;
- $f,g\in\Omega(x,y)$ に対し, $f\sim g$ ならば $g\sim f$;
- $f,g,h\in\Omega(x,y)$ に対し, $f\sim g$ かつ $g\sim h$ ならば $f\sim h$.

従って “$\sim$” は $\Omega(x,y)$ の同値関係である. $f\in\Omega(x,y)$ を含む同値類を $[f]$ で表す.

定理　$x,y,z,w\in X$ および $f\in\Omega(x,y)$, $g\in\Omega(y,z)$, $h\in\Omega(z,w)$ に対し, 次が成り立つ.

- f と g の積 $f*g\in\Omega(x,z)$ を含む同値類 $[f*g]\in\Omega(x,z)/\sim$ は同値類 $[f]\in\Omega(x,y)/\sim$, $[g]\in\Omega(y,z)/\sim$ によって定まり, $[f]$, $[g]$ の元の取り方には依らない (以下, $[f*g]$ を $[f]*[g]$ で表す).
- $[f*(g*h)]=[(f*g)*h]$ (従って $[f]*([g]*[h])=([f]*[g])*[h]$).
- $[f*0_y]=[0_x*f]=[f]$ (従って $[f]*[0_y]=[0_x]*[f]=[f]$).
- $[f*f^{-1}]=[0_x]$, $[f^{-1}*f]=[0_y]$ であり (従って $[f]*[f^{-1}]=[0_x]$, $[f^{-1}]*[f]=[0_y]$), $[f^{-1}]$ は $[f]$ の元の取り方に依らずに定まる (以下, $[f^{-1}]$ を $[f]^{-1}$ で表す).

第１週 ホモトピーおよび基本群（続き）

1.3 基本群

始点, 終点が共に x である X の全ての道からなる集合を $\Omega_X(x)$ で表し, $\pi_1(X,x) := \Omega_X(x)/\sim$ とおく. このとき $[f]$, $[g] \in \pi_1(X,x)$ に対し $[f]*[g] \in \pi_1(X,x)$ が定まり,

- $[f]*([g]*[h]) = ([f]*[g])*[h]$ (但し $[h] \in \pi_1(X,x)$),
- $[f]*[0_x] = [0_x]*[f] = [f]$,
- $[f]*[f]^{-1} = [f]^{-1}*[f] = [0_x]$

が成り立つ. こうして $\pi_1(X,x)$ は群であることがわかる. $\pi_1(X,x)$ を X の点 x を基点とする **基本群** という.

定理 X が弧状連結であるならば, X の 2 点 x_1, x_2 に対して $\pi_1(X,x_1)$ と $\pi_1(X,x_2)$ は同型である.

従って弧状連結な位相空間 X の基本群は, 同型なものを除けば基点の取り方の依らず一意に定まるので, これを $\pi_1(X)$ で表す. X が **単連結** であるとは, X の基本群 $\pi_1(X)$ が単位元のみからなるときにいう.

1.4 基本群と連続写像

X, Y を弧状連結な位相空間とし, $F : X \longrightarrow Y$ を X から Y への連続写像とする. $x \in X$ に対し, $y := F(x)$ とおく.

- $f \in \Omega_X(x)$ に対し, $F \circ f$ は $\Omega_Y(y)$ の元である.
- f, $g \in \Omega_X(x)$ に対し, $f \sim g$ ならば $F \circ f \sim F \circ g$ が成り立つ.
- f, $g \in \Omega_X(x)$ に対し, $F \circ (f * g) = (F \circ f) * (F \circ g)$ が成り立つ.

従って $[f] \in \pi_1(X,x)$ に対し $\pi_1(Y,y)$ の元 $[F \circ f]$ を定めることができ, $[f]$, $[g] \in \pi_1(X,x)$ に対し $[F \circ f]*[F \circ g] = [F \circ (f * g)]$ が成り立つ. こうして連続写像 $F : X \longrightarrow Y$ は X の基本群 $\pi_1(X)$ から Y の基本群 $\pi_1(Y)$ への準同型写像 $F_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ を定める.

Z を弧状連結な位相空間とし, G を Y から Z への連続写像とする. このとき G は F と同様に準同型写像 $G_* : \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(Z)$ を定める. このとき F と G の合成 $G \circ F$ が定める準同型写像 $(G \circ F)_*$ について, $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ が成り立つ. 特に, F が同相写像であり $Z = X$ でありかつ G が F の逆写像 F^{-1} である場合, F_* は同型写像でありかつ $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$ が成り立つ. こうして次の定理を得る.

定理 弧状連結な位相空間 X, Y が同相であるならば, X, Y の基本群 $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ は同型である.

注意 X, Y を位相空間とし, $F : X \longrightarrow Y$, $G : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする. F と G が **ホモトープ** (または **ホモトピック**) であるとは, $X \times I$ から Y への連続写像 $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ で任意の $x \in X$ に対し $\Phi(x,0) = F(x)$, $\Phi(x,1) = G(x)$ を満たすものが存在するときにいう. 位相空間 X, Y は弧状連結であるとする. X と Y が **ホモトピー同型** であるとは, 連続写像 $F : X \longrightarrow Y$ および $F' : Y \longrightarrow X$ で, $F' \circ F$ は X の恒等写像とホモトープでありかつ $F \circ F'$ は Y の恒等写像とホモトープであるようなものが存在するときにいう. X, Y が同相であるならば, X と Y はホモトピー同型である. 上の定理より一般的な定理として, X, Y がホモトピー同型であるならば $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ は同型であることが知られている.

第２週　被覆空間

位相空間 X が **局所連結** であるとは, X の各点 x および x の各近傍 U に対し x のある連結な近傍 V が $V \subset U$ を満たす (つまり x が連結な開集合からなる基本近傍系を持つ) ときにいう. X が局所連結であるならば, X の開集合の連結成分は開集合である.

X, $\tilde{X}$ を連結かつ局所連結な位相空間とし, $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を連続写像とする. 組 $(\tilde{X}, \pi)$ が X の **被覆空間** であるとは, X の各点 x に対し次の条件を満たす連結な近傍 U が存在するときにいう:

- $\pi^{-1}(U) \neq \emptyset$;
- $\pi^{-1}(U)$ の各連結成分 $\tilde{U}$ への π の制限 $\pi|_{\tilde{U}}$ は U の上への同相写像である.

$(\tilde{X}, \pi)$ が X の被覆空間であるとき, π を **射影** という.

X を連結かつ局所連結な位相空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする. X の道 f に対し, $\tilde{X}$ の道 $\tilde{f}$ で $I = [0, 1]$ 上 $\pi \circ \tilde{f} = f$ を満たすものを f の **リフト** (または **持ち上げ**) という.

定理　X を連結かつ局所連結な Hausdorff 空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする.

(a) f を X の道とし, $x_0 = f(0)$ とする. このとき各 $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ に対し, f のリフト $\tilde{f}$ で $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものが唯一つ存在する.

(b) f, g は X の道で, 始点および終点を共有するとする. $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ はそれぞれ f, g のリフトで, 始点を共有するとする. このとき f と g がホモトープであることと, $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ が終点を共有しかつホモトープであることは同値である.

定理の (a) の証明の概略　$(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間であることおよび $I = [0, 1]$ がコンパクトであることに注意すれば, 与えられた $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ を始点とする f のリフト $\tilde{f}$ を構成できることがわかる. □

定理の (b) の証明の概略　まず $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ が終点を共有しかつ $\tilde{\Phi}$ が $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ のホモトピー写像であるならば, $\Phi := \pi \circ \tilde{\Phi}$ は f と g のホモトピー写像である. また Φ が f と g のホモトピー写像であるならば, $(\tilde{X}, \pi)$ が X の被覆空間であることおよび $I \times I$ がコンパクトであることに注意すれば, $I \times I$ から $\tilde{X}$ への連続写像 $\tilde{\Phi}$ で $I \times I$ 上 $\pi \circ \tilde{\Phi} = \Phi$ を満たすものが存在することがわかり, このような $\tilde{\Phi}$ は $\tilde{\Phi}(0, 0) \in \pi^{-1}(\Phi(0, 0))$ によって一意に定まり, また $\tilde{\Phi}(1, t)$ は $t \in I$ に依らない. 特に $\tilde{\Phi}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ ならば, 任意の $s \in I$ に対し $\tilde{\Phi}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ および $\tilde{\Phi}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ が成り立ち, 従って $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ が終点を共有しかつ $\tilde{\Phi}$ は $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ のホモトピー写像である. □

位相空間 X が **局所弧状連結** であるとは, X の各点が弧状連結な開集合からなる基本近傍系を持つときにいう. 連結かつ局所弧状連結な位相空間は弧状連結である.

定理　X を連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする. $\tilde{x} \in \tilde{X}$ および $x = \pi(\tilde{x}) \in X$ に対し, 射影 π が定める基本群の間の準同型写像 $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ は単射である.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題 2

(a) X を連結かつ局所連結な位相空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする. このとき以下を示せ.

(a1) $x \in X$ に対し, $\pi^{-1}(\{x\})$ の $\tilde{X}$ からの相対位相は離散位相である.

(a2) $\tilde{X}$ の開集合の π による像は X の開集合である.

(a3) X が Hausdorff 空間であるならば, $\tilde{X}$ も Hausdorff 空間である.

(b) X, $\tilde{X}$ および $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を以下のようにおくとき, $(\tilde{X}, \pi)$ は X の被覆空間であることを示せ.

(b1) $X := S^1$, $\tilde{X} := \boldsymbol{R}$, $\pi(t) := (\cos t, \sin t)$ $(t \in \tilde{X})$

(b2) $X := S^1$, $\tilde{X} := S^1$, $\pi(\cos t, \sin t) := (\cos 2t, \sin 2t)$ $(t \in \boldsymbol{R})$

(b3) $X := \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $\tilde{X} := \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $\pi(z) := z^3$ $(z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\})$

(b4) $X := S^1 \times S^1$, $\tilde{X} := \boldsymbol{R}^2$, $\pi(s,t) := (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$ $((s,t) \in \tilde{X})$

(b5) $X := S^1 \times S^1$, $\tilde{X} := S^1 \times S^1$, $\pi(\cos s, \sin s, \cos t, \sin t) := (\cos 2s, \sin 2s, \cos 3t, \sin 3t)$ $((s,t) \in \boldsymbol{R}^2)$

(b6) $X := P^2$ (実射影平面), $\tilde{X} := S^2$, $\pi(a) := [a]$ ($a \in S^2$, $[a]$ は P^2 の定義に現れる同値関係に関する a を含む同値類)

第３週　普遍被覆空間および被覆変換群

3.1　普遍被覆空間

X を連結かつ局所弧状連結な位相空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする. $\tilde{X}$ が単連結であるとき, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の **普遍被覆空間** という.

命題 X を連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の被覆空間とする. Y を連結, 局所弧状連結かつ単連結な位相空間とし, $F : Y \longrightarrow X$ を連続写像とする. このとき $y_0 \in Y$, $x_0 := F(y_0)$ および $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ に対し, 連続写像 $\tilde{F} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ で $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ および Y 上 $\pi \circ \tilde{F} = F$ を満たすものが唯一つ存在する.

証明の概略　Y は弧状連結であるので, y_0 と $y \in Y$ をそれぞれ始点, 終点とする Y の道 f が存在する. このとき $g := F \circ f$ は X の道であるので, $(\tilde{X}, \pi)$ が X の被覆空間であることから, 第２週一つ目の定理の (a) から g のリフト $\tilde{g}$ で $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものが唯一つ存在する. Y は単連結であるので, y_0, y をそれぞれ始点, 終点とする Y の任意の道は f とホモトープである. よって第２週一つ目の定理の (b) を用いて, $\tilde{g}$ の終点 $\tilde{g}(1)$ は f の取り方には依らず y によって決まる. これを $\tilde{F}(y)$ で表す. こうして Y から $\tilde{X}$ への写像 $\tilde{F} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ を得る. F は連続写像でありかつ $(\tilde{X}, \pi)$ は X の被覆空間であるので, $\tilde{F}$ は連続である. また $\tilde{F}$ の定義から, $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ および Y 上 $\pi \circ \tilde{F} = F$ を満たす唯一つの連続写像であることがわかる. □

X を連結で局所連結な位相空間とする. このとき X の被覆空間 $(\tilde{X}_1, \pi_1)$, $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ に対し $\tilde{X}_1$ から $\tilde{X}_2$ の上への同相写像 φ が存在して $\tilde{X}_1$ 上 $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$ が成り立つとき, φ を被覆空間 $(\tilde{X}_1, \pi_1)$ から被覆空間 $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ への **同型写像** といい, $(\tilde{X}_1, \pi_1)$ と $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ は φ により **同型** であるという. 上の命題を用いて, 次の定理を得ることができる.

定理 X は連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 空間で, 普遍被覆空間を持つとする. このとき X の普遍被覆空間は同型なものを除けば唯一つである.

3.2　被覆変換群と基本群

X の被覆空間 $(\tilde{X}, \pi)$ から $(\tilde{X}, \pi)$ 自身への同型写像を $(\tilde{X}, \pi)$ の **被覆変換** という. X の被覆空間 $(\tilde{X}, \pi)$ の全ての被覆変換は合成を演算とする群 $G_{(\tilde{X}, \pi)}$ をなす. $G_{(\tilde{X}, \pi)}$ を $(\tilde{X}, \pi)$ の **被覆変換群** という.

定理 X を連結かつ局所弧状連結な Hausdorff 空間とし, $(\tilde{X}, \pi)$ を X の普遍被覆空間とする. このとき $(\tilde{X}, \pi)$ の被覆変換群 $G_{(\tilde{X}, \pi)}$ は X の基本群 $\pi_1(X)$ と同型である.

証明の概略　$x_0 \in X$ および $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ をとり, 写像 $\Phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi^{-1}(\{x_0\})$ を $\Phi([f]) := \tilde{f}(1)$ で定める, 但し $\tilde{f}$ は x_0 を始点および終点とする閉じた道 f のリフトで $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものである. このとき Φ は全単射である: 単射であることは $\tilde{X}$ が単連結であることを用いてわかり, 全射であることは $\tilde{X}$ が弧状連結であることからわかる. また写像 $\Psi : G_{(\tilde{X}, \pi)} \longrightarrow \pi^{-1}(\{x_0\})$ を $\Psi(\varphi) := \varphi(\tilde{x}_0)$ で定める $(\varphi \in G_{(\tilde{X}, \pi)})$. このとき Ψ は全単射であることが上の命題において $Y := \tilde{X}$, $F := \pi$ とおくことでわかる. このとき $\Phi^{-1} \circ \Psi$ は $G_{(\tilde{X}, \pi)}$ から $\pi_1(X, x_0)$ の上への同型写像であることがわかる. □

第3週　普遍被覆空間および被覆変換群（続き）

3.3　普遍被覆空間の存在について

X が連結かつ局所連結な Hausdorff 空間でありさらに単連結であるならば, X と X の恒等写像 id_X の組 (X, id_X) は X の普遍被覆空間であり, 従って 3.1 節の定理から (X, id_X) は X の唯一つの普遍被覆空間であることがわかる.

X が単連結であるとは限らない場合に, X の普遍被覆空間の存在について議論する. 位相空間 X が **局所単連結** であるとは, X の各点が単連結な近傍を持つときにいう.

定理　X を連結, 局所弧状連結かつ局所単連結な Hausdorff 空間とする. このとき X の普遍被覆空間 $(\tilde{X}, \pi)$ が存在し, さらに $\tilde{X}$ は Hausdorff 空間である.

証明の概略　X を連結, 局所弧状連結かつ局所単連結な Hausdorff 空間とする.

- X の 1 点 x_0 に対し, $\Omega_X(x_0, \cdot)$ を始点が x_0 である X の全ての道からなる集合とする. $\Omega_X(x_0, \cdot)$ の二つの元 f, g に対し, $f(1) = g(1)$ かつ f と g がホモトープであるとき $f \approx g$ と記すことにする. "$\approx$" は $\Omega_X(x_0, \cdot)$ の同値関係である. $\tilde{X} := \Omega_X(x_0, \cdot)/\approx$ とおき, $f \in \Omega_X(x_0, \cdot)$ を含む $\approx$ に関する同値類を $[[f]]$ で表す.
- $\tilde{X}$ の元 $[[f]]$ $(f \in \Omega_X(x_0, \cdot))$ および $f(1)$ の X における近傍 U に対し,
$$\tilde{U} := \{[[f * g]] \mid g \text{ は } g(0) = f(1) \text{ を満たす } U \text{ の道 }\}$$
とおき, $\tilde{U}$ のような $\tilde{X}$ の部分集合を全て考えて $[[f]]$ の基本近傍系を構成することによって $\tilde{X}$ を位相空間とみなすことができる.
- X が局所単連結であることから, $\tilde{X}$ は Hausdorff 空間であることがわかる.
- $\tilde{X}$ の位相の定義から, $\tilde{X}$ は弧状連結, 局所弧状連結かつ単連結であることがわかる.
- $\tilde{X}$ から X への写像 π を $\pi([[f]]) := f(1)$ で定める. X は弧状連結であるので, π は全射である. さらに X が局所弧状連結かつ局所単連結であることから, X の各点 x に対しその連結な近傍 U で $\pi^{-1}(U)$ の各連結成分 $\tilde{U}$ への π の制限 $\pi|_{\tilde{U}}$ が U の上への同相写像であるようなものが存在する.

以上から, $(\tilde{X}, \pi)$ は X の普遍被覆空間であることがわかる. □

n を自然数とする. Hausdorff 空間 X が n 次元 **位相多様体** であるとは, X の各点のある近傍が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相であるときにいう. $\boldsymbol{R}^n$ は局所弧状連結かつ局所単連結であるので, 上の定理から連結な位相多様体は普遍被覆空間を持つことがわかる.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題３

X を以下のようにおくとき, X の普遍被覆空間および基本群を求めよ (但し $m, n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqq 2$).

(a) $X := \boldsymbol{R}^m$

(b) $X := S^m$

(c) $X := P^m$

(d) $X := \boldsymbol{R}^m \times S^1$

(e) $X := S^m \times S^1$

(f) $X := S^m \setminus \{a\}$ $(a \in S^m)$

(g) $X := \boldsymbol{R}^n \setminus \{a\}$ $(a \in \boldsymbol{R}^n)$

(h) $X := S^n \setminus \{a_1, a_2\}$ $(a_1,\, a_2 \in S^n,\, a_1 \neq a_2)$

(i) $X := \boldsymbol{R}^n \setminus \{a_1, a_2\}$ $(a_1,\, a_2 \in \boldsymbol{R}^n,\, a_1 \neq a_2)$

(j) $X := S^n \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ $(a_1,\, a_2,\, a_3 \in S^n,\, a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1)$

第４週　閉曲面

4.1　閉曲面の分類

連結かつコンパクトな (境界を持たない) 2 次元位相多様体をここでは **閉曲面** と呼ぶことにする.

閉曲面 X は **3 角形分割可能** (または **単体分割可能**) である: X は有限個の 3 角形で次を満たすものの和と表される位相空間と同相である:

- 各 3 角形の各辺は, 他の唯一つの 3 角形と共有されている;
- 二つの 3 角形が共通部分を持つならば, 唯一つの頂点または唯一つの辺である.

X が 3 角形分割可能であることに注意して, X から幾つかの閉曲線を除いたものは開円板に同相であることがわかる. 閉円板 $\overline{D}$ の境界 ∂D を $2h$ 等分し ($h \in \boldsymbol{N}$), ∂D を $2h$ 個の円弧 $C_1, C_2, \ldots, C_{2h}$ の和で表す. $C_i \cap C_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 2h-1)$ は唯一つの点 a_i からなり, また $C_{2h} \cap C_1$ はやはり唯一つの点 a_{2h} からなると仮定してよい. 各 C_i には a_{i-1} が始点で a_i が終点であるように向きを与え (但し $a_0 := a_{2h}$), 集合としては C_i と同じで逆の向きが与えられたものを C_i^{-1} で表す. このとき X は以下の S_g または S'_h ($g \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $h \in \boldsymbol{N}$) と同相であることがわかる.

- $h = 2g$ $(g \in \boldsymbol{N})$ とし,
$$\phi_j : C_{4j-3} \longrightarrow C_{4j-1}^{-1}, \quad \psi_j : C_{4j-2} \longrightarrow C_{4j}^{-1}$$
($j \in \{1, \ldots, g\}$) をそれぞれ向きを保つ同相写像とする. そして ϕ_j, ψ_j によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間が S_g である: $\overline{D}$ の 2 点 a, b に対しある j, $k \in \{1, \ldots, 2h\}$ が $(a, b) = (a_j, a_k)$ を満たす, またはある $j \in \{1, \ldots, g\}$ に対し
$$\{a, b\} \subset C_{4j-3}^\circ \cup C_{4j-2}^\circ \cup C_{4j-1}^\circ \cup C_{4j}^\circ$$
が成り立ちさらに
$$\phi_j(a) = b, \quad \psi_j(a) = b, \quad \phi_j^{-1}(a) = b, \quad \psi_j^{-1}(a) = b$$
のいずれかが成り立つ (但し C_k° は C_k の全ての内点からなる集合) とき $a \sim b$ と記すことにすると, “$\sim$” は $\overline{D}$ の同値関係であり, $S_g := \overline{D}/\sim$ とおく.
- $S_0 := S^2$ とおく. S_0 は, $h = 1$ としかつ C_1 から C_2^{-1} の上への向きを保つ同相写像によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間である.
- $\phi'_j : C_{2j-1} \longrightarrow C_{2j}$ ($j \in \{1, \ldots, h\}$) を向きを保つ同相写像とする. そして ϕ'_j によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間が S'_h である.

X が $S_0 = S^2$ と同相であれば, X は単連結である. X が S_0 と同相ではないならば, ∂D の部分弧 C_i は X における単純閉曲線であり, 対応する基本群の元は単位元ではない.

S_g ($g \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$) は **向きづけ可能** である. このことのきちんとした定義をここでは記さないが, 大雑把に言えば表と裏を指定できるということである. g を S_g の **種数** という. S'_h ($h \in \boldsymbol{N}$) は向きづけ可能ではない (表と裏を指定できない). h を S'_h の **種数** という.

第4週 閉曲面(続き)

4.2 閉曲面の基本群

4.1 節において, 閉曲面 X は閉円板 $\overline{D}$ の境界 ∂D に同値関係 $\sim$ を導入して得られる $\overline{D}$ の商空間 $\overline{D}/\sim$ に同相であることがわかった. X が $S_0 = S^2$ と同相であれば, X は単連結である. 以下, X は S_0 と同相ではないとする. このとき ∂D の部分弧 C_i は X における単純閉曲線である. $\overline{D}$ は単連結であるので, X の基本群に単位元以外の元が現れるのは ∂D に導入された同値関係 $\sim$ に依ることは容易に推測される. $\overline{D}$ から $\overline{D}$ の商空間 $\overline{D}/\sim$ への標準射影 pr は連続であるので, 単連結である $\overline{D}$ の基本群の唯一つの元である単位元を与える閉曲線 ∂D の pr による像は X の基本群の単位元を与える. このことに注意して, 次の定理を得ることができる.

定理 閉曲面 X が $S_0 = S^2$ と同相ではないとする.

(a) X が S_g $(g \in \boldsymbol{N})$ に同相ならば, X の基本群 $\pi_1(X)$ は

$$\alpha_1 := \mathrm{pr}\,(C_1), \quad \beta_1 := \mathrm{pr}\,(C_2), \quad \alpha_2 := \mathrm{pr}\,(C_5), \quad \beta_2 := \mathrm{pr}\,(C_6), \dots$$
$$\dots, \alpha_g := \mathrm{pr}\,(C_{4g-3}), \quad \beta_g := \mathrm{pr}\,(C_{4g-2})$$

によって生成される自由群に次の基本関係を導入して得られる群と同型である:

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\dots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = \text{単位元}.$$

(b) X が S'_h $(h \in \boldsymbol{N})$ に同相ならば, X の基本群 $\pi_1(X)$ は $\alpha_1 := \mathrm{pr}\,(C_1)$, $\alpha_2 := \mathrm{pr}\,(C_3), \dots, \alpha_h := \mathrm{pr}\,(C_{2h-1})$ によって生成される自由群に次の基本関係を導入して得られる群と同型である:

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\dots\alpha_h\alpha_h = \text{単位元}.$$

(a) の証明の概略 $\overline{D}$ の 1 点を中心とする開円板でその境界が $\overline{D}$ の内部に含まれるものを一つとり, それを Δ で表す. $\overline{D} \setminus \Delta$ と $\partial\overline{D}$ はホモトピー同型である. 第1週の最後に記した注意によると, ホモトピー同型である二つの弧状連結な位相空間の基本群は互いに同型である. γ_i $(i = 1, 2, \dots, 2g)$ を S^1 に同相な位相空間とし, a_i を γ_i の 1 点とする. $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ の直和に $a_1, \dots, a_{2g}$ を同一視するように同値関係を導入して得られる商空間 Γ は, $\overline{D}$ から X への標準射影 pr による $\partial\overline{D}$ の像 $\mathrm{pr}\,(\partial\overline{D})$ と同相である. 従って $\tilde{\Delta} := \mathrm{pr}\,(\Delta)$ とおくとき, 位相空間 $X \setminus \tilde{\Delta} = \mathrm{pr}\,(\overline{D} \setminus \Delta)$ の基本群は Γ の基本群と同型であり, $2g$ 個の元を生成元とする自由群である. $X \setminus \tilde{\Delta}$ の基本群 $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})$ の単位元ではない元を与える $\partial\tilde{\Delta}$ は, X の基本群 $\pi_1(X)$ の単位元を与える. 一般に $\pi_1(X)$ の基本群の単位元を与える $X \setminus \tilde{\Delta}$ 内の閉曲線は, $\partial\tilde{\Delta}$ によって生成される $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})$ の正規部分群 $N(\partial\tilde{\Delta})$ の元を与える. こうして $\pi_1(X)$ は $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})/N(\partial\tilde{\Delta})$ と同型であり, $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})$ は α_1, β_1, α_2, $\beta_2, \dots, \alpha_g$, β_g によって生成されていて, $N(\partial\tilde{\Delta})$ は $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\dots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ によって生成されている. こうして定理の (a) を得る. □

(b) の証明の概略 大筋は (a) のものと同様である. Γ として, h 個の S^1 と同相な位相空間 γ'_i $(i = 1, \dots, h)$ の直和に (a) と同様の同値関係を導入して得られる商空間を考えれば良い. □

参考 以上においては次元が 2 の場合に分類および基本群について議論した. 3 次元閉多様体については, 例えば **Poincaré 予想** (単連結な 3 次元閉多様体は 3 次元球面 S^3 に同相か) が有名で, 21 世紀に入って Perelman によって解決された.

第５週　単体および複体

5.1　単体

n を自然数とする．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 C が **凸** であるとは，C の任意の 2 点 a, b に対し a と b を結ぶ線分が C に含まれるときにいう．$\boldsymbol{R}^n$ の $p+1$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_p$ が **独立** である (または **一般の位置** にある) とは，p 個のベクトル $a_1 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ が一次独立であるときにいう．$a_0, a_1, \ldots, a_p$ が独立であるとき，a_0, $a_1, \ldots, a_p$ を含む最小の凸集合を $|a_0 a_1 \ldots a_p|$ で表す．このとき

$$|a_0 a_1 \ldots a_p| = \left\{ \sum_{i=0}^{p} c_i a_i \;\middle|\; c_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{p} c_i = 1 \right\}$$

が成り立つ．$|a_0 a_1 \ldots a_p|$ と表される $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合を **単体** (または ***p*-単体**) という．p-単体 $|a_0 a_1 \ldots a_p|$ に対し，p を $|a_0 a_1 \ldots a_p|$ の **次元** という．$a_0, a_1, \ldots, a_p$ を $|a_0 a_1 \ldots a_p|$ の **頂点** という．また $\{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ の部分集合 $\{a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}\}$ $(q \in \{0, 1, \ldots p\})$ に対し，q-単体 $|a_{j_0} a_{j_1} \ldots a_{j_q}|$ を p-単体 $|a_0 a_1 \ldots a_p|$ の **辺単体** (または ***q*-辺単体**) という．単体 σ の 0-辺単体はちょうど σ の頂点である．

5.2　複体

K を $\boldsymbol{R}^n$ 内の有限個の単体からなる集合とする．K が **複体** (または **単体的複体**) であるとは，

(i) $\sigma \in K$ に対し，σ の辺単体は全て K に属し，

(ii) $\sigma, \tau \in K$ が $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ を満たすならば，$\sigma \cap \tau$ は σ の辺単体でありかつ τ の辺単体である

ときにいう．K を複体とする．このとき K に含まれる単体の次元の最大値を K の **次元** といい，$\dim K$ で表す．また K に属する全ての単体の和集合を K の **多面体** といい，$|K|$ で表す．

X を位相空間とする．X が **単体分割可能** (または **3 角形分割可能**) であるとは，複体 K および K の多面体 $|K|$ から X の上への同相写像 $F : |K| \longrightarrow X$ が存在するときにいう．X が単体分割可能であるとき，上のような K と F の組 (K, F) を X の **単体分割** (または **3 角形分割**) という．

5.3　単体の向き

$\sigma = |a_0 a_1 \ldots a_p|$ を p-単体とする．集合 $\{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ の元の並べ方を指定して得られる全ての列からなる集合を $O(\sigma)$ で表す:

$$O(\sigma) := \{(a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) \mid \{i_0, i_1, \ldots, i_p\} = \{0, 1, \ldots, p\}\}.$$

$O(\sigma)$ に同値関係を導入する．$(a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$, $(a_{i'_0}, a_{i'_1}, \ldots, a_{i'_p}) \in O(\sigma)$ に対し二つの置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p \\ i'_0 & i'_1 & \ldots & i'_p \end{pmatrix}$$

の符号が等しいとき，$(a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) \sim (a_{i'_0}, a_{i'_1}, \ldots, a_{i'_p})$ と書く．$\sim$ は $O(\sigma)$ における同値関係であり，$\sim$ に関する $O(\sigma)$ の商集合 $O(\sigma)/\sim$ は二つの元からなる．$O(\sigma)/\sim$ の各元を σ の **向き** という．σ の向きを一つ指定するとき，単体 σ は **向きづけられている** といい，向きづけられた単体である σ を $\langle \sigma \rangle$ で表す．向きづけられた単体 $\langle \sigma \rangle$ に対し，$(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ が σ の指定された向きを与えるとき，$\langle \sigma \rangle$ を $\langle a_0, a_1, \ldots, a_p \rangle$ とも表す．

第６週　鎖群および境界準同型

6.1　鎖群

K を単体的複体とする．このとき各 $p \in \{0, 1, \ldots, \dim K\}$ に対し, K に含まれる p-単体の個数を N_p で表す．$\sigma_1^p, \sigma_2^p, \ldots, \sigma_{N_p}^p$ を K に含まれる全ての p-単体とする．このとき $\langle \sigma_1^p \rangle, \langle \sigma_2^p \rangle, \ldots, \langle \sigma_{N_p}^p \rangle$ が生成する加群 $\boldsymbol{Z}$ 上の自由加群を $C_p(K)$ で表す:

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle \sigma_i^p \rangle \;\middle|\; r_i \in \boldsymbol{Z} \right\}.$$

$C_p(K)$ を, 加群 $\boldsymbol{Z}$ に係数を持つ K の **p-鎖群** という．$C_p(K)$ の元を **p-鎖** という．p-鎖 $\langle \sigma_i^p \rangle$ に対し, $\langle \sigma_i^p \rangle$ の逆元 $-\langle \sigma_i^p \rangle$ は σ_i^p にもう一つの向きを指定して得られる向きづけられた単体であるとする．

6.2　境界準同型

$p \in \{1, 2, \ldots, \dim K\}$ とし, $\langle \sigma \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_p \rangle$ を単体的複体 K の向きづけられた p-単体とする．$\langle \sigma \rangle$ の **境界** $\partial \langle \sigma \rangle$ とは, $(p-1)$-鎖 $\partial \langle \sigma \rangle := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle \sigma(i) \rangle$ である, 但し

$$\langle \sigma(i) \rangle := \langle a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p \rangle$$

である (以下, 右辺を $\langle a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_p \rangle$ で表す)．こうして p-鎖 $\sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle \sigma_i^p \rangle$ に対し $(p-1)$-鎖 $\sum_{i=1}^{N_p} r_i \partial \langle \sigma_i^p \rangle$ を対応させる写像 $\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ が得られ, これを **境界準同型** という．

定理　$p \in \{2, 3, \ldots, \dim K\}$ に対し, ∂_p と ∂_{p-1} の合成写像 $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-2}(K)$ による $C_p(K)$ の像は $C_{p-2}(K)$ の零元だけからなる: $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

証明の概略　$\langle \sigma \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_p \rangle$ を単体的複体 K の向きづけられた p-単体とし, $p \geqq 2$ とする．そして $i < j$ のとき,

$$\langle \sigma(i,j) \rangle := \begin{cases} \langle a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p \rangle & (j > i+1), \\ \langle a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+2}, \ldots, a_p \rangle & (j = i+1) \end{cases}$$

とおく (以下, 右辺を $\langle a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_p \rangle$ で表す)．このとき境界準同型の定義に基づいて, 次を得る:

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \circ \partial_p(\langle \sigma \rangle) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_{p-1} \langle \sigma(i) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \langle \sigma(0,j) \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle \sigma(j,i) \rangle + \sum_{j=i+1}^{p} (-1)^{j-1} \langle \sigma(i,j) \rangle \right) \\ &\quad + (-1)^p \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \langle \sigma(j,p) \rangle \\ &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \langle \sigma(j,i) \rangle + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \langle \sigma(i,j) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ を得る．　□

第７週　ホモロジー群

7.1　ホモロジー群の定義

$p \in \{1, 2, \ldots, \dim K\}$ に対し $Z_p(K) := \operatorname{Ker} \partial_p$ とおき, $Z_0(K) := C_0(K)$ とおく. $p \in \{0, 1, 2, \ldots, \dim K - 1\}$ に対し $B_p(K) := \operatorname{Im} \partial_{p+1}$ とおき, $B_{\dim K}(K)$ を $C_{\dim K}(K)$ の零元だけからなる集合とする. $Z_p(K)$ を K の <u>**p 次元輪体群**</u>といい, $B_p(K)$ を K の <u>**p 次元境界輪体群**</u>という. $Z_p(K)$ の元を <u>**p-輪体**</u>といい, $B_p(K)$ の元を <u>**p-境界輪体**</u>という. $Z_p(K)$ および $B_p(K)$ は $C_p(K)$ の部分加群である. さらに $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ を用いて $B_p(K) \subset Z_p(K)$ がわかり, 従って $B_p(K)$ は $Z_p(K)$ の部分加群である. よって商群 $H_p(K) := Z_p(K)/B_p(K)$ を定義できる. $H_p(K)$ を単体的複体 K の <u>**p 次元ホモロジー群**</u>という. $H_p(K)$ の元を <u>**p 次元ホモロジー類**</u>という. $\operatorname{Im} \partial_p = B_{p-1}(K)$, $\operatorname{Ker} \partial_p = Z_p(K)$ であるので, 準同型定理から $B_{p-1}(K)$ と $C_p(K)/Z_p(K)$ は同型であることがわかり, さらに $C_p(K)$ と $Z_p(K) \oplus B_{p-1}(K)$ は同型であることがわかる.

7.2　Betti 数, ねじれ係数および Euler 数

$C_p(K)$ は有限生成自由加群であるから, $Z_p(K)$ も有限生成自由加群である. よって $H_p(K)$ は有限生成加群であり, 有限個の巡回群の直和と同型である. $H_p(K)$ の階数 (この直和を構成する巡回群のうちの無限巡回群の個数) を K の <u>**p 次元 Betti 数**</u>といい, $\beta_p(K)$ で表す. また直和を構成する巡回群のうちの有限巡回群の位数を $\theta_1^p, \ldots, \theta_{\tau_p}^p$ とするとき, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, \tau_p - 1\}$ に対し θ_i^p は θ_{i+1}^p の約数であるとしてよく, $\theta_1^p, \ldots, \theta_{\tau_p}^p$ を K の <u>**p 次元ねじれ係数**</u>という. また $\chi(K) := \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \beta_p(K)$ を K の <u>**Euler 数**</u>という.

定理 (Euler-Poincaré の公式)　単体的複体 K に含まれる p-単体の個数を N_p で表すとき, 次が成り立つ:

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p N_p.$$

証明　$Z_p(K)$, $B_p(K)$ の階数をそれぞれ $r(Z_p(K))$, $r(B_p(K))$ で表す. このとき $\beta_p(K) = r(Z_p(K)) - r(B_p(K))$ が成り立つ. また $C_p(K)$ と $Z_p(K) \oplus B_{p-1}(K)$ は同型であるので, $C_p(K)$ の階数である N_p は $r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K))$ に等しい. よって

$$\begin{aligned}
\chi(K) &= \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \beta_p(K) \\
&= \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p (r(Z_p(K)) - r(B_p(K))) \\
&= N_0 + \sum_{p=1}^{\dim K} (-1)^p r(Z_p(K)) + \sum_{p=0}^{\dim K - 1} (-1)^{p+1} r(B_p(K)) \\
&= N_0 + \sum_{p=1}^{\dim K} (-1)^p (r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K))) \\
&= \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p N_p
\end{aligned}$$

を得る. □

注意　<u>**Euler の多面体定理**</u>は上の Euler-Poincaré の公式の特別な場合のものである: 多面体 $|K|$ が球面 S^2 に同相であるならば, N_2 (面の数) $-N_1$ (辺の数) $+N_0$ (頂点の数) は球面の Euler 数である 2 に等しい.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題 7

複体 K が以下のように与えられているとき, K のホモロジー群を求めよ (零元のみからなる, $\boldsymbol{Z}$ と同型である, などの解答を与えよ).

(a) K: 0-単体 $|a_0|$ のみからなる複体

(b) K: 1-単体 $|a_0 a_1|$ およびその 0-辺単体 $|a_0|$, $|a_1|$ からなる複体

(c) K: 2-単体 $|a_0 a_1 a_2|$ およびその全ての辺単体からなる複体

(d) K: 2-単体 $|a_0 a_1 a_2|$ の全ての 1-辺単体および 0-辺単体からなる複体

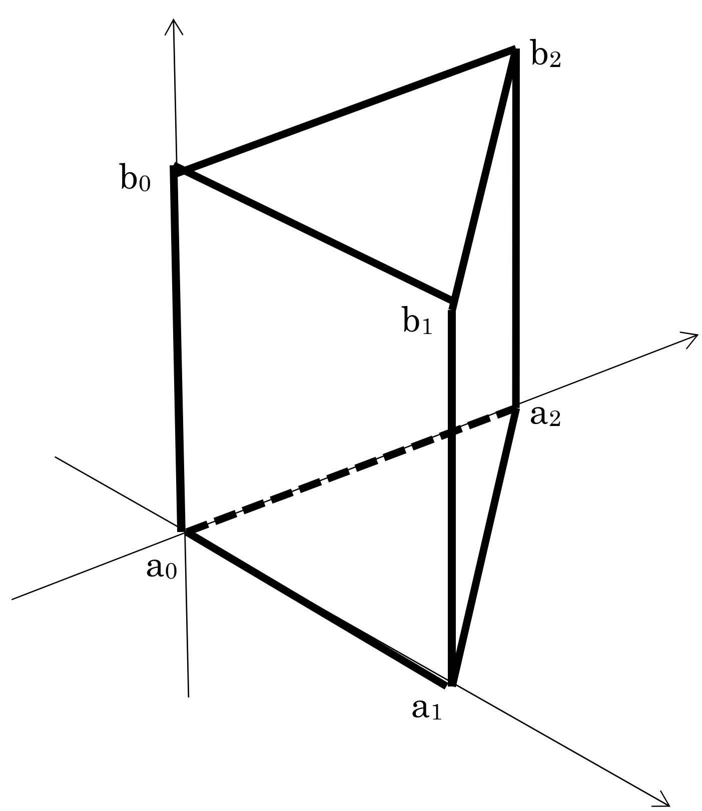
(e) K: 3-単体 $|a_0 a_1 a_2 a_3|$ およびその全ての辺単体からなる複体

(f) K: 3-単体 $|a_0 a_1 a_2 a_3|$ の全ての 2-辺単体, 1-辺単体および 0-辺単体からなる複体

(g) K: 3-単体 $|a_0 a_1 a_2 a_3|$ の 3 つの 2-辺単体およびそれらの全ての辺単体からなる複体

(h) K: 正 8 面体の全ての面 (8 つの 2-単体) およびそれらの全ての辺単体からなる複体

(i) $a_0 := (0,0,0)$, $a_1 := (1,0,0)$, $a_2 := (0,1,0)$, $b_0 := (0,0,1)$, $b_1 := (1,0,1)$, $b_2 := (0,1,1)$ (下図) に対し, K: 2-単体 $|a_0 b_0 b_1|$, $|a_0 a_1 b_1|$, $|a_1 b_1 b_2|$, $|a_1 a_2 b_2|$, $|a_2 b_2 b_0|$, $|a_2 a_0 b_0|$ およびこれらの全ての辺単体からなる複体



第８週 鎖準同型および単体写像

8.1 鎖準同型

K, K' を単体的複体とする．$\{C_p(K)\}, \{C_p(K')\}$ をそれぞれ K, K' の鎖群とし, ∂_p, ∂'_p をそれぞれの境界準同型とする．各 p に対し準同型 $h_p : C_p(K) \longrightarrow C_p(K')$ が定義されていて, $p = 1, 2, \ldots$ に対し $\partial'_p \circ h_p = h_{p-1} \circ \partial_p$ が成り立つとき, 準同型の集合 $\{h_p\}$ を K の鎖群 $\{C_p(K)\}$ から K' の鎖群 $\{C_p(K')\}$ への **鎖準同型** といい, $\{h_p\} : \{C_p(K)\} \longrightarrow \{C_p(K')\}$ で表す.

$\{h_p\} : \{C_p(K)\} \longrightarrow \{C_p(K')\}$ を鎖準同型とする．このとき $z \in Z_p(K)$ に対し $h_p(z) \in Z_p(K')$ が成り立ち, $b \in B_p(K)$ に対し $h_p(b) \in B_p(K')$ が成り立つ．従って $z \in Z_p(K)$ を含むホモロジー類 $[z] \in H_p(K)$ に対し, $h_p(z) \in Z_p(K')$ を含むホモロジー類 $[h_p(z)] \in H_p(K')$ は $[z]$ によって定まり $[z]$ の元の取り方には依らない. こうして **鎖準同型** $\{h_p\}$ **から決まるホモロジー群の準同型** $(h_p)_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(K')$ を得る.

8.2 単体写像

$v(K)$, $v(K')$ をそれぞれ K および K' の全ての頂点からなる集合とする．$v(K)$ から $v(K')$ への写像 φ が K から K' への **単体写像** であるとは, K の任意の単体 $|a_0a_1 \ldots a_p|$ に対し $\{\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)\}$ が K' のある単体の頂点の集合であるときにいう.

以下, φ を K から K' への単体写像とする．K の単体 $\sigma = |a_0a_1 \ldots a_p|$ に対し φ が定める K' の単体を τ とするとき, σ の各点 $\sum_{i=0}^{p} c_i a_i$ ($c_i \geqq 0$, $\sum_{i=0}^{p} c_i = 1$) に対し $\sum_{i=0}^{p} c_i \varphi(a_i)$ は τ の点である．よって σ から τ への写像 $\overline{\varphi}_\sigma$ を

$$\overline{\varphi}_\sigma \left(\sum_{i=0}^{p} c_i a_i \right) := \sum_{i=0}^{p} c_i \varphi(a_i)$$

で定める．このとき $\overline{\varphi}_\sigma : \sigma \longrightarrow \tau$ は連続写像である．各 $\sigma \in K$ に対し上のように定められた $\overline{\varphi}_\sigma$ を用いて, 多面体 $|K|$ から多面体 $|K'|$ への写像 $\overline{\varphi}$ を $\overline{\varphi}|_\sigma = \overline{\varphi}_\sigma$ で定めると, $\overline{\varphi} : |K| \longrightarrow |K'|$ は連続写像である．$\overline{\varphi}$ を **単体写像** φ **が定める連続写像** という.

K の向きづけられた p-単体 $\langle\sigma\rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_p\rangle$ に対し, $C_p(K')$ の元 $\varphi_{\sharp p}(\langle\sigma\rangle)$ を次のように定める:

- $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)$ が全て異なるならば, $\varphi_{\sharp p}(\langle\sigma\rangle) := \langle\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)\rangle$ とする;
- $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)$ の中に互いに等しいものがあるならば, $\varphi_{\sharp p}(\langle\sigma\rangle)$ を $C_p(K)$ の零元とする.

このとき, $C_p(K)$ から $C_p(K')$ への準同型 $\varphi_{\sharp p}$ を

$$\varphi_{\sharp p} \left(\sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle\sigma_i^p\rangle \right) := \sum_{i=1}^{N_p} r_i \varphi_{\sharp p}(\langle\sigma_i^p\rangle)$$

で定めることができる．さらに境界準同型および $\varphi_{\sharp p}$ の定義から

$$\partial'_p \circ \varphi_{\sharp p}(\langle\sigma_i^p\rangle) = \varphi_{\sharp p-1} \circ \partial_p(\langle\sigma_i^p\rangle)$$

がわかり, 従って準同型の集合 $\{\varphi_{\sharp p}\}$ は $\{C_p(K)\}$ から $\{C_p(K')\}$ への鎖準同型であることがわかる．鎖準同型 $\{\varphi_{\sharp p}\} : \{C_p(K)\} \longrightarrow \{C_p(K')\}$ から決まるホモロジー群の準同型 $(\varphi_{\sharp p})_*$ を単に φ_{*p} と記し, **単体写像** φ **から決まるホモロジー群の準同型** という.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題 8

(a) K, K', K'' を複体とし, $\{h_p\} : \{C_p(K)\} \longrightarrow \{C_p(K')\}$, $\{h'_p\} : \{C_p(K')\} \longrightarrow \{C_p(K'')\}$ を鎖準同型とする. このとき各 p について h_p と h'_p の合成 $h'_p \circ h_p$ を考えることによって得られる準同型の集合 $\{h'_p \circ h_p\}$ は $\{C_p(K)\}$ から $\{C_p(K'')\}$ への鎖準同型であることを示せ. さらに $\{h_p\}$, $\{h'_p\}$ および $\{h'_p \circ h_p\}$ から決まるホモロジー群の準同型 $(h_p)_*$, $(h'_p)_*$ および $(h'_p \circ h_p)_*$ に対し, $(h'_p \circ h_p)_* = (h'_p)_* \circ (h_p)_*$ が成り立つことを示せ.

(b) K, K', K'' を複体とする. φ を K から K' への単体写像とし, φ' を K' から K'' への単体写像とする. このとき φ と φ' の合成 $\varphi' \circ \varphi$ は K から K'' への単体写像であることを示せ.

(c) p を正の整数とする. p-単体 σ に対し, $K(\sigma)$ を σ およびその全ての辺単体からなる複体とし, $K(\partial\sigma)$ を σ の全ての $(p-1)$-辺単体およびそれらの全ての辺単体からなる複体とする.

(c1) σ, τ を 1-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c2) σ, τ を 1-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\partial\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c3) σ を 2-単体とし τ を 1-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c4) σ, τ を 2-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c5) σ, τ を 2-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\partial\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c6) σ を 3-単体とし τ を 2-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c7) σ を 3-単体とし τ を 2-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\partial\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c8) σ, τ を 3-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

(c9) σ, τ を 3-単体とするとき, $K(\sigma)$ から $K(\partial\tau)$ への単体写像を全て挙げよ.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 平成２８年６月２１日

第９週　重心細分

9.1　複体の重心細分

p-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \ldots a_p|$ に対し, σ の点 $[\sigma] = (1/(p+1)) \sum_{i=0}^{p} a_i$ を σ の **重心** という. $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_q$ $(q \leqq p)$ を σ の辺単体とし, 各 $i \in \{1, 2, \ldots q\}$ に対し σ_{i-1} は σ_i の辺単体で $\sigma_{i-1} \neq \sigma_i$ を満たすとする. このとき $[\sigma_0]$, $[\sigma_1], \ldots, [\sigma_q]$ は一般の位置にあり, 従って q-単体 $|[\sigma_0][\sigma_1] \ldots [\sigma_q]|$ を定める. このような単体をここでは σ の **重心単体** (または **q-重心単体**) と呼ぶことにする. σ の全ての重心単体からなる集合を $Sd(\sigma)$ で表す.

命題　$Sd(\sigma)$ は複体であり, $|Sd(\sigma)| = \sigma$ が成り立つ.

証明の概略　まず σ の重心単体の辺単体は σ の重心単体である. τ, τ' を p-単体 σ の二つの p-重心単体とする. このとき τ の頂点を与える σ の辺単体の列 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_p = \sigma$ および τ' の頂点を与える σ の辺単体の列 $\sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_p = \sigma$ の列をとることができる. このとき $\sigma_i = \sigma'_i$ を満たす i のような添え字を全てとって $i_0 < i_1 < \cdots < i_q$ $(0 \leqq q \leqq p)$ とすると, $\tau \cap \tau' = |[\sigma_{i_0}][\sigma_{i_1}] \ldots [\sigma_{i_q}]|$ が成り立ち, 従って $\tau \cap \tau'$ は τ の辺単体でありかつ τ' の辺単体である. τ, τ' は p-単体 σ の重心単体ではあるが p-単体であるとは限らないとし, そして $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$ を満たすとする. このとき τ と τ' が共有する頂点を与える σ の辺単体の列 $\sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_q}$ をとると, $\tau \cap \tau' = |[\sigma_{i_0}][\sigma_{i_1}] \ldots [\sigma_{i_q}]|$ が成り立ち, 従って $\tau \cap \tau'$ は τ の辺単体でありかつ τ' の辺単体である. □

K を複体とし, $Sd(K) := \cup_{\sigma \in K} Sd(\sigma)$ とおく. このとき $Sd(K)$ は複体であり, K の **重心細分** という. $|Sd(K)| = |K|$ が成り立つ.

9.2　重心細分の鎖群への鎖準同型

各 $p \geqq 1$ に対し向きづけられた p-単体 $\langle \sigma \rangle$ の p-重心単体の向きを以下のように帰納的に定める. $p = 1$ のとき, $\langle \sigma \rangle = \langle a_0, a_1 \rangle$ の 1-重心単体は $|a_0[\sigma]|$, $|a_1[\sigma]|$ の二つである. これらの向きをそれぞれ $\langle a_0, [\sigma] \rangle$, $\langle [\sigma], a_1 \rangle$ で定める. $p = q \geqq 1$ のとき, $\langle \sigma \rangle$ の q-重心単体の向きを定めることができると仮定する. 向きづけられた $(q+1)$-単体 $\langle \sigma \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{q+1} \rangle$ の $(q+1)$-重心単体 τ は, σ の重心 $[\sigma]$ および σ のある q-辺単体 $\sigma(i) = |a_0 a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_{q+1}|$ のある q-重心単体 $\tau' = |[\sigma_0][\sigma_1] \ldots [\sigma_q]|$ によって与えられ, $\tau = |[\sigma][\sigma_0][\sigma_1] \ldots [\sigma_q]|$ と表される. σ の q-辺単体である $\sigma(i)$ の向きを $(-1)^i \langle a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{q+1} \rangle$ で定め, このように向きづけられた $\sigma(i)$ を $\langle \sigma(i) \rangle'$ で表す (このとき $\partial \langle \sigma \rangle := \sum_{i=0}^{q+1} \langle \sigma(i) \rangle'$ が成り立つ). この $\langle \sigma(i) \rangle'$ の q-重心単体である τ' の向きを仮定により定め, このとき向きづけられた τ' を $\langle \tau' \rangle = \langle [\sigma_{j_0}], [\sigma_{j_1}], \ldots, [\sigma_{j_q}] \rangle$ で表す (但し $\{0, 1, \ldots, q\} = \{j_0, j_1, \ldots, j_q\}$). このとき σ の $(q+1)$-重心単体 τ の向きを $\langle \tau \rangle = \langle [\sigma], [\sigma_{j_0}], [\sigma_{j_1}], \ldots, [\sigma_{j_q}] \rangle$ で定める. $\langle \tau \rangle$ を $[\sigma] * \langle \tau' \rangle$ とも表し, このとき境界準同型の定義から次がわかる:

$$\partial_{q+1}([\sigma] * \langle \tau' \rangle) = \langle \tau' \rangle - \sum_{i=0}^{q} [\sigma] * \langle \tau'(i) \rangle'. \tag{1}$$

向きづけられた p-単体 $\langle \sigma \rangle$ の上のように向きづけられた全ての p-重心単体の, 複体 $Sd(\sigma)$ の p-鎖群 $C_p(Sd(\sigma))$ における和を $Sd_p(\langle \sigma \rangle)$ で表す. このとき複体 K の p-鎖群 $C_p(K)$ から複体 $Sd(K)$ の p-鎖群 $C_p(Sd(K))$ への準同型 Sd_p を定義できる. また $Sd_0 : C_0(K) \longrightarrow C_0(Sd(K))$ を恒等写像とする. (1) を用いて, 次を得る.

命題　$\partial'_p \circ Sd_p = Sd_{p-1} \circ \partial_p$ が成り立ち, 従って $\{Sd_p\}$ は $\{C_p(K)\}$ から $\{C_p(Sd(K))\}$ への鎖準同型である.

さらに次が成り立つ (演習問題９).

定理　鎖準同型 $\{Sd_p\}$ から決まるホモロジー群の準同型 $Sd_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(Sd(K))$ は同型である.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題 9

K を複体とし, 各 $\sigma \in K$ に対し σ の頂点を一つ選んでそれを $\pi([\sigma])$ で表す. このとき K の重心細分 $Sd(K)$ の頂点の集合 $v(Sd(K))$ から K の頂点の集合 $v(K)$ への写像 $\pi : v(Sd(K)) \longrightarrow v(K)$ を得る.

(a) π が $Sd(K)$ から K への単体写像であることを示せ.

(b) 二つの鎖準同型 $\{Sd_p\}$, $\{\pi_{\sharp p}\}$ に対し, 合成 $\pi_{\sharp p} \circ Sd_p$ は $C_p(K)$ の恒等写像であることを示せ.

(c) ホモロジー群の準同型 $\pi_{*p} : H_p(Sd(K)) \longrightarrow H_p(K)$ は同型 (従って $Sd_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(Sd(K))$ も同型) であることを示せ.

第１０週　ホモロジー群の位相不変性（概説）

K を複体とし, a を K の頂点とする. a を頂点とする K の全ての単体の集合を $K(a)$ とし, $O_K(a) := \cup_{\sigma\in K(a)}\mathrm{Int}\,\sigma$ とおく, 但し $\mathrm{Int}\,\sigma$ は σ の全ての内点からなる集合であるが $\mathrm{Int}\,\{a\} = \{a\}$ とする. $O_K(a)$ を a の K における **開星状体** という. $O_K(a)$ は多面体 $|K|$ の開集合である.

複体 K, K' および多面体 $|K|$ から多面体 $|K'|$ への連続写像 $f : |K| \longrightarrow |K'|$ に対し, K から K' への単体写像 φ が K の任意の頂点 a に対し $f(O_K(a)) \subset O_{K'}(\varphi(a))$ を満たすとき, φ を f の **単体近似** という. 例えば, 単体写像 φ は φ が定める連続写像 $\overline{\varphi}$ の単体近似である.

定理 K, K' を複体とし, f を多面体 $|K|$ から多面体 $|K'|$ への連続写像とする. φ, φ' は K から K' への単体写像で, いずれも f の単体近似であるとする. このとき φ, φ' から決まるホモロジー群の準同型

$$\varphi_{*p},\ \varphi'_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(K')$$

に対し $\varphi_{*p} = \varphi'_{*p}$ が成り立つ.

K を複体とし, $Sd(K)$ を K の重心細分とする. $Sd^0(K) := K$, $Sd^1(K) := Sd(K)$ とし, 正の整数 n に対し $Sd^n(K)$ を $Sd^{n-1}(K)$ の重心細分と帰納的に定義する. $|Sd^n(K)| = |K|$ が成り立つ.

定理 (単体近似定理) 複体 K, K' および連続写像 $f : |K| \longrightarrow |K'|$ に対し, 正の整数 n_0 が存在して各 $n \geqq n_0$ に対し $Sd^n(K)$ から K' への単体写像で $f : |K| = |Sd^n(K)| \longrightarrow |K'|$ の単体近似であるものが存在する.

よって複体 K, K' および連続写像 $f : |K| \longrightarrow |K'|$ に対し, 十分大きな正の整数 n および $Sd^n(K)$ から K' への単体写像 φ で $f : |K| = |Sd^n(K)| \longrightarrow |K'|$ の単体近似であるものが存在する. 正の整数 m に対し鎖準同型 $\{Sd_p\} : \{C_p(Sd^{m-1}(K))\} \longrightarrow \{C_p(Sd^m(K))\}$ が定めるホモロジー群の準同型 $Sd_{*p} : H_p(Sd^{m-1}(K)) \longrightarrow H_p(Sd^m(K))$ は同型であるが, $m = 1, \ldots, n$ に対する Sd_{*p} および単体近似 φ から決まるホモロジー群の準同型 $\varphi_{*p} : H_p(Sd^n(K)) \longrightarrow H_p(K')$ の合成 $\varphi_{*p} \circ Sd^n_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(K')$ を f_{*p} で表す.

定理 $f_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(K')$ は正の整数 n および単体近似 φ の取り方に依らない.

$\{f_{*p}\}$ を **連続写像** f **が定める (ホモロジー群の) 準同型** という.

定理 K, K', K'' を複体とし, $f : |K| \longrightarrow |K'|$, $f' : |K'| \longrightarrow |K''|$ を連続写像とする. このとき

$$(f' \circ f)_{*p},\ f'_{*p} \circ f_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(K'')$$

に対し $(f' \circ f)_{*p} = f'_{*p} \circ f_{*p}$ が成り立つ.

この定理から, 特に複体 K, K' に対し同相写像 $f : |K| \longrightarrow |K'|$ が存在するならば, f が定める準同型 $f_{*p} : H_p(K) \longrightarrow H_p(K')$ は同型であることがわかる.

注意 X, Y を位相空間とし, $F : X \longrightarrow Y$, $G : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする. 第１週でも説明したように, F と G が **ホモトープ** (または **ホモトピック**) であるとは, $X \times I$ から Y への連続写像 $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ で任意の $x \in X$ に対し $\Phi(x, 0) = F(x)$, $\Phi(x, 1) = G(x)$ を満たすものが存在するときにいう. 位相空間 X, Y は弧状連結であるとする. X と Y が **ホモトピー同型** であるとは, 連続写像 $F : X \longrightarrow Y$ および $F' : Y \longrightarrow X$ で, $F' \circ F$ は X の恒等写像とホモトープでありかつ $F \circ F'$ は Y の恒等写像とホモトープであるようなものが存在するときにいう. X, Y が同相であるならば, X と Y はホモトピー同型である. K, K' に対し $|K|, |K'|$ がホモトピー同型であるならば, $H_p(K), H_p(K')$ は同型であることが知られている.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題１０

(a) K, K', K'' を複体とし, $f : |K| \longrightarrow |K'|$, $f' : |K'| \longrightarrow |K''|$ を連続写像とする. φ は $Sd^m(K)$ から $Sd^n(K')$ への単体写像で f の単体近似であるとし, φ' は $Sd^n(K')$ から K'' への単体写像で f' の単体近似であるとする. このとき φ と φ' の合成 $\varphi' \circ \varphi$ は f と f' の合成 $f' \circ f$ の単体近似であることを示せ.

(b) 複体 K に対し, π を演習問題９で現れた $Sd(K)$ から K への単体写像とする. さらに各正の整数 n に対し $Sd^n(K)$ から $Sd^{n-1}(K)$ への単体写像を同様に定義し, それをやはり π で表す.

(b1) π は $|K| = |Sd(K)|$ の恒等写像の単体近似であることを示せ.

(b2) K' を複体とし, $f : |K| \longrightarrow |K'|$ を連続写像とする. φ は $Sd^n(K)$ から K' への単体写像で, f の単体近似であるとする. このとき $Sd^{n+1}(K)$ から K' への単体写像 $\varphi \circ \pi$ は f の単体近似であることを示せ.

第１１週 Mayer-Vietoris 完全系列

K を複体とする. K_1, K_2 は K の部分集合で, いずれも複体であるとする (K_i を K の **部分複体** という). さらに $K_1 \cup K_2 = K$ および $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ を仮定する. このとき $K' := K_1 \cap K_2$ は K_i の部分複体である.

以上のような K, K_1, K_2, K' に対し, まず $C_p(K_1)$, $C_p(K_2)$ は $C_p(K)$ の部分加群でありそして $C_p(K)$ の元は $C_p(K_1)$ の元と $C_p(K_2)$ の元の和と表されることがわかる. また $C_p(K_1) \cap C_p(K_2) = C_p(K')$ が成り立つ.

命題 $p \geqq 1$ とする. $Z_p(K)$ の元 z を $z = c_1 + c_2$ のように $c_1 \in C_p(K_1)$, $c_2 \in C_p(K_2)$ の和と表したとき, $\partial_p(c_1) \in Z_{p-1}(K')$ が成り立つ. さらに $\partial_p(c_1)$ を含むホモロジー類 $[\partial_p(c_1)] \in H_{p-1}(K')$ は z を含むホモロジー類 $[z] \in H_p(K)$ によって定まり, $[z]$ の元 z の取り方にも z を表す c_1, c_2 の取り方にも依らない.

証明 $z \in Z_p(K)$ および $z = c_1 + c_2$ から $\partial_p(c_1) = -\partial_p(c_2)$ がわかる. この左辺は $C_{p-1}(K_1)$ の元でありかつ右辺は $C_{p-1}(K_2)$ の元であるので, $\partial_p(c_1)$ は $C_{p-1}(K')$ の元である. そして $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ なので, $\partial_p(c_1) \in Z_{p-1}(K')$ を得る. z をもう一通りに $z = c_1' + c_2'$ のように $c_1' \in C_p(K_1)$, $c_2' \in C_p(K_2)$ の和と表すことができるとする. このとき $c_1 - c_1' = c_2' - c_2 \in C_p(K')$ が成り立つ. よって $H_{p-1}(K')$ の元として, $[\partial_p(c_1)] = [\partial_p(c_1')]$. また $\bar{z} \in [z]$ を $\bar{z} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$ のように $\bar{c}_1 \in C_p(K_1)$, $\bar{c}_2 \in C_p(K_2)$ の和と表すとき, $z - \bar{z} \in B_p(K)$ であるので $z - \bar{z} = \partial_{p+1}(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)$ のように $\tilde{c}_1 \in C_{p+1}(K_1)$, $\tilde{c}_2 \in C_{p+1}(K_2)$ を用いて表すことができる. このとき $\partial_{p+1}(\tilde{c}_1) - c_1 + \bar{c}_1 = -\partial_{p+1}(\tilde{c}_2) + c_2 - \bar{c}_2 \in C_p(K')$ であり, よって $H_{p-1}(K')$ の元として $[\partial_p(c_1)] = [\partial_p(\bar{c}_1)]$. □

$p \geqq 1$ に対し写像 $\delta_p : H_p(K) \longrightarrow H_{p-1}(K')$ を $\delta_p([z]) := [\partial_p(c_1)]$ で定める. δ_p は準同型である.

$i' : K' \to K_1$, $j' : K' \to K_2$, $i : K_1 \to K$, $j : K_2 \to K$ を恒等写像が定める単体写像とする. これらは鎖準同型 $\{i'_{\sharp p}\}$, $\{j'_{\sharp p}\}$, $\{i_{\sharp p}\}$, $\{j_{\sharp p}\}$ を定めさらにホモロジー群の準同型 i'_{*p}, j'_{*p}, i_{*p}, j_{*p} を定める. このとき準同型

$$\psi_p : H_p(K') \longrightarrow H_p(K_1) \oplus H_p(K_2), \quad \phi_p : H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \longrightarrow H_p(K)$$

をそれぞれ $\psi_p([z']) := (i'_{*p}([z']),\ -j'_{*p}([z']))$, $\phi_p([z_1],[z_2]) := i_{*p}([z_1]) + j_{*p}([z_2])$ で定める.

定理 $\operatorname{Im}\psi_p = \operatorname{Ker}\phi_p$, $\operatorname{Im}\phi_p = \operatorname{Ker}\delta_p$ および $\operatorname{Im}\delta_p = \operatorname{Ker}\psi_{p-1}$ が成り立つ.

$\operatorname{Im}\psi_p = \operatorname{Ker}\phi_p$ の証明 まず ψ_p, ϕ_p の定義から, $\operatorname{Im}\psi_p \subset \operatorname{Ker}\phi_p$ がわかる. また $([z_1],[z_2]) \in \operatorname{Ker}\phi_p$ とすると, $H_p(K)$ において $[z_1 + z_2]$ は零元である. よってある $c_1 \in C_{p+1}(K_1)$, $c_2 \in C_{p+1}(K_2)$ が $\partial_{p+1}(c_1 + c_2) = z_1 + z_2$ を満たす. よって $z_1 - \partial_{p+1}(c_1) = -z_2 + \partial_{p+1}(c_2)$ は $Z_p(K')$ の元であり, これを z' で表すと $\psi_p([z']) = ([z_1],[z_2])$ を得る. □

$\operatorname{Im}\phi_p = \operatorname{Ker}\delta_p$ の証明 $([z_1],[z_2]) \in H_p(K_1) \oplus H_p(K_2)$ に対し $\delta_p \circ \phi_p([z_1],[z_2]) = \delta_p([i_{\sharp p}(z_1) + j_{\sharp p}(z_2)]) = [\partial_p(z_1)] = 0$ なので, $\operatorname{Im}\phi_p \subset \operatorname{Ker}\delta_p$. また $z \in Z_p(K)$ を $z = c_1 + c_2$ と表したとき $\partial_p(c_1) \in B_{p-1}(K')$ ならば, ある $c' \in C_p(K')$ に対し $\partial_p(c') = \partial_p(c_1)$. よって $z_1 := c_1 - c'$, $z_2 := c_2 + c'$ は $z_1 \in Z_p(K_1)$, $z_2 \in Z_p(K_2)$ および $z = z_1 + z_2$ を満たす. このとき $\phi_p([z_1],[z_2]) = [i_{\sharp p}(z_1) + j_{\sharp p}(z_2)] = [z]$ が成り立ち従って $\operatorname{Ker}\delta_p \subset \operatorname{Im}\phi_p$. □

$\operatorname{Im}\delta_p = \operatorname{Ker}\psi_{p-1}$ の証明 $[z] \in H_p(K)$ に対し $\psi_{p-1} \circ \delta_p([z]) = \psi_{p-1}([\partial_p(c_1)]) = (i'_{*p}([\partial_p(c_1)]), j'_{*p}([\partial_p(c_2)])) = 0$ なので, $\operatorname{Im}\delta_p \subset \operatorname{Ker}\psi_{p-1}$. また $[z'] \in \operatorname{Ker}\psi_{p-1}$ に対し $z' \in B_{p-1}(K_1)$, $z' \in B_{p-1}(K_2)$ が成り立つので, ある $c_1 \in C_p(K_1)$, $c_2 \in C_p(K_2)$ が $z' = \partial_p(c_1) = -\partial_p(c_2)$ を満たす. このとき $c_1 + c_2 \in Z_p(K)$ なので, $z := c_1 + c_2$ は $\delta_p([z]) = [\partial_p(c_1)] = [z']$ を満たし従って $\operatorname{Ker}\psi_{p-1} \subset \operatorname{Im}\delta_p$. □

幾つかの準同型の集まりで, 各準同型の値域が次の準同型の定義域であるように並べられたものを **系列** という. 系列が **完全** であるとは, 各準同型の像とその次の準同型の核が等しいときにいう. 上の定理から, 系列

$$\xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(K') \xrightarrow{\psi_p} H_p(K_1) \oplus H_p(K_2) \xrightarrow{\phi_p} H_p(K) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(K') \xrightarrow{\psi_{p-1}} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\phi_1} H_1(K) \xrightarrow{\delta_1} H_0(K') \xrightarrow{\psi_0} H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \xrightarrow{\phi_0} H_0(K) \longrightarrow \{0\}$$

は完全系列であることがわかる. この完全系列を $(K; K_1, K_2)$ に関する **Mayer-Vietoris 完全系列** という.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題１１

(a) σ, τ を 2-単体とする.

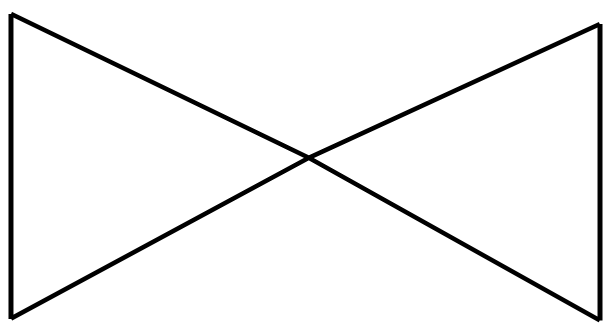
(a1) $\sigma \cap \tau$ は 1 点からなり, σ の頂点でもありかつ τ の頂点でもあるとする. K を σ, τ の全ての 1-辺単体および全ての 0-辺単体からなる複体とするとき, K のホモロジー群を求めよ.

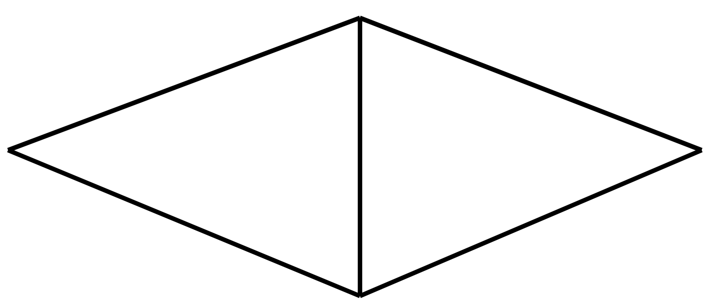
(a2) $\sigma \cap \tau$ は σ の 1-辺単体でありかつ τ の 1-辺単体であるとする. K を σ, τ の全ての 1-辺単体および全ての 0-辺単体からなる複体とするとき, K のホモロジー群を求めよ.

(b) σ, τ を 3-単体とする.

(b1) $\sigma \cap \tau$ は 1 点からなり, σ の頂点でもありかつ τ の頂点でもあるとする. K を σ, τ の全ての 2-辺単体およびそれらの全ての辺単体からなる複体とするとき, K のホモロジー群を求めよ.

(b2) $\sigma \cap \tau$ は σ の 1-辺単体でありかつ τ の 1-辺単体であるとする. K を σ, τ の全ての 2-辺単体およびそれらの全ての辺単体からなる複体とするとき, K のホモロジー群を求めよ.





第１２週　様々な図形のホモロジー群（その１）

第１０週において, 二つの複体 K, K' に対しこれらの多面体 $|K|$, $|K'|$ が互いに同相であるならば, これらのホモロジー群 $H_p(K)$, $H_p(K')$ は互いに同型であることがわかった. よって単体分割可能な位相空間 X に対しそのホモロジー群 $H_p(X)$ を考えることができる: K が X の単体分割を与える複体であるならば, $H_p(X)$ は $H_p(K)$ と同型な群であると考えることができる.

定理　$H_0(S^1 \times S^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S^1 \times S^1) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$, $H_2(S^1 \times S^1) \cong \boldsymbol{Z}$.

証明　$S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ の部分集合 I_1, I_2 を $I_1 := S^1 \cap \{y \geqq 0\}$, $I_2 := S^1 \cap \{y \leqq 0\}$ で定める. このとき $S^1 = I_1 \cup I_2$ が成り立ち, $I_1 \cap I_2$ は 2 点 a, b からなる. $S^1 \times S^1$ の部分集合 X_1, X_2 を $X_1 := S^1 \times I_1$, $X_2 := S^1 \times I_2$ で定める. このとき $S^1 \times S^1 = X_1 \cup X_2$ が成り立ち, $X_1 \cap X_2$ は $S^1 \times \{a\}$, $S^1 \times \{b\}$ の直和からなる. $(S^1 \times S^1; X_1, X_2)$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\delta_3} H_2(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\psi_2} H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) \xrightarrow{\phi_2} H_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\delta_2} H_1(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\psi_1} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \\ &\xrightarrow{\phi_1} H_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\delta_1} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\psi_0} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{\phi_0} H_0(S^1 \times S^1) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

である. そして

$$\begin{aligned} &H_0(S^1 \times S^1) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(X_1) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(X_2) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(X_1 \cap X_2) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}, \\ &H_1(X_1) \cong \boldsymbol{Z},\ H_1(X_2) \cong \boldsymbol{Z},\ H_1(X_1 \cap X_2) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z},\ H_2(X_1) = \{0\},\ H_2(X_2) = \{0\},\ H_2(X_1 \cap X_2) = \{0\} \end{aligned}$$

が成り立つ. $H_1(X_1 \cap X_2)$ の生成元として $H_1(S^1 \times \{a\})$ の生成元および $H_1(S^1 \times \{b\})$ の生成元をとることによって, $\operatorname{Ker} \psi_1 \cong \boldsymbol{Z}$ がわかる. また $\{0\} = \operatorname{Im} \phi_2 = \operatorname{Ker} \delta_2$ なので, δ_2 は単射である. よって $H_2(S^1 \times S^1) \cong \operatorname{Im} \delta_2 = \operatorname{Ker} \psi_1 \cong \boldsymbol{Z}$ を得る. また $H_1(X_1)$ の生成元, $H_1(X_2)$ の生成元はいずれも $\operatorname{Ker} \delta_1$ を生成する. また $\operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} \psi_0 \cong \boldsymbol{Z}$ なので, $H_1(S^1 \times S^1)$ は $\operatorname{Ker} \delta_1$ の生成元ともう一つの元によって生成されている. さらに $H_1(S^1 \times S^1)$ の任意の元はこれらの整数係数 1 次結合によって一意に表されるので, $H_1(S^1 \times S^1) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ を得る. □

定理　$m \geqq 1$ に対し, $H_0(B^m) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_p(B^m) = \{0\}$ $(p \geqq 1)$, 但し $B^m := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < 1\}$.

証明　m-単体 σ に対し, $K(\sigma)$ を σ およびその全ての辺単体からなる複体とする. このとき $H_0(K(\sigma)) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_p(K(\sigma)) = \{0\}$ $(p \geqq 1)$ を示せば良い. まず σ の異なる二つの頂点 a, b に対し $a - b \in B_0(K(\sigma))$ であるので, $H_0(K(\sigma)) \cong \boldsymbol{Z}$ がわかる. また $Z_m(K(\sigma)) = \{0\}$ なので, $H_m(K(\sigma)) = \{0\}$ がわかる. $1 \leqq p \leqq m-1$ および $\tau \in Z_p(K(\sigma))$ に対し, $\tau \in B_p(K(\sigma))$ を示したい. $\sigma = |a_0 a_1 \ldots a_m|$ とし, $\tau = \alpha + \beta$ と表す, 但し α, β はそれぞれ

$$\alpha := \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_{p+1} \leqq m} \alpha_{i_1 \ldots i_{p+1}} \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle, \qquad \beta := \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_p \leqq m} \beta_{j_1 \ldots j_p} \langle a_0, a_{j_1}, \ldots, a_{j_p} \rangle$$

と表される. $\partial_p(\tau) = 0$ を用いて,

$$\partial_p(\alpha) = -\sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_{p+1} \leqq m} \alpha_{i_1 \ldots i_{p+1}} \sum_{r=1}^{p+1} (-1)^r \langle a_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_r}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle = -\sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_p \leqq m} \beta_{j_1 \ldots j_p} \langle a_{j_1}, \ldots, a_{j_p} \rangle$$

を得る. よって $\tau' := \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_{p+1} \leqq m} \alpha_{i_1 \ldots i_{p+1}} \langle a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}} \rangle$ とおくと, $\partial_{p+1}(\tau') = \alpha + \beta = \tau$ を得る. □

定理　$m \geqq 1$ に対し, $H_0(S^m) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_m(S^m) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_p(S^m) = \{0\}$ $(p \neq 0, m)$.

証明　$(m+1)$-単体 σ に対し, $K(\partial\sigma)$ を σ の全ての m-辺単体およびそれらの全ての辺単体からなる複体とする: $K(\partial\sigma) := K(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. このとき一つ上の定理から $H_0(K(\partial\sigma)) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_m(K(\partial\sigma)) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_p(K(\partial\sigma)) = \{0\}$ $(p \neq 0, m)$ がわかるので, 結論を得る. □

以上を踏まえて, 次の定理を示すことができる (演習問題１２).

定理　$m \geqq 1$ に対し, $H_0(S^m \times S^m) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_m(S^m \times S^m) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$, $H_{2m}(S^m \times S^m) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_p(S^m \times S^m) = \{0\}$ $(p \neq 0, m, 2m)$.

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題１２

$m, n \geqq 1$ に対し, $S^m \times S^n$ のホモロジー群を求めよ, 但し以下に注意すること.

- $m = n = 1$ の場合は既に説明されているので, m または n が 1 より大きい場合を考えること.
- まず $m > 1$, $n = 1$ の場合を考えてみること, 但し必要ならばホモトピー同型な二つの空間のホモロジー群は互いに同型であることを用いてよい.
- $m > 1$, $n > 1$ とする. D_1, D_2 は S^n の部分集合で, いずれも $\overline{B^n}$ に同相であり $S^n = D_1 \cup D_2$ が成り立ちかつ $D_1 \cap D_2$ は S^{n-1} に同相であるようなものとする. このような D_1, D_2 に対し $X_1 := S^m \times D_1$, $X_2 := S^m \times D_2$ とおき, Mayer-Vietoris 完全系列を調べること.

第１３週 様々な図形のホモロジー群（その２）

定理 $g \geqq 1$ に対し, S_g を第４週で現れた閉曲面とする. このとき $H_0(S_g) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S_g) \cong \oplus_{i=1}^{2g}\boldsymbol{Z}$ ($2g$ 個の $\boldsymbol{Z}$ の直和), $H_2(S_g) \cong \boldsymbol{Z}$.

証明の概略 $\tilde{\Delta}$ は S_g の部分集合で, 開円板に同相であるとする. $X_1 := S_g \setminus \tilde{\Delta}$, $X_2 := \overline{\tilde{\Delta}}$ ($\tilde{\Delta}$ の閉包) とおく. このとき $S_g = X_1 \cup X_2$ および $X_1 \cap X_2 = \partial\tilde{\Delta}$ が成り立つ. $(S_g; X_1, X_2)$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\begin{aligned} 0 \xrightarrow{\delta_3} H_2(\partial\tilde{\Delta}) \xrightarrow{\psi_2} H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) \xrightarrow{\phi_2} H_2(S_g) \xrightarrow{\delta_2} H_1(\partial\tilde{\Delta}) \xrightarrow{\psi_1} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \\ \xrightarrow{\phi_1} H_1(S_g) \xrightarrow{\delta_1} H_0(\partial\tilde{\Delta}) \xrightarrow{\psi_0} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{\phi_0} H_0(S_g) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

である. そして

$$\begin{aligned} &H_0(S_g) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(X_1) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(X_2) \cong \boldsymbol{Z}, \quad H_0(\partial\tilde{\Delta}) \cong \boldsymbol{Z}, \\ &H_1(X_1) \cong \oplus_{i=1}^{2g}\boldsymbol{Z},\ H_1(X_2) = \{0\},\ H_1(\partial\tilde{\Delta}) \cong \boldsymbol{Z},\ H_2(X_1) = \{0\},\ H_2(X_2) = \{0\},\ H_2(\partial\tilde{\Delta}) = \{0\} \end{aligned}$$

が成り立つ, 但し X_1 は第４週 4.2 節に現れた Γ とホモトピー同型であることを用いている. よってまず δ_2 は単射である. さらに, $H_1(\partial\tilde{\Delta})$ の生成元である $\partial\tilde{\Delta}$ は $H_1(X_1)$ においても $H_1(X_2)$ においても零元であるので, $\operatorname{Im}\delta_2 = \operatorname{Ker}\psi_1 = H_1(\partial\tilde{\Delta})$ でありよって δ_2 は全射である. 従って $H_2(S_g) \cong H_1(\partial\tilde{\Delta}) \cong \boldsymbol{Z}$ を得る. また $\operatorname{Ker}\phi_1 = \operatorname{Im}\psi_1 = \{0\}$ なので, ϕ_1 は単射である. ψ_0 は単射なので, $\operatorname{Im}\delta_1 = \operatorname{Ker}\psi_0 = \{0\}$ でありそして $\operatorname{Im}\phi_1 = \operatorname{Ker}\delta_1 = H_1(S_g)$ なので, ϕ_1 は全射である. 従って $H_1(S_g) \cong H_1(X_1) \cong \oplus_{i=1}^{2g}\boldsymbol{Z}$ を得る. □

定理 $h \geqq 1$ に対し, S'_h を第４週で現れた閉曲面とする. このとき $H_0(S'_h) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S'_h) \cong (\oplus_{i=1}^{h-1}\boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$, $H_2(S'_h) = \{0\}$.

証明の概略 上に現れた Mayer-Vietoris 完全系列と同様のものを考える. まず δ_2 が単射であることは同様である. 一方で, $\partial\tilde{\Delta}$ は $H_1(X_2) = \{0\}$ の零元であるが $H_1(X_1)$ の零元ではない: $H_1(\Gamma)$ は Γ を構成する h 個の S^1 に同相な空間 $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ によって生成されそして $H_1(\Gamma)$ の各元はこれらの整数係数 1 次結合によって一意に表されるが, $\partial\tilde{\Delta}$ は $H_1(X_1) \cong H_1(\Gamma)$ において $2\gamma_1 + \cdots + 2\gamma_h$ と表される. よって $\operatorname{Im}\delta_2 = \operatorname{Ker}\psi_1 = \{0\}$ であり, 従って $H_2(S'_h) = \{0\}$ を得る. また ϕ_1 が全射であることは同様に成り立つので, 準同型定理を用いて $H_1(S'_h) \cong H_1(X_1)/\operatorname{Ker}\phi_1 = H_1(X_1)/\operatorname{Im}\psi_1 \cong (\oplus_{i=1}^{h-1}\boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ を得る. □

また次の定理が成り立つ (演習問題１３).

定理 $H_0(P^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(P^1) \cong \boldsymbol{Z}$ が成り立つ. また $m \geqq 2$ のとき, 以下が成り立つ.

(a) m が奇数ならば,

$$H_p(P^m) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (p = 0, m), \\ \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} & (p = 1, 3, 5, \ldots, m-2) \end{cases}$$

であり $H_p(P^m) = \{0\}$ (p は上記以外のもの).

(b) m が偶数ならば,

$$H_p(P^m) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (p = 0), \\ \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} & (p = 1, 3, 5, \ldots, m-1) \end{cases}$$

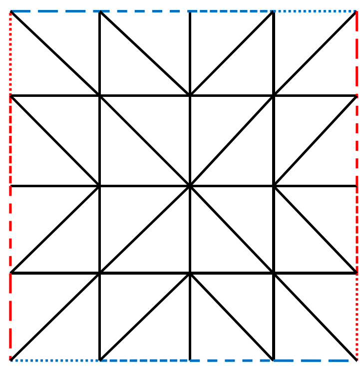
であり $H_p(P^m) = \{0\}$ (p は上記以外のもの).

幾何学 I — 位相幾何学入門 — 演習問題１３

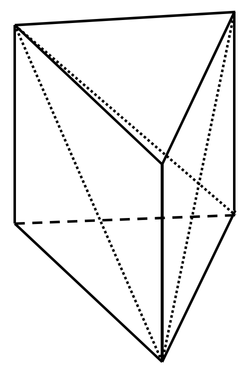
(a) $H_0(P^3) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(P^3) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$, $H_2(P^3) = \{0\}$, $H_3(P^3) \cong \boldsymbol{Z}$ を示せ (以下を参考にすること).

- P^3 の単体分割を考える際, $P^2 = S_1'$ の単体分割を参考にできる. いろいろな単体分割が考えられるが, ここでは平面上で下の左図のように 32 個の 2-単体を考え, 外側の 1-単体について中心に関して対称であるものどうしを同一視することにより P^2 の単体分割を得る.

- P^3 の単体分割を同様のやり方で得るために, まず下の右図のように三つの 3-単体を用いて三角柱の単体分割を考える. そして二つの三角柱を用いて立方体の単体分割を得ることができ, さらに 64 個の立方体を用いて P^3 の単体分割を得ることができる.



射影平面の単体分割



三角柱の単体分割

- $P^2 = S_1'$ のホモロジー群については既にわかっていて, $H_0(P^2) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(P^2) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$, $H_2(P^2) = \{0\}$ である. 特に 2 次元ホモロジー群は零元のみからなるが, これは P^2 の開円板に同相な部分集合 $\tilde{\Delta}$ の境界 $\partial\tilde{\Delta}$ が $X_1 = P^2 \setminus \tilde{\Delta}$ の 1 次元ホモロジー群 $H_1(X_1)$ の零元ではないことによる.

- 一方で, P^3 の 3 次元ホモロジー群 $H_3(P^3)$ は零元のみからなるのではなく $\boldsymbol{Z}$ と同型であり, これは P^3 の開球に同相な部分集合 B の境界が $P^3 \setminus B$ の 2 次元ホモロジー群の零元であることによる.

- $H_0(P^3) \cong \boldsymbol{Z}$ については P^3 の連結性からわかり, また $H_1(P^3)$ および $H_2(P^3)$ については $X_1 := P^3 \setminus B$, $X_2 := \overline{B}$ とおいて $(P^3; X_1, X_2)$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を調べることによって結論を得る.

(b) m に関する帰納法を用いて, P^m のホモロジー群を求めよ (以下を参考にすること).

- $m!$ 個の m-単体を用いて, $Q := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid |x_i| \leqq 1,\ i = 1, \ldots, m\}$ の単体分割を得ることができる.

- Q と同相な 4^m 個の図形を用いて, P^m の単体分割を得ることができる.

- P^m の開球に同相な部分集合 B に対し $X_1 := P^m \setminus B$, $X_2 := \overline{B}$ とおいて, $(P^m; X_1, X_2)$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列を調べることによって, P^m のホモロジー群を求めることができる (m の偶奇に注意すること).