幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１０月４日

第１週　平面曲線の曲率

1.1　曲線

この授業では, 特に断らない限り関数および写像は全て C^∞ 級であるとする.

I を開区間とし, $\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を I から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とする. 従って $\boldsymbol{p}$ は I 上の二つの関数 x, y を用いて, $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$ と表される $(t \in I)$. $\boldsymbol{p}$ が **(正則) 曲線** であるとは, 任意の $t \in I$ に対して

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$$

が成り立つときにいう, 但し

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} := \frac{dy}{dt}$$

である. $\boldsymbol{p}$ が曲線であるとき, I の $\boldsymbol{p}$ による像 $\boldsymbol{p}(I)$ のことも曲線と呼ぶことがある.

1.2　弧長パラメータ

$\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を曲線とする. このとき $a \in I$ に対し,

$$s = \int_a^t |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| dt \quad (t \in I)$$

の絶対値は曲線 $\boldsymbol{p}(I)$ の $\boldsymbol{p}(a)$ から $\boldsymbol{p}(t)$ までの長さである. s は $t \in I$ の関数であり, その導関数 $\dot{s}$ は $\dot{s}(t) = |\dot{\boldsymbol{p}}(t)|$ で与えられる. 特に $\dot{s}(t) > 0$ がわかるので, s は逆関数を持ち, t を s の関数 $t = t(s)$ とみなすことができる. こうして曲線 $\boldsymbol{p}$ は, 0 を含む開区間の各元 s に対し $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\boldsymbol{p}(t(s))$ を対応させる写像とみなされる. 以下, $x' := dx/ds$, $y' := dy/ds$ とおき, $\boldsymbol{p}'(s) := (x'(s), y'(s))$ とおく. このとき

$$\boldsymbol{p}'(s) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|}\dot{\boldsymbol{p}}(t)$$

が成り立ち, 特に $|\boldsymbol{p}'(s)| = 1$ が成り立つ. $|\boldsymbol{p}'(s)| = 1$ を満たすパラメータ s を曲線 $\boldsymbol{p}$ の **弧長パラメータ** という.

1.3　曲率

$\boldsymbol{t}(s) := \boldsymbol{p}'(s)$ とおく. また $\boldsymbol{n}(s) := (-y'(s), x'(s))$ とおく. このとき

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} = 1, \qquad \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1 \tag{1}$$

が成り立つ, 但し例えば $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積である. よって (1) の第 1 式から, $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}' = 0$ がわかる. よって任意の s に対し, $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{t}'(s)$ は直交している. また (1) の第 2 式によると, $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ は直交している. よって $\boldsymbol{t}'(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ の定数倍と表され, このとき現れる定数を $\kappa(s)$ で表す:

$$\boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s).$$

$\kappa(s)$ を曲線 $\boldsymbol{p}$ (または $\boldsymbol{p}(I)$) の s (または $\boldsymbol{p}(s)$) での **曲率** という.

1.4　Gauss 写像

各 s に対し単位円 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の点を $\boldsymbol{n}(s)$ (正確にはベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ の始点を $(0, 0)$ としたときの終点) で与える写像を曲線 $\boldsymbol{p}$ の **Gauss 写像** といい, Gauss 写像による s の像を $g(s)$ で表す. 前節を参考にして, $g' = -\kappa \boldsymbol{t}$ がわかる.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題１

(a) 直線の曲率は恒等的に零であることを示せ．また曲率が恒等的に零である曲線は直線であることを示せ．

(b) 正数 a に対し，$\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{p}(t) := (a\cos t, a\sin t)$ で定める．このとき $\boldsymbol{p}$ を弧長パラメータ s で表せ．また $\boldsymbol{p}$ の曲率を求めよ．

(c) 曲率が恒等的に正の定数である曲線は円の一部であることを示せ．

(d) 二つの正数 a, b に対し，$\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{p}(t) := (a\cos t, b\sin t)$ で定める．このとき $\boldsymbol{p}$ の曲率を求めよ．

(e) $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{p}(t) := (\cosh t, \sinh t)$ で定める．このとき $\boldsymbol{p}$ の曲率を求めよ．

(f) 曲線 $\boldsymbol{p}$ に対し，s を弧長パラメータ，$\kappa(s)$ を s での曲率とする．$\boldsymbol{p}(s)$ を $\boldsymbol{p}(s) = {}^t(x(s), y(s))$ と表し，2 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\boldsymbol{c}$ に対し，$\tilde{\boldsymbol{p}}(s) := T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ とおく．このとき $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の s での曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ は $\kappa(s)$ に等しいことを示せ．

(g) 次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

  (i) s を弧長パラメータとする曲線 $\boldsymbol{p}$ に対し，$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{p}'(s)$ を $\boldsymbol{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ と表す．$\boldsymbol{p}$ の s での曲率は $\theta'(s)$ に等しいことを示せ．

  (ii) 与えられた s の関数 κ に対し，s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$ を s での曲率とする曲線 $\boldsymbol{p}$ が存在することを示せ．

  (iii) (ii) における $\boldsymbol{p}$ と同様の曲線 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対し，2 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\boldsymbol{c}$ が存在して，任意の s に対し $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ が成り立つことを示せ．

(h) 曲線 $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$ と表されているとする，但し t は弧長パラメータとは限らない．このとき $\boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{p}(t)$ での曲率は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}$$

と表されることを示せ．

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１０月１１日

第２週　空間曲線の曲率および捩率

2.1　空間曲線およびその曲率

I を開区間とし, $\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を I から $\boldsymbol{R}^3$ への写像とする. $\boldsymbol{p}$ が **(正則) 曲線** であるとは, I 上 $\boldsymbol{p}' \neq 0$ が成り立つときにいい, 今回のように値域が $\boldsymbol{R}^3$ であることを強調するときには $\boldsymbol{p}$ を **空間曲線** という (第１週でのように値域が $\boldsymbol{R}^2$ である場合には, このことを強調するときには $\boldsymbol{p}$ を **平面曲線** という).

$\boldsymbol{p}$ を空間曲線とする. $\boldsymbol{p}$ を I 上の三つの関数 x, y, z を用いて $\boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と表し ($s \in I$), 以下 s は弧長パラメータであるとする, つまり任意の $s \in I$ に対し接ベクトル $\boldsymbol{t}(s) := \boldsymbol{p}'(s)$ の長さは 1 であるとする. これは $x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$ ということであり, $\boldsymbol{t}(s) \cdot \boldsymbol{t}(s) = 1$ ということである. よってこれらの両辺を s で微分することで, $\boldsymbol{t}(s) \cdot \boldsymbol{t}'(s) = 0$ を得る. 従って $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{t}'(s)$ は直交している. $\boldsymbol{t}'(s)$ の長さを $\boldsymbol{p}$ (または $\boldsymbol{p}(I)$) の s (または $\boldsymbol{p}(s)$) での **曲率** といい, $\kappa(s)$ で表す:

$$\kappa(s) := |\boldsymbol{t}'(s)| = \sqrt{\boldsymbol{t}'(s) \cdot \boldsymbol{t}'(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}.$$

また $\boldsymbol{t}'(s)$ を $\boldsymbol{p}$ の s での **曲率ベクトル** という.

注意　定義により, 空間曲線の曲率は零以上の値をとる. 一方で, 平面曲線の曲率は負の値を取り得る.

2.2　捩率および Frenet-Serret の公式

以下, 空間曲線 $\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ の曲率 $\kappa(s)$ は零にはならないとする. このとき

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{t}'(s) \tag{1}$$

を $\boldsymbol{p}$ の s での **主法線ベクトル** という. $\boldsymbol{n}(s)$ の長さは 1 である. $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ は直交しているので, $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ のベクトル積 $\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) =: \boldsymbol{b}(s)$ は $\boldsymbol{t}(s)$ とも $\boldsymbol{n}(s)$ とも直交する長さが 1 のベクトルである. これを $\boldsymbol{p}$ の s での **従法線ベクトル** という. 任意の $s \in I$ に対し, $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をなし, また右手系をなす. $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ をこの順序で並べて得られる三つ組 $(\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ を空間曲線 $\boldsymbol{p}$ の **Frenet 枠** という. 次の定理に現れる関数 τ によって, $\boldsymbol{p}$ の s での **捩率** $\tau(s)$ が定義される.

定理　I 上の関数 τ が存在して, 任意の $s \in I$ に対し次が成り立つ (**Frenet-Serret の公式**):

$$(\boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{n}'(s), \boldsymbol{b}'(s)) = (\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

証明　$\boldsymbol{n}(s)$ の定義 (1) から, $\boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ がわかる. $|\boldsymbol{n}(s)| = 1$ なので, $\boldsymbol{n}'(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ は直交していて, 従って $\boldsymbol{n}'(s)$ は $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s)$ の 1 次結合で表される. このとき $\boldsymbol{t}(s)$ の係数は $\boldsymbol{n}'(s) \cdot \boldsymbol{t}(s)$ であるが,

$$\boldsymbol{n}'(s) \cdot \boldsymbol{t}(s) = -\boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{t}'(s) = -\boldsymbol{n}(s) \cdot (\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)) = -\kappa(s)$$

なので, $\boldsymbol{t}(s)$ の係数は $-\kappa(s)$ であることがわかる. $\boldsymbol{b}(s)$ の係数を $\tau(s)$ で表す. 従って

$$\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \tag{3}$$

が成り立つ. $\boldsymbol{b}'(s)$ は $\boldsymbol{b}(s)$ と直交している. また

$$\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{t}(s) = -\boldsymbol{b}(s) \cdot \boldsymbol{t}'(s) = -\boldsymbol{b}(s) \cdot (\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)) = 0$$

なので, $\boldsymbol{b}'(s)$ は $\boldsymbol{t}(s)$ とも直交している. (3) を用いて, 同様に $\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) = -\tau(s)$ を得る. 以上から, (2) を得る. □

第２週 空間曲線の曲率および捩率（続き）

2.3 曲線論の基本定理

定理 κ, τ は $s \in I$ の関数で, 任意の s に対し $\kappa(s) > 0$ が成り立つとする．このとき s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$, $\tau(s)$ をそれぞれ s での曲率および捩率とする曲線 $\boldsymbol{p}$ が存在する．さらに, 同様の曲線 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対し, 3 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\boldsymbol{c}$ が存在して, I 上 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ が成り立つ．

証明　A を I 上の関数を成分とする n 次正方行列とする．このとき同次 1 階線形常微分方程式系 $\boldsymbol{x}' = A(s)\boldsymbol{x}$ は与えられた初期条件 $\boldsymbol{x}(s_0) = \boldsymbol{c}$ ($s_0 \in I$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$) に対し唯一つの解 $\boldsymbol{x}$ を持つ．ここで $n := 9$ とし,

$$A(s) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) \\ 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき $\boldsymbol{x}' = A(s)\boldsymbol{x}$ の一意解 $\boldsymbol{x} := {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ に対し,

$$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

は (2) を満たす．$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする 3 次正方行列を X で表す．このとき $X' = XK(s)$ が成り立つ, 但し

$$K(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

である．$Y := {}^tXX$ とおくと,

$$Y' = ({}^tX')X + {}^tXX' = {}^tK(s){}^tXX + {}^tXXK(s) = -K(s)Y + YK(s)$$

が成り立つ．ここで得られた式 $Y' = -K(s)Y + YK(s)$ は, 与えられた K に対し Y を未知関数とする 1 階線形常微分方程式系とみなされる．ここで $\boldsymbol{c} = {}^t(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \in \boldsymbol{R}^9$ に対し, 3 次正方行列

$$C := \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_7 \\ c_2 & c_5 & c_8 \\ c_3 & c_6 & c_9 \end{pmatrix}$$

は直交行列でありかつ $\det C = 1$ を満たすとする．このとき初期条件 $Y(s_0) = {}^tCC = E_3$ (3 次の単位行列) に対し, 方程式系 $Y' = -K(s)Y + YK(s)$ は唯一つの解 Y を持つ．そして任意の s に対し $Y(s) = E_3$ を満たす Y は $Y' = -K(s)Y + YK(s)$ を満たすので, 初期条件 $Y(s_0) = E_3$ に対する一意解 Y は任意の s に対し $Y(s) = E_3$ を満たすことがわかる．このとき $\boldsymbol{p} : I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ として $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{t}$ を満たすものをとると, $\boldsymbol{p}$ は s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$, $\tau(s)$ をそれぞれ s での曲率および捩率とする曲線である．同様の曲線 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対し $\tilde{C}$ は $\boldsymbol{p}$ に対する C に相当する直交行列であるとすると, $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対し $\tilde{X}$ は I 上 $\tilde{X} = \tilde{C}C^{-1}X$ で与えられる．特に $\tilde{X}$ の第 1 列 $\tilde{\boldsymbol{t}}$ は $\tilde{\boldsymbol{t}} = \tilde{C}C^{-1}\boldsymbol{t}$ を満たす．従って $T := \tilde{C}C^{-1}$ とおくと, ある $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し I 上 $\tilde{\boldsymbol{p}} = T\boldsymbol{p} + \boldsymbol{c}$ が成り立つ．　□

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 2

(a) 曲率が零にはならない空間曲線が平面に含まれることとその捩率が恒等的に零であることは同値であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲率が零にはならない空間曲線とし, $s \in I$ をその弧長パラメータとする. このとき $s_0 \in I$ に対し

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(s) =& \boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{t}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)(s - s_0)^2 \\ &+ \frac{1}{6}(-\kappa(s_0)^2\boldsymbol{t}(s_0) + \kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0))(s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3)\end{aligned}$$

(**Bouquet の公式**) が成り立つことを示せ.

(c) 正の定数 a, $b > 0$ に対し, 空間曲線 $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{p}(t) := (a\cos t, a\sin t, bt)$ で定める (常螺旋). このとき $\boldsymbol{p}$ を弧長パラメータ s で表せ. また $\boldsymbol{p}$ の Frenet 枠, 曲率および捩率を求めよ.

(d) 曲率および捩率が正の定数である空間曲線は常螺旋であることを示せ: 空間曲線 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の曲率および捩率が正の定数であるならば, 3 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\boldsymbol{c}$ が存在して, 任意の s に対し $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ が成り立つことを示せ, 但し $\boldsymbol{p}$ はその曲率および捩率がそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の曲率および捩率に等しい (前問のように表される) 螺旋でありまた $\boldsymbol{p}(s)$ を $\boldsymbol{p}(s) = {}^t(x(s), y(s), z(s))$ と表している.

(e) 空間曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) := (e^t\cos t, e^t\sin t, t)$ で定める. このとき $\boldsymbol{p}$ の曲率ベクトル, 曲率および捩率を求めよ.

(f) 空間曲線 $\boldsymbol{p}: I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ に対し, $\boldsymbol{p}(I)$ は単位球面 $\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に含まれるとする.

  (i) $s \in I$ を弧長パラメータとするとき, $\boldsymbol{p}(s) \cdot \boldsymbol{p}''(s) = -1$ を示せ.

  (ii) $\boldsymbol{p}$ の曲率が一定であるならば, $\boldsymbol{p}(I)$ はある平面に含まれることを示せ.

(g) 曲率が零にはならない空間曲線 $\boldsymbol{p}$ に対し, s を弧長パラメータ, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ をそれぞれ s での曲率および捩率とする. $\boldsymbol{p}(s)$ を $\boldsymbol{p}(s) = {}^t(x(s), y(s), z(s))$ と表し, 3 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\boldsymbol{c}$ に対し, $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) := T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ とおく. このとき $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の s での曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ および捩率 $\tilde{\tau}(s)$ はそれぞれ $\kappa(s)$, $\tau(s)$ に等しいことを示せ.

(h) $\boldsymbol{p}$ を曲率が零にはならない空間曲線とし, $\boldsymbol{p}$ のパラメータ t は弧長パラメータとは限らないとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{p}(t)$ での曲率ベクトルは

$$-\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t) \cdot \ddot{\boldsymbol{p}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^4}\dot{\boldsymbol{p}}(t) + \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^2}\ddot{\boldsymbol{p}}(t)$$

であり, 曲率および捩率は

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{p}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{p}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{p}}(t)\, \ddot{\boldsymbol{p}}(t)\, \dddot{\boldsymbol{p}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{p}}(t)|^2}$$

と表されることを示せ.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１０月１８日

第３週 閉曲線に関する大域的性質

3.1 閉曲線

$\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を空間曲線とし, s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとする. $\boldsymbol{p}$ が **閉曲線** であるとは, ある正数 $s_0 > 0$ が存在して任意の $s \in \boldsymbol{R}$ に対し $\boldsymbol{p}(s + s_0) = \boldsymbol{p}(s)$ が成り立つときにいう. $\boldsymbol{p}$ を閉曲線とする. このとき s_0 のような正数の最小値が存在する. その最小値を $\boldsymbol{p}$ の **周期** という. 周期が s_0 である閉曲線 $\boldsymbol{p}$ が **単純閉曲線** であるとは, 異なる任意の $s_1, s_2 \in [0, s_0)$ に対し $\boldsymbol{p}(s_1) \neq \boldsymbol{p}(s_2)$ が成り立つときにいう. $\boldsymbol{p}$ が単純閉曲線で s_0 を周期とするとき, $C := \boldsymbol{p}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{p}([0, s_0])$ は円周と同相である.

3.2 平面に含まれる単純閉曲線

C がある平面 P に含まれるとする. このとき C は P を 2 つの連結な開集合に分ける: $P \setminus C$ の連結成分の個数は 2 である (これは実は **Jordan の曲線定理** によって保障されるものであり, 厳密には証明が必要であることが知られている). $P \setminus C$ の連結成分の一つは有界でありもう一つは非有界である (それぞれ C の **内部** および **外部** ということがある). 平面 P 内の単純閉曲線が **卵形線** または **凸閉曲線** であるとは, 任意の異なる $s_1, s_2 \in [0, s_0)$ に対し C の異なる 2 点 $\boldsymbol{p}(s_1)$, $\boldsymbol{p}(s_2)$ を結ぶ線分が C の外部の点を含まないときにいう.

3.3 四頂点定理

$\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を平面曲線とする. 3.1 節および 3.2 節において $\boldsymbol{p}$ の値域を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ にすることで, 以上の用語をそのまま用いることができる. 各 s に対し平面曲線 $\boldsymbol{p}$ の s での曲率を与える関数 κ は (第２週ではなく) 第１週で定義されたものである (従って一般には κ は負の値も取ることがある). このとき κ は微分可能である. κ の導関数 κ' の零点またはその $\boldsymbol{p}$ による像を $\boldsymbol{p}$ の **頂点** という.

定理 卵形線は少なくとも 4 つの頂点を持つ: 異なる 4 つの $s_1, s_2, s_3, s_4 \in [0, s_0)$ が $\boldsymbol{p}$ の頂点を与える.

証明 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ が卵形線を与えるとする. まず κ が一定ならば, $[0, s_0)$ の任意の点が $\boldsymbol{p}$ の頂点である. 以下, κ は一定ではないとする. このとき κ は $s_1 \in [0, s_0)$ で最小値を取り, $s_2 \in (s_1, s_0)$ で最大値を取るとして良い. $[0, s_0) \setminus \{s_1, s_2\}$ には $\boldsymbol{p}$ の頂点は存在しないと仮定する (矛盾を導きたい). κ は周期関数であるので, (s_1, s_2) 上 $\kappa' > 0$, $(s_2, s_1 + s_0)$ 上 $\kappa' < 0$ が成り立つ. C の異なる 2 点 $\boldsymbol{p}(s_1)$, $\boldsymbol{p}(s_2)$ はいずれも xy-平面 の x-軸上にあると仮定してよい. C は卵形線であるので, C と x-軸の共通部分はこれら 2 点のみからなる. 従って $\boldsymbol{p}((s_1, s_2))$ は xy-平面において y が正の部分に含まれ, $\boldsymbol{p}((s_2, s_1 + s_0))$ は xy-平面において y が負の部分に含まれると仮定してよい. このとき各 $s \in [0, s_0)$ に $\kappa'(s)y(s)$ を対応させる関数は s_1, s_2 以外では正であることがわかる. 特に

$$\int_0^{s_0} \kappa(s) y'(s) ds = -\int_0^{s_0} \kappa'(s) y(s) ds < 0.$$

一方, $\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)$ であるので, $\boldsymbol{n}(s)$ の第 2 成分を $n_2(s)$ とすると $n_2'(s) = -\kappa(s)y'(s)$ なので矛盾が生じる. 従って $s_1, s_2 \in [0, s_0)$ 以外にも $\boldsymbol{p}$ の頂点が存在することになる. それを s_3 とし, $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_0$ とする. $[0, s_0) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}$ には $\boldsymbol{p}$ の頂点は存在しないと仮定すると, やはり矛盾が導かれる: (s_1, s_2) 上 $\kappa' > 0$, (s_2, s_3) 上 $\kappa' < 0$ と仮定してよいが, $(s_3, s_1 + s_0)$ 上 $\kappa' > 0$ だとしても $\kappa' < 0$ だとしても, 各 $s \in [0, s_0)$ に $\kappa'(s)y(s)$ を対応させる関数は s_1, s_2, s_3 以外では正であるように仮定でき, そのときやはり矛盾が生じる. 従って $s_1, s_2, s_3 \in [0, s_0)$ 以外にも $\boldsymbol{p}$ の頂点が存在することになる. □

注意 a, b を異なる正数とする. このとき演習問題１ (d) の結果から, 楕円 $\boldsymbol{p}(t) := (a \cos t, b \sin t)$ はちょうど 4 つの頂点を持つことがわかる.

第３週　閉曲線に関する大域的性質（続き）

3.4　平面に含まれる閉曲線の回転数

$\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を曲線とし, s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとする. このとき演習問題１, (g) の (i) にあるように, $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{p}'(s)$ を $\boldsymbol{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ と表すとき, $\boldsymbol{p}$ の s での曲率 $\kappa(s)$ は $\theta'(s)$ に等しい. ここで $\boldsymbol{p}$ を閉曲線とする. このとき $\boldsymbol{t}(0) = \boldsymbol{t}(s_0)$ なので,

$$m(\boldsymbol{p}) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} \kappa(s)ds = \frac{\theta(s_0) - \theta(0)}{2\pi}$$

は整数である. この整数を $\boldsymbol{p}$ の **回転数** という.

回転数が表すものを 1.4 節で定義された曲線の Gauss 写像 g に関連づけて理解することができる. $\boldsymbol{n}(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$ であるので, $g(s)$ が表す単位円上の点は $(-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$ である. 従って, s が増加するとき, $\theta' = \kappa$ が正であれば $g(s)$ は正の方向に動くことになり, $\theta' = \kappa$ が負であれば $g(s)$ は負の方向に動くことになる. 閉曲線 $\boldsymbol{p}$ に対しては, s が 0 から周期 s_0 まで増加するとき $g(s)$ が単位円上を (行ったり来たりした分を除いて) 何回転したかを表すものが前段落で定義された回転数であることがわかる.

閉曲線の回転数は閉曲線の微小変形に対し不変である. このことをきちんと説明するためには, 「閉曲線の微小変形」というものを定式化する必要がある. 閉曲線 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ および正数 $\delta > 0$ に対し, 写像 $\phi: \boldsymbol{R} \times (-\delta, \delta) \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ は任意の $(s, h) \in \boldsymbol{R} \times (-\delta, \delta)$ に対し $\phi(s, 0) = \boldsymbol{p}(s)$ および $\phi(s + s_0, h) = \phi(s, h)$ を満たすとする. 各 $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $\boldsymbol{p}_h: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{p}_h(s) := \phi(s, h)$ とおくとき, δ を十分小さくとることで任意の $(s, h) \in \boldsymbol{R} \times (-\delta, \delta)$ に対し $\boldsymbol{p}_h'(s) \neq 0$ が成り立つ. 従って各 $h \in (-\delta, \delta)$ に対し, $\boldsymbol{p}_h$ は曲線でありそして閉曲線である (但し, 一般には s は $\boldsymbol{p}_h$ の弧長パラメータではない). ここでは上のような写像 ϕ または閉曲線の族 $\{\boldsymbol{p}_h\}_{h\in(-\delta,\delta)}$ を閉曲線 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$ の **微小変形** と呼ぶことにする. このとき閉曲線の回転数の定義から, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し δ を必要ならばさらに小さくとることで任意の $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $|m(\boldsymbol{p}_h) - m(\boldsymbol{p})| < \varepsilon$ が成り立つ. 回転数は整数なので, 実は $m(\boldsymbol{p}_h) = m(\boldsymbol{p})$ がわかる. こうして閉曲線の回転数はその微小変形に対し不変であることが説明された.

3.5　Fenchel の定理

次に, 閉曲線 $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ に対し, その **全曲率**

$$\mu(\boldsymbol{p}) := \int_0^{s_0} |\kappa(s)|ds$$

という量を考えてみよう. 前節のように $\boldsymbol{p}$ の Gauss 写像を見てみると, s が 0 から周期 s_0 まで増加するとき $g(s)$ が単位円上を (正の方向か負の方向かに関わらず) 移動した分を全て加えたものが全曲率 $\mu(\boldsymbol{p})$ であることがわかる. 次の定理が知られている.

定理　閉曲線 $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ に対し $\mu(\boldsymbol{p}) \geqq 2\pi$ が成り立ち, さらに等号が成り立つことと $\boldsymbol{p}$ が卵形線であることは同値である.

この定理は空間曲線に対する次の定理の特別な場合のものである.

定理　閉曲線 $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ に対し,

$$\int_0^{s_0} \kappa(s) \geqq 2\pi$$

が成り立ち, さらに等号が成り立つことと $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{R})$ がある平面に含まれる卵形線であることは同値である.

第５週　曲面の第一基本量および第二基本量

5.1　曲面

O を $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合とし, $\boldsymbol{p}$ を O から $\boldsymbol{R}^3$ への写像とする．$\boldsymbol{p}$ を O 上の関数 x, y, z を用いて $\boldsymbol{p}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と表す $((u,v)\in O)$. $\boldsymbol{p}$ または $\boldsymbol{p}(O)$ が **曲面** であるとは, 任意の $(u,v)\in O$ に対し次の二つのベクトルが 1 次独立であるときにいう:

$$\boldsymbol{p}_u(u,v):=(x_u(u,v),y_u(u,v),z_u(u,v)),\quad \boldsymbol{p}_v(u,v):=(x_v(u,v),y_v(u,v),z_v(u,v)).$$

$\boldsymbol{p}$ が曲面であることと O 上ベクトル積 $\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v$ が零にはならないことは同値である．

5.2　第一基本量

開区間 I 上の二つの関数 $u=u(t)$, $v=v(t)$ が任意の $t\in I$ に対し $(u(t),v(t))\in O$ および $(\dot u(t),\dot v(t))\neq(0,0)$ を満たすとする．従って u, v の組は I から O への正則曲線を与える．曲面 $\boldsymbol{p}:O\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ に対し, $\boldsymbol{q}(t):=\boldsymbol{p}(u(t),v(t))$ とおく．このとき

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\dot u(t)\boldsymbol{p}_u(u(t),v(t))+\dot v(t)\boldsymbol{p}_v(u(t),v(t))$$

なので, $\dot{\boldsymbol{q}}\neq 0$ が成り立ち, 従って $\boldsymbol{q}$ は空間曲線である．そして $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ とそれ自身との内積 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ は

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(t)=E(u(t),v(t))\dot u(t)^2+2F(u(t),v(t))\dot u(t)\dot v(t)+G(u(t),v(t))\dot v(t)^2$$

と表される, 但し E, F, G は O 上の関数で

$$E:=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u,\quad F:=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v,\quad G:=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v$$

により定義される．よって $a,b\in I$ で $a<b$ を満たすものに対し, 曲線 $\boldsymbol{q}(I)$ の $\boldsymbol{q}(a)$ から $\boldsymbol{q}(b)$ までの長さは

$$\int_a^b\sqrt{E(u(t),v(t))\dot u(t)^2+2F(u(t),v(t))\dot u(t)\dot v(t)+G(u(t),v(t))\dot v(t)^2}dt$$

と表される．

E, F, G を曲面 $\boldsymbol{p}$ の **第一基本量** という．直ちに

$$E>0,\quad G>0,\quad EG-F^2=|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|^2>0$$

がわかる．第一基本量は曲面の様々な情報に関わる．曲面の 1 点での二つの接ベクトル $\boldsymbol{t}_1=a_1\boldsymbol{p}_u+b_1\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{t}_2=a_2\boldsymbol{p}_u+b_2\boldsymbol{p}_v$ の内積 $\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_2$ は次のように係数 a_i, b_i および第一基本量 E, F, G により表される:

$$\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_2=a_1a_2E+(a_1b_2+a_2b_1)F+b_1b_2G.$$

この特別な場合として, 前段落で見たように曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線 $\boldsymbol{q}$ の接ベクトル $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ や曲線の長さが第一基本量を用いて表されることがわかる．また曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の面積は

$$\iint_O|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|dudv=\iint_O\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

のように第一基本量 E, F, G により表される．さらに, 後でわかるように, 曲面の空間における形状を表す量の一つである Gauss 曲率 K も第一基本量により表される (Gauss の Theorema egregium).

第５週　曲面の第一基本量および第二基本量（続き）

5.3　法曲率および第二基本量

前節のような開区間 I 上の二つの関数 u, v および曲面 $\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ が与えられているとする．そして $\boldsymbol{q}(s) := \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ とおき, $s \in I$ は空間曲線 $\boldsymbol{q}$ の弧長パラメータであると仮定する．このとき $\boldsymbol{q}$ の s での曲率ベクトル $\boldsymbol{k}(s) := \boldsymbol{q}''(s)$ を曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトルと法ベクトルの和で表す: $\boldsymbol{k}(s)$ に対し, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の点 $\boldsymbol{q}(s)$ での接ベクトル $\boldsymbol{k}_g$ および法ベクトル $\boldsymbol{k}_n$ が一意に定まり

$$\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{k}_g + \boldsymbol{k}_n$$

が成り立つ．$\boldsymbol{k}_g, \boldsymbol{k}_n$ をそれぞれ曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線 $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{q}(s)$ での**測地的曲率ベクトル**および**法曲率ベクトル**という．曲面 $\boldsymbol{p}$ の二つの接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ のベクトル積 $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ は $\boldsymbol{p}$ の法ベクトルであるが, 長さが 1 である $\boldsymbol{p}$ の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} := \frac{1}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

で定め, そして実数 κ_n を $\boldsymbol{k}_n = \kappa_n \boldsymbol{n}$ で定める．κ_n を曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線 $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{q}(s)$ での **法曲率** という．

測地的曲率ベクトルは曲面の中の曲線のその曲面における形状に関する情報であり, 後で議論される．以下においては法曲率について議論する．まず

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}(s) = \boldsymbol{q}''(s) =& u''(s)\boldsymbol{p}_u(u(s), v(s)) + v''(s)\boldsymbol{p}_v(u(s), v(s)) \\ &+ u'(s)^2\boldsymbol{p}_{uu}(u(s), v(s)) + 2u'(s)v'(s)\boldsymbol{p}_{uv}(u(s), v(s)) + v'(s)^2\boldsymbol{p}_{vv}(u(s), v(s))\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\kappa_n = \boldsymbol{k}_n \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}(s) \cdot \boldsymbol{n} = u'(s)^2 L(u(s), v(s)) + 2u'(s)v'(s)M(u(s), v(s)) + v'(s)^2 N(u(s), v(s))$$

が成り立つ, 但し L, M, N は O 上の関数で

$$L := \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}, \quad M := \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}, \quad N := \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}$$

によって定義される．従って L, M, N は $\boldsymbol{p}$ によって定められるので, 曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線 $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{q}(s)$ での法曲率である κ_n は, 実は曲面およびその $\boldsymbol{q}(s)$ での接ベクトル $\boldsymbol{q}'(s)$ によって決まることがわかる: 曲面 $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線 $\boldsymbol{q}$ の点 $\boldsymbol{q}(s)$ を通りさらに接ベクトルが $\boldsymbol{q}'(s)$ に等しい $\boldsymbol{p}(O)$ の中の曲線の法曲率は κ_n に等しい．こうして法曲率は曲面の中の曲線の取り方に依らず, その点での長さが 1 である接ベクトルに対し定まることがわかった．従って法曲率は曲面に関する情報であり, $\boldsymbol{p}(O)$ の 1 点 $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ $((u_0, v_0) \in O)$ での長さが 1 である接ベクトル $\boldsymbol{t} = a\boldsymbol{p}_u(u_0, v_0) + b\boldsymbol{p}_v(u_0, v_0)$ に関する **法曲率** $\kappa_n(\boldsymbol{t})$ を次のように定義できる:

$$\kappa_n(\boldsymbol{t}) = a^2 L(u_0, v_0) + 2abM(u_0, v_0) + b^2 N(u_0, v_0).$$

以後, 長さが 1 である接ベクトルおよび法ベクトルを **単位接ベクトル** および **単位法ベクトル** とよぶ．

L, M, N を曲面 $\boldsymbol{p}$ の **第二基本量** という．第二基本量は曲面の各点での法曲率を定めるために用いられ, 従って曲面の空間における形状に関する量であると言える．直ちに次を得る:

$$L = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u, \quad M = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u, \quad N = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v.$$

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 5

(a) f を 2 変数 u, v の関数とする．このとき

$$\boldsymbol{p}(u,v) := (u,\ v,\ f(u,v)) \tag{1}$$

で定義される写像 $\boldsymbol{p}$ は曲面 (f のグラフ) であることを示せ．さらに $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N は次のように与えられることを示せ:

$$\begin{aligned} &E = 1 + f_u^2, && F = f_u f_v, && G = 1 + f_v^2, \\ &L = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, && M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, && N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}. \end{aligned}$$

(b) a, b を正数とし, 2 変数関数 f が以下の (b1), (b2), (b3) のように与えられているとき, (1) で定義される曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N を求めよ (前問 (a) の結果を用いて良い).

(b1) $f(u,v) := \sqrt{a^2-u^2-v^2}$ (半球面を与える)

(b2) $f(u,v) := \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}$ (楕円放物面を与える)

(b3) $f(u,v) := -\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2}$ (双曲放物面を与える)

(c) ϕ, ψ を 1 変数 u の関数とし, 任意の u に対し $\phi(u) > 0$ および $(\phi'(u), \psi'(u)) \neq (0,0)$ を仮定する．このとき

$$\boldsymbol{p}(u,v) := (\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u)) \tag{2}$$

で定義される写像 $\boldsymbol{p}$ は曲面 ((ϕ,ψ) が定める平面曲線を母線とし z 軸を回転軸とする回転面) であることを示せ．さらに $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N は次のように与えられることを示せ:

$$\begin{aligned} &E = \phi'(u)^2 + \psi'(u)^2, && F = 0, && G = \phi(u)^2, \\ &L = \frac{\phi'(u)\psi''(u) - \phi''(u)\psi'(u)}{\sqrt{\phi'(u)^2+\psi'(u)^2}}, && M = 0, && N = \frac{\phi(u)\psi'(u)}{\sqrt{\phi'(u)^2+\psi'(u)^2}}. \end{aligned}$$

(d) a, c を正数とし, 1 変数関数 ϕ, ψ が以下の (d1)～(d5) のように与えられているとき, (2) で定義される曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N を求めよ (前問 (c) の結果を用いて良い).

(d1) $(\phi(u), \psi(u)) := (a\cos u, c\sin u)$ (但し $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ であり, 回転楕円面から 2 点を除いたものを与える)

(d2) $(\phi(u), \psi(u)) := (a\cosh u, c\sinh u)$ (回転一葉双曲面を与える)

(d3) $(\phi(u), \psi(u)) := (a\sinh u, c\cosh u)$ (但し $u > 0$ であり, 回転二葉双曲面の連結成分の一つから 1 点を除いたものを与える)

(d4) $(\phi(u), \psi(u)) := (R + r\cos u, r\sin u)$ ($R > r > 0$, 回転輪環面を与える)

(d5) $(\phi(u), \psi(u)) := (\cosh u, u)$ (懸垂面を与える)

(e) a, b, c を正数とするとき, 以下の (e1), (e2), (e3) で与えられている写像 $\boldsymbol{p}$ が曲面であることを示し, さらに $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N を求めよ.

(e1) $\boldsymbol{p}(u,v) := (a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ c\sin u)$ ($u \in (-\pi/2, \pi/2)$, 楕円面から 2 点を除いたもの)

(e2) $\boldsymbol{p}(u,v) := (a\cosh u\cos v,\ b\cosh u\sin v,\ c\sinh u)$ (一葉双曲面)

(e3) $\boldsymbol{p}(u,v) := (a\sinh u\cos v,\ b\sinh u\sin v,\ c\cosh u)$ ($u > 0$, 二葉双曲面の連結成分の一つから 1 点を除いたもの)

(f) 以下の (f1), (f2) で与えられている写像 $\boldsymbol{p}$ が曲面であることを示し, さらに $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N を求めよ.

(f1) $\boldsymbol{p}(u,v) := (u\cos v,\ u\sin v,\ v)$ (常螺旋面)

(f2) $\boldsymbol{p}(u,v) := (3u - u^3 + 3uv^2,\ -3v - 3u^2v + v^3,\ 3u^2 - 3v^2)$ (Enneper の極小曲面)

(g) O, $\tilde{O}$ を $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合とする. Φ は O から $\tilde{O}$ の上への全単射な C^2 級写像で, 逆写像 $\Phi^{-1} : \tilde{O} \longrightarrow O$ も C^2 級であるとする. $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とする.

(i) Φ^{-1} と $\boldsymbol{p}$ の合成 $\tilde{\boldsymbol{p}} := \boldsymbol{p} \circ \Phi^{-1}$ は曲面であることを示せ.

(ii) E, F, G を $\boldsymbol{p}$ の第一基本量とし, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ を $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の第一基本量とする. また L, M, N を $\boldsymbol{p}$ の第二基本量とし, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ を $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の第二基本量とする. このとき

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) & \tilde{F}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \tilde{F}(\tilde{u},\tilde{v}) & \tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} E\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) & F\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ F\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) & G\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tilde{L}(\tilde{u},\tilde{v}) & \tilde{M}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \tilde{M}(\tilde{u},\tilde{v}) & \tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix} \\
&= \pm \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} L\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) & M\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ M\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) & N\circ\Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ, 但し $\tilde{O}$ 上の関数 u, v を $(u,v) := \Phi^{-1}(\tilde{u},\tilde{v})$ で定める ($(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{O}$).

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１１月８日

第６週　曲面の法曲率についての考察および様々な曲率の定義

6.1　曲面の 1 点での法曲率の振る舞い

曲面 $\boldsymbol{p}$ の 1 点 $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ $((u_0, v_0) \in O)$ で接ベクトル $\boldsymbol{t} = a\boldsymbol{p}_u(u_0, v_0) + b\boldsymbol{p}_v(u_0, v_0)$ を動かしたときの法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{t})$ の振る舞いを調べる．$\boldsymbol{t}$ が単位接ベクトルであることと $Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = 1$ は同値である．2 変数 a, b の関数 ϕ を

$$\phi(a, b) := Ea^2 + 2Fab + Gb^2 - 1$$

で定める, 但し E, F, G は固定された $(u_0, v_0) \in O$ での値である．$EG - F^2 \neq 0$ であるので, ϕ の変数 a, b に関する偏微分係数を ϕ_a, ϕ_b で表すとき, ϕ の零点で $(\phi_a, \phi_b) \neq (0, 0)$ が成り立つ．従って, 陰関数の定理から, 式 $\phi = 0$ は ab-平面上の曲線を定めることがわかる．よって,

$$\psi(a, b) := La^2 + 2Mab + Nb^2$$

(但し L, M, N は (u_0, v_0) での値) とおくと, 今調べるものは関数 ψ の曲線 $\phi = 0$ への制限の振る舞いである．ψ が $\phi = 0$ 上の点 (a_0, b_0) で極値をとるとする．このとき Lagrange の未定乗数法によって, ある実数 λ が存在して (a_0, b_0) で

$$(\psi_a, \psi_b) = \lambda(\phi_a, \phi_b)$$

が成り立つことがわかる．この式を

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書き換えることができる．従ってベクトル ${}^t(a_0, b_0)$ は (1) の左辺に現れる行列の固有ベクトルである．

6.2　主曲率, Gauss 曲率, 平均曲率, 臍点

ψ が $\phi = 0$ 上一定ではないとする．このとき ψ は $\phi = 0$ 上最大値および最小値をとる．$\phi = 0$ 上の点 (a_1, b_1) で ψ は最小値をとり, 点 (a_2, b_2) で ψ は最大値をとるとする．二つのベクトル ${}^t(a_1, b_1)$, ${}^t(a_2, b_2)$ は 1 次独立である．$k_i := \psi(a_i, b_i)$ とおく $(i = 1, 2)$ と, $k_1 < k_2$ が成り立ちまた k_1, k_2 は (1) の左辺に現れる行列の固有値である．よって (1) の左辺に現れる行列の固有ベクトルは ${}^t(a_1, b_1)$ または ${}^t(a_2, b_2)$ の定数倍と表され, 従って $\phi = 0$ 上 ψ が極値をとる点は $\pm(a_1, b_1)$, $\pm(a_2, b_2)$ であることがわかる．k_1, k_2 を曲面 $\boldsymbol{p}$ (または $\boldsymbol{p}(O)$) の点 (u_0, v_0) (または $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$) での **主曲率** という．また k_1 と k_2 の積 $K := k_1k_2$ を $\boldsymbol{p}$ の (u_0, v_0) での **Gauss 曲率** といい, k_1 と k_2 の平均 $H := (k_1 + k_2)/2$ を $\boldsymbol{p}$ の (u_0, v_0) での **平均曲率** という．

ψ が $\phi = 0$ 上一定の値 k をとるとする．このとき点 (u_0, v_0) (または $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$) を $\boldsymbol{p}$ の **臍点** という．$\boldsymbol{p}$ の臍点 (u_0, v_0) での **主曲率** および **平均曲率** H を一定値 k で定め, また臍点 (u_0, v_0) での **Gauss 曲率** K を k^2 で定める．(1) の左辺に現れる行列は単位行列の k 倍と表される．

注意　曲面のどの点でも $H^2 - K \geqq 0$ が成り立ち, かつ $H^2 - K = 0$ が成り立つ点はちょうど臍点である．また $k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$, $k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$ が成り立つ．

注意　曲面のどの点でも, Gauss 曲率 K および平均曲率 H は (1) の左辺に現れる行列の行列式およびトレースの 1/2 倍である．

第６週　曲面の法曲率についての考察および様々な曲率の定義（続き）

6.3　主方向および Euler の定理

ψ が $\phi = 0$ 上一定ではないとする, つまり点 (u_0, v_0) は $\boldsymbol{p}$ の臍点ではないとする. 前節の (a_i, b_i) を用いて定義される $\boldsymbol{p}$ の点 $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ での接ベクトル $\boldsymbol{t}_i := a_i \boldsymbol{p}_u(u_0, v_0) + b_i \boldsymbol{p}_v(u_0, v_0)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $\kappa_n(\boldsymbol{t}_i) = k_i$ が成り立つ. $\boldsymbol{t}_i$ が定める直線を $\boldsymbol{p}$ の (u_0, v_0) での主曲率 k_i に対応する **主方向** という.

次が成り立つ:

$$\begin{aligned} La_1a_2 + M(a_1b_2 + a_2b_1) + Nb_1b_2 &= (a_1 \ b_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= k_2 (a_1 \ b_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= k_1 (a_1 \ b_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

(2) から $(k_1 - k_2)\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2 = 0$ がわかり, $k_1 \neq k_2$ なので $\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2 = 0$ を得る. 従って異なる主曲率に対応する主方向は互いに直交する.

(2) および $\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2 = 0$ から,

$$La_1a_2 + M(a_1b_2 + a_2b_1) + Nb_1b_2 = 0 \tag{3}$$

がわかる. $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し,

$$\boldsymbol{t}(\theta) := (\cos\theta)\boldsymbol{t}_1 + (\sin\theta)\boldsymbol{t}_2 = ((\cos\theta)a_1 + (\sin\theta)a_2)\boldsymbol{p}_u(u_0, v_0) + ((\cos\theta)b_1 + (\sin\theta)b_2)\boldsymbol{p}_v(u_0, v_0)$$

とおく. $\boldsymbol{t}(\theta)$ は $\boldsymbol{t}_1$ と角度 θ をなす単位接ベクトルである. (3) を用いて,

$$\begin{aligned} \kappa_n(\boldsymbol{t}(\theta)) =& L((\cos\theta)a_1 + (\sin\theta)a_2)^2 \\ &+ 2M((\cos\theta)a_1 + (\sin\theta)a_2)((\cos\theta)b_1 + (\sin\theta)b_2) + N((\cos\theta)b_1 + (\sin\theta)b_2)^2 \\ =& (La_1^2 + 2Ma_1b_1 + Nb_1^2)\cos^2\theta \\ &+ 2(La_1a_2 + M(a_1b_2 + a_2b_1) + Nb_1b_2)\cos\theta\sin\theta \\ &+ (La_2^2 + 2Ma_2b_2 + Nb_2^2)\sin^2\theta \\ =& k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \end{aligned}$$

を得る. こうして $\boldsymbol{t}(\theta)$ に関する法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{t}(\theta))$ は二つの主曲率 k_1, k_2 および角度 θ を用いて表されることがわかった. 以上から, 次を得る.

定理　曲面の臍点ではない点での異なる二つの主曲率 k_1, k_2 に対応する主方向は互いに直交する. さらに, 主曲率 k_1 に対応する主方向と角度 θ をなす単位接ベクトルに関する法曲率は $k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$ と表される.

ψ が $\phi = 0$ 上一定の値 k をとるとする, つまり点 (u_0, v_0) を $\boldsymbol{p}$ の臍点とする. このとき $\boldsymbol{p}$ の点 $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ でのどの単位接ベクトルも **主方向** を定めると考えることにする. $k_1 := k$, $k_2 := k$ とおきそしてこれらに対応する主方向として互いに直交する単位接ベクトルが定めるものをとることで, 上の定理の後半部分は臍点でも成り立つと考えることができる.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 6

(a) 曲面 $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ の第一基本量および第二基本量を E, F, G および L, M, N で表す. このとき $\boldsymbol{p}$ の $(u_0, v_0) \in O$ での Gauss 曲率 K および平均曲率 H はそれぞれ

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

と表されることを示せ, 但し これらの式における E, F, G, L, M, N は (u_0, v_0) での値である.

(b) 演習問題 5 の (a)∼(f) に挙げた曲面の Gauss 曲率および平均曲率を求めよ (前問の結果を用いて良い).

(c) O, $\tilde{O}$, Φ, $\boldsymbol{p}$ および $\tilde{\boldsymbol{p}}$ を演習問題 5 の (g) に現れたものとする.

(i) $\boldsymbol{p}$ の $(u_0, v_0) \in O$ での Gauss 曲率 K は $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の $\Phi(u_0, v_0) \in \tilde{O}$ での Gauss 曲率 $\tilde{K}$ に等しいことを示せ.

(ii) $\boldsymbol{p}$ の $(u_0, v_0) \in O$ での平均曲率 H および $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の $\Phi(u_0, v_0) \in \tilde{O}$ での平均曲率 $\tilde{H}$ に対し, $\tilde{H}$ は H または $-H$ に等しいことを示せ.

第７週　曲面の平均曲率

7.1　曲面の微小変形

$\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とし, $\boldsymbol{n}$ を単位法ベクトル場とする. f は O 上の関数で, f の台 $\mathrm{supp}\,(f)$ (f が零にならない点の集合の閉包) は O のコンパクトな部分集合であると仮定する (f のような C^∞ 級関数の存在は自明ではない). Φ_f は $O \times \boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像で,

$$\Phi_f(u,v,h) = \boldsymbol{p}(u,v) + hf(u,v)\boldsymbol{n}(u,v) \quad ((u,v,h) \in O \times \boldsymbol{R}) \tag{1}$$

で定義されるとする. 各 $h \in \boldsymbol{R}$ に対し $\boldsymbol{p}_{f,h}(u,v) := \Phi_f(u,v,h)$ とおく. このとき十分小さい正数 $\delta > 0$ をとることで, 任意の $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $\boldsymbol{p}_{f,h} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ は曲面であることがわかる. ここでは上のような写像 Φ_f または曲面の族 $\{\boldsymbol{p}_{f,h}\}_{h \in (-\delta,\delta)}$ を曲面 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{f,0}$ の **微小変形** と呼ぶことにする.

7.2　極小曲面

曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲面積は有限の値をとると仮定する. このとき任意の $h \in (-\delta,\delta)$ に対し, 曲面 $\boldsymbol{p}_{f,h}$ の曲面積は有限の値をとる. $\boldsymbol{p}_{f,h}$ の曲面積を $\mathcal{A}(\boldsymbol{p}_{f,h})$ で表す. $\mathcal{A}$ は各曲面にその面積を対応させるものであり, $\mathcal{A}$ を **面積汎関数** という. 固定された f に対し, $\mathcal{A}(\boldsymbol{p}_{f,h})$ は h の関数である. そこで $a_f(h) := \mathcal{A}(\boldsymbol{p}_{f,h})$ とおき, h の関数 a_f の $h = 0$ での微分係数が零になるための条件を求めたい. まず

$$a_f(h) = \iint_O \sqrt{E_{f,h}G_{f,h} - F_{f,h}^2}\, dudv$$

が成り立つ, 但し $E_{f,h}$, $F_{f,h}$, $G_{f,h}$ は曲面 $\boldsymbol{p}_{f,h}$ の第一基本量である. そして (1) を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial h}\begin{pmatrix} E_{f,h} & F_{f,h} \\ F_{f,h} & G_{f,h} \end{pmatrix}\Bigg|_{h=0} = \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{p}_u \cdot (f\boldsymbol{n})_u & \boldsymbol{p}_u \cdot (f\boldsymbol{n})_v + \boldsymbol{p}_v \cdot (f\boldsymbol{n})_u \\ \boldsymbol{p}_u \cdot (f\boldsymbol{n})_v + \boldsymbol{p}_v \cdot (f\boldsymbol{n})_u & 2\boldsymbol{p}_v \cdot (f\boldsymbol{n})_v \end{pmatrix} = -2f\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

を得る. 従って, 微分と積分の順序交換が可能であることに注意して,

$$\begin{aligned}
\frac{da_f}{dh}(0) &= \iint_O \frac{\partial}{\partial h}\sqrt{E_{f,h}G_{f,h} - F_{f,h}^2}\Bigg|_{h=0} dudv \\
&= \iint_O \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial E_{f,h}}{\partial h}\Bigg|_{h=0} G + \frac{\partial G_{f,h}}{\partial h}\Bigg|_{h=0} E - 2\frac{\partial F_{f,h}}{\partial h}\Bigg|_{h=0} F\right) dudv \\
&= -\iint_O \frac{f(EN - 2FM + GL)}{\sqrt{EG - F^2}}\, dudv \\
&= -2\iint_O fH\sqrt{EG - F^2}\, dudv
\end{aligned}$$

を得る. よって $\boldsymbol{p}$ の平均曲率 H が恒等的に零であるならば, 任意の f に対し $(da_f/dh)(0) = 0$ が成り立つ. 一方で, $\mathrm{supp}\,(f)$ が O のコンパクトな部分集合であるような任意の関数 f に対し $(da_f/dh)(0) = 0$ が成り立つ (このことを「面積汎関数 $\mathcal{A}$ の第一変分は零である」と言い表す) ならば, H は恒等的に零である (変分法の基本補題). 平均曲率が恒等的に零である曲面を **極小曲面** という. 「極小曲面は面積汎関数 $\mathcal{A}$ の停留曲面である」と言うことがあり, また「方程式 $H = 0$ は極小曲面に対する **Euler-Lagrange 方程式** である」と言うことがある. これらの言い方はいずれも一般の汎関数 (曲線, 曲面, より一般に関数や写像の集合上の関数) に関する変分問題において現れるものである.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 7

(a) f を 2 変数 u, v の関数とする．このとき $\boldsymbol{p}(u,v) := (u,\ v,\ f(u,v))$ で定義される曲面 $\boldsymbol{p}$ の平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\right\} \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial u},\ q = \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

と表されることを示せ.

(b) 曲面 $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ の第一基本量 E, F, G は O 上 $E = G$ および $F = 0$ を満たすとする．このとき $\boldsymbol{p}_{uu} + \boldsymbol{p}_{vv} = 2EH\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ ($(\boldsymbol{p}_{uu} + \boldsymbol{p}_{vv}) \cdot \boldsymbol{p}_u$, $(\boldsymbol{p}_{uu} + \boldsymbol{p}_{vv}) \cdot \boldsymbol{p}_v$ および $(\boldsymbol{p}_{uu} + \boldsymbol{p}_{vv}) \cdot \boldsymbol{n}$ を計算すること).

(c) 曲面 $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を O 上の三つの関数 x, y, z を用いて $\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表す ($(u,v) \in O$). O 上の複素関数 ϕ_1, ϕ_2 および ϕ_3 を

$$\phi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \phi_2 = \frac{\partial y}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \phi_3 = \frac{\partial z}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial z}{\partial v}$$

で定める.

(i) $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G について,

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = E - G - 2\sqrt{-1}F, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = E + G$$

を示せ.

(ii) ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ を満たすとする．このとき ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が $w = u + \sqrt{-1}v$ の正則関数であることと $\boldsymbol{p}$ が極小曲面であることは同値であることを示せ.

(d) $t \in \boldsymbol{R}$ に対し, 曲面 $\boldsymbol{p}_t : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}_t(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t \\ \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t \\ v \cos t + u \sin t \end{pmatrix}$$

で定める ($(u,v) \in \boldsymbol{R}^2$). このとき $\boldsymbol{p}_t$ の第一基本量, 第二基本量, Gauss 曲率および平均曲率を求めよ.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１１月２２日

第８週　曲面の Gauss 曲率

8.1　Weingarten の公式

$\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とし, $\boldsymbol{n}$ を単位法ベクトル場とする．このとき $\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0$ および $\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ が成り立つ．従って O の各点で $\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v$ の各々は $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ の 1 次結合で表されるので, ある 2 次の正方行列 W が

$$(\boldsymbol{n}_u\ \boldsymbol{n}_v) = -(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)W \tag{1}$$

を満たす．$(\boldsymbol{n}_u\ \boldsymbol{n}_v)$, $(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)$ を 3×2 行列とみなし, (1) の両辺に左から $(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)$ の転置行列 ${}^t(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)$ を掛けることで,

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} W \tag{2}$$

を得る．従って

$$W = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}$$

を得る．W を <u>**Weingarten 行列**</u> といい, (1) または (1) の別表現である

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2}\boldsymbol{p}_v, \quad \boldsymbol{n}_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2}\boldsymbol{p}_v \tag{3}$$

を <u>**Weingarten の公式**</u> という．

注意　Weingarten 行列 W は第６週の 6.1 節で現れた行列である．Weingarten 行列 W の固有値は曲面 $\boldsymbol{p}$ の主曲率であるので, W の行列式は Gauss 曲率 K であり W のトレースの (1/2) 倍は平均曲率 H である．

8.2　Gauss 写像

O の各点に対し単位球面 $S^2(1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の点を $\boldsymbol{n}$ によって与える写像を曲面 $\boldsymbol{p}$ の <u>**Gauss 写像**</u> といい, g で表す．

$g: O \longrightarrow S^2(1)$ は単射でありかつ $K \neq 0$ を仮定する．このとき (3) を用いて, O の g による像 $g(O) \subset S^2(1)$ の面積は

$$\iint_O |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| dudv = \iint_O |K||\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v| dudv$$

で与えられることがわかる．

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１１月２２日

第８週　曲面の Gauss 曲率（続き）

8.3 Gauss の Theorema egregium

曲面 $\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ の第二基本量 L, M, N は一般には第一基本量 E, F, G によって表されない．しかしながら Gauss は, $LN - M^2$ は第一基本量 E, F, G およびこれらの 2 階までの偏導関数によって表されることを示した．第二基本量の定義および $|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|^2 = EG - F^2$ に注意して, まず

$$
\begin{aligned}
&(EG-F^2)(LN-M^2)\\
&= (\boldsymbol{p}_{uu}\cdot(\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v))(\boldsymbol{p}_{vv}\cdot(\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v)) - (\boldsymbol{p}_{uv}\cdot(\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v))^2\\
&= \det(\boldsymbol{p}_{uu}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)\det(\boldsymbol{p}_{vv}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v) - \det(\boldsymbol{p}_{uv}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)^2\\
&= \det({}^t(\boldsymbol{p}_{uu}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)(\boldsymbol{p}_{vv}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)) - \det({}^t(\boldsymbol{p}_{uv}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v)(\boldsymbol{p}_{uv}\ \boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v))\\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v \end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & F & G \end{pmatrix}\\
&\quad - \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & F & G \end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_{vv} - \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_{uv})(EG-F^2)\\
&\quad + \det\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{vv} & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_{uv} & F & G \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

を得る．ここで

$$\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_u,\quad \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v,\quad \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u,\quad \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v,\quad \boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{p}_u,\quad \boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{p}_v$$

の各々は E, F, G およびこれらの 1 階の偏導関数によって表されることから, (4) の最右辺の第 2 項および第 3 項は E, F, G およびこれらの 1 階の偏導関数によって表されることがわかる．さらに

$$\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_{vv} - \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_{uv} = (\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{p}_v)_v - (\boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v)_u$$

から, (4) の最右辺の第 1 項は E, F, G およびこれらの 2 階の偏導関数によって表されることがわかる．Gauss 曲率 K は $K = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ と表される (演習問題６ (a)) ので, 以上から次の定理を得る．

定理　曲面の Gauss 曲率は曲面の第一基本量およびそれらの 2 階までの偏導関数によって表される．

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 8

(a) 曲面 $\boldsymbol{p}$ に対し, $\boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{p}_v$ の各々は E, F, G およびこれらの 1 階の偏導関数によって表されることを示せ.

(b) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G が $E = G$, $F = 0$ を満たすとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K は次で与えられることを示せ:

$$K = -\frac{1}{2E}((\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}).$$

(c) $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とするとき, 以下の問いに答えよ (前問 (b) の結果を用いて良い).

(i) $O := \boldsymbol{R}^2$ とし, 第一基本量 E, F, G は $E = G = 4/(1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$ で与えられるとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K を求めよ.

(ii) $O \subset \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ とし, 第一基本量 E, F, G は $E = G = 4/(1 - u^2 - v^2)^2$, $F = 0$ で与えられるとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K を求めよ.

(iii) $O \subset \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ とし, 第一基本量 E, F, G は $E = G = 1/v^2$, $F = 0$ で与えられるとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K を求めよ.

(d) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G が $E = A^2$, $F = 0$, $G = 1$ で与えられるとする, 但し A は正値関数である. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K は $K = -A_{vv}/A$ で与えられることを示せ.

(e) $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とするとき, 以下の問いに答えよ (前問 (d) の結果を用いて良い).

(i) $O := \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ とし, 前問における正値関数 A が $A = \cos v$ で与えられているとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K を求めよ.

(ii) 前問における正値関数 A が $A = \cosh v$ で与えられているとする. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K を求めよ.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１２月６日

第９週　曲面論の基本定理

9.1 Gauss の公式および Christoffel の記号

$\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とする．このとき O の各点で $\boldsymbol{p}_{uu}, \boldsymbol{p}_{uv}, \boldsymbol{p}_{vv}$ を接ベクトル $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ および単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ の 1 次結合で表すことができる．従って O 上のある関数 Γ^c_{ab} $(a, b, c \in \{u, v\}$, 但し $\Gamma^c_{ba} = \Gamma^c_{ab})$ が

$$\boldsymbol{p}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p}_{uv} = \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p}_{vv} = \Gamma^u_{vv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{p}_v + N\boldsymbol{n} \tag{1}$$

を満たす, 但し L, M, N は $\boldsymbol{p}$ の第二基本量である．(1) を用いて,

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{ab} \\ \Gamma^v_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_u \\ \boldsymbol{p}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

がわかる．$\boldsymbol{p}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c$ は第一基本量 E, F, G およびこれらの偏導関数によって表されので, (2) から Γ^c_{ab} $(a, b, c \in \{u, v\})$ は第一基本量 E, F, G およびこれらの偏導関数によって表されることがわかる．Γ^c_{ab} $(a, b, c \in \{u, v\})$ を曲面 $\boldsymbol{p}$ の **Christoffel 記号** という．(1) を **Gauss の公式** という．

9.2 Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式

Gauss の公式および第８週で現れた Weingarten の公式を用いて $\boldsymbol{p}_{uuv} = \boldsymbol{p}_{uvu}$, $\boldsymbol{p}_{vuv} = \boldsymbol{p}_{vvu}$ および $\boldsymbol{n}_{uv} = \boldsymbol{n}_{vu}$ のそれぞれの両辺を計算すると, 第一基本量および第二基本量の間の自明ではない関係式が得られる．a, $b \in \{u, v\}$ に対し, $\boldsymbol{p}^\top_{ab} := \Gamma^u_{ab}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{ab}\boldsymbol{p}_v$ とおく．このとき $\boldsymbol{p}_{uuv} = \boldsymbol{p}_{uvu}$ の両辺と $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ それぞれとの内積をとることで,

$$(\boldsymbol{p}^\top_{uu})_v\cdot\boldsymbol{p}_u = (\boldsymbol{p}^\top_{uv})_u\cdot\boldsymbol{p}_u, \qquad (\boldsymbol{p}^\top_{uu})_v\cdot\boldsymbol{p}_v - (\boldsymbol{p}^\top_{uv})_u\cdot\boldsymbol{p}_v = LN - M^2 \tag{3}$$

を得る．また $\boldsymbol{p}_{vuv} = \boldsymbol{p}_{vvu}$ の両辺と $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ それぞれとの内積をとることで,

$$(\boldsymbol{p}^\top_{vv})_u\cdot\boldsymbol{p}_u - (\boldsymbol{p}^\top_{vu})_v\cdot\boldsymbol{p}_u = LN - M^2, \qquad (\boldsymbol{p}^\top_{vu})_v\cdot\boldsymbol{p}_v = (\boldsymbol{p}^\top_{vv})_u\cdot\boldsymbol{p}_v \tag{4}$$

を得る．(3) の第 1 式および (4) の第 2 式は自明な式である．(3) の第 2 式および (4) の第 1 式は表現が異なる同じ式であり, いずれも **Gauss の方程式** という．Gauss の方程式は

$$K = \frac{1}{EG - F^2}((\boldsymbol{p}^\top_{uu})_v\cdot\boldsymbol{p}_v - (\boldsymbol{p}^\top_{uv})_u\cdot\boldsymbol{p}_v)) = \frac{1}{EG - F^2}((\boldsymbol{p}^\top_{vv})_u\cdot\boldsymbol{p}_u - (\boldsymbol{p}^\top_{vu})_v\cdot\boldsymbol{p}_u))$$

とも表され, a, b, c, $d \in \{u, v\}$ に対し $(\boldsymbol{p}^\top_{ab})_c\cdot\boldsymbol{p}_d$ は第一基本量およびこれらの 2 階までの偏導関数によって表されので, Gauss 曲率 K が第一基本量およびこれらの 2 階までの偏導関数によって表されることが再びわかる．$\boldsymbol{p}_{uuv} = \boldsymbol{p}_{uvu}$ の両辺と $\boldsymbol{n}$ の内積をとりまた $\boldsymbol{p}_{vuv} = \boldsymbol{p}_{vvu}$ の両辺と $\boldsymbol{n}$ の内積をとることで,

$$(\boldsymbol{p}^\top_{uu})_v\cdot\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{p}^\top_{uv})_u\cdot\boldsymbol{n} = M_u - L_v, \qquad (\boldsymbol{p}^\top_{vu})_v\cdot\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{p}^\top_{vv})_u\cdot\boldsymbol{n} = N_u - M_v \tag{5}$$

を得る．(5) の二つの式は第一基本量, 第二基本量およびそれらの偏導関数の間の関係式である．これらを **Codazzi-Mainardi の方程式** という．$\boldsymbol{n}_{uv} = \boldsymbol{n}_{vu}$ からも Codazzi-Mainardi の方程式を得ることができる: $\boldsymbol{n}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{n}_{vu}\cdot\boldsymbol{p}_u$ は $\boldsymbol{p}_{uuv}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}_{uvu}\cdot\boldsymbol{n}$ と同値であり, $\boldsymbol{n}_{uv}\cdot\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{n}_{vu}\cdot\boldsymbol{p}_v$ は $\boldsymbol{p}_{vuv}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}_{vvu}\cdot\boldsymbol{n}$ と同値である．$\boldsymbol{n}_{uv}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_{vu}\cdot\boldsymbol{n}$ からは自明な式を得る．

第９週　曲面論の基本定理（続き）

9.3　曲面上に現れる線形過剰決定系および曲面論の基本定理

Gauss の公式 (1) および第８週に現れた Weingarten の公式をまとめて

$$(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})_u = (\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})P, \qquad (\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})_v = (\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})Q \tag{6}$$

を得る, 但し

$$P := \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{vu} & \dfrac{FM-GL}{EG-F^2} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{vu} & \dfrac{FL-EM}{EG-F^2} \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q := \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} & \dfrac{FN-GM}{EG-F^2} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} & \dfrac{FM-EN}{EG-F^2} \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$$

である. $(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})_{uv} = (\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})_{vu}$ なので,

$$(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})(QP + P_v) = (\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v\ \boldsymbol{n})(PQ + Q_u)$$

を得る. $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{n}$ は 1 次独立なので, $P_v - Q_u = PQ - QP$ を得る. E, F, G, L, M, N が $P_v - Q_u = PQ - QP$ を満たすことと Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式を満たすことは同値である.

ここで一旦曲面を忘れて, $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O 上の関数 E, F, G, L, M, N が

$$E > 0, \qquad G > 0, \qquad EG - F^2 > 0, \qquad P_v - Q_u = PQ - QP \tag{7}$$

を満たすとする. このとき次のことが知られている:

- O の各点 (u_0, v_0) の近傍上で線形過剰決定系 (但し, 過剰決定系とは未知関数の数よりも方程式の数の方が多い方程式系のことである)

$$(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)_u = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)P, \qquad (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)_v = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3)Q \tag{8}$$

  の解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が存在し, (u_0, v_0) での任意に与えられた初期値に対し解は一意である;

- (u_0, v_0) での初期値として

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 = E, \quad \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = F, \quad \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0, \quad \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 = G, \quad \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0, \quad \boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{x}_3 = 1 \tag{9}$$

  を満たすものをとると, 対応する一意解は (u_0, v_0) の近傍上 (9) を満たす.

P の第 2 列と Q の第 1 列が等しいことから, $(\boldsymbol{x}_1)_v = (\boldsymbol{x}_2)_u$ がわかる. 全微分方程式 $f du + g dv = 0$ が完全微分形であるための必要十分条件は $f_v = g_u$ で与えられる. よって (u_0, v_0) の近傍から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{x}_2$ を満たすものが存在する. 従って, $\boldsymbol{p}$ は曲面であり, E, F, G は $\boldsymbol{p}$ の第一基本量である. また $\boldsymbol{n} := \pm\boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{p}$ の単位法ベクトル場であるので. L, M, N は $\boldsymbol{p}$ の第二基本量であることがわかる.

定理　$\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O 上の関数 E, F, G, L, M, N が (7) を満たすとする. このとき O の各点 (u_0, v_0) の近傍から $\boldsymbol{R}^3$ への曲面 $\boldsymbol{p}$ で, E, F, G は $\boldsymbol{p}$ の第一基本量でありかつ L, M, N は $\boldsymbol{p}$ の単位法ベクトル $\boldsymbol{n} := \dfrac{1}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ に関する第二基本量であるものが存在する. さらに, 同様の曲面 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ に対し, 3 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\boldsymbol{c}$ が存在して, (u_0, v_0) の近傍上 $\tilde{\boldsymbol{p}} = T\boldsymbol{p} + \boldsymbol{c}$ が成り立つ.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題 9

(a) $\boldsymbol{p}$ を曲面とし, $\boldsymbol{p}_{ab}^{\top} := \Gamma_{ab}^{u}\boldsymbol{p}_u + \Gamma_{ab}^{v}\boldsymbol{p}_v$ とする $(a, b \in \{u, v\})$.

(i) $(\boldsymbol{p}_{uu}^{\top})_v \cdot \boldsymbol{p}_v$, $(\boldsymbol{p}_{uv}^{\top})_u \cdot \boldsymbol{p}_v$, $(\boldsymbol{p}_{vu}^{\top})_v \cdot \boldsymbol{p}_u$, $(\boldsymbol{p}_{vv}^{\top})_u \cdot \boldsymbol{p}_u$ のそれぞれを第一基本量および Christoffel の記号を用いて表せ.

(ii) $(\boldsymbol{p}_{uu}^{\top})_v \cdot \boldsymbol{n}$, $(\boldsymbol{p}_{uv}^{\top})_u \cdot \boldsymbol{n}$, $(\boldsymbol{p}_{vu}^{\top})_v \cdot \boldsymbol{n}$, $(\boldsymbol{p}_{vv}^{\top})_u \cdot \boldsymbol{n}$ のそれぞれを第二基本量および Christoffel の記号を用いて表せ.

(b) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G が $E = A^2$, $F = 0$, $G = B^2$ で与えられているとする, 但し A, B は正値関数である.

(i) $\boldsymbol{p}$ の Christoffel 記号 Γ_{ab}^{c} $(a, b, c \in \{u, v\})$ を A, B を用いて表せ.

(ii) $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K は

$$K = -\frac{1}{AB}\left\{\left(\frac{B_u}{A}\right)_u + \left(\frac{A_v}{B}\right)_v\right\}$$

と表されることを示せ.

(iii) $\boldsymbol{p}$ の第二基本量 L, M, N に対し, $M = 0$ を仮定し $k_1 = L/E$, $k_2 = N/G$ とおく. このとき k_1, k_2 は $\boldsymbol{p}$ の主曲率でありさらに Codazzi-Mainardi の方程式は

$$(k_1)_v = -(\log A)_v(k_1 - k_2), \qquad (k_2)_u = (\log B)_u(k_1 - k_2)$$

と表されることを示せ.

第１０週　共変微分

10.1　Levi-Civita の平行性

$O \subset \boldsymbol{R}^2$ を開集合とする．開区間 I 上の二つの関数 $u = u(t), v = v(t)$ が任意の $t \in I$ に対し $(u(t), v(t)) \in O$ および $(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \neq (0, 0)$ を満たすとする．曲面 $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ に対し, $\boldsymbol{q}(t) := \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$ とおく．このとき $\boldsymbol{q}$ は曲線である．曲線 $\boldsymbol{q}$ の各点 $\boldsymbol{q}(t)$ で曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトル $V(t)$ を与える $\boldsymbol{R}^3$-値関数 V をここでは曲面 $\boldsymbol{p}$ の **曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場** と呼ぶ. V の各成分の導関数からなる $\boldsymbol{R}^3$-値関数 $\dot{V}$ を $\dot{V} = \dot{V}^\top + \dot{V}^\perp$ と表す, 但し $\dot{V}^\top$, $\dot{V}^\perp$ はそれぞれ曲線 $\boldsymbol{q}$ の各点での $\dot{V}$ の接成分および法成分を表す.

一般に, 曲面の異なる 2 点での接平面は $\boldsymbol{R}^3$ において平行ではない．一方で, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場 V が **平行** であるとは, I 上 $\dot{V}^\top$ が恒等的に零であるときにいう．このように定義される曲面の曲線に沿うベクトル場が平行であるという性質を **Levi-Civita の平行性** という．Levi-Civita は以下のように考えて曲面の曲線に沿うベクトル場の平行性の概念に到達したようである．

- まず曲線 $\boldsymbol{q}$ の異なる 2 点 $\boldsymbol{q}(t_0)$, $\boldsymbol{q}(t_1)$ $(t_0, t_1 \in I, t_0 \neq t_1)$ を互いに十分近くにとる．そして $\boldsymbol{q}(t_0)$ での曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトル V_0 を一つとり $(V_0 \neq 0$ とする), $\boldsymbol{R}^3$ において V_0 に等しいベクトルで $\boldsymbol{q}(t_1)$ を始点とするものを $\tilde{V}_0$ とする (これは一般には曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトルではない).

- $\tilde{V}_0$ を含み $\boldsymbol{q}(t_0)$ での 曲面 $\boldsymbol{p}$ の接平面 T_0 に直交する平面を P とする ($\boldsymbol{q}(t_0)$, $\boldsymbol{q}(t_1)$ は十分近くにあるので, $\boldsymbol{q}(t_1)$ での $\boldsymbol{p}$ の接平面 T_1 と P の共通部分は直線であると考えてよい)．$\boldsymbol{q}(t_1)$ での曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトル V_1 を, $T_1 \cap P$ に含まれ $\tilde{V}_0$ と長さが等しくかつ $\tilde{V}_0$ とのなす角が鋭角のものとする ($\boldsymbol{q}(t_0)$, $\boldsymbol{q}(t_1)$ は十分近くにあるので, $\tilde{V}_0$ と T_1 は直交していないと考えてよい)．この V_1 が曲面 $\boldsymbol{p}$ に関して V_0 と平行であると考える．

- 以上を踏まえて, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場 V が平行であることを, $\boldsymbol{q}$ の各点での V の接成分の変化の程度を表す $\dot{V}^\top$ が零であることと考える (十分近い点は曲線 $\boldsymbol{q}$ によって与えられるので, Levi-Civita の平行性は曲面の曲線の取り方に依存する).

以下においては, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場 V に対し $\dot{V}^\top$ を ∇V で表し V の **共変微分** と呼ぶ.

曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場 V は I 上の関数 ψ^1, ψ^2 を用いて $V(t) = \psi^1(t)\boldsymbol{p}_1 + \psi^2(t)\boldsymbol{p}_2$ と表される, 但し $\boldsymbol{p}_1 := \boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_2 := \boldsymbol{p}_v$ は $(u^1(t), u^2(t)) := (u(t), v(t))$ でのものであり, $t \in I$ である．このとき

$$\begin{aligned}\nabla V(t) =& \dot{\psi}^1(t)\boldsymbol{p}_1 + \psi^1(t)(\boldsymbol{p}_{11}^\top \dot{u}^1(t) + \boldsymbol{p}_{12}^\top \dot{u}^2(t)) + \dot{\psi}^2(t)\boldsymbol{p}_2 + \psi^2(t)(\boldsymbol{p}_{21}^\top \dot{u}^1(t) + \boldsymbol{p}_{22}^\top \dot{u}^2(t)) \\ =& \{\dot{\psi}^1(t) + \psi^1(t)(\Gamma_{11}^1 \dot{u}^1(t) + \Gamma_{12}^1 \dot{u}^2(t)) + \psi^2(t)(\Gamma_{21}^1 \dot{u}^1(t) + \Gamma_{22}^1 \dot{u}^2(t))\}\boldsymbol{p}_1 \\ &+ \{\dot{\psi}^2(t) + \psi^1(t)(\Gamma_{11}^2 \dot{u}^1(t) + \Gamma_{12}^2 \dot{u}^2(t)) + \psi^2(t)(\Gamma_{21}^2 \dot{u}^1(t) + \Gamma_{22}^2 \dot{u}^2(t))\}\boldsymbol{p}_2\end{aligned}$$

が成り立つ, 但し $\boldsymbol{p}_{ij} := (\boldsymbol{p}_i)_j$, $\Gamma_{ij}^k := \Gamma_{ab}^c$ (但し $a := u^i$, $b := u^j$, $c := u^k$) である．従って V が平行である $(\nabla V = 0)$ ことと (ψ^1, ψ^2) が次の 1 階線形常微分方程式系を満たすことは同値である:

$$\dot{\psi}^1(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^1 \dot{u}^i(t)\psi^j(t) = 0, \quad \dot{\psi}^2(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^2 \dot{u}^i(t)\psi^j(t) = 0. \tag{1}$$

従って曲線 $\boldsymbol{q}$ の 1 点 $\boldsymbol{q}(t_0)$ で与えられた曲面 $\boldsymbol{p}$ の接ベクトル V_0 に対し, $\boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{q}$ に沿う平行なベクトル場 V で $V(t_0) = V_0$ を満たすものが唯一つ存在する．

参考　Levi-Civita の平行性は, 曲面の曲線に沿うベクトル場 V に対しその共変微分 ∇V を対応させる作用素 ∇ 或いは曲面の Christoffel 記号 Γ_{ab}^c によって定められる．これらは曲面の曲線上の 2 点でのどの接ベクトルとどの接ベクトルが平行であるかを定めているという意味で, 2 点での接平面を関係づけている, 繋いでいると言える．作用素 ∇ や関数の組 $\{\Gamma_{ab}^c\}$ を **接続** とも言う．

第１０週　共変微分（続き）

10.2　測地的曲率および測地線

以下, s を $\boldsymbol{q}$ の弧長パラメータとする. このとき

$$\boldsymbol{t}(s) := \boldsymbol{q}'(s) = \frac{du^1}{ds}(s)\boldsymbol{p}_1(u^1(s), u^2(s)) + \frac{du^2}{ds}(s)\boldsymbol{p}_2(u^1(s), u^2(s))$$

は曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿うベクトル場であり, $\boldsymbol{t}$ の共変微分 $\nabla\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{q}$ の各点での測地的曲率ベクトル $\boldsymbol{k}_g$ (第５週で定義された) を与える. $\nabla\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{t}$ と直交している. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{q}(s)$ での単位接ベクトル $\boldsymbol{t}^{\perp}(s)$ で $\boldsymbol{t}(s)$ に直交しているものは二つ存在する. ここでは, そのようなもののうち, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}^{\perp}$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ が右手系をなす $(\det(\boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{t}^{\perp}\ \boldsymbol{n}) = +1)$ ものを採用することにする. 曲線 $\boldsymbol{q}$ の各点で, ある実数 κ_g が $\nabla\boldsymbol{t} = \kappa_g\boldsymbol{t}^{\perp}$ を満たす. κ_g を曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{q}(s)$ での **測地的曲率** という. $\boldsymbol{q}$ の測地的曲率が恒等的に零であるとき, $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{p}$ の **測地線** という. $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{p}$ の測地線であることと $\boldsymbol{t}$ が平行である $(\nabla\boldsymbol{t} = 0)$ ことは同値である. 従って (1) を用いて, $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{p}$ の測地線であることと $\boldsymbol{t}$ が次の 2 階常微分方程式系を満たすことは同値であることがわかる:

$$\frac{d^2u^1}{ds^2}(s) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^1\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s) = 0, \quad \frac{d^2u^2}{ds^2}(s) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^2\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s) = 0. \tag{2}$$

曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に対し, s_1, $s_2 \in I$ は $s_1 < s_2$ および $(u^1(s_1), u^2(s_1)) \neq (u^1(s_2), u^2(s_2))$ を満たすとする. J は開区間で, $[s_1, s_2]$ を含み I に含まれるとする. 正数 δ に対し, 写像 $\phi : J \times (-\delta, \delta) \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ は任意の $s \in J$ に対し $\phi(s, 0) = (u^1(s), u^2(s))$ を満たしさらに任意の $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $\phi(s_1, h) = \phi(s_1, 0)$, $\phi(s_2, h) = \phi(s_2, 0)$ を満たすとする. 各 $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $\boldsymbol{q}_h(s) := \boldsymbol{p}(\phi(s, h))$ とおくとき, J および δ を十分小さくとることによって任意の $h \in (-\delta, \delta)$ に対し $\boldsymbol{q}_h$ が曲線であるようにできる (但し, 一般には s は $\boldsymbol{q}_h$ の弧長パラメータではない). 各 $h \in (-\delta, \delta)$ に対し, 曲線 $\boldsymbol{q}_h$ の $\boldsymbol{q}_h(s_1)$ から $\boldsymbol{q}_h(s_2)$ までの曲線の長さを $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}_h)$ で表す:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}_h) := \int_{s_1}^{s_2}\left|\frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial s}(s)\right| ds$$

($\mathcal{L}$ を **弧長汎関数** という). $l(h) := \mathcal{L}(\boldsymbol{q}_h)$ とおくとき, $|\boldsymbol{t}(s)| = 1$ に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dh}(0) &= \int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial s}(s)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial s}(s)\right)^{1/2}\Bigg|_{h=0} ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{|\boldsymbol{q}'(s)|}\frac{\partial^2\boldsymbol{q}_h}{\partial h\partial s}(s)\bigg|_{h=0}\cdot\boldsymbol{q}'(s)ds \\
&= \left[\frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial h}(s)\bigg|_{h=0}\cdot\boldsymbol{q}'(s)\right]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial h}(s)\bigg|_{h=0}\cdot\boldsymbol{q}''(s)ds \\
&= -\int_{s_1}^{s_2}V(s)\cdot\nabla\boldsymbol{t}(s)ds \qquad \left(V(s) := \frac{\partial\boldsymbol{q}_h}{\partial h}(s)\bigg|_{h=0}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

を得る. よって $f(s) := V(s)\cdot\boldsymbol{t}^{\perp}(s)$ とおくと, (3) から

$$\frac{dl}{dh}(0) = -\int_{s_1}^{s_2}f(s)\kappa_g(s)ds$$

を得る. 従って変分法の基本補題を用いて, 上のような任意の ϕ に対し $(dl/dh)(0) = 0$ が成り立つ (弧長汎関数 $\mathcal{L}$ の第一変分は零である) ことと $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{p}$ の測地線であることは同値であることがわかる.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題１０

(a) V, W を曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ に沿う平行なベクトル場とする．このとき V と W の内積 $V \cdot W$ は一定であることを示せ.

(b) 球面 $S^2(1) = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の測地線は $\boldsymbol{R}^3$ の原点 $(0, 0, 0)$ を通るある平面と $S^2(1)$ の共通部分に含まれることを示せ.

(c) $S^2(1)$ の測地的曲率が一定である曲線は $\boldsymbol{R}^3$ のある平面と $S^2(1)$ の共通部分に含まれることを示せ.

(d) $S^2(1)$ の点 p_1, p_2, p_3 を $p_1 := (1, 0, 0)$, $p_2 := (0, 1, 0)$, $p_3 := (0, 0, 1)$ で定める．$S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{q}_1(s) := (\cos s, \sin s, 0), \quad \boldsymbol{q}_2(s) := (0, \cos s, \sin s), \quad \boldsymbol{q}_3(s) := (\sin s, 0, \cos s)$$

で定める $(s \in \boldsymbol{R})$. p_1 での $S^2(1)$ の接ベクトル V_0 を $V_0 := (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$ で定める $(\alpha \in \boldsymbol{R})$.

(i) V_1 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_1$ に沿う平行なベクトル場で, $V_1(0) = V_0$ を満たすとする．このとき $V_1(\pi/2)$ を求めよ.

(ii) V_2 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_2$ に沿う平行なベクトル場で, $V_2(0) = V_1(\pi/2)$ を満たすとする．このとき $V_2(\pi/2)$ を求めよ.

(iii) V_3 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_3$ に沿う平行なベクトル場で, $V_3(0) = V_2(\pi/2)$ を満たすとする．このとき $V_3(\pi/2)$ を求めよ.

(e) 円柱 $\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の測地線を全て求めよ.

(f) ϕ, ψ を開区間 I 上の 1 変数 u の関数とし, 任意の $u \in I$ に対し $\phi(u) > 0$ および $\phi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = 1$ を仮定する．$\boldsymbol{p} : I \times \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u, v) := (\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u))$$

で定義される回転面とする．固定された $v_0 \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{q}(s) := \boldsymbol{p}(s, v_0)$ で定める $(s \in I)$. このとき $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ の測地線であることを示せ.

(g) I, J を開区間とし, $\boldsymbol{p} : I \times J \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とする．$\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G は $E = A^2$, $F = 0$, $G = 1$ で与えられるとする, 但し A は正値関数である．固定された $u_0 \in I$ に対し, $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{q}(s) := \boldsymbol{p}(u_0, s)$ で定める $(s \in J)$. このとき $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ の測地線であることを示せ.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 — 平成２８年１２月２０日

第１１週　双曲幾何

11.1 Euclid 幾何の公準

Euclid が残した『原論』において, 平面幾何に現れる図形の基本的な扱い方が系統立てて解説されている. 幾つかの定義に続いて, 以下のような五つの公準を挙げている.

公準１ 与えられた 2 点を結ぶ線分は唯一つ存在する.

公準２ 線分はどちら側にも限りなく延長できる.

公準３ 与えられた 2 点の一つを中心としもう一つを通る円は唯一つ存在する.

公準４ 直角は全て等しい.

公準５ 2 直線と交わる一つの直線が同じ側に作る二つの内角の和が 2 直角より小さいならば, 2 直線は交わる.

さらに数学的に (或いは論理的に) まず問題にならないだろう幾つかの公理を挙げた後, 以上を踏まえて様々な命題が証明される.

補足１ 公準１について, 線分の定義は『原論』には十分に記されていないようである. この授業の内容を踏まえれば, 曲率が零である平面曲線をその定義域に含まれる有界閉区間に制限したものが線分であろう.

補足２ 公準２について, 「限りなく延長できる」とは与えられた線分を延長することでその上の 2 点の距離をいくらでも大きくできるということであると理解しておくと, 以下の議論を理解しやすい.

補足３ 公準３は実際には円を作図する器具である (理想的な) コンパスが存在することを述べているようである. 当時は定規とコンパスで作図された図形に基づいて議論を進めそして結論を導いていた. しかしながら, 以下においては公準３の条件を満たす円の存在は, 然るべき合同 (等長) 変換の族を提示することによって保障されると考えることにする. 例えば原点 $(0,0)$ を中心とし $(0,0)$ 以外の任意に与えられた点 $(a,b) \neq (0,0)$ を通る円は

$$T(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$(\theta \in [0,2\pi])$ とおいて得られる合同変換の族 $\{T_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ によって与えられると考えるということである: $\{T_\theta\,{}^t(a,b) \mid \theta \in [0,2\pi]\}$ は $(0,0)$ を中心とし (a,b) を通る円である. またこの場合, 一意性は明らかと思われる.

補足４ 公準４についてだが, まず直角については与えられた直線の 1 点を端点とする線分が作る隣り合わせの二つの角が互いに等しいときに, いずれの角のことも直角と呼ぶ. 二つの直角が平面上に与えられたとき, これらが等しいとは, 一方の直角を適切な合同変換によってもう一方の直角に重ね合わせることができるということである.

補足５ 与えられた直線 l およびその上にない任意の 1 点に対し, その点を通り l と交わらない直線 l' が存在することは公準１〜４を用いて示されることは注目に値する. さらに公準５を用いて, l' のような直線は唯一つであることがわかる.

『原論』が著された後, 多くの人たちが公準５ (**平行線の公準**) を他の公準から導こうと試みた. しかしながら, 実は平行線の公準を除くことによって通常の平面幾何とは別の幾何が構築されることがわかった.

第１１週 双曲幾何（続き）

11.2 双曲平面: 上半平面モデル

通常の平面幾何を考える場である平面を $\mathbb{E}^2$ で表す. 集合としては $\mathbb{E}^2 = \boldsymbol{R}^2$ であり, そして $\mathbb{E}^2$ の各点を始点とする二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2) \in \boldsymbol{R}^2$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ としては $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2$ という標準的なものを考える.

一方で, 公準１〜４は成り立つが公準５が成り立たない幾何 — 双曲幾何 — を考えるために, 別の場を設定する. まず, 集合としては上半平面 $\{(u,v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ である. そしてこの各点 (u,v) を始点とする二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2) \in \boldsymbol{R}^2$ の内積 $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ としては $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = (a^1 b^1 + a^2 b^2)/v^2$ を採用する. これは曲面の第一基本量に相当するものとして $E = G = 1/v^2$, $F = 0$ を採用するということであるが, 今考える場は空間の中に存在していることを仮定しないので, これらを第一基本量と呼ばずにここでは単に **基本量** と呼ぶことにする. 上のように定義された内積を **Poincaré 計量** と呼ぶことにする. 上半平面 $\{(u,v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ に Poincaré 計量を与えて得られる場を $\mathbb{H}^2$ で表し, **双曲平面** または **上半平面モデル** ということにする.

上半平面モデル $\mathbb{H}^2$ は基本量 $E = G = 1/v^2$, $F = 0$ を持っているので, 曲面の Christoffel 記号は第一基本量およびこれらの偏導関数を用いて表されることを参考にして, $\mathbb{H}^2$ の Christoffel 記号を考えることができる. 従って第１０週 10.2 節の式 (2) を用いて $\mathbb{H}^2$ の測地線を求めることができる. $\boldsymbol{q}$ を $\mathbb{H}^2$ の曲線とするとき, 次の (a), (b) は同値である:

(a) $\boldsymbol{q}$ は $\mathbb{H}^2$ の測地線である;

(b) $\boldsymbol{q}$ による像は $\mathbb{E}^2$ 内の v-軸に平行な直線または u-軸上の 1 点を中心とする円に含まれる.

$\boldsymbol{q}$ による像が $\mathbb{E}^2$ 内の v-軸に平行な直線に含まれると仮定する. このとき $\boldsymbol{q}$ のパラメータ t を選んで, $\boldsymbol{q}(t) = (u_0, t + t_0)$ または $(u_0, -t + t_0)$ が成り立つようにできる, 但し u_0, $t_0 \in \boldsymbol{R}$ である. このとき t は弧長パラメータではなく, また t は $t > -t_0$ または $t < t_0$ を満たす. ここでは $t_0 = 0$ および $\boldsymbol{q}(t) = (u_0, t)$ とする. このとき t_1, $t_2 > 0$ に対し, $\boldsymbol{q}(t_1)$ から $\boldsymbol{q}(t_2)$ までの $\boldsymbol{q}$ の長さは

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}(t) \bullet \dot{\boldsymbol{q}}(t)} dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} dt \right| = \left| \log \frac{t_2}{t_1} \right|$$

であることがわかる. また $\boldsymbol{q}$ による像が $\mathbb{E}^2$ 内の u-軸上の 1 点 $(u_0, 0)$ を中心とし半径が $R > 0$ である円に含まれるとする. このときある $t_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 任意の t に対し $\boldsymbol{q}(t) = (R\cos(t + t_0) + u_0, R\sin(t + t_0))$ または $(R\cos(-t + t_0) + u_0, R\sin(-t + t_0))$ が成り立つと考えられる. ここでは $\boldsymbol{q}(t) = (R\cos t + u_0, R\sin t)$ とすると, t_1, $t_2 \in (0, \pi)$ に対し $\boldsymbol{q}(t_1)$ から $\boldsymbol{q}(t_2)$ までの $\boldsymbol{q}$ の長さは

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}(t) \bullet \dot{\boldsymbol{q}}(t)} dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sin t} dt \right| = \left| \log \frac{\tan(t_2/2)}{\tan(t_1/2)} \right|$$

であることがわかる.

$\boldsymbol{R}^2$ と複素平面 $\boldsymbol{C}$ を同一視し, $\boldsymbol{R}^2$ の元 (u,v) を $\boldsymbol{C}$ の元 $w = u + \sqrt{-1}v$ とみなす. a, b, c, $d \in \boldsymbol{R}$ で $ad - bc = 1$ を満たすものをとり, これらが定める一次分数変換を T で表す. T は Riemann 球面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ の変換であるが, $\mathbb{H}^2$ の元 $w = u + \sqrt{-1}v$ に対し $T(w) = \dfrac{aw + b}{cw + d} \in \boldsymbol{C}$ かつこの虚部 $\operatorname{Im} T(w)$ は正であることが $\operatorname{Im} w = v > 0$ および $ad - bc = 1$ からわかる. 従って $T(w)$ は $\mathbb{H}^2$ の元である. $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ は全単射であり, $\mathbb{H}^2$ の測地線を測地線にうつす. また $\mathbb{H}^2$ の曲線の長さは T によって不変である.

第１１週　双曲幾何（続き）

11.3　双曲平面と Euclid 幾何の公準１〜５

$\mathbb{H}^2$ においては 11.1 節で記した公準１から公準４は成り立つが公準５は成り立たないと考えることができる.

公準１について　$\mathbb{H}^2$ の 2 点をとる. これらが $\mathbb{E}^2$ における v-軸に平行な直線上にある場合, これらを通る $\mathbb{H}^2$ の測地線としてこの直線に含まれるものをとることができ, そしてこれら 2 点を端点とする $\mathbb{H}^2$ の線分はこの測地線が与えるもののみである (上の直線に含まれない測地線は与えられた 2 点を通らない). また 2 点が $\mathbb{E}^2$ における v-軸に平行な直線上にない場合, これらを通る $\mathbb{H}^2$ の測地線として $\mathbb{E}^2$ における u-軸上に中心を持ちこれら 2 点を通る円に含まれるものをとることができ, これら 2 点を端点とする $\mathbb{H}^2$ の線分はやはりこの測地線が与えるもののみである. 従って $\mathbb{H}^2$ においては **公準１は成り立つ** と考えられる.

公準２について　まず $\mathbb{H}^2$ の 2 点の距離を定義したい. $\mathbb{H}^2$ の 2 点を端点とする線分は唯一つなので, この長さを距離としたいところであるが, その前にこの線分が与えられた 2 点を結ぶ曲線の最短線であることを示したい. $ad-bc=1$ を満たす $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ を選んで, これらが定める $\mathbb{H}^2$ の変換 $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ による上の線分の像が $\mathbb{E}^2$ における v-軸に含まれるようにできる. $\mathbb{H}^2$ の 2 点 $\sqrt{-1}v_1$, $\sqrt{-1}v_2$ (但し $v_1, v_2 > 0$, $v_1 \neq v_2$) を通る曲線 $\boldsymbol{q} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ に対し, $t_1, t_2 \in I$ は $\boldsymbol{q}(t_i) = \sqrt{-1}v_i$ を満たすとすると

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}(t) \bullet \dot{\boldsymbol{q}}(t)}dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}{v(t)^2}}dt\right| \geqq \left|\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\right| dt\right| \geqq \left|\log \frac{v_2}{v_1}\right|$$

が成り立ち, そして最左辺と最右辺が等しいことと $\boldsymbol{q}([t_1, t_2])$ が 2 点を端点とする線分であることは同値である. よって 2 点を結ぶ線分はちょうど 2 点を結ぶ曲線の最短線であることがわかった. よって 2 点を結ぶ線分の長さを 2 点の **距離** と定める. v_1, v_2 の一方を固定しもう一方を 0 または ∞ に近づけると, 2 点の距離はいくらでも大きくなる. このことに基づいて, $\mathbb{H}^2$ においては **公準２は成り立つ** と考えることができる.

公準３について　まず $\mathbb{H}^2$ の変換 T は任意の 2 点の距離を変えないので, T のような $\mathbb{H}^2$ の変換を以下においては **合同変換** と呼ぶ. 各 $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\mathbb{H}^2$ の合同変換 T_θ を $T_\theta(w) := \dfrac{(\cos\theta)w + \sin\theta}{-(\sin\theta)w + \cos\theta}$ で定める ($w \in \mathbb{H}^2$). このとき $T_\theta(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$ が成り立つ. 従って $\mathbb{H}^2 \setminus \{\sqrt{-1}\}$ の点 $w_0 = \sqrt{-1}v_0$ に対し d_0 を w_0 と $\sqrt{-1}$ の距離とすると, $d_0 > 0$ であり $C(\sqrt{-1}, d_0) := \{T_\theta(w_0) \mid \theta \in [0, \pi]\}$ の各点と $\sqrt{-1}$ の距離は d_0 である. さらに, $C(\sqrt{-1}, d_0)$ は $\mathbb{E}^2$ において $\sqrt{-1}v_0$, $\sqrt{-1}/v_0$ を通りかつこの 2 点を端点とする線分によって直径が与えられる円に等しいことがわかるので, $C(\sqrt{-1}, d_0)$ は $\mathbb{H}^2$ において $\sqrt{-1}$ との距離が d_0 である全ての点からなる集合であることがわかる. よって集合 $C(\sqrt{-1}, d_0)$ は $\mathbb{H}^2$ における $\sqrt{-1}$ を中心とする円であると考えることができる. $\mathbb{H}^2$ の $\sqrt{-1}$ 以外の点を中心とする円については, $\sqrt{-1}$ をその点にうつす合同変換による $C(\sqrt{-1}, d_0)$ の像を考えれば良い. こうして $\mathbb{H}^2$ においては **公準３は成り立つ** と考えられる.

公準４について　まず $\mathbb{H}^2$ の各点を始点とする二つのベクトルの間の角度を Poincaré 計量によって定める. 従って $\mathbb{H}^2$ における角度は $\mathbb{E}^2$ における角度に等しい. $\mathbb{H}^2$ の 1 点で交わる二つの測地線がなす角度と $\mathbb{H}^2$ の合同変換によるこれら測地線の像がなす角度は等しい. 11.1 節の補足４の意味で直角が互いに等しいことは $\mathbb{H}^2$ の適切な合同変換を見つけることによって示され, 実際に見つけることができる. こうして $\mathbb{H}^2$ においては **公準４は成り立つ** と考えられる.

公準５について　公準５の仮定を満たししかしながら互いに交わらない二つの測地線を見つけることは容易である. 従って $\mathbb{H}^2$ においては **公準５は成り立たない**.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題１１

(a) I を開区間とし, $\boldsymbol{q} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ を測地線とする. $s \in I$ を $\boldsymbol{q}$ の弧長パラメータとする, つまり任意の $s \in I$ に対し $\boldsymbol{q}'(s) \bullet \boldsymbol{q}'(s) = 1$ を仮定する. $\boldsymbol{q}(s)$ を $\boldsymbol{q}(s) = (u(s), v(s))$ と表し, $U := u'/v$, $V := v'/v$ とおく.

(i) U, V は $U^2 + V^2 = 1$, $U' = UV$, $V' = -U^2$ を満たすことを示せ.

(ii) ある定数 c が存在して I 上 $U = cv$ が成り立つことを示せ.

(iii) $c \neq 0$ とし, 関数 θ を $U = \sin\theta$ で定める. このとき $\theta' = \sin\theta$ を示せ.

(iv) $\boldsymbol{q}(I)$ は $\mathbb{E}^2$ 内の v-軸に平行な直線または u-軸上の 1 点を中心とする円に含まれることを示せ.

(b) $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ で $ad - bc = 1$ を満たすものをとり, これらが定める $\mathbb{H}^2$ の合同変換を T で表す. 二つの曲線 $\boldsymbol{q}_1 : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$, $\boldsymbol{q}_2 : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ に対し, $\boldsymbol{q}_{i,T} := T \circ \boldsymbol{q}_i$ とおく $(i = 1, 2)$. ある $t_0 \in I$ に対し $\boldsymbol{q}_1(t_0) = \boldsymbol{q}_2(t_0)$ が成り立つとき, $\dot{\boldsymbol{q}}_{1,T}(t_0) \bullet \dot{\boldsymbol{q}}_{2,T}(t_0) = \dot{\boldsymbol{q}}_1(t_0) \bullet \dot{\boldsymbol{q}}_2(t_0)$ を示せ.

(c) $C(\sqrt{-1}, d_0)$ は $\mathbb{E}^2$ において $\sqrt{-1}v_0$, $\sqrt{-1}/v_0$ を通りかつこの 2 点を端点とする線分によって直径が与えられる円に等しいことを示せ.

(d) $r \in (0, 1)$ の関数 f を $f(r) := \log \dfrac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} - \sqrt{1 - r^2}$ で定める. 曲面 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \times (1, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u, v) := \left(\frac{1}{v} \cos u,\ \frac{1}{v} \sin u,\ f\left(\frac{1}{v} \right) \right) \quad ((u, v) \in \boldsymbol{R} \times (1, \infty))$$

で定める. このとき $\boldsymbol{p}$ の第一基本量を求めよ.

第１２週　局所的な Gauss-Bonnet の定理

12.1　曲面の単純閉曲線に囲まれた部分における Gauss 曲率の積分

$O \subset \boldsymbol{R}^2$ を円板と同相な開集合とし, $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とする. $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G は $E = A^2$, $F = 0$, $G = 1$ で与えられていると仮定する, 但し A は正値関数である. このとき $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率 K は $K = -A_{vv}/A$ で与えられる.

$\boldsymbol{q} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面 $\boldsymbol{p}$ の単純閉曲線とし, $\boldsymbol{R}$ 上の二つの関数 $u = u(s)$, $v = v(s)$ が任意の $s \in \boldsymbol{R}$ に対し $(u(s), v(s)) \in O$ および $\boldsymbol{q}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ を満たすとする. また s は $\boldsymbol{q}$ の弧長パラメータであり, $s_0 > 0$ を $\boldsymbol{q}$ の周期とする. $C := \{(u(s), v(s)) \in O \mid s \in [0, s_0]\}$ とおく. C の向きは C が囲む部分 D を左手に見るものとし, s が増えていく方向で与えられているとする. このとき Green の定理を用いて,

$$\iint_D K\sqrt{EG - F^2}dudv = -\iint_D A_{vv}dudv = \int_C A_v du = \int_0^{s_0} A_v u'(s)ds \tag{1}$$

を得る.

$\boldsymbol{U}_1 := (1/A)\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{U}_2 := \boldsymbol{p}_v$ とおく. そして $\boldsymbol{R}$ 上の関数 θ を $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{q}'(s) := (\cos\theta)\boldsymbol{U}_1 + (\sin\theta)\boldsymbol{U}_2$ で定める. このとき

$$\boldsymbol{t}' = \theta'\boldsymbol{t}^{\perp} + (\cos\theta)\boldsymbol{U}_1' + (\sin\theta)\boldsymbol{U}_2'$$

が成り立つので, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ の測地的曲率 κ_g は

$$\kappa_g = \boldsymbol{t}' \cdot \boldsymbol{t}^{\perp} = \theta' - \boldsymbol{U}_2' \cdot \boldsymbol{U}_1 = \theta' - A_v u' \tag{2}$$

で与えられる. (1) および (2) から,

$$\iint_D K\sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{s_0} \theta' ds - \int_0^{s_0} \kappa_g ds = 2\pi - \int_0^{s_0} \kappa_g ds \tag{3}$$

を得る.

12.2　区分的に滑らかな単純閉曲線に囲まれた部分における Gauss 曲率の積分

以下, $\boldsymbol{q}$ は $[0, s_0)$ の有限個の点 $s_1 < \cdots < s_k$ でのみ連続ではあるが微分可能ではないと仮定する. さらに, 各 s_i $(i \in \{1, \ldots, k\})$ に対し, $\displaystyle\lim_{s \to s_i + 0} \boldsymbol{t}(s)$ および $\displaystyle\lim_{s \to s_i - 0} \boldsymbol{t}(s)$ が存在すると仮定する. このとき θ は s_i での右極限および左極限を持つので,

$$\alpha_i := \lim_{s \to s_i + 0} \theta(s) - \lim_{s \to s_i - 0} \theta(s)$$

とおき $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ を仮定する. このとき 12.1 節における議論を参考にして,

$$\iint_D K\sqrt{EG - F^2}dudv = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \int_0^{s_0} \kappa_g ds \tag{4}$$

を得る. (4) は (3) の一般化であり, **Gauss-Bonnet の定理** という. 特に, $k = 3$ の場合, $i = 1, 2, 3$ に対し $\beta_i := \pi - \alpha_i$ とおくと,

$$\iint_D K\sqrt{EG - F^2}dudv = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi - \int_0^{s_0} \kappa_g ds$$

を得る.

幾何概論 II — 曲線論・曲面論入門 —

演習問題１２

(a) Gauss-Bonnet の定理を用いて, 平面の三角形の内角の和は π であることを示せ.

(b) $S^2(1)$ の 3 点 p_1, p_2, p_3 は一つの測地線上にはないとし, さらにある半球面 Σ に含まれているとする. O 内で p_1 と p_2 を結ぶ測地線分, p_2 と p_3 を結ぶ測地線分および p_3 と p_1 を結ぶ測地線分が作る三角形を Δ とするとき, Δ の内角の和は π より大きいことを示せ.

(c) 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の 3 点 p_1, p_2, p_3 は一つの測地線上にはないとし, p_1 と p_2 を結ぶ測地線分, p_2 と p_3 を結ぶ測地線分および p_3 と p_1 を結ぶ測地線分が作る三角形を Δ とする. このとき Δ の内角の和は π より小さいことを示せ.

(d) ϕ, ψ を $\boldsymbol{R}$ 上の 1 変数 u の関数とし, 任意の u に対し $\phi(u) > 0$ および $\phi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = 1$ を仮定する. さらに $u_1, u_2 \in \boldsymbol{R}$ が $u_1 < u_2$ および $\phi'(u_1) = \phi'(u_2) = 0$ を満たすとする. $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O を $O := (u_1, u_2) \times (0, \pi/2)$ で定める. このとき回転面

$$\boldsymbol{p}(u,v) = (\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u))$$

に対し, O 上での Gauss 曲率の面積分 $\displaystyle\iint_O K\sqrt{EG-F^2}dudv$ を求めよ.

第１３週　閉曲面に対する Gauss-Bonnet の定理

13.1　閉曲面

n を正の整数とする. Hausdorff 空間 X が n 次元 **位相多様体** であるとは, X の各点が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持つときにいう. 連結かつコンパクトな (境界を持たない) 2 次元位相多様体をここでは **閉曲面** と呼ぶことにする.

閉曲面 X は **3 角形分割可能** (または **単体分割可能**) である, つまり X は有限個の 3 角形で次を満たすものの和と表される位相空間 $\tilde{X}$ と同相である:

- 各 3 角形の各辺は, 他のあるそして唯一つの 3 角形と共有されている;
- 二つの 3 角形が共通部分を持つならば, その共通部分は唯一つの頂点または唯一つの辺である.

このとき, X から幾つかの閉曲線を除いたものは開円板に同相であることが知られている. 閉円板 $\overline{D}$ の境界 ∂D を $2h$ 等分し ($h \in \boldsymbol{N}$), ∂D を $2h$ 個の円弧 $C_1, C_2, \ldots, C_{2h}$ の和で表す. $C_i \cap C_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 2h-1)$ は唯一つの点 a_i からなり, また $C_{2h} \cap C_1$ はやはり唯一つの点 a_{2h} からなると仮定してよい. 各 C_i には a_{i-1} が始点で a_i が終点であるように向きを与え (但し $a_0 := a_{2h}$), 集合としては C_i と同じで逆の向きが与えられたものを C_i^{-1} で表す. このとき X は以下の S_g または S'_h ($g \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $h \in \boldsymbol{N}$) と同相であることがわかる.

- $h = 2g$ $(g \in \boldsymbol{N})$ とし,
$$\phi_j : C_{4j-3} \longrightarrow C_{4j-1}^{-1}, \quad \psi_j : C_{4j-2} \longrightarrow C_{4j}^{-1}$$
($j \in \{1, \ldots, g\}$) をそれぞれ向きを保つ同相写像とする. そして ϕ_j, ψ_j によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間が S_g である: $\overline{D}$ の 2 点 a, b に対しある j, $k \in \{1, \ldots, 2h\}$ が $(a, b) = (a_j, a_k)$ を満たす, またはある $j \in \{1, \ldots, g\}$ に対し
$$\{a, b\} \subset C_{4j-3}^\circ \cup C_{4j-2}^\circ \cup C_{4j-1}^\circ \cup C_{4j}^\circ$$
が成り立ちさらに
$$\phi_j(a) = b, \quad \psi_j(a) = b, \quad \phi_j^{-1}(a) = b, \quad \psi_j^{-1}(a) = b$$
のいずれかが成り立つ (但し C_k° は C_k の内部) とき $a \sim b$ と記すことにすると, “$\sim$” は $\overline{D}$ の同値関係であり, $S_g := \overline{D}/\sim$ とおく.
- $S_0 := S^2$ とおく. S_0 は, $h = 1$ としかつ C_1 から C_2^{-1} の上への向きを保つ同相写像によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間である.
- $\phi'_j : C_{2j-1} \longrightarrow C_{2j}$ ($j \in \{1, \ldots, h\}$) を向きを保つ同相写像とする. そして ϕ'_j によってうつり合う 2 点を同一視することによって $\overline{D}$ から得られる位相空間が S'_h である.

S_0, S_1, $S_2, \ldots$, S'_1, $S'_2, \ldots$ の任意の二つは互いに同相ではないことが知られている.

S_g ($g \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$) は **向きづけ可能** である. このことのきちんとした定義をここでは記さないが, 大雑把に言えば表と裏を指定できるということである. g を S_g の **種数** という. S'_h ($h \in \boldsymbol{N}$) は向きづけ可能ではない (表と裏を指定できない). h を S'_h の **種数** という.

第１３週 閉曲面に対する Gauss-Bonnet の定理（続き）

13.2 閉曲面上の Gauss 曲率の積分

この授業では, **$\boldsymbol{R}^3$ 内の閉曲面** X とは次を満たすものであるとする:

- X は $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合である;
- $\boldsymbol{R}^3$ からの相対位相に関して, X は 13.1 節の意味で閉曲面である;
- X の各点のある近傍 U に対し, $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O および曲面 $\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ が存在して, $U = \boldsymbol{p}(O)$ が成り立つ.

このとき X は向きづけ可能であることがわかり, X 上連続な $\boldsymbol{R}^3$-値関数 $\boldsymbol{n}$ で, X の各点での単位法ベクトルを与えるものが存在する. X は 3 角形分割可能であり, 13.1 節でのような X に同相な位相空間 $\tilde{X}$ を構成する各 3 角形 $\tilde{\Delta}$ に対応する X の部分集合 Δ が存在する. Δ の境界 $\partial\Delta$ は 3 つの曲線の和に含まれると仮定してよい. さらに, Δ はある曲面 $\boldsymbol{p}: O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ による像 $\boldsymbol{p}(O)$ に含まれると仮定してよい. O の開集合 D に対し $\overline{\boldsymbol{p}(D)} = \Delta$ が成り立つとすると, 12.2 節で得られた Gauss-Bonnet の定理から

$$\iint_D K\sqrt{EG-F^2}dudv = \beta_{1,\Delta} + \beta_{2,\Delta} + \beta_{3,\Delta} - \pi - \int_0^{s_0} \kappa_{g,\Delta} ds \tag{1}$$

を得る, 但し

- $\beta_{1,\Delta}$, $\beta_{2,\Delta}$, $\beta_{3,\Delta}$ は Δ の三つの内角であり,
- $\kappa_{g,\Delta}$ は $\partial\Delta$ の測地的曲率である (但し三つの頂点を除く).

$\tilde{X}$ を構成する各 3 角形 $\tilde{\Delta}$ に対し (1) を考えることによって,

$$\iint_X KdA = \sum_{\tilde{\Delta}}(\beta_{1,\Delta} + \beta_{2,\Delta} + \beta_{3,\Delta}) - N_2\pi - \sum_{\tilde{\Delta}}\int_0^{s_0} \kappa_{g,\Delta} ds \tag{2}$$

を得る, 但し N_2 は $\tilde{X}$ を構成する 3 角形の個数であり, また $\sqrt{EG-F^2}dudv$ を dA とおいた. そして

- (2) の右辺第１項は $\tilde{X}$ を構成する頂点の個数 N_0 に 2π を掛けたものであり,
- $\tilde{X}$ を構成する辺の個数 N_1 は $2N_1 = 3N_2$ を満たし, 従って (2) の右辺第２項は $2\pi(N_2 - N_1)$ に等しく,
- 測地的曲率の定義から (2) の右辺第３項は零である

ことがわかる. よって

$$\iint_X KdA = 2\pi(N_0 - N_1 + N_2) \tag{3}$$

を得る. (3) の右辺に現れている $N_0 - N_1 + N_2$ という数は **Euler 数** と呼ばれるものであり, X が S_g に同相である場合には X の Euler 数 $\chi(X)$ は $2-2g$ に等しいことが知られている (特に, $\chi(X)$ は X の位相によって定まる). 従って次を得る.

定理 閉曲面 X 上の Gauss 曲率の積分は X の Euler 数 $\chi(X)$ の 2π 倍に等しい.

幾何概論 II 演習　小試験　（平成２８年１１月１日実施）

[**1**] 次の (1-a), (1-b) のいずれかを選択し, 解答を与えること.

(1-a) 平面曲線 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{p}(t) := (\cosh t,\ \sinh t)$ で定める. このとき $\boldsymbol{p}$ の曲率を求めよ.

(1-b) 曲率が恒等的に 2 に等しい曲線はある円の一部であることを示せ. また, この円の半径を求めよ.

[**2**] 次の (2-a), (2-b) のいずれかを選択し, 解答を与えること.

(2-a) 空間曲線 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{p}(t) := (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で定める. このとき $\boldsymbol{p}$ の曲率ベクトル, 曲率および捩率を求めよ.

(2-b) 曲率が零にはならない空間曲線 $\boldsymbol{p}$ に対し, s を弧長パラメータ, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ をそれぞれ s での曲率および捩率とする. $\boldsymbol{p}(s)$ を $\boldsymbol{p}(s) = {}^t(x(s), y(s), z(s))$ と表し, 3 次の直交行列 T で $\det T = 1$ を満たすものおよび $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\boldsymbol{c}$ に対し, $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) := T\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{c}$ とおく. このとき $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の s での曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ および捩率 $\tilde{\tau}(s)$ はそれぞれ $\kappa(s)$, $\tau(s)$ に等しいことを示せ.

幾何概論 II 演習　小試験　（平成２８年１２月２０日実施）

次の (a), (b), (c), (d) のうち **１問を選択** し, 解答を与えること.

(a) $O, \tilde{O}$ を $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合とする. Φ は O から $\tilde{O}$ の上への全単射な C^2 級写像で, 逆写像 $\Phi^{-1} : \tilde{O} \longrightarrow O$ も C^2 級であるとする. $\boldsymbol{p} : O \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を曲面とする.

(a1) Φ^{-1} と $\boldsymbol{p}$ の合成 $\tilde{\boldsymbol{p}} := \boldsymbol{p} \circ \Phi^{-1}$ は曲面であることを示せ.

(a2) $\boldsymbol{p}$ の $(u_0, v_0) \in O$ での平均曲率 H および $\tilde{\boldsymbol{p}}$ の $\Phi(u_0, v_0) \in \tilde{O}$ での平均曲率 $\tilde{H}$ に対し, $\tilde{H}$ は H または $-H$ に等しいことを示せ.

(b) $t \in \boldsymbol{R}$ に対し, 曲面 $\boldsymbol{p}_t : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}_t(u, v) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t \\ \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t \\ v \cos t + u \sin t \end{pmatrix}$$

で定める $((u, v) \in \boldsymbol{R}^2)$. このとき $\boldsymbol{p}_t$ の第一基本量, 第二基本量, Gauss 曲率および平均曲率を求めよ.

(c) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G が $E = \cosh^2 v$, $F = 0$, $G = 1$ で与えられているとする.

(c1) $\boldsymbol{p}$ の Christoffel 記号を求めよ.

(c2) $\boldsymbol{p}$ の Gauss 曲率を求めよ.

(d) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 E, F, G が $E = A^2$, $F = 0$, $G = B^2$ で与えられているとする, 但し A, B は正値関数である.

(d1) $\boldsymbol{p}$ の Christoffel 記号を A, B を用いて表せ.

(d2) $\boldsymbol{p}$ の第二基本量 L, M, N に対し, $M = 0$ を仮定し $k_1 = L/E$, $k_2 = N/G$ とおく. このとき k_1, k_2 は $\boldsymbol{p}$ の主曲率でありさらに Codazzi-Mainardi の方程式は

$$(k_1)_v = -(\log A)_v (k_1 - k_2), \qquad (k_2)_u = (\log B)_u (k_1 - k_2)$$

と表されることを示せ.

幾何概論 II 演習　小試験　（平成２９年１月２４日実施）

次の (a), (b), (c) のうち **1問を選択** し, 解答を与えること.

(a) $S^2(1)$ の点 p_1, p_2, p_3 を $p_1 := (1,0,0)$, $p_2 := (0,1,0)$, $p_3 := (0,0,1)$ で定める. $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{q}_1(s) := (\cos s, \sin s, 0), \quad \boldsymbol{q}_2(s) := (0, \cos s, \sin s), \quad \boldsymbol{q}_3(s) := (\sin s, 0, \cos s)$$

で定める ($s \in \boldsymbol{R}$). p_1 での $S^2(1)$ の接ベクトル V_0 を $V_0 := (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ で定める.

(a1) V_1 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_1$ に沿う平行なベクトル場で, $V_1(0) = V_0$ を満たすとする. このとき $V_1(\pi/2)$ を求めよ.

(a2) V_2 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_2$ に沿う平行なベクトル場で, $V_2(0) = V_1(\pi/2)$ を満たすとする. このとき $V_2(\pi/2)$ を求めよ.

(a3) V_3 は $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}_3$ に沿う平行なベクトル場で, $V_3(0) = V_2(\pi/2)$ を満たすとする. このとき $V_3(\pi/2)$ を求めよ.

(b) I を開区間とし, $\boldsymbol{q} : I \longrightarrow S^2(1)$ を曲線とする. $S^2(1)$ の曲線 $\boldsymbol{q}$ の測地的曲率が一定であることと $\boldsymbol{q}$ による I の像 $\boldsymbol{q}(I)$ が $\boldsymbol{R}^3$ 内のある平面に含まれることは同値であることを示せ.

(c) $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ は $ad - bc = 1$ を満たすとし, $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ を $T(w) := \dfrac{aw+b}{cw+d}$ で定める, 但し $w = (u, v) \in \mathbb{H}^2$ を $w = u + \sqrt{-1}v$ とも表す. I を開区間とし, $\boldsymbol{q} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ を曲線とする. $t_1, t_2 \in I$ に対し, $\boldsymbol{q}(t_1)$ から $\boldsymbol{q}(t_2)$ までの $\boldsymbol{q}$ の長さは $T \circ \boldsymbol{q}(t_1)$ から $T \circ \boldsymbol{q}(t_2)$ までの $T \circ \boldsymbol{q}$ の長さに等しいことを示せ.

幾何概論 II　期末試験　（平成２９年１月３１日実施）

以下の [1]~[4] に解答を与えること．

[1] 空間曲線 $\boldsymbol{p}:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ の曲率は零にはならないとし，また $\boldsymbol{p}$ のパラメータ t は弧長パラメータとは限らないとする．このとき $\boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{p}(t)$ での曲率ベクトルは

$$-\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{p}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^4}\dot{\boldsymbol{p}}(t)+\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^2}\ddot{\boldsymbol{p}}(t)$$

と表され，曲率および捩率はそれぞれ

$$\kappa(t)=\frac{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{p}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)|^3},\quad \tau(t)=\frac{\det(\dot{\boldsymbol{p}}(t)\,\ddot{\boldsymbol{p}}(t)\,\dddot{\boldsymbol{p}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{p}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{p}}(t)|^2}$$

と表されることを示せ．

[2] a, b は正の定数で，$a>b$ を満たすとする．曲面 $\boldsymbol{p}:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u,v):=((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u)$$

で定める．点 $\boldsymbol{p}(0,0)$ での $\boldsymbol{p}$ の主曲率のうち絶対値が大きいものに対応する主方向と $\pi/6$ の角度をなす単位接ベクトルに関する法曲率を求めよ．

[3] O を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とする．曲面 $\boldsymbol{p}:O\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ の第一基本量 E, F, G は O 上 $E=G$ および $F=0$ を満たすとする．

(3-1) $\boldsymbol{p}$ の Christoffel 記号を E および E の偏導関数を用いて表せ．

(3-2) $\boldsymbol{n}:=\dfrac{1}{|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v$ とし，H を $\boldsymbol{p}$ の平均曲率とする．このとき $\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}=2EH\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．

(3-3) $\boldsymbol{p}$ を O 上の三つの関数 x, y, z を用いて $\boldsymbol{p}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と表す $((u,v)\in O)$．O 上の複素関数 ϕ_1, ϕ_2 および ϕ_3 を

$$\phi_1=\frac{\partial x}{\partial u}-\sqrt{-1}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \phi_2=\frac{\partial y}{\partial u}-\sqrt{-1}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \phi_3=\frac{\partial z}{\partial u}-\sqrt{-1}\frac{\partial z}{\partial v}$$

で定める．このとき ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が $w=u+\sqrt{-1}v$ の正則関数であることと $\boldsymbol{p}$ が極小曲面であることは同値であることを示せ．

[4] ϕ, ψ を $\boldsymbol{R}$ 上の 1 変数 u の関数とし，任意の $u\in\boldsymbol{R}$ に対し $\phi(u)>0$, $\psi'(u)>0$ および $\phi'(u)^2+\psi'(u)^2=1$ を仮定する．さらに u_1, $u_2\in\boldsymbol{R}$ が $u_1<u_2$ および $\phi'(u_1)=\phi'(u_2)=0$ を満たすとする．$\boldsymbol{R}^2$ の開集合 O を $O:=(u_1,u_2)\times(0,v_0)$ で定める，但し $v_0\in(0,2\pi)$ である．このとき回転面

$$\boldsymbol{p}(u,v)=(\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u))$$

に対し，O 上での Gauss 曲率 K の面積分 $\displaystyle\iint_O K\sqrt{EG-F^2}dudv$ を求めよ．