Willmore球面について

安藤　直也 (熊本大学)

E^3 内の Willmore 球面は, 連結, 完備な極小曲面で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つもののある反転による像のコンパクト化と表されることが, Bryant によって証明されている．本講演の目的は Bryant によるこの結果について解説することである．

第１節において, S^3 内の曲面 S に対し共形 Gauss 写像と呼ばれる S から 4 次元 de Sitter 空間 S^4_1 への写像 γ が定義される．S の非臍点の集合を $\mathrm{Reg}\,(S)$ で表すとき, γ は $\mathrm{Reg}\,(S)$ の S^4_1 へのはめこみである．$\gamma|_{\mathrm{Reg}\,(S)}$ が導く計量は S^3 から導かれる計量と共形的であり, S がコンパクトである場合に Willmore 汎関数の値が空間の共形変換によって不変であることは $\gamma|_{\mathrm{Reg}\,(S)}$ が導く計量の観点からも説明される．S が Willmore 曲面であることと, $\gamma|_{\mathrm{Reg}\,(S)}$ に関する平均曲率ベクトルが恒等的に零であることは同値である．

第２節において, S^3 内の Willmore 曲面 S 上に正則４次微分 Φ が定義される．S は連結であるとする．Φ が恒等的に零である場合, $\gamma|_{\mathrm{Reg}\,(S)}$ に関する光的法ベクトル場の一つ ν が一定方向を向いていることがわかり, 従って ν は S^3 の 1 点 x_0 を定める．一般に $\mathrm{Reg}\,(S)$ の各点 p に対し ν が定める S^3 の点は p で S に接しかつ平均曲率ベクトルが等しい全臍的球面 Σ_p に含まれるので, $\Phi \equiv 0$ ならば任意の $p \in S$ に対し $x_0 \in \Sigma_p$ が成り立つ．S が S^2 に同相である場合 Φ は恒等的に零であるので, E^3 内の極小曲面に関する考察を経て, 上述した Bryant の結果を得ることができる．

第３節において, Willmore 汎関数の値が一般に n-共形面積以上であることを用いて, E^n ($n \geqq 3$) 内の射影平面に同相な曲面 S に対する Willmore 汎関数の値を下から評価する．まず $n \geqq 4$ ならば, Li-Yau による S^n 内のコンパクトな曲面の n-共形面積の下からの評価と S^4 内の Veronese 曲面についての考察から, 射影平面の n-共形面積は 6π であることがわかる．従って S に対する Willmore 汎関数の値は 6π 以上であり, Veronese 曲面に対する Willmore 汎関数の値はちょうど 6π であるので, この評価は最良である．一方, 射影平面の 3-共形面積は 12π 以上であることがわかり, 従って $n = 3$ の場合 S に対する Willmore 汎関数の値も 12π 以上である．そして, Kusner は Willmore 汎関数の値がちょうど 12π である射影平面と同相な曲面を発見したので, この評価は最良である．この曲面は Willmore 曲面であり, E^3 内の連結, 完備な極小曲面で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つもののある反転による像をコンパクト化したものである．

本講演の機会を与えて下さった山口大学の中内伸光先生および川上裕氏に心から感謝の意を表します.

1　共形Gauss写像

$\langle\ ,\ \rangle$ を $\boldsymbol{R}^5$ の Lorentz 計量とする: $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^5$ の不定値で対称な双線形形式で,

$$x := \left(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\right), \quad y := \left(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}\right) \in \boldsymbol{R}^5$$

に対し

$$\langle x, y\rangle := -x^{(0)}y^{(0)} + x^{(1)}y^{(1)} + x^{(2)}y^{(2)} + x^{(3)}y^{(3)} + x^{(4)}y^{(4)}$$

で定義される. ベクトル $x \in \boldsymbol{R}^5$ が

(i) 空間的 (*space-like*) であるとは, $\langle x, x\rangle > 0$ が成り立つときにいう;

(ii) 時間的 (*time-like*) であるとは, $\langle x, x\rangle < 0$ が成り立つときにいう;

(iii) 光的 (*light-like*) または零的 (*null*) であるとは, x は零ベクトルではなくかつ $\langle x, x\rangle = 0$ を満たすときにいう.

時間的または光的ベクトル $x \in \boldsymbol{R}^5$ が未来を向いている (*future-directed*) とは, $x^{(0)} > 0$ が成り立つときにいう. L^+ を $\boldsymbol{R}^5$ の全ての未来を向いている光的ベクトルからなる集合とする. 二つの $x, y \in L^+$ に対し, x と y が一次従属であるとき $x \sim y$ と書くことにする. $\sim$ は L^+ における同値関係であり, 商空間 $L^+/\sim$ を 3 次元単位球面 S^3 と同一視できる: L^+ の部分集合 $\left\{x \in L^+ \;\middle|\; x^{(0)} = 1\right\}$ は $\sim$ の全ての同値類の代表元からなる集合すなわち代表系であり, この集合は $\langle\ ,\ \rangle$ の引き戻しを付与されることによって S^3 と等長な Riemann 多様体とみなされる.

M を向きづけられた 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を M の S^3 へのはめこみとする. e_4 は ι で S^3 の接空間に直交する M に沿う滑らかなベクトル場で, $e_4 \in L^+$ および $\langle e_4, \iota\rangle = -1$ を満たすとする. また e_3 は $\iota : M \longrightarrow S^3$ に関する M の (空間的) 単位法ベクトル場で, 各 $p \in M$ および M の向きを与える $T_p(M)$ の基底 (v_1, v_2) に対し

$$(\iota(p),\ d\iota(v_1),\ d\iota(v_2),\ e_3(p),\ e_4(p))$$

は $\boldsymbol{R}^5$ の向きを与える $T_{\iota(p)}(\boldsymbol{R}^5)$ の基底であるとする. H を $\iota : M \longrightarrow S^3$ に関する M の平均曲率とする. M から 4 次元 de Sitter 空間 $S^4_1 := \{x \in \boldsymbol{R}^5 \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ への滑らかな写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ を $\gamma_\iota := e_3 + H\iota$ で定義する. $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ を ι に関する M の全ての非臍点からなる集合とする. $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ の点 p に対し, (u, v) は $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ における p の近傍 U_p 上の局所座標で, $\partial/\partial u$ および $\partial/\partial v$ は ι に関する主方向に含まれるとする. k_1, k_2 をそれぞれ $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ に対応する主曲率とし, $k_1 > k_2$ を仮定する. このとき U_p 上で次が成り立つ:

$$d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\varepsilon d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + H_u\iota, \quad d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \varepsilon d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + H_v\iota, \tag{1.1}$$

但し

$$\varepsilon := \frac{k_1 - k_2}{2} = \sqrt{H^2 - K + 1}$$

であり, K は ι によって導かれた計量 g に関する M の曲率である. (1.1) から, $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(M,\iota)}$ は g と共形的な計量 $\tilde{g}$ を導きそして $\tilde{g}$ は $\tilde{g} = \varepsilon^2 g$ と表されることがわかる. p が ι に関する M の臍点であるとき, p の近傍上の局所座標 (u, v) に対し $(d\gamma_\iota)_p(\partial/\partial u)$ および $(d\gamma_\iota)_p(\partial/\partial v)$ は光的ベクトルである. 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ をはめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ の共形 Gauss 写像 (*conformal Gauss map*) と呼ぶ.

以下, $\mathrm{Reg}\,(M,\iota) = M$ を仮定する. このとき $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ ははめこみである. $O(4,1)$ を de Sitter 群 (符号数が $(4,1)$ である Lorentz 群) とする, つまり $\boldsymbol{R}^5$ の線形変換で Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つものの全体からなる群とする. $O(4,1)$ の元で, $\boldsymbol{R}^5$ の向きおよび未来の方向を保つものの全体からなる集合を $\tilde{G}$ で表す. $\tilde{G}$ は $O(4,1)$ の部分群である. G で S^3 の向きを保つ共形変換の全体からなる群を表すとき, $\tilde{G}$ の各元 $\tilde{X}$ は G の元 X を定め, こうして得られる $\tilde{G}$ から G への写像は群の同型を与える. 任意の $\tilde{X} \in \tilde{G}$ に対し,

$$\gamma_{X\circ\iota} = \tilde{X} \circ \gamma_\iota \tag{1.2}$$

が成り立つ ([1] の命題 4.3). よって $\gamma_{X\circ\iota}$ が導く計量は $X \in G$ に依らず, このことから特にコンパクトな曲面に対する Willmore 汎関数の値は空間の共形変換によって不変であることがわかる.

M 上の $\boldsymbol{R}^5$-値関数 ν を次のように定義する:

$$\nu := \frac{1}{2}\left(\frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} + \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2} + H^2\right)\iota - \frac{H_u}{A^2\varepsilon} d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_v}{B^2\varepsilon} d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + He_3 + e_4, \tag{1.3}$$

但し (u, v) は M の 1 点の近傍上の局所座標で, $\partial/\partial u$ および $\partial/\partial v$ は ι に関する主方向に含まれるとし, また A, B は $g = A^2du^2 + B^2dv^2$ によって与えられる正値関数である. このときまず ν は L^+-値関数である, つまり ν は L^+ に値をとることがわかる. また $\langle \nu, \iota\rangle = -1$ がわかる. また ι, ν の各々は γ_ι, $d\gamma_\iota(\partial/\partial u)$, $d\gamma_\iota(\partial/\partial v)$ の各々と Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交しているので, ι, ν ははめこみ $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する M の法ベクトル場である. ν に関して次の二つの命題が成り立つ:

命題 1.1 $X \in G$ に対し, ν_X をはめこみ $X \circ \iota$ に対して (1.3) の中でのように定義される L^+-値関数とする. このとき M の各点 p に対して ν が定める S^3 の点の X による像は, p に対して ν_X が定める S^3 の点に等しい.

証明　$X \in G$ に対し, $X \circ \iota$ および ν_X ははめこみ $\gamma_{X\circ\iota} : M \longrightarrow S_1^4$ に関する M の法ベクトル場である. X に対応する $\tilde{G}$ の元を $\tilde{X}$ で表すとき, M の各点で $X \circ \iota$ と $\tilde{X} \circ \iota$ は 1 次従属である ([1] の命題 4.1 の証明を参考にするとわかる). よって (1.2) に注意して, ν_X と $\tilde{X} \circ \nu$ は 1 次従属であることがわかる. よって命題 1.1 を得る. □

命題 1.2 ([3]) $p \in M$ に対し, Σ_p は $\iota(p)$ で $\iota(M)$ に接する S^3 内の全臍的球面で, 平均曲率ベクトルが ι に関する p での M の平均曲率ベクトルに等しいとする. このとき Σ_p は $\nu(p)$ が定める S^3 の点を含む.

証明　M の点 p に対し, $\boldsymbol{R}^5$ において Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $\gamma_\iota(p)$ に直交し $\boldsymbol{R}^5$ の原点を通る超平面と $\left\{x \in L^+ \,\middle|\, x^{(0)} = 1\right\}$ の共通部分がちょうど Σ_p である. $\square$

はめこみ $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ に関する M の法ベクトル場 ι, ν の各々について, γ_ι に関する型作用素のトレースを求めたい. (1.1) から,

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial u}\iota = -\frac{1}{\varepsilon}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_u}{\varepsilon}\iota, \qquad \overline{\nabla}_{\partial/\partial v}\iota = \frac{1}{\varepsilon}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{H_v}{\varepsilon}\iota$$

を得る, 但し $\overline{\nabla}$ は $(\boldsymbol{R}^5, \langle\ ,\ \rangle)$ の Levi-Civita 接続である. よって M の γ_ι に関する法ベクトル場 ι についての型作用素のトレースは零である. また (1.1) を用いて ν を

$$\begin{aligned}\nu = &\frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right)\iota + He_3 + e_4\end{aligned} \tag{1.4}$$

と表すことができ, また ι を $\iota := \left(1, \iota^{(1)}, \iota^{(2)}, \iota^{(3)}, \iota^{(4)}\right)$ と表すとき

$$e_4 = -\frac{1}{2}\left(-1, \iota^{(1)}, \iota^{(2)}, \iota^{(3)}, \iota^{(4)}\right) \tag{1.5}$$

が成り立つ. (1.4) および (1.5) に注意すると,

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial u}\nu := c_{11}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + c_{12}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + c_{13}\iota + c_{14}\nu + c_{10}\gamma_\iota$$

とおくとき,

$$\begin{aligned}c_{11} = &\frac{H_{uu}}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}(\log A\varepsilon)_u + \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}(\log A\varepsilon)_v\\ &- \frac{1}{2\varepsilon}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right) + \frac{Hk_1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{1.6}$$

がわかる. 同様に

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial v}\nu := c_{21}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + c_{22}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + c_{23}\iota + c_{24}\nu + c_{20}\gamma_\iota$$

とおくとき,

$$\begin{aligned}c_{22} = &\frac{H_{vv}}{B^2\varepsilon^2} - \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}(\log B\varepsilon)_v + \frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}(\log B\varepsilon)_u\\ &+ \frac{1}{2\varepsilon}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right) - \frac{Hk_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{1.7}$$

がわかる. (1.6) および (1.7) から, M の $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ に関する法ベクトル場 ν についての型作用素のトレースは $-\big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)$ に等しいことがわかる, 但し $\tilde{\Delta}$ は $\tilde{g}$ に関する M 上の Laplacian である.

$\tilde{h}$ を $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ に関する M の第二基本形式とする. このとき M の 1 点での二つの接ベクトル v_1, v_2 および γ_ι に関する M の法ベクトル ξ に対し,

$$\tilde{g}\big(\tilde{A}_\xi(v_1), v_2\big) = \big\langle \tilde{h}(v_1, v_2), \xi \big\rangle \tag{1.8}$$

が成り立つ, 但し $\tilde{A}_\xi$ は ξ についての M の型作用素である. よって $\langle \nu, \iota \rangle = -1$ および (1.8) を用いて,

$$\frac{1}{A^2\varepsilon^2}\tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{1}{B^2\varepsilon^2}\tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)\iota \tag{1.9}$$

を得る. (1.9) から, $\big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)\iota$ は $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ に関する M の平均曲率ベクトルの 2 倍に等しいことがわかる. Δ を g に関する M 上の Laplacian とすると, $\big(H^2 - K + 1\big)\tilde{\Delta} = \Delta$ が成り立つ. よって Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式 ([1, p. 12] の式 (2.18)) に注意して, 次の定理を得る:

定理 1.3 ([3]) $\mathrm{Reg}\,(M, \iota) = M$ を仮定する. このとき共形 *Gauss* 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ に関する M の平均曲率ベクトルが恒等的に零であることと, $\iota : M \longrightarrow S^3$ が *Willmore* であることは同値である.

2 Willmore曲面上の正則 4 次微分

この節においては, $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)=M$ を仮定しない. (u,v) は M の各点の近傍上の局所座標で $g(\partial/\partial u,\partial/\partial v)=0$ を満たすとするが, $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が ι に関する主方向に含まれているとは仮定しない. g は $g=A^2du^2+B^2dv^2$ と表される. そして

$$e_0:=\iota,\quad e_1:=\frac{1}{A}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\quad e_2:=\frac{1}{B}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とおき, e_1, e_2 でそれぞれ $(1/A)\partial/\partial u$, $(1/B)\partial/\partial v$ も表す. 1-形式 ω_0^1, ω_0^2 を $de_0=e_1\omega_0^1+e_2\omega_0^2$ で定義する. h を $\iota:M\longrightarrow S^3$ に関する M の第二基本形式とし, $h_{ij}:=h(e_i,e_j)$ とおく $(i,j\in\{1,2\})$. このとき (1.5) に注意して,

$$\begin{aligned}
de_1&=-\frac{1}{2}e_0\omega_0^1+e_2\omega_1^2+e_3(h_{11}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2)+e_4\omega_0^1,\\
de_2&=-\frac{1}{2}e_0\omega_0^2-e_1\omega_1^2+e_3(h_{21}\omega_0^1+h_{22}\omega_0^2)+e_4\omega_0^2,\\
de_3&=-e_1(h_{11}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2)-e_2(h_{21}\omega_0^1+h_{22}\omega_0^2),\\
de_4&=-\frac{1}{2}(e_1\omega_0^1+e_2\omega_0^2)
\end{aligned}\tag{2.1}$$

を得る, 但し ω_1^2 は 1-形式である. $dde_0=0$, (2.1) の第 1 式および第 2 式を用いて,

$$d\omega_0^1=\omega_1^2\wedge\omega_0^2,\quad d\omega_0^2=-\omega_1^2\wedge\omega_0^1\tag{2.2}$$

を得る. また

$$\hat{e}_0:=e_0,\quad \hat{e}_1:=e_1,\quad \hat{e}_2:=e_2,\quad \hat{e}_3:=e_3+He_0,\quad \hat{e}_4:=\frac{1}{2}H^2e_0+He_3+e_4$$

とおく. このとき $de_0=e_1\omega_0^1+e_2\omega_0^2$ および (2.1) から,

$$\begin{aligned}
d\hat{e}_0&=\hat{e}_1\omega_0^1+\hat{e}_2\omega_0^2,\\
d\hat{e}_1&=\hat{e}_0\hat{\omega}_1^0+\hat{e}_2\omega_1^2+\hat{e}_3\left(\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2\right)+\hat{e}_4\omega_0^1,\\
d\hat{e}_2&=\hat{e}_0\hat{\omega}_2^0-\hat{e}_1\omega_1^2+\hat{e}_3\left(h_{21}\omega_0^1-\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^2\right)+\hat{e}_4\omega_0^2,\\
d\hat{e}_3&=\hat{e}_0dH-\hat{e}_1\left(\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2\right)-\hat{e}_2\left(h_{21}\omega_0^1-\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^2\right),\\
d\hat{e}_4&=\hat{e}_1\hat{\omega}_1^0+\hat{e}_2\hat{\omega}_2^0+\hat{e}_3dH
\end{aligned}\tag{2.3}$$

を得る, 但し

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_1^0&:=\left(-\frac{1}{2}-Hh_{11}+\frac{1}{2}H^2\right)\omega_0^1-Hh_{12}\omega_0^2,\\
\hat{\omega}_2^0&:=-Hh_{21}\omega_0^1+\left(-\frac{1}{2}-Hh_{22}+\frac{1}{2}H^2\right)\omega_0^2
\end{aligned}$$

である．関数 H_1, H_2 を $H_1 := e_1(H), H_2 := e_2(H)$ で定める．このとき $dH = H_1\omega_0^1 + H_2\omega_0^2$ が成り立つ．よって (2.3) の第 4 式および (2.2) を用いて,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(dH_1 - H_2\omega_1^2 - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0 - h_{21}\hat{\omega}_2^0\right) \wedge \omega_0^1 \\ &\quad + \left(dH_2 + H_1\omega_1^2 - h_{12}\hat{\omega}_1^0 + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0\right) \wedge \omega_0^2 \end{aligned}$$

を得る．よって関数 p_{ij} $(i,j \in \{1,2\})$ が存在して, $p_{12} = p_{21}$ および

$$\begin{aligned} dH_1 &= H_2\omega_1^2 + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0 + h_{12}\hat{\omega}_2^0 + p_{11}\omega_0^1 + p_{12}\omega_0^2, \\ dH_2 &= -H_1\omega_1^2 + h_{12}\hat{\omega}_1^0 - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0 + p_{21}\omega_0^1 + p_{22}\omega_0^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} &\omega := \omega_0^1 + \sqrt{-1}\omega_0^2, \quad \alpha := \hat{\omega}_1^0 + \sqrt{-1}\hat{\omega}_2^0, \quad \varphi := \frac{1}{2}(H_1 - \sqrt{-1}H_2), \\ &\psi := \frac{h_{11}-h_{22}}{2} - \sqrt{-1}h_{12}, \quad q := \frac{1}{2}\left(\frac{p_{11}-p_{22}}{2} - \sqrt{-1}p_{12}\right) \end{aligned}$$

とおくと, (2.4) は

$$d\varphi = \sqrt{-1}\varphi\omega_1^2 + \frac{1}{2}\psi\alpha + q\omega + \frac{1}{4}(p_{11}+p_{22})\bar{\omega} \tag{2.5}$$

と表される．∇ を Riemann 多様体 (M,g) の Levi-Civita 接続とするとき, (2.4) を用いて

$$\begin{aligned} &p_{11} + p_{22} \\ &= dH_1(e_1) - H_2\omega_1^2(e_1) - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0(e_1) - h_{12}\hat{\omega}_2^0(e_1) \\ &\qquad + dH_2(e_2) + H_1\omega_1^2(e_2) - h_{12}\hat{\omega}_1^0(e_2) + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0(e_2) \\ &= e_1(e_1(H)) + e_2(e_2(H)) - g(\nabla_{e_1}e_1, e_2)e_2(H) - g(\nabla_{e_2}e_2, e_1)e_1(H) \\ &\qquad + \frac{(h_{11}-h_{22})^2}{2}H + 2h_{12}^2 H \\ &= \Delta H + 2(H^2 - K + 1)H \end{aligned} \tag{2.6}$$

がわかるので, ι が Willmore はめこみであるならば (2.5) および (2.6) から

$$d\varphi = \sqrt{-1}\varphi\omega_1^2 + \frac{1}{2}\psi\alpha + q\omega \tag{2.7}$$

を得る．

V_1, V_2, V_3 を M の開集合上のベクトル場とし, テンソル場 ∇h を

$$(\nabla_{V_1}h)(V_2, V_3) := V_1(h(V_2, V_3)) - h(\nabla_{V_1}V_2, V_3) - h(V_2, \nabla_{V_1}V_3)$$

で定める．そして $h_{ijk} := (\nabla_{e_k} h)(e_i, e_j)$ とおく $(i, j, k \in \{1, 2\})$．このとき $i, j \in \{1, 2\}$ に対し

$$dh_{ij} = \sum_{k=1}^{2} (h_{jk}\omega_i^k + h_{ik}\omega_j^k + h_{ijk}\omega_0^k) \tag{2.8}$$

が成り立つ, 但し $\omega_1^1 = 0$, $\omega_2^2 = 0$, $\omega_2^1 := -\omega_1^2$ である．(2.8) を用いて,

$$dH = \frac{h_{111} + h_{221}}{2}\omega_0^1 + \frac{h_{112} + h_{222}}{2}\omega_0^2$$

がわかり, 従って $H_i = (1/2)(h_{11i} + h_{22i})$ を得る．また Codazzi の方程式

$$(\nabla_{V_1} h)(V_2, V_3) = (\nabla_{V_2} h)(V_1, V_3)$$

が成り立つので, h_{ijk} は添字 i, j, k に関して対称である: $h_{112} = h_{121} = h_{211}$ および $h_{122} = h_{212} = h_{221}$ が成り立つ．h_{ijk} が i, j, k に関して対称であること, (2.8) および $H_i = (1/2)(h_{11i} + h_{22i})$ を用いて,

$$d\psi = 2\sqrt{-1}\psi\omega_1^2 + \varphi\bar{\omega} + \zeta\omega \tag{2.9}$$

を得る, 但し

$$\zeta := \frac{1}{4}(h_{111} - 3h_{221}) - \frac{\sqrt{-1}}{4}(3h_{112} - h_{222})$$

である．

以上に現れた ω, φ, ψ, q, ζ に対し,

$$\Phi := (\psi q - \varphi\zeta)\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega \tag{2.10}$$

は (u, v) の取り方に依存しない: $\check{e}_1$, $\check{e}_2$ が関数 θ を用いて

$$\check{e}_1 := (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2, \quad \check{e}_2 := -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$$

で与えられるとし, $\check{\omega}_1^2$, $\check{\omega}$, $\check{\alpha}$, $\check{\varphi}$, $\check{\psi}$, $\check{q}$, $\check{\zeta}$ は $(\check{e}_1, \check{e}_2)$ に関するものとすると,

$$\check{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + d\theta, \quad \check{\omega} = e^{-\sqrt{-1}\theta}\omega, \quad \check{\alpha} = e^{-\sqrt{-1}\theta}\alpha, \quad \check{\varphi} = e^{\sqrt{-1}\theta}\varphi, \quad \check{\psi} = e^{2\sqrt{-1}\theta}\psi$$

であるので, (2.5) および (2.6) を用いて $\check{q} = e^{2\sqrt{-1}\theta}q$ がわかり, (2.9) を用いて $\check{\zeta} = e^{3\sqrt{-1}\theta}\zeta$ がわかる．従って Φ は M 上で定義された複素 4 次微分である．

命題 2.1 ([3]) *ι が Willmore はめこみであるならば, 複素 4 次微分 Φ は正則である．*

証明　(2.2) から, $d\omega = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \omega$ を得る．また (2.3) を用いて

$$d\omega_1^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\psi\bar{\psi}\omega \wedge \bar{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\omega \wedge \bar{\alpha} + \alpha \wedge \bar{\omega}) \tag{2.11}$$

がわかり, また (2.2) および (2.8) を用いて

$$d\alpha = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \alpha - \varphi\bar{\psi}\omega \wedge \bar{\omega} \tag{2.12}$$

がわかる．(2.7), (2.9), $d\omega = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \omega$, (2.11) および (2.12) を用いて,

$$\begin{aligned} dq &= 2\sqrt{-1}q\omega_1^2 + \frac{1}{2}\zeta\alpha - \frac{3}{2}\varphi\bar{\alpha} - \varphi\psi\bar{\psi}\bar{\omega} + a\omega, \\ d\zeta &= 3\sqrt{-1}\zeta\omega_1^2 - \frac{3}{2}\psi\bar{\alpha} - \psi^2\bar{\psi}\bar{\omega} + q\bar{\omega} + b\omega \end{aligned} \tag{2.13}$$

を得る, 但し a, b は複素数値関数である．よって (2.7), (2.9) および (2.13) を用いて,

$$d(\psi q - \varphi\zeta) = 4\sqrt{-1}(\psi q - \varphi\zeta)\omega_1^2 + (\psi a - \varphi b)\omega \tag{2.14}$$

を得る．ここで (u, v) が等温座標であるとする．このとき $w := u+\sqrt{-1}v$ に対し, $Adw = \omega$ が成り立つ．$f := (\psi q - \varphi\zeta)A^4$ とおくとき, Φ が正則であることと $df \wedge \omega = 0$ は同値である．そして (2.14) を用いて

$$df \wedge \omega = 4A^3(\psi q - \varphi\zeta)(\sqrt{-1}A\omega_1^2 + dA) \wedge \omega$$

(但し dA は A の微分であり, 面積要素ではない) がわかるが,

$$0 = ddw = d\left(\frac{1}{A}\omega\right) = -\frac{1}{A^2}(dA + \sqrt{-1}A\omega_1^2) \wedge \omega$$

が成り立つので, $df \wedge \omega = 0$ がわかる．従って Φ は正則である．　$\square$

$e := \hat{e}_1 - \sqrt{-1}\hat{e}_2$ とおき,

$$Y := 2\varphi\bar{\varphi}\hat{e}_0 - \varphi\bar{\psi}e - \bar{\varphi}\psi\bar{e} + \psi\bar{\psi}\hat{e}_4$$

とおく．このとき $\langle Y, Y\rangle = 0$ が成り立つ．また

$$Z := 2\bar{\varphi}q\hat{e}_0 - \bar{\psi}qe - \bar{\varphi}\zeta\bar{e} + \bar{\psi}\zeta\hat{e}_4$$

とおく．このとき

$$\langle Z, Z\rangle = 0, \quad \langle Z, \bar{Z}\rangle = 2(\psi q - \varphi\zeta)\overline{(\psi q - \varphi\zeta)}$$

が成り立つ．ι が Willmore はめこみであるとする．このとき (2.3), (2.7) および (2.9) を用いて, $dY = Z\omega + \bar{Z}\bar{\omega}$ を得る．よって

$$\langle dY, dY\rangle = 2|\psi q - \varphi\zeta|^2(\omega \otimes \bar{\omega} + \bar{\omega} \otimes \omega) \tag{2.15}$$

を得る．ここで M は連結であるとする．このとき $\langle Y, Y\rangle = 0$ および (2.15) から, Φ が恒等的に零であるならば $S^3 = L^+ \cap \left\{x^{(0)} = 1\right\}$ の点 x_0 および $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ 上の正値関数 f' が存在して $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ 上 $Y = f' x_0$ が成り立つことがわかる．

ここで $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ の点の近傍上 $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が ι に関する主方向に含まれると仮定し,

$$\tilde{e}_0 := \iota, \quad \tilde{e}_1 := \frac{1}{\varepsilon A} d\gamma_\iota \left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad \tilde{e}_2 := \frac{1}{\varepsilon B} d\gamma_\iota \left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \tilde{e}_3 := \gamma_\iota, \quad \tilde{e}_4 := \nu$$

とおく．このとき (1.1) および (1.3) に注意して,

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_0 = e_0, \quad \tilde{e}_1 = -e_1 + \tilde{H}_1 e_0, \quad \tilde{e}_2 = e_2 + \tilde{H}_2 e_0, \quad \tilde{e}_3 = e_3 + H e_0, \\
&\tilde{e}_4 = \frac{1}{2}(H^2 + \tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2) e_0 - \tilde{H}_1 e_1 + \tilde{H}_2 e_2 + H e_3 + e_4
\end{aligned}$$

がわかる, 但し $\tilde{H}_1 := (1/\varepsilon A)(\partial H/\partial u)$, $\tilde{H}_2 := (1/\varepsilon B)(\partial H/\partial v)$ である．よって

$$[e_0, e_1, e_2, e_3, e_4] = [\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4] \tilde{M}^{-1}$$

が成り立つ, 但し

$$\tilde{M}^{-1} := \begin{pmatrix}
1 & \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_2 & -H & \frac{1}{2}(H^2 + \tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2) \\
0 & -1 & 0 & 0 & -\tilde{H}_1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\tilde{H}_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

である．また

$$[\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4] = [e_0, e_1, e_2, e_3, e_4] \hat{M}, \quad \hat{M} := \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & H & \frac{1}{2}H^2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

である．よって

$$\tilde{M}^{-1} \hat{M} = \begin{pmatrix}
1 & \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_2 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2) \\
0 & -1 & 0 & 0 & -\tilde{H}_1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\tilde{H}_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

および $h_{12}=0$ に注意して,

$$
\begin{aligned}
Y &= [\hat{e}_0,\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4]\begin{pmatrix} 2\varphi\bar{\varphi} \\ -(\varphi\bar{\psi}+\bar{\varphi}\psi) \\ \sqrt{-1}(\varphi\bar{\psi}-\bar{\varphi}\psi) \\ 0 \\ \psi\bar{\psi} \end{pmatrix} \\
&= [\tilde{e}_0,\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4]\tilde{M}^{-1}\hat{M}\begin{pmatrix} 2\varphi\bar{\varphi} \\ -(\varphi\bar{\psi}+\bar{\varphi}\psi) \\ \sqrt{-1}(\varphi\bar{\psi}-\bar{\varphi}\psi) \\ 0 \\ \psi\bar{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \psi\bar{\psi}\tilde{e}_4
\end{aligned}
$$

を得る. 以上から, 次を得る:

命題 2.2 ([3]) *M は連結であるとする. また Willmore はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に対し, 正則 4 次微分 Φ は恒等的に零であるとする. このとき $S^3 = L^+ \cap \left\{x^{(0)} = 1\right\}$ の点 x_0 および $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上の正値関数 f が存在して, $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上で (1.3) によって定義された L^+-値関数 ν は fx_0 と表される.*

注意　ι, Φ は命題 2.2 の仮定を満たすとする. 命題 1.1 を用いて, $X \in G$ に対し ν_X を $\mathrm{Reg}\,(M, X\circ\iota) = \mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上 $f_X X(x_0)$ と表すことができる, 但し f_X は $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上の正値関数である. よって (2.10) および (2.15) から, Willmore はめこみ $X\circ\iota$ に対して定まる正則 4 次微分 Φ_X は恒等的に零であることがわかる. よって Willmore はめこみ ι に対して, 正則 4 次微分 Φ_X が恒等的に零であるかどうかは $X \in G$ に依存しない.

M を連結な Riemann 面とし, Φ を M 上の正則 4 次微分とする. このとき M の各点の近傍上の局所複素座標 $w := u + \sqrt{-1}v$ に対し, Φ は $\Phi = F(w)dw^4$ と表される, 但し F は w の正則関数であり, $dw^4 := dw\otimes dw\otimes dw\otimes dw$ である. M の点 p で $\Phi \neq 0$ とする. このとき M 上の 4 次共変テンソル場である $\mathrm{Im}\,\Phi$ に対し, $T_p(M)$ のある 4 つの 1 次元部分空間 l_1, l_2, l_3, l_4 が次を満たす:

(i) $\angle l_1 l_2 = \pi/4$, $\angle l_1 l_3 = \pi/2$, $\angle l_2 l_4 = \pi/2$, 但し $\angle l_i l_j$ で l_i と l_j の間の角度を表す;

(ii) $\{\eta \in T_p(M) \mid \mathrm{Im}\,\Phi(\eta,\eta,\eta,\eta) = 0\} = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$.

$\mathrm{Im}\,\Phi$ は滑らかなので, p のある近傍 U_p 上で定義された滑らかで零にはならない 4 つのベクトル場 V_1, V_2, V_3, V_4 が次を満たす:

(i) U_p の任意の点で $\angle V_1V_2 = \pi/4$, $\angle V_1V_3 = \pi/2$, $\angle V_2V_4 = \pi/2$;

(ii) 各 $i \in \{1,2,3,4\}$ に対し $\mathrm{Im}\,\Phi(V_i,V_i,V_i,V_i) \equiv 0$ が成り立ち, さらに任意の $q \in U_p$ に対し $\mathrm{Im}\,\Phi(\eta,\eta,\eta,\eta) = 0$ を満たす $\eta \in T_q(M)$ はある V_i の定数倍と表される.

従って $\mathrm{Im}\,\Phi$ は Φ の全ての非零点からなる開集合上の滑らかな 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ を定める. M の点 p_0 で $\Phi = 0$ とし, $\Phi \not\equiv 0$ とする. このとき p_0 のある近傍 U_{p_0} 上の Φ の零点は p_0 のみである. U_{p_0} 上の局所複素座標 $w = u + \sqrt{-1}v$ は p_0 で 0 であるとする. このとき U_{p_0} 上で Φ は $\Phi = w^n G(w)dw^4$ と表される, 但し $n \in \boldsymbol{N}$ であり G は $G(0) \neq 0$ を満たす w の正則関数である. r_0 は正数で, 任意の $r \in (0, r_0)$ および任意の $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し $re^{\sqrt{-1}\theta}$ は U_{p_0} の点に対応しているとする. このとき $(0, r_0) \times \boldsymbol{R}$ 上の連続関数 ϕ で, 任意の $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \boldsymbol{R}$ に対し

$$V := \cos\phi(r,\theta)\frac{\partial}{\partial u} + \sin\phi(r,\theta)\frac{\partial}{\partial v}$$

が $re^{\sqrt{-1}\theta}$ で $\mathrm{Im}\,\Phi(V,V,V,V) = 0$ を満たすようなものが存在する. このとき

$$\frac{\phi(r,\theta+8\pi) - \phi(r,\theta)}{8\pi}$$

は $(r,\theta) \in (0,r_0) \times \boldsymbol{R}$, 連続関数 ϕ および複素座標 w の取り方には依らず, 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ にのみ依存する有理数である. この有理数を $\mathcal{D}$ に関する p_0 の <u>指数</u> (*index*) と呼び, $\mathrm{ind}_{p_0}(\mathcal{D})$ で表す. U_{p_0} の点 $re^{\sqrt{-1}\theta}$ で

$$\Phi(V,V,V,V) = r^n e^{\sqrt{-1}(n\theta + 4\phi(r,\theta))} G(re^{\sqrt{-1}\theta})$$

が成り立つことに注意すると, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し十分小さい $r_0 > 0$ およびある実数 $\psi_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在して任意の $r \in (0, r_0)$ および任意の $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し $|n\theta + 4\phi(r,\theta) + \psi_0| < \varepsilon$ が成り立つことがわかる. このことと $\phi(r,\theta+8\pi) - \phi(r,\theta)$ が π の整数倍と表されることに注意すると, $\mathrm{ind}_{p_0}(\mathcal{D}) = -n/4$ であることがわかり, 特に $\mathrm{ind}_{p_0}(\mathcal{D})$ は負であることがわかる.

さて M はコンパクトであるとする. $\Phi \not\equiv 0$ であるならば, Φ の零点は高々有限個存在する. この場合, Hopf-Poincaré の定理 ([5, p. 113]) の証明を参考にすることによって, 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ に関する Φ の零点の指数の和は M の Euler 数に等しいことがわかる. ここで M が球面に同相であるとすると, 負である指数の和が M の Euler 数である $2 > 0$ に等しいことになり, 矛盾が生じる. この矛盾は $\Phi \not\equiv 0$ から生じたものである. 以上から, 次を得る:

命題 2.3 ([3]) M を S^2 に同相な可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を *Willmore* はめこみとする. このとき (2.10) で定義された正則 4 次微分 Φ は恒等的に零である.

命題 1.2, 命題 2.2 および命題 2.3 を用いて, 次の定理を証明することができる:

定理 2.4 ([3]) M を S^2 に同相な可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を *Willmore* はめこみとする. このときある $x_0 \in \iota(M)$ に対し, 立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ による $\iota(M) \setminus \{x_0\}$ の像は, E^3 内の連結, 完備な極小曲面で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つものである.

証明　命題 2.3 によると, (2.10) で定義された正則 4 次微分 Φ は恒等的に零である. よって命題 2.2 から, (1.3) によって定義された $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ 上の L^+-値関数 ν が定める S^3 の点は $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ の点の取り方に依存しないことがわかる. ν が定める S^3 の点を x_0 で表すとき, 命題 1.2 から任意の $p \in M$ に対し $x_0 \in \Sigma_p$ がわかる. 立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ は共形的でありかつ $\Sigma_p \setminus \{x_0\}$ の π による像は E^3 内の平面であるので, π による $\iota(M) \setminus \{x_0\}$ の像は E^3 内の極小曲面でありそしてこのことから $x_0 \in \iota(M)$ を得る. この曲面は連結かつ完備でありそして [1] の定理 3.15 における条件 (b) を満たすので, 定理 2.4 を得る. □

注意　M を連結, コンパクトな 2 次元可微分多様体とする. このとき命題 1.2 および命題 2.2 を用いて, Willmore はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に対して定まる正則 4 次微分 Φ が恒等的に零であるならば定理 2.4 における結論と同じものを得ることができる. S は E^3 内の連結, 完備な極小曲面で, 全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つとする. このとき立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ による S の逆像に x_0 を加えた集合は S^3 内のコンパクトで滑らかな曲面であり, 従ってこの曲面は冒頭に記したような M の Willmore はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ による像である. このとき任意の $p \in M$ に対し, $x_0 \in \Sigma_p$ が成り立つ. Σ_p は $\left\{x \in L^+ \;\middle|\; x^{(0)} = 1\right\}$ と $\boldsymbol{R}^5$ の原点を通る超平面で Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $\gamma_\iota(p)$ に直交するものとの共通部分であるので, 任意の $p \in M$ に対し $\langle x_0, \gamma_\iota(p)\rangle = 0$ が成り立つ. よって (u, v) を p の近傍 U_p 上の局所座標とすると, U_p 上

$$\left\langle x_0, d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right\rangle = \left\langle x_0, d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\rangle = 0$$

を得る. よって x_0 ははめこみ $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}\,(M,\iota)}$ に関する法ベクトル場である. $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ の任意の点で ν が定める S^3 の点と ι は異なるので, $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ 上 ν が定める S^3 の点は x_0 のみであることがわかる. よって (2.10) および (2.15) に注意して, Willmore はめこみ ι に対して定まる正則 4 次微分 Φ は恒等的に零であることがわかる. 以上から, はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に対し次の (a), (b) は同値であることがわかる:

(a) ι は Willmore はめこみで, M 上に定まる正則 4 次微分 Φ が恒等的に零である;

(b) E^3 内の連結, 完備な極小曲面 S で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つものが存在して, 立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ による S の逆像に x_0 を加えて得られる S^3 内のコンパクトで滑らかな曲面は $\iota(M)$ に等しい.

3　射影平面のはめこみに対するWillmore汎関数の値の下限

M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とし, M に一つの共形構造を与える. そして $\iota : M \longrightarrow S^n$ を M の n 次元単位球面 S^n $(n \geqq 3)$ への共形的なはめこみとする. また G_n を S^n の共形変換群とする (G_n は Lorentz 群 $O(n+1,1)$ のある部分群と同型である). このとき ι についての M の n-共形面積 (n-*conformal area*) $A_c(n,\iota)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n,\iota) := \sup_{X \in G_n} \int_M dA_X,$$

ただし dA_X は $X \circ \iota$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. そして M の n-共形面積 $A_c(n,M)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n,M) := \inf\{A_c(n,\iota) \mid \iota : M \longrightarrow S^n \quad \text{は共形的なはめこみ}\}.$$

このとき Li-Yau は次の定理を示した ([1, pp. 18–20] に証明がある):

定理 3.1 ([8]) *M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とし, g を M の Riemann 計量とする. λ_1, dA をそれぞれ g に関する Laplacian Δ の第 1 固有値および面積要素とする. そして M の S^n への共形的なはめこみが存在するとする. このとき次が成り立つ:*

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n,M).$$

さらに等号が成り立つならば, $\lambda_1 = 2$ となるように g を g のある正数倍で置き換えたとき, M の S^n への等長かつ極小なはめこみが存在する.

M, dA を定理 3.1 の冒頭に与えられたようなものとする. $\iota : M \longrightarrow S^n$ を M の S^n への等長なはめこみとし, H を ι に関する M の平均曲率ベクトルとする. $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M \left(|H|^2 + 1\right) dA.$$

このとき [1] の定理 1.3 および系 1.4 を用いて, 任意の $X \in G_n$ に対し $\mathcal{W}_1(X \circ \iota) = \mathcal{W}_1(\iota)$ がわかる. よって

$$A_c(n,\iota) \leqq \mathcal{W}_1(\iota) \tag{3.1}$$

を得る. 特に ι が極小であるならば

$$A_c(n,\iota) \leqq \int_M dA$$

が成り立ち, 従って

$$A_c(n,\iota) = \int_M dA$$

を得る. 特に次がわかる:

系 3.2 ([8]) M はコンパクトな 2 次元 *Riemann* 多様体で, M 上の *Laplacian* の第 1 固有値は 2 であるとする. また M の S^n への等長かつ極小なはめこみ ι が存在するとする. このとき次が成り立つ:

$$\int_M dA = A_c(n, M) = A_c(n, \iota).$$

M が射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$ と同相である場合に $A_c(n, M)$ を調べ, そして M の E^n へのはめこみ ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ を下から評価したい. まず

$$S^2\big(\sqrt{3}\big) := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\big\}$$

とおく. そして

$$\begin{aligned} y_1 &:= \frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3, \qquad y_2 := \frac{1}{\sqrt{3}}x_3x_1, \qquad y_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2, \\ y_4 &:= \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 - x_2^2), \qquad y_5 := \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \end{aligned}$$

とおく. このとき E^3 の各点 (x_1, x_2, x_3) に対し E^5 の点 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ を対応させる写像 $\Phi : E^3 \longrightarrow E^5$ は次を満たす:

(i) $\Phi(x_1', x_2', x_3') = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ は, (x_1', x_2', x_3') が (x_1, x_2, x_3) または $(-x_1, -x_2, -x_3)$ に等しいことと同値である;

(ii) $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big) \subset S^4$;

(iii) $\Phi : S^2\big(\sqrt{3}\big) \longrightarrow S^4$ は等長なはめこみである: $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2 + (dy_4)^2 + (dy_5)^2 \\ &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + \frac{1}{9}(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2; \end{aligned}$$

(iv) 等長はめこみ $\Phi : S^2\big(\sqrt{3}\big) \longrightarrow S^4$ は極小である: $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上の Laplacian の固有値の集合は $\{k(k+1)/3 \mid k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ で与えられ, 各固有値 $\lambda_k := k(k+1)/3$ に対応する固有関数は E^3 上の k 次球面調和関数の $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ への制限で与えられるので, 各 y_i は固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する固有関数を与え, 従って Takahashi の定理から Φ は極小であることがわかる.

従って $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ を S^4 に極小にうめこまれた射影平面とみなすことができ, これを Veronese 曲面 (*Veronese surface*) という. $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ 上 well-defined な固有関数はちょうど E^3 上の偶数次の球面調和関数によって与えられるので, $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ 上の Laplacian の第 1 固有値は $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上の Laplacian の第 2 固有値 $\lambda_2 = 2$ である. $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ の面積は $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ の面積の半分であり, 6π に等しい. よって系 3.2 から, 次を得る:

系 3.3 ([8]) $n \geqq 4$ に対し, $A_c(n, \boldsymbol{R}P^2) = 6\pi$ が成り立つ.

(3.1), 系 3.3 および [1] の系 1.4 を用いて, 次の定理を証明することができる ([1, p. 24] に証明がある):

定理 3.4 ([8]) $\boldsymbol{R}P^2$ の $E^n (n \geqq 4)$ へのはめこみ ι に対し, $\mathcal{W}(\iota) \geqq 6\pi$ が成り立つ. さらに等号が成り立つならば, $\iota(\boldsymbol{R}P^2)$ は S^4 内のある極小曲面の立体射影 $\pi : S^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^n$ による像と E^n の共形変換によってうつり合う.

以下においては, $n = 3$ の場合を考えたい. まず次の命題に注意する ([1, p. 24] に証明がある):

命題 3.5 ([8]) M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とする. また $\iota : M \longrightarrow E^n$ は M の $E^n (n \geqq 3)$ へのはめこみで, $\iota(M)$ のある点の ι による逆像は k 個の点 ($k \in \boldsymbol{N}$) からなるとする. このとき $A_c(n, \pi^{-1} \circ \iota) \geqq 4k\pi$ が成り立つ, 但し $\pi : S^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^n$ は立体射影である.

$M = \boldsymbol{R}P^2$ かつ $n = 3$ ならば, 命題 3.5 における k は $\iota(M)$ のある点で 3 以上である ([2]). よって $A_c(3, \boldsymbol{R}P^2) \geqq 12\pi$ がわかり, よって (3.1) を用いてはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ に対し $\mathcal{W}(\iota) \geqq 12\pi$ を得る. そして Kusner は $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たすはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ を発見し ([6], [7]), さらに Bryant は $\mathcal{W}$ が 12π を達成する $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 への全てのはめこみからなるモジュライ空間を描写した ([4]). よって $A_c(3, \boldsymbol{R}P^2) = 12\pi$ がわかる. $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たす $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ は Willmore はめこみである. 従って定理 2.4 から, このようなはめこみによる $\boldsymbol{R}P^2$ の像は, 連結, 完備な極小曲面で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つもののある反転による像のコンパクト化と表されることがわかる.

Kusner によって発見された $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たすはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ について説明したい. p を 3 以上の奇数とし, 複素変数 $z \in \boldsymbol{C}$ の有理関数 f_p, g_p を次で定義する:

$$f_p(z) := \sqrt{-1} \frac{(sz^p + 1)^2}{(z^{2p} + rz^p - 1)^2}, \qquad g_p(z) := \frac{z^{p-1}(z^p - s)}{sz^p + 1},$$

但し $s := \sqrt{2p - 1}$, および $r := 2s/(p-1)$ である. $\boldsymbol{C}$ から $z^{2p} + rz^p - 1$ の零点を除いて得られる領域を D とする. D の 1 点 z_0 と D の各点 z を結ぶ D 内の曲線を C とし, C の向きを z が終点であるものとする. D から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像 $\Phi_p : D \longrightarrow \boldsymbol{C}^3$ を

$$\Phi_p(z) := \left(\int_C f_p \big(1 - g_p^2\big) dz,\ \sqrt{-1} \int_C f_p \big(1 + g_p^2\big) dz,\ 2 \int_C f_p g_p dz \right)$$

で定める. このとき $z \in D$ には依らない $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{C}^3$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対し

$$\Phi_p(z) = \frac{\sqrt{-1}}{z^{2p} + rz^p - 1} \left(z^{2p-1} - z,\ -\sqrt{-1}(z^{2p-1} + z),\ \frac{p-1}{p}(z^{2p} + 1) \right) + \boldsymbol{c} \qquad (3.2)$$

が成り立つ. よって Φ_p は 1 価である. (3.2) から, 任意の $z \in D \setminus \{0\}$ に対し

$$\Phi_p\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) - \boldsymbol{c} = \overline{\Phi_p(z) - \boldsymbol{c}}$$

がわかり,

$$\lim_{z\to\infty} \Phi_p(z) - \boldsymbol{c} = \sqrt{-1}\left(0, 0, \frac{p-1}{p}\right) = \overline{\Phi_p(0) - \boldsymbol{c}}$$

がわかる. $\pi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ を立体射影とすると, $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ に対し $\pi^{-1}(-1/\bar{z}) = -\pi^{-1}(z)$ が成り立つ, すなわち球面上では $-1/\bar{z}$ は z の対せき点を与える. また $z^{2p}+rz^p-1$ の零点 a に対し $-1/\bar{a}$ も $z^{2p}+rz^p-1$ の零点であるので, 方程式 $z^{2p}+rz^p-1=0$ は $\boldsymbol{R}P^2$ のちょうど p 個の点 $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ を定める. よって $\iota_p := \mathrm{Re}\,\Phi_p$ は $M_p := \boldsymbol{R}P^2 \setminus \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_p\}$ から E^3 への滑らかな写像を与えることがわかる. さらに f_p は g_p の極でのみ零点を持ちかつ f_p の零点の位数は対応する g_p の極の位数の 2 倍であるので, $\iota_p : M_p \longrightarrow E^3$ は極小はめこみであり, 従って ι_p は Willmore はめこみである.

X は E^3 の $\iota_p(M_p)$ に含まれない点を中心とする球面に関する反転であるとする. このとき $X \circ \iota_p$ は M_p の E^3 へのはめこみである. はめこみ $X \circ \iota_p$ の定義域は M_p であるが, 仮にこのはめこみの定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できるならば, つまり $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 へのあるはめこみが存在してその M_p への制限が $X \circ \iota_p$ に等しいならば, $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 への Willmore はめこみが得られることになる. ここでは $X \circ \iota_p$ の定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できると仮定する. K_X, dA_X をそれぞれ $X \circ \iota_p$ によって導かれた計量に関する $\boldsymbol{R}P^2$ の Gauss 曲率および面積要素とし, H_X^2 を $X \circ \iota_p$ に関する平均曲率の 2 乗とする. このとき [1, p. 5] の式 (1.7) を用いて,

$$\int_{\mathbf{R}P^2} H_X^2 dA_X = \int_{\mathbf{R}P^2} K_X dA_X - \int_{M_p} K dA \tag{3.3}$$

を得る, 但し K, dA はそれぞれ ι_p によって導かれた計量に関する M_p の Gauss 曲率および面積要素である. Gauss-Bonnet の定理から, (3.3) の右辺第 1 項は 2π に等しいことがわかる. また

(i) 右辺第 2 項は極小曲面 $\iota_p(M_p)$ の Gauss 写像によって導かれた ($K=0$ となる点で退化する) 計量に関する M_p の面積であり,

(ii) $\iota_p(M_p)$ の Gauss 写像は g_p と立体射影 π の逆写像 π^{-1} の合成 $\pi^{-1} \circ g_p$ と表され,

(iii) g_p は $\boldsymbol{C}P^1$ から $\boldsymbol{C}P^1$ への $(2p-1)$ 重分岐被覆である

ことに注意すると, (3.3) の右辺第 2 項は $2(2p-1)\pi$ に等しいことがわかる. よって

$$\int_{\mathbf{R}P^2} H_X^2 dA_X = 4p\pi$$

を得る．特に $p = 3$ の場合には，この右辺は 12π に等しい．よって Willmore 汎関数の値がちょうど 12π である Willmore はめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ が存在することになる．

以上においては $X \circ \iota_p$ の定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できると仮定して議論した．そしてこの仮定が実際に正しいことは，

(i) 極小曲面 $\iota_p(M_p)$ の全曲率は有限であり，

(ii) $\iota_p(M_p)$ のエンドがうめこまれていてかつ平坦であることが (3.2) からわかる

ので，[1] の定理 3.15 からわかる．

以上から，次の定理を得る:

定理 3.6 $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 へのはめこみ ι に対し，$\mathcal{W}(\iota) \geqq 12\pi$ が成り立つ．さらに等号が成り立つならば，$\iota(\boldsymbol{R}P^2)$ は E^3 内の連結，完備な極小曲面で全曲率が有限でありかつうめこまれた平坦なエンドを持つもののある反転による像のコンパクト化と表される．

参考文献

[1] 安藤直也, Willmore 予想および Willmore 曲面について, 山口大学大学院理工学研究科集中講義講義録 (山口大学数理科学レクチャーノート No.1).

[2] T. Banchoff, Triple points and surgery of immersed surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974) 407–413.

[3] R. Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geom. **20** (1984) 23–53.

[4] R. Bryant, Surfaces in conformal geometry, Proc. Symp. Pure Math. **48** (1988) 227–240.

[5] H. Hopf, Differential geometry in the large, Lecture Notes in Math. vol.1000, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1989.

[6] R. Kusner, Conformal geometry and complete minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987) 291–295.

[7] R. Kusner, Comparison surfaces for the Willmore problem, Pacific J. Math. **138** (1989) 317–345.

[8] P. Li and S.-T. Yau, A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and first eigenvalues of compact surfaces, Invent. Math. **69** (1982) 269–291.

[9] R. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, J. Differential Geom. **18** (1983) 791–809.