

曲面の幾何学 —Hopfの定理およびその証明—

安藤 直也 (熊本大学大学院自然科学研究科)

岡山大学大学院自然科学研究科集中講義

(平成23年12月6日(火) ~ 12月8日(木))

はじめに

この講義録は平成 23 年 12 月に岡山大学で行なわれた集中講義「曲面の幾何学 —Hopf の定理の紹介—」において配布されたプリントに基づいて作成されたものである。この講義は「球面に同相な平均曲率一定曲面は round sphere (全臍的な球面)に限る」という Hopf の定理について解説することを目的として実施された。

この定理の証明において重要な役割を果たすものの一つは、コンパクトで向きづけ可能な曲面上に高々有限個の特異点を持つ連続な 1 次元分布が与えられたとき、その全ての特異点の指数の和は曲面の Euler 数に等しい、という Hopf-Poincaré の定理である。第 4 章において、連続な 1 次元分布の孤立特異点の指数について説明し、そして Euler 数、Hopf-Poincaré の定理およびその証明について説明する。

Hopf の定理の証明において重要な役割を果たすもう一つのもは、全臍的ではない平均曲率一定曲面の臍点は曲面上の主分布の孤立特異点でありかつその指数は負である、という平均曲率一定曲面の性質である。第 3 章において、曲面上に Hopf 微分と呼ばれる複素 2 次微分を定義する。曲面論の基本定理に現れる Codazzi-Mainardi の方程式から、曲面の平均曲率が一定であることと Hopf 微分が正則であることは同値であることがわかる。このことと Hopf 微分の零点がちょうど曲面の臍点であることから、全臍的ではない平均曲率一定曲面の臍点は孤立していることがわかる。さらに第 5 章において、主方向を与える方程式が Hopf 微分を用いて表されることに注意することによって、平均曲率一定曲面の孤立臍点は主分布の孤立特異点でありかつその指数は負であることがわかる。

球面に同相でありかつ全臍的ではない平均曲率一定曲面の臍点が孤立しているならば、この曲面は高々有限個の臍点を持つことがわかる。さらに各孤立臍点が曲面上の主分布の孤立特異点でありかつその指数が負であるならば、Hopf-Poincaré の定理から曲面の Euler 数も負であることになるが、これは球面の Euler 数が 2 であることに反する。こうして Hopf の定理が証明される。

Hopf の定理の一般化として二つの結果が知られている。一つは特別な Weingarten 曲面に対して同じ結論が成り立つというものであり、これは Hartman-Wintner によって示され、Chern によって別証明が与えられた。もう一つは非等方的平均曲率一定曲面に関するものである。通常の曲面論における Gauss 写像は曲面から単位球面 S^2 への滑らかな写像で、曲面の各点に対しその点での単位法ベクトルを S^2 の元とみなし対応させるものである。非等方的 Gauss 写像とは、 S^2 の代わりにコンパクトな凸曲面 W_0 を値域とし、そして曲面の各点に対しその点での接平面と平行な接平面を持つ W_0 の点に対応させるものとして定義される。このとき非等方的 Gauss 写像の微分を曲面上の $(1, 1)$ 型のテンソル場とみなすことができる。このトレースが一定であるような曲面を非等方的平均曲率一定曲面という。Koiso-Palmer は球面に同相な非等方的平均曲率一定曲面は E^3 内で W_0 と相似であることを示した。また筆者はこの結果の別証明を与えた。Hopf の定理の一般化であ

る以上の結果の証明の方針は Hopf の定理のものと同じである。しかし曲面が全臍的ではない場合に臍点が主分布の孤立特異点でありさらに指数が負であることを示すためには、Hopf の定理の証明におけるよりも多くの議論を必要とする。第 5 章において、Hopf の定理の一般化である上述の結果について概説する。

孤立臍点の指数については以上に説明した結果以外にも知られている結果や予想があり、第 5 章においてそれらを簡単に紹介する。その中でも孤立臍点の指数は 1 以下であるという指数予想 (局所的な Carathéodory の予想) は一般の曲面が持つであろう性質について言及するものであり、もしこの予想が本当に正しいならば曲面の空間における存在の仕方に関する非自明な一般法則を我々は知ることになるため、指数予想は重要であると筆者は考える (このように考えたため筆者は指数予想の解決に多大な時間と労力を費やしてきたが、残念ながら未だに解決できていない)。

岡山大学において本講義の世話人を務めて下さった藤森祥一先生、および本稿に関して有益なご助言を下された熊本大学の小林治先生、一橋大学の藤岡敦先生に心から感謝の意を表します。

平成 23 年 1 2 月

安藤 直也

目 次

1 多様体論からの準備

- 1.1 可微分多様体
- 1.2 可微分写像および可微分関数
- 1.3 接ベクトル
- 1.4 関数の微分および写像の微分
- 1.5 部分多様体
- 1.6 ベクトル場および 1 次元分布
- 1.7 多重線形形式
- 1.8 テンソル場

2 Riemann 幾何学からの準備

- 2.1 Riemann 計量
- 2.2 線形接続
- 2.3 Levi-Civita 接続
- 2.4 曲率テンソル場
- 2.5 Riemann 多様体上の関数の積分

3 曲面論からの準備

- 3.1 誘導計量および型作用素
- 3.2 Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式
- 3.3 Hopf 微分

4 Hopf-Poincaré の定理

- 4.1 1 次元分布の孤立特異点の定義および例
- 4.2 孤立特異点の指数の定義
- 4.3 Euler 数
- 4.4 Hopf-Poincaré の定理およびその証明

5 主定理

- 5.1 主定理およびその証明
- 5.2 主定理の一般化 (その 1)
- 5.3 主定理の一般化 (その 2)
- 5.4 孤立臍点の指数に関する話題

参考文献

1 多様体論からの準備

1.1 可微分多様体

M を Hausdorff 空間とし, m を自然数とする. M が m 次元 位相多様体 (topological manifold) であるとは, M の各点のある近傍が \mathbb{R}^m の開集合と同相であるときにいう.

M を m 次元位相多様体とする. M の点 a の近傍 U_a が \mathbb{R}^m の開集合 O_a と同相であるとする. $x_a : U_a \rightarrow O_a$ を U_a から O_a の上への同相写像とする. このとき U_a と x_a の組 (U_a, x_a) を a の 座標近傍 (coordinate neighborhood) という. U_a の各点 b に対し, $x_a(b)$ は m 個の実数の組 $(x_a^1(b), x_a^2(b), \dots, x_a^m(b))$ と表される. $x_a(b)$ を表す m 個の実数を座標近傍 (U_a, x_a) における b の 局所座標 (local coordinates) という. また U_a 上の m 個の関数 $x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^m$ の組を (U_a, x_a) における 局所座標系 (system of local coordinates) という.

m 次元位相多様体 M に対し, M の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で各 U_λ が \mathbb{R}^m の開集合 O_λ と同相であるようなものが存在する. $x_\lambda : U_\lambda \rightarrow O_\lambda$ を U_λ から O_λ の上への同相写像とすると, 座標近傍の族 $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の 座標近傍系 (system of coordinate neighborhoods) という.

M を m 次元位相多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda, \mu \in \Lambda$ が $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たすならば, \mathbb{R}^m の開集合 $x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ から \mathbb{R}^m の開集合 $x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ の上への同相写像 $x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$ を考えることができる. $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が M の C^∞ 級座標近傍系 (system of coordinate neighborhoods of class C^∞) であるとは, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し

$$x_\mu \circ x_\lambda^{-1} : x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

が C^∞ 級写像であるときにいう. また C^∞ 級座標近傍系が付与された位相多様体を C^∞ 級可微分多様体 (differentiable manifold of class C^∞) という.

以下においては, C^∞ 級可微分多様体を単に 可微分多様体 または 滑らかな多様体 (differentiable manifold または smooth manifold) と呼ぶことにする. また可微分多様体 M の 1 点の座標近傍を取るときには, M に付与されている C^∞ 級座標近傍系から取るものとする. また M に付与されている C^∞ 級座標近傍系から各点の基本近傍系を取り出すことができるかと仮定する.

1.2 可微分写像および可微分関数

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とする. $F : M \rightarrow N$ を M から N への連続写像とする. M の 1 点 a に対し, (U_a, x_a) を a の座標近傍とする. また $b := F(a)$ とおき, (V_b, y_b) を b の座標近傍とする. $F(U_a) \subset V_b$ を仮定してよい. このとき \mathbb{R}^m の開集

合 $x_a(U_a)$ から \mathbf{R}^n の開集合 $y_b(V_b)$ への連続写像 $y_b \circ F \circ x_a^{-1} : x_a(U_a) \rightarrow y_b(V_b)$ を得る。 $F : M \rightarrow N$ が可微分写像または滑らかな写像 (*differentiable map* または *smooth map*) であるとは、 M の各点 a に対し上のように得られる写像 $y_b \circ F \circ x_a^{-1} : x_a(U_a) \rightarrow y_b(V_b)$ が C^∞ 級であるときにいう。

$N = \mathbf{R}$ であるとき、 M から \mathbf{R} への写像 f とは M 上の関数である。前段落と同様に、 $a \in M$ に対し (U_a, x_a) を a の座標近傍とする。このとき $f \circ x_a^{-1}$ は \mathbf{R}^m の開集合 $x_a(U_a)$ 上の関数である。 M 上の関数 f が可微分関数または滑らかな関数 (*differentiable function* または *smooth function*) であるとは、 M の各点 a に対し上のような関数 $f \circ x_a^{-1}$ が C^∞ 級であるときにいう。 M 上の関数 f が可微分関数であることと、 f が M から \mathbf{R} への写像として前段落の意味で可微分であることは同値である。 M 上の全ての可微分関数からなる集合を $C^\infty(M)$ で表す。

1.3 接ベクトル

M を m 次元可微分多様体とする。 a を M の 1 点とし、 (U, x) を a の座標近傍とする。 $f \in C^\infty(U)$ に対し、 $C^\infty(x(U))$ の元 $g := f \circ x^{-1}$ の点 $r_a := x(a)$ における偏微分係数 $(\partial g / \partial r^i)(r_a)$ を考えることができる ($i = 1, 2, \dots, m$)。より一般に、 $(v^1, v^2, \dots, v^m) \in \mathbf{R}^m$ を 1 組とるとき、 $g = f \circ x^{-1}$ に対し

$$v^1 \frac{\partial g}{\partial r^1}(r_a) + v^2 \frac{\partial g}{\partial r^2}(r_a) + \dots + v^m \frac{\partial g}{\partial r^m}(r_a)$$

を対応させる微分作用素

$$v^1 \frac{\partial}{\partial r^1} \Big|_{r_a} + v^2 \frac{\partial}{\partial r^2} \Big|_{r_a} + \dots + v^m \frac{\partial}{\partial r^m} \Big|_{r_a}$$

を考えることができる。ここで

$$X(r_a) := \left\{ v^1 \frac{\partial}{\partial r^1} \Big|_{r_a} + v^2 \frac{\partial}{\partial r^2} \Big|_{r_a} + \dots + v^m \frac{\partial}{\partial r^m} \Big|_{r_a} \mid (v^1, v^2, \dots, v^m) \in \mathbf{R}^m \right\}$$

とおく。 $X(r_a)$ は m 次元ベクトル空間である。

(\tilde{U}, \tilde{x}) を a の $((U, x)$ とは別の) 座標近傍とする。そして前段落と同様に考え、

$$X(\tilde{r}_a) := \left\{ \tilde{v}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^1} \Big|_{\tilde{r}_a} + \tilde{v}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2} \Big|_{\tilde{r}_a} + \dots + \tilde{v}^m \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^m} \Big|_{\tilde{r}_a} \mid (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \dots, \tilde{v}^m) \in \mathbf{R}^m \right\}$$

とおく、但し $\tilde{r}_a := \tilde{x}(a)$ である。 $X(r_a)$ から $X(\tilde{r}_a)$ への線形写像 T を

$$T \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{r_a} \right) := \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial \phi^j}{\partial r^i}(r_a) \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^j} \Big|_{\tilde{r}_a}$$

で定める, 但し ϕ^j は $\phi := \tilde{x} \circ x^{-1}$ の第 j 成分である. このとき合成関数の微分法を用いて, 次を得る:

$$T\left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{r_a}\right) \tilde{g} = \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{r_a}\right) g,$$

但し $\tilde{g} := f \circ \tilde{x}^{-1}$ である.

M の点 a での 接空間 (tangent space) $T_a(M)$ とは,

(i) m 次元ベクトル空間であり,

(ii) a の各座標近傍 (U, x) に対し, $T_a(M)$ から $X(r_a)$ への同型写像 $L_{(U,x)}$ が付与されていて,

(iii) a の別の座標近傍 (\tilde{U}, \tilde{x}) に対し定まる同型写像 $L_{(\tilde{U},\tilde{x})}$ は $L_{(\tilde{U},\tilde{x})} = T \circ L_{(U,x)}$ を満たす

ものである. よって a の近傍上の可微分関数 f が与えられたとき, $T_a(M)$ の各元 v に対し実数 $v(f) := (L_{(U,x)}(v))g$ は座標近傍 (U, x) の取り方には依存しない. こうして接空間 $T_a(M)$ の各元は a の近傍上の可微分関数に実数を対応させる作用素とみなされる. 接空間 $T_a(M)$ の各元を M の a での 接ベクトル (tangent vector) という.

以下においては, 混乱の恐れが無いときには $v \in T_a(M)$ と $L_{(U,x)}(v) \in X(r_a)$ を同一視する. そして, $g := f \circ x^{-1}$ の点 $r_a := x(a)$ における偏微分係数 $(\partial g / \partial r^i)(r_a)$ を $(\partial f / \partial x^i)(a)$ と記し, $X(r_a)$ の元 $\partial / \partial r^i|_{r_a}$ を $\partial / \partial x^i|_a$ と記す. このとき $X(r_a)$ の基底の 1 つを構成するベクトルの組 $\partial / \partial x^1|_a, \partial / \partial x^2|_a, \dots, \partial / \partial x^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底を構成するとみなされる.

1.4 関数の微分および写像の微分

M を m 次元可微分多様体とし, f を $C^\infty(M)$ の元とする. このとき M の各点 a での各接ベクトル $v \in T_a(M)$ に対し, 実数 $df_a(v)$ を $df_a(v) := v(f)$ で定義する. このように定義される $T_a(M)$ から \mathbf{R} への写像 $df_a : T_a(M) \rightarrow \mathbf{R}$ を f の a での 微分 (differential) という. df_a は線形関数であり, 従って df_a は $T_a(M)$ の双対空間 $T_a^*(M)$ の元である.

(U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき $\partial / \partial x^1|_a, \partial / \partial x^2|_a, \dots, \partial / \partial x^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底の一つを形成する. この基底の双対基底を $dx^1|_a, dx^2|_a, \dots, dx^m|_a$ で表す. よって $f \in C^\infty(M)$ に対し, f の a での微分 df_a は $dx^1|_a, dx^2|_a, \dots, dx^m|_a$ の 1 次結合で表され, そして

$$df_a = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) dx^i|_a$$

が成り立つ.

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F : M \rightarrow N$ を M から N への可微分写像とする. M の点 a および $T_a(M)$ の元 v に対し, $T_{F(a)}(N)$ の元 $dF_a(v)$ を $(dF_a(v))(f) := d(f \circ F)_a(v)$ で定義する, 但し f は $F(a)$ の N における近傍上の任意の可微分関数である. このように定義される $T_a(M)$ から $T_{F(a)}(N)$ への写像 $dF_a : T_a(M) \rightarrow T_{F(a)}(N)$ を F の a での 微分 (differential) という. dF_a は線形写像である.

(U, x) を $a \in M$ の座標近傍とし, (V, y) を $F(a) \in N$ の座標近傍とする. このとき $T_a(M)$ の元 $\partial/\partial x^i|_a$ の dF_a による像は

$$dF_a \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} (a) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(a)}$$

と表される.

M と N が 微分同相 (diffeomorphic) であるとは, M から N への全単射な可微分写像 F が存在して F の逆写像 F^{-1} が可微分であるときにいう. M と N が微分同相であるとき, F のような写像を M から N の上への 微分同相写像 (diffeomorphism) という. またこのとき M の各点 a に対し $dF_a : T_a(M) \rightarrow T_{F(a)}(N)$ は線形同型写像であり, 従って M の次元は N の次元に等しい.

1.5 部分多様体

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F : M \rightarrow N$ を M から N への可微分写像とする. M の各点 a に対し $dF_a : T_a(M) \rightarrow T_{F(a)}(N)$ が単射であるとき, $F : M \rightarrow N$ を はめこみ (immersion) という. $F : M \rightarrow N$ が単射なはめこみであるとき, F を うめこみ (embedding) という. $M \subset N$ ならば, M の恒等写像 id_M を M から N への写像とみなすことができるが, id_M が M から N へのうめこみであるとき, M を N の 部分多様体 (submanifold) という. M が N の部分多様体であるとき, 可微分多様体としての M の位相と N からの相対位相は必ずしも一致しないが, これら二つの位相が一致するとき, M を 正規部分多様体 (regular submanifold) という. N の正規部分多様体 M が N の閉集合であるとき, M を N の 閉部分多様体 (closed submanifold) という.

1.6 ベクトル場および 1 次元分布

M を m 次元可微分多様体とする. M の各点 a に対し M の a での接ベクトルを一つ対応させるものを M 上の ベクトル場 (vector field) という. V を M 上のベクトル場とする. このとき M の各点 a に対し, V が定める a での接ベクトルを V_a で表す.

a を M の 1 点とし, (U, x) を a の座標近傍とする. このとき M 上のベクトル場 V は

U の各点 b での接ベクトル

$$V_b = \sum_{i=1}^m v^i(b) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_b$$

を与える. 各 $i = 1, 2, \dots, m$ に対し, v^i は U 上の関数である. M 上のベクトル場 V が連続である (*continuous*) とは, M の各点 a および a の座標近傍 (U, x) に対し v^1, v^2, \dots, v^m が連続であるときにいう; V が C^∞ 級であるまたは滑らかである (*of class C^∞ または smooth*) とは, 各 $a \in M$ および a の座標近傍 (U, x) に対し $v^i \in C^\infty(U)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) が成り立つときにいう.

M 上のベクトル場 V および $f \in C^\infty(M)$ に対し, M 上の関数 $V(f)$ を $(V(f))(a) := V_a(f)$ で定める ($a \in M$). このとき M 上のベクトル場 V が C^∞ 級であることと, 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し $V(f) \in C^\infty(M)$ が成り立つことは同値である.

V, W を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし, (U, x) を M の点 a の座標近傍とする. U 上で V, W を $V = \sum_{i=1}^m v^i \partial / \partial x^i$, $W = \sum_{i=1}^m w^i \partial / \partial x^i$ と表す. このとき U 上のベクトル場 $[V, W]_{(U, x)}$ を

$$[V, W]_{(U, x)} := \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \left(v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で定める. このとき a の別の座標近傍 (\tilde{U}, \tilde{x}) に対し, $U \cap \tilde{U}$ 上で $[V, W]_{(U, x)} = [V, W]_{(\tilde{U}, \tilde{x})}$ が成り立つ. よって M 上の C^∞ 級ベクトル場 $[V, W]$ を M の各点 a の座標近傍 (U, x) 上で $[V, W] := [V, W]_{(U, x)}$ によって定義することができる. $[V, W]$ を V と W の交換子積またはかっこ積 (*bracket*) という.

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし, $\gamma : I \rightarrow M$ を I から M への滑らかな写像とする. γ または I の γ による像 $\gamma(I)$ を M 内の曲線 (*curve*) という. M 上の滑らかなベクトル場 V に対し, 曲線 $\gamma : I \rightarrow M$ が V の積分曲線 (*integral curve*) であるとは, 任意の $t \in I$ に対し $d\gamma_t(d/dt) = V_{\gamma(t)}$ が成り立つときにいう. 各 $t_0 \in I$ に対し, (U, x) を $\gamma(t_0)$ の座標近傍とする. このとき t_0 の十分小さい近傍 J の各点 t に対し, $x \circ \gamma(t)$ を $(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^m(t))$ と表すことができる. $\dot{\gamma}^i$ を γ^i の導関数とするとき

$$d\gamma_t \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

が成り立つ. よって $\gamma : I \rightarrow M$ が V の積分曲線であることと, 各 $t_0 \in I$ の十分小さい近傍 J 上で $i = 1, 2, \dots, m$ に対し $\dot{\gamma}^i = v^i \circ \gamma$ が成り立つことは同値であることがわかる. さらに $V^i := v^i \circ x^{-1}$ とおくと, $\dot{\gamma}^i(t) = v^i \circ \gamma(t)$ は

$$\dot{\gamma}^i(t) = V^i(\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^m(t)) \quad (1.1)$$

と表される. (1.1) は $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m)$ に関する 1 階の正規形の常微分方程式系であるので, t_0 のある近傍上で解 $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m)$ が存在し, かつ任意に指定された初期値 $(\gamma^i(t_0))$ に対し解は一意的である. よって M の各点 a を通る V の積分曲線が存在し, そしてこのような積分曲線の最大のもので存在する.

M の各点 a に対し M の a での接空間 $T_a(M)$ の 1 次元部分空間を一つ対応させるものを M 上の 1 次元分布 (*one-dimensional distribution*) という. \mathcal{D} を M 上の 1 次元分布とする. このとき M の各点 a に対し, \mathcal{D} が定める a での接空間の 1 次元部分空間を $\mathcal{D}(a)$ で表す. M 上の 1 次元分布 \mathcal{D} が 連続である (*continuous*) とは, M の各点のある近傍 U 上で零にはならない連続なベクトル場 V が存在して U の任意の点 b で $V_b \in \mathcal{D}(b)$ が成り立つときにいう; \mathcal{D} が C^∞ 級である または 滑らかなものである (*of class C^∞ または smooth*) とは, 上のような V として滑らかなものをとることができるときにいう. M 上の滑らかな 1 次元分布 \mathcal{D} に対し, 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ が \mathcal{D} の 積分曲線 (*integral curve*) であるとは, 任意の $t \in I$ に対し $d\gamma_t(d/dt) \in \mathcal{D}$ が成り立つときにいう.

1.7 多重線形形式

X をベクトル空間とする. $p \in \mathbb{N}$ に対し X^p 上の関数 f が X 上の p 次線形形式 (*p -linear form* または *p -linear function*) であるとは, 各 $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ に対し

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, c_i x_i + c'_i x'_i, \dots, x_p) \\ = c_i f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) + c'_i f(x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (1.2)$$

が成り立つときにいう, 但し $x_i, x'_i \in X$ および $c_i, c'_i \in \mathbb{R}$ である. X 上の全ての p 次線形形式からなる集合を $\otimes^p X^*$ で表す. $\otimes^p X^*$ には自然に和およびスカラー倍が定義され, これらの演算に関して $\otimes^p X^*$ はベクトル空間をなす. このベクトル空間を p 個の X^* の テンソル積 (*tensor product*) という. 特に $\otimes^1 X^* = X^*$ が成り立つ. また $\otimes^0 X^* := \mathbb{R}$ とおく. f が X 上の 多重線形形式 (*multilinear form* または *multilinear function*) であるとは, ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対し f が $\otimes^p X^*$ の元であるときにいう.

$q \in \mathbb{N}$ とし, $\otimes^q X^*$ の元 g をとる. このとき $\otimes^{p+q} X^*$ の元 $f \otimes g$ を

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) := f(x_1, \dots, x_p)g(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

によって定義する. $f \otimes g$ を f と g の テンソル積 (*tensor product*) という. テンソル積の定義から,

$$\begin{aligned} (c_1 f_1 + c_2 f_2) \otimes g &= c_1 (f_1 \otimes g) + c_2 (f_2 \otimes g), \\ f \otimes (c_1 g_1 + c_2 g_2) &= c_1 (f \otimes g_1) + c_2 (f \otimes g_2) \end{aligned}$$

および

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

が成り立つことがわかる, 但し $f, f_i \in \otimes^p X^*$, $g, g_i \in \otimes^q X^*$, $h \in \otimes^r X^*$ ($r \in \mathbf{N}$) および $c_i \in \mathbf{R}$ である.

m を自然数とし, X を m 次元ベクトル空間とする. e_1, e_2, \dots, e_m は X の基底の一つをなすとし, e^1, e^2, \dots, e^m は e_1, e_2, \dots, e_m に双対な X^* の基底をなすとする. このとき

$$\{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \mid 1 \leq i_k \leq m, k = 1, 2, \dots, p\}$$

は $\otimes^p X^*$ の基底の一つである.

G_p を p 個の文字の集合 $\{1, 2, \dots, p\}$ の全ての置換からなる集合とする. G_p は群をなす. $f \in \otimes^p X^*$ および $\sigma \in G_p$ に対し, $\otimes^p X^*$ の元 σf を

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_p) := f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

で定義する. $f \in \otimes^p X^*$ が 対称 (*symmetric*) であるとは, 任意の $\sigma \in G_p$ に対し $\sigma f = f$ が成り立つときにいう.

X 上の p 次線形形式は X^p 上の関数であるが, 値域を \mathbf{R} の代わりに X とする場合がある. 本稿では X^p から X への写像で (1.2) を満たすものを X 上の X 値 p 次線形形式 (*X -valued p -linear function*) とよぶことにする. X 上の全ての X 値 p 次線形形式からなる集合を $X \otimes (\otimes^p X^*)$ で表す.

1.8 テンソル場

M を m 次元可微分多様体とし, $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ とする. このとき M の各点 a に対し $\otimes^p T_a^*(M)$ の元を一つ対応させるものを M 上の p 次共変テンソル場 (*covariant p -tensor field*) という. t を M 上の p 次共変テンソル場とする. $p = 0$ ならば, t は M 上の関数である. 以下, $p > 0$ とする. (U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき t は U 上で

$$t = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m t_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

と表される, 但し各 (i_1, i_2, \dots, i_p) に対し $t_{i_1 \dots i_p}$ は U 上の関数であり, $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$ は U の各点 b に対し $\otimes^p T_b^*(M)$ の元 $dx^{i_1}|_b \otimes \dots \otimes dx^{i_p}|_b$ を対応させる U 上の共変テンソル場である. M 上の共変テンソル場 t が C^∞ 級である または 滑らかである (*of class C^∞* または *smooth*) とは, M の各点 a および a の座標近傍 (U, x) に対し $t_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(U)$ が成り立つときにいう.

M の各点 a に対し $T_a(M) \otimes (\otimes^p T_a^*(M))$ ($p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) の元を一つ対応させるものを M 上の $(1, p)$ 型のテンソル場 (*tensor field of type $(1, p)$*) という. t を M 上の $(1, p)$ 型のテンソル場とする. $p = 0$ ならば, t は M 上のベクトル場である. 以下, $p > 0$ とする. $p = 1$ ならば, t は M の各点 a に対し a での接空間 $T_a(M)$ の線形変換を与える. (U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき U 上の関数 $t_{i_1 \dots i_p}^j$ ($i_1, \dots, i_p, j \in \{1, 2, \dots, m\}$) で

$$t \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right) = \sum_{j=1}^m t_{i_1 \dots i_p}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

を満たすものが存在する. t が C^∞ 級である または 滑らかである (*of class C^∞ または smooth*) とは, M の各点 a および a の座標近傍 (U, x) に対し $t_{i_1 \dots i_p}^j \in C^\infty(U)$ が成り立つときにいう.

2 Riemann 幾何学からの準備

2.1 Riemann 計量

X をベクトル空間とし, g を $\otimes^2 X^*$ の元 (以下, X 上の双線形形式という) とする. g が X の 内積 (*inner product*) であるとは, g が次の二つの条件を満たすときにいう:

- (i) g は対称である;
- (ii) g は正值 (正定値) である, つまり任意の $x \in X$ に対し $g(x, x) \geq 0$ が成り立ち, かつ $g(x, x) = 0$ と x が X の零ベクトルであることは同値である.

M を m 次元可微分多様体とし, g を M 上の滑らかな 2 次共変テンソル場とする. このとき g が M 上の Riemann 計量 (*Riemannian metric*) であるとは, g が M の各点 a での接空間 $T_a(M)$ の内積を与えるときにいう. Riemann 計量を与えられた可微分多様体を Riemann 多様体 (*Riemannian manifold*) という.

(U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき g は U 上で

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と表される. g が M 上の Riemann 計量であるとする. このとき g が各点での接空間に与える双線形形式は対称であるので, U 上で $g_{ij} = g_{ji}$ が成り立つ. また g が与える双線形形式は正值であるので, U の各点で g_{ij} を (i, j) 成分とする m 次対称行列の全ての固有値が正である. また

$$dx^i dx^j := \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

とおくと, g は $g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i dx^j$ と表される. 特に $m := 2$ とし,

$$E := g_{11}, \quad F := g_{12}, \quad G := g_{22}, \quad u := x^1, \quad v := x^2$$

とおくと, U 上で $E > 0$, $G > 0$ および $EG - F^2 > 0$ が成り立ち, g は

$$g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と表される.

2.2 線形接続

後で扱う多様体上の線形接続は, Riemann 計量が一意に定める Levi-Civita 接続という線形接続である. Levi-Civita 接続は次節で説明される. この節では, 一般の線形接続について説明する.

M 上の 線形接続 (linear connection) ∇ とは, M 上の二つの滑らかなベクトル場 V, W に対し M 上の滑らかなベクトル場 $\nabla_V W$ を対応させ, そして次の三つの条件を満たすものである:

- (i) $\nabla_{f_1 V_1 + f_2 V_2} W = f_1 \nabla_{V_1} W + f_2 \nabla_{V_2} W$ が成り立つ, 但し V_1, V_2 は M 上の滑らかなベクトル場であり, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ である;
- (ii) $\nabla_V (c_1 W_1 + c_2 W_2) = c_1 \nabla_V W_1 + c_2 \nabla_V W_2$ が成り立つ, 但し W_1, W_2 は M 上の滑らかなベクトル場であり, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ である;
- (iii) $\nabla_V (fW) = f \nabla_V W + (Vf)W$ が成り立つ, 但し $f \in C^\infty(M)$ である.

∇ を M 上の線形接続とする. このとき上の条件 (i) から, V が点 $a \in M$ で与える接ベクトル V_a が零ベクトルであるならば, 点 a で $\nabla_V W$ は零ベクトルであることがわかる. 従って与えられた V, W に対し, 各点 a で $\nabla_V W$ が定める接ベクトル $(\nabla_V W)_a$ は V_a および W によって定まる. さらに条件 (ii), (iii) から, 与えられた V, W および $a \in M$ に対し $(\nabla_V W)_a$ は a の任意に小さい近傍上での W によって定まることがわかる: M 上の滑らかなベクトル場 \tilde{W} が a のある近傍 U 上で $W \equiv \tilde{W}$ を満たすならば, $(\nabla_V W)_a = (\nabla_V \tilde{W})_a$ が成り立つ ([20, p. 50]).

(U, x) を M の点 a の座標近傍とする. このとき $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \dots, \partial/\partial x^m$ は U の各点での接空間の基底を構成する. $\partial_i := \partial/\partial x^i$ とおく. そして U 上の関数 Γ_{ij}^k ($i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$) を $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k$ で定める. 関数 Γ_{ij}^k を座標近傍 (U, x) に関する ∇ の Christoffel 記号 (Christoffel symbol) という.

M 上の線形接続 ∇ および滑らかなベクトル場 V, W に対し,

$$\tau(V, W) := \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W]$$

とおく. このとき $\tau(V, W)$ が M の各点 a で与える接ベクトルは, V, W が定める接ベクトル V_a, W_a によって定まる. よって τ は M 上の滑らかな $(1, 2)$ 型のテンソル場である. τ を ∇ の 捩率テンソル場 (torsion tensor field) という. ∇ が 対称 (symmetric) であるとは, ∇ の捩率テンソル場が恒等的に零であるときにいう. 線形接続 ∇ が対称であることと, 座標近傍上の ∇ の Christoffel 記号 Γ_{ij}^k が $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ を満たすことは同値である.

$I \subset \mathbf{R}$ を开区間とし, $\gamma: I \rightarrow M$ を M 内の曲線とする. V が 曲線 γ に沿うベクトル場 (vector field along a curve γ) であるとは, V が各 $t \in I$ に対し $\gamma(t)$ での接ベクトル $V(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$ を対応させるときにいう. (U, x) を $\gamma(t)$ の座標近傍とする. このとき $U \cap \gamma(I)$ の各点 $\gamma(s)$ で $V(s)$ を $V(s) = \sum_{i=1}^m v^i(s) \partial_i|_{\gamma(s)}$ と表すことができる. 曲線 γ に沿うベクトル場 V が 連続である (continuous) とは, 各 v^i が連続であるときにいう; V が C^∞ 級である または 滑らかである (of class C^∞ または smooth) とは, 各 v^i が滑らかであ

るときにいう. 曲線 γ に対し, $\dot{\gamma}(t) := d\gamma_t(d/dt)$ は γ に沿う滑らかなベクトル場である. $\dot{\gamma}$ を γ の 速度 (velocity) という.

$\gamma : I \rightarrow M$ をはめこみとし, V を γ に沿う滑らかなベクトル場とする. このとき各 $t \in I$ の十分小さい近傍 J および $\gamma(J)$ を含む M の開集合上で定義された滑らかなベクトル場 \tilde{V} が存在して, J 上で $\tilde{V} \circ \gamma \equiv V$ が成り立つ. $\gamma(I)$ の各点 $\gamma(t)$ での接ベクトル $D_t V(t)$ を $D_t V(t) := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}$ で定める. このとき $D_t V(t)$ は \tilde{V} の取り方には依らず, γ と V によって定まる. $D_t V(t)$ を V の $\gamma(t)$ での ∇ に関する 共変微分 (covariant derivative) という. γ に沿う滑らかなベクトル場 V が ∇ に関して 平行 (parallel) であるとは, I 上で $D_t V \equiv 0$ が成り立つときにいう. (U, x) を $\gamma(t)$ の座標近傍とすると, U 内で $D_t V(t) = 0$ は

$$\dot{v}^k(t) = - \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) v^j(t) \quad (2.1)$$

と表される ($k = 1, 2, \dots, m$), 但し \dot{v}^k は v^k の導関数である. (2.1) は (v^1, v^2, \dots, v^m) に関する 1 階の線形常微分方程式系であるので, 与えられた関数 $\dot{\gamma}^i$ および $\Gamma_{ij}^k \circ \gamma$ の定義域上で解 (v^1, v^2, \dots, v^m) が存在し, かつ 1 点で任意に指定された初期値に対し解は一意である. よって $t_0 \in I$ および $\gamma(t_0)$ での接ベクトル $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}(M)$ が任意に与えられたとき, γ に沿う平行なベクトル場 V で $V(t_0) = V_0$ を満たすものが一意に存在することがわかる. 特に, ある点で零ベクトルである平行なベクトル場はどの点でも零ベクトルを与える.

線形接続 ∇ に関する M 内の 測地線 (geodesic) とは, 平行な速度を持つはめこみ $\gamma : I \rightarrow M$ による像である. γ の速度が平行であることは $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ と表される. (2.1) に注意すると, $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ は $\gamma(I)$ の各点 $\gamma(t_0)$ の座標近傍 (U, x) 内で

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 0 \quad (2.2)$$

と表される ($k = 1, 2, \dots, m$). (2.2) は $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m)$ に関する 2 階の常微分方程式系であり, これは 1 階の正規形の常微分方程式系として表されるので, t_0 のある近傍上で解 $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m)$ が存在し, かつ任意に指定された初期値 $(\gamma^i(t_0))$ および $(\dot{\gamma}^i(t_0))$ に対し解は一意である. よって M の各点 a での零ではない接ベクトル V_0 が任意に与えられたとき, a を通り V_0 を a での速度とする測地線が存在し, そしてこのような測地線の最大のものが存在する.

2.3 Levi-Civita 接続

g を M 上の Riemann 計量とする. 線形接続 ∇ が g と相性がよい, 整合する または 両立する (*compatible with g*) とは, M 上の滑らかなベクトル場 V_1, V_2, V_3 に対し

$$V_1 g(V_2, V_3) = g(\nabla_{V_1} V_2, V_3) + g(V_2, \nabla_{V_1} V_3) \quad (2.3)$$

が成り立つときにいう. ∇ が g と相性がよいことと, 任意のはめこみ $\gamma: I \rightarrow M$ および γ に沿う任意の滑らかなベクトル場 V, W に対し

$$\frac{d(g(V, W))}{dt} = g(D_t V, W) + g(V, D_t W)$$

が成り立つことは同値である, 但し $D_t V, D_t W$ はそれぞれ V, W の ∇ に関する共変微分である. さらにこのことと, 任意のはめこみ γ および γ に沿い ∇ に関して平行な任意のベクトル場 V, W に対し $g(V, W)$ が一定であることは同値である.

命題 2.1 g を M 上の Riemann 計量とする. このとき M 上の対称な線形接続で g と相性がよいものが一意に存在する.

命題 2.1 の証明は例えば [20, pp. 68–70] にある. 命題 2.1 に現れた線形接続を Riemann 計量 g の Riemann 接続 (*Riemannian connection*) または Levi-Civita 接続 (*Levi-Civita connection*) という. ∇ を g の Levi-Civita 接続とし, (U, x) を M の 1 点の座標近傍とすると, (U, x) に関する ∇ の Christoffel 記号 Γ_{ij}^k は

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (2.4)$$

と表される, 但し (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列である.

例 2.2 $m := 2, u := x^1, v := x^2$ とし, さらに g が $g = A^2 du^2 + dv^2$ と表されるとする, 但し A は滑らかな正值関数である. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= (\log A)_u, & \Gamma_{11}^2 &= -AA_v, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = (\log A)_v, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

但し u, v の滑らかな関数 f に対し $f_u := \partial f / \partial u, f_v := \partial f / \partial v$ とおく.

$m := 2$ とする. 局所座標系 (x^1, x^2) が 測地的 (*geodesic*) であるとは, U 上で $g_{11} \equiv 1$ または $g_{22} \equiv 1$ が成り立ちかつ $g_{12} = 0$ が成り立つときにいう. (x^1, x^2) は測地的でありかつ $g_{22} \equiv 1$ が成り立つとし, $u := x^1, v := x^2, A := \sqrt{g_{11}}$ とおくと, g を U 上で例 2.2 の中でのように $g = A^2 du^2 + dv^2$ と表すことができる. c を定数とし, 开区間 I から U へのはめこみ γ を $x \circ \gamma(t) := (c, t)$ で定めると, γ による像 $\gamma(I)$ は測地線である.

注意 2.3 $m = 2$ ならば, M の各点の座標近傍で局所座標系が測地的であるものが存在する. I_0 を开区間とする. $\gamma_0 : I_0 \rightarrow M$ をはめこみとする. ν は γ_0 に沿う滑らかなベクトル場で, $g(\dot{\gamma}_0, \nu) \equiv 0$ および $g(\nu, \nu) \equiv 1$ を満たすとする. (2.2) の解 γ は初期値を動かしたときに値を変えるので, γ を変数 t および初期値の関数とみなすことができる. 1 階の正規形常微分方程式系として記述される (2.2) の解は t および初期値に関して滑らかである (例えば, [29, pp.117–118] を見ること). このことに注意すると, 各 $s_0 \in I_0$ に対し, $(s_0, 0)$ を含む \mathbf{R}^2 のある長方形領域

$$R := \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

(但し $\delta > 0, \varepsilon > 0$) から $\gamma_0(s_0)$ の M における開集合の上への微分同相写像 $\gamma : R \rightarrow M$ が存在して, 次が成り立つ: 各 $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ および各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対し $\gamma_s(t) := \gamma(s, t)$ とおくと, γ_s の像は M 内の測地線である; 任意の $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ に対し, $d\gamma_{(s,0)}(\partial/\partial t) = \nu(s)$. よって $U := \gamma(R)$ を M の点 $a := \gamma(s_0, 0)$ の座標近傍とみなすことができ, (s, t) を U における局所座標系とみなすことができる. このとき $g(\nu, \nu) \equiv 1$ を用いて, $g(\partial/\partial t, \partial/\partial t) \equiv 1$ がわかる. さらに $\partial_s := \partial/\partial s, \partial_t := \partial/\partial t$ とおくと,

$$\partial_t g(\partial_s, \partial_t) = g(\nabla_{\partial_t} \partial_s, \partial_t) + g(\partial_s, \nabla_{\partial_t} \partial_t) = g(\nabla_{\partial_s} \partial_t, \partial_t) = 0 \quad (2.6)$$

がわかるので, (2.6) および $g(\dot{\gamma}_0, \nu) \equiv 0$ を用いて $g(\partial/\partial s, \partial/\partial t) \equiv 0$ がわかる. こうして U 上の滑らかな正値関数 A が存在して g は $g = A^2 ds^2 + dt^2$ と表されることがわかる.

例 2.4 g が $g = E(du^2 + dv^2)$ と表されるとする. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(\log E)_u, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2}(\log E)_v, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}(\log E)_v, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}(\log E)_u, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}(\log E)_u, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(\log E)_v. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$m := 2$ とするとき, 局所座標系 (x^1, x^2) が 等温 (isothermal) であるとは, U 上で $g_{11} = g_{22}$ および $g_{12} = 0$ が成り立つときにいう. (x^1, x^2) は等温であるとし, $u := x^1, v := x^2, E := g_{11}$ とおくと, g を U 上で例 2.4 の中でのように $g = E(du^2 + dv^2)$ と表すことができる. M の各点の座標近傍で局所座標系が等温であるものが存在する (この証明は例えば [8] にある).

2.4 曲率テンソル場

∇ を M 上の線形接続とする. このとき M 上の滑らかなベクトル場 V_1, V_2, V_3 に対し,

$$R(V_1, V_2)V_3 := \nabla_{V_1} \nabla_{V_2} V_3 - \nabla_{V_2} \nabla_{V_1} V_3 - \nabla_{[V_1, V_2]} V_3$$

とおく. このとき $R(V_1, V_2)V_3$ が M の各点 a で与える接ベクトルは, V_1, V_2, V_3 が与える接ベクトル $V_{1,a}, V_{2,a}, V_{3,a}$ によって定まる. よって R は M 上の滑らかな $(1, 3)$ 型のテンソル場である. R を ∇ の 曲率テンソル場 (*curvature tensor field*) という. ∇ が 平坦 (*flat*) であるとは, ∇ の曲率テンソル場 R が零であるときにいう. 可微分多様体である R^m に標準的な計量 $g' := \sum_{i=1}^m dr^i \otimes dr^i$ (但し $r = (r^1, r^2, \dots, r^m)$ は R^m の標準的な座標系である) を付与したものが m 次元 Euclid 空間であり, E^m で表される. (2.4) から, 座標近傍 (R^m, r) に関する g' の Levi-Civita 接続 ∇' の Christoffel 記号は全て零であることがわかり, このことから ∇' は平坦であることがわかる. また M 上の Riemann 計量 g の Levi-Civita 接続が平坦であるならば, M の各点のある近傍 U は E^m のある開集合 O と等長 (isometric) である: U から O の上への微分同相写像 F が存在し, U の各点 b での二つの接ベクトル V, W に対し $g'(dF_b(V), dF_b(W)) = g(V, W)$ が成り立つ ([20, pp. 119–121]).

g を M 上の Riemann 計量とし, ∇ を g の Levi-Civita 接続とする. V_1, V_2, V_3, V_4 を M の 1 点 a での接ベクトルとする. このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} g(R(V_1, V_2)V_3, V_4) &= -g(R(V_2, V_1)V_3, V_4) = -g(R(V_1, V_2)V_4, V_3), \\ R(V_1, V_2)V_3 + R(V_2, V_3)V_1 + R(V_3, V_1)V_2 &= 0 \end{aligned}$$

(最後の式を Bianchi の第一恒等式 (first Bianchi identity) という). M の 1 点 a に対し, Π を a での接空間 $T_a(M)$ の 2 次元部分空間とする. Π の基底 V, W に対し,

$$K(V, W) := \frac{g(R(V, W)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2} \quad (2.8)$$

とおく. このとき $K(V, W)$ は Π にのみよって定まり, Π の基底の取り方には依らない. 以下, $K(V, W)$ を $K(\Pi)$ と表す. $K(\Pi)$ を a での接空間 $T_a(M)$ の 2 次元部分空間 Π に関する Riemann 多様体 (M, g) の 断面曲率 (*sectional curvature*) という.

例 2.5 $m := 2$ とし, さらに g が座標近傍上で $g = A^2 du^2 + dv^2$ と表されるとする. このとき (2.5) および (2.8) を用いて,

$$K(\Pi) = K(T_a(M)) = g\left(R\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}, \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\frac{A_{vv}}{A} \quad (2.9)$$

を得る.

例 2.6 g が $g = E(du^2 + dv^2)$ と表されるとする. このとき (2.7) および (2.8) を用いて,

$$\begin{aligned} K(\Pi) = K(T_a(M)) &= g\left(R\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}, \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\right) \\ &= -\frac{1}{2E}((\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}) \end{aligned}$$

を得る.

2.5 Riemann 多様体上の関数の積分

M を m 次元可微分多様体とし, g を M 上の Riemann 計量とする. f は M 上の連続関数で, f の台 $\text{supp}(f)$ はコンパクトであるとする. $\{O_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ は M の開集合の族で, 次を満たすとする: 異なる $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対し, $O_\alpha \cap O_\beta = \emptyset$; $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \overline{O_\alpha}$; 各 O_α はある座標近傍 (U_α, x_α) に含まれる. 各 U_α 上で, g を $g = \sum_{i,j=1}^m g_{\alpha,ij} dx_\alpha^i dx_\alpha^j$ と表す. このとき $x_\alpha(O_\alpha) \subset \mathbf{R}^m$ 上の連続関数 $f \circ x_\alpha^{-1}$ の積分

$$I(f, O_\alpha) := \int_{x_\alpha(O_\alpha)} f \circ x_\alpha^{-1} \sqrt{\det(g_{\alpha,ij} \circ x_\alpha^{-1})} dx_\alpha^1 dx_\alpha^2 \cdots dx_\alpha^m$$

は座標近傍 (U_α, x_α) の取り方に依らない. さらに

$$\int_M f \Omega_g := \sum_{\alpha=1}^N I(f, O_\alpha)$$

は $\{O_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ の取り方に依らない. この値を Riemann 多様体 (M, g) 上の f の 積分 (*integral*) という.

3 曲面論からの準備

3.1 誘導計量および型作用素

M を滑らかな m 次元多様体とする. E^{m+1} を $(m+1)$ 次元 Euclid 空間とし, g' を E^{m+1} の計量とする. $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ を M の E^{m+1} へのはめこみとする. M の各点 a での接ベクトル V, W に対し, $g(V, W) := g'(d\iota_a(V), d\iota_a(W))$ とおくことによって, M 上の Riemann 計量 g を定義することができる. g を ι による M 上の 誘導計量 または 第一基本形式 (*induced metric* または *first fundamental form*) という.

ξ が ι に沿うベクトル場 (*vector field along ι*) であるとは, ξ が M の各点 a に対し $\iota(a)$ での E^{m+1} への接ベクトル $\xi(a) \in T_{\iota(a)}(E^{m+1})$ を対応させるときにいう. 各 $a \in M$ に対し $\xi(a)$ を $\xi(a) = \sum_{i=1}^{m+1} \xi^i(a) \partial/\partial r^i|_{\iota(a)}$ と表すことができる, 但し ξ^i は M 上の関数である. ι に沿うベクトル場 ξ が C^∞ 級である または 滑らかである (*of class C^∞* または *smooth*) とは, 各 ξ^i が滑らかであるときにいう.

ξ を $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ に沿う滑らかなベクトル場とする. このとき M の各点 a のある近傍 U に対し, $\iota(a)$ の E^{m+1} におけるある近傍上の滑らかなベクトル場 ξ' が存在して, U の各点 b に対し $\xi(b) = \xi' \circ \iota(b)$ が成り立つ. ∇' を E^{m+1} の計量 g' の Levi-Civita 接続とし, V を M 上の滑らかなベクトル場とする. V と $d\iota(V)$ を同一視するとき, $\iota(a)$ での E^{m+1} への接ベクトル $\nabla'_V \xi'$ は ξ にのみ依存し, ξ' の取り方には依らない. 以下, $\nabla'_V \xi'$ を $\nabla'_V \xi$ と書く.

W を M 上の滑らかなベクトル場とする. W と $d\iota(W)$ を同一視することによって, W を $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ に沿う滑らかなベクトル場とみなす. M の各点 a に対し, $\iota(a)$ で $\nabla'_V W$ を $d\iota_a(T_a(M))$ の元 $(\nabla'_V W)^T$ と $d\iota_a(T_a(M))$ の $T_{\iota(a)}(E^{m+1})$ における直交補空間の元 $(\nabla'_V W)^\perp$ の和として一意に表すことができる:

$$\nabla'_V W = (\nabla'_V W)^T + (\nabla'_V W)^\perp.$$

このとき次が成り立つ:

- (i) $(\nabla'_V W)^T = \nabla_V W$, 但し ∇ は ι による M 上の誘導計量 g の Levi-Civita 接続である;
- (ii) $(\nabla'_V W)^\perp = (\nabla'_W V)^\perp$ が成り立ち, $(\nabla'_V W)^\perp$ は $a \in M$ で V, W が与える接ベクトル V_a, W_a によって定まる.

M 上の滑らかなベクトル場 V, W に対し, $\alpha(V, W) := (\nabla'_V W)^\perp$ とおく. α を ι に関する M 上の 第二基本形式 (*second fundamental form*) という. こうして $\nabla'_V W$ は $\nabla_V W$ と $\alpha(V, W)$ の和で表されることがわかる:

$$\nabla'_V W = \nabla_V W + \alpha(V, W). \quad (3.1)$$

(3.1) を Gauss の公式 (*Gauss' formula*) という.

ν をはめこみ $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ に沿う滑らかなベクトル場とする. ν が ι に関する M 上の 単位法ベクトル場 (*unit normal vector field*) であるとは, M 上 $g'(\nu, \nu) \equiv 1$ が成り立ちかつ M の任意の点 a に対し $\nu(a)$ は $dt_a(T_a(M))$ に直交するときをいう. ν を ι に関する M 上の単位法ベクトル場とする (M 全体の上で定義できない場合には, M の各点の近傍でこのようなものを考える). このとき M 上の滑らかなベクトル場 V に対し, $\nabla'_V \nu$ は M の各点 a に対し $dt_a(T_a(M))$ の元を与える. $\nabla'_V \nu$ は V が各点 a で与える接ベクトル V_a によって定まる. よって $A_\nu(V) := -\nabla'_V \nu$ とおきそして $T_a(M)$ の元とその dt_a による像を同一視するとき, A_ν は M の各点での接空間の線形変換を与えることがわかり, 従って A_ν は M 上の滑らかな $(1, 1)$ 型のテンソル場である. ι に関する M 上の単位法ベクトル場 ν は一意ではないが, ν を一つ取って固定されている場合には A_ν を単に A で表す. A を ι に関する M 上の 型作用素 または Weingarten 写像 (*shape operator* または *Weingarten map*) という. 以上で得られた

$$\nabla'_V \nu = -A(V) \quad (3.2)$$

を Weingarten の公式 (*Weingarten's formula*) という. M 上のベクトル場 V, W に対し, $h(V, W) := g'(\alpha(V, W), \nu)$ とおく. h のことも ι に関する M 上の 第二基本形式 (*second fundamental form*) とよぶ. h は M 上の滑らかな 2 次共変テンソル場である. M の任意の点で, 次が成り立つ:

$$g(A(V), W) = g(V, A(W)) = h(V, W). \quad (3.3)$$

(3.3) から, 型作用素 A が M の各点で与える線形変換は g に関して対称であることがわかる. よって A は対角化可能である. 型作用素 A の固有値を M の ι に関する 主曲率 (*principal curvature*) といい, A の固有空間の 1 次元部分空間を M の ι に関する 主方向 (*principal direction*) という. A の行列式 $\det A$ を M の ι に関する Gauss-Kronecker 曲率 (*Gauss-Kronecker curvature*) といい, A のトレースを $1/m$ 倍したもの $\text{tr } A/m$ を M の ι に関する 平均曲率 (*mean curvature*) という. M の点 a が ι に関する 臍点 (*umbilical point* または *umbilic*) であるとは, A が点 a での接空間の恒等変換の定数倍と表されるときをいう. はめこみ $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ が 全臍的 (*totally umbilical*) であるとは, M の全ての点 a が ι に関する臍点であるときをいう. $\iota: M \rightarrow E^{m+1}$ が全臍的であるならば, M の ι に関する主曲率は M 上一定であり, 従って $\iota(M)$ は E^{m+1} の超平面または round sphere (E^{m+1} のある点を中心としある正数を半径とする超球面) に含まれる.

$m = 2$ とする. このとき $\det A$ を M の ι に関する Gauss 曲率 (*Gaussian curvature*) という. M から ι に関する全ての臍点を除いて得られる集合を $\text{Reg}(M, \iota)$ で表す. このとき $\text{Reg}(M, \iota)$ は M の開集合である. ι に関する M 上の 主分布 (*principal distribution*) と

は, $\text{Reg}(M, \iota)$ 上の滑らかな 1 次元分布で $\text{Reg}(M, \iota)$ の各点で M の ι に関する主方向の一つを与えるものである.

3.2 Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式

V_1, V_2, V_3 を M 上の滑らかなベクトル場とする. E^{m+1} の曲率テンソル場は零であるので, (3.1) および (3.2) を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla'_{V_1}(\nabla'_{V_2}V_3) - \nabla'_{V_2}(\nabla'_{V_1}V_3) - \nabla'_{[V_1, V_2]}V_3 \\ &= R(V_1, V_2)V_3 + h(V_1, V_3)A(V_2) - h(V_2, V_3)A(V_1) \\ &\quad + ((\nabla_{V_1}h)(V_2, V_3) - (\nabla_{V_2}h)(V_1, V_3))\nu \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る, 但し R は g の Levi-Civita 接続 ∇ の曲率テンソル場であり, また

$$(\nabla_{V_i}h)(V_j, V_k) := V_i(h(V_j, V_k)) - h(\nabla_{V_i}V_j, V_k) - h(V_j, \nabla_{V_i}V_k)$$

である. ∇h は M 上の滑らかな 3 次共変テンソル場である.

V_4 を M 上の滑らかなベクトル場とする. このとき (3.3) および (3.4) を用いて, Gauss の方程式 (*equation of Gauss*)

$$g(R(V_1, V_2)V_3, V_4) = h(V_1, V_4)h(V_2, V_3) - h(V_1, V_3)h(V_2, V_4) \quad (3.5)$$

を得る. 特に, $m = 2$ ならば, (2.8), (3.3) および (3.5) を用いて a での接平面 $T_a(M)$ に関する 2 次元 Riemann 多様体 (M, g) の断面曲率 $K(T_a(M))$ は M の ι に関する Gauss 曲率に等しいことがわかる. これを Gauss の基本定理 (*Gauss' theorema egregium*) という.

また (3.4) から,

$$(\nabla_{V_1}h)(V_2, V_3) = (\nabla_{V_2}h)(V_1, V_3) \quad (3.6)$$

がわかる. V, W を M 上の滑らかなベクトル場とし,

$$(\nabla_V A)(W) := \nabla_V(A(W)) - A(\nabla_V W)$$

とおく. このとき ∇A は M 上の滑らかな (1, 2) 型のテンソル場である. (2.3) および (3.3) を用いて, (3.6) は次と同値であることがわかる:

$$(\nabla_V A)(W) = (\nabla_W A)(V). \quad (3.7)$$

(3.6) または (3.7) を Codazzi-Mainardi の方程式 (*equation of Codazzi-Mainardi*) という.

Gauss の方程式, Codazzi-Mainardi の方程式のいずれも M 上の二つのテンソル場 g, A の間の関係式である. 超曲面論の基本定理 (*fundamental theorem of theory of hypersurfaces*)

によると, M 上の Riemann 計量 g および滑らかな $(1, 1)$ 型のテンソル場 A が Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式を満たすならば, M の各点のある近傍の E^{m+1} へのはめこみ ι が存在して, g は ι による誘導計量に等しくかつ A は ι に関する型作用素に等しい; このような ι は E^{m+1} の等長変換との合成を除いて一意である.

3.3 Hopf 微分

$m := 2$ とする. (U, x) を M の 1 点 a の座標近傍とする. そして局所座標系 (x^1, x^2) は等温であるとし, $u := x^1, v := x^2$ とおく. このとき U 上の正值関数 E が存在して, g を U 上で $g = E(du^2 + dv^2)$ と表すことができる. U 上の複素変数 w を $w := u + \sqrt{-1}v$ で定める. はめこみ $\iota: M \rightarrow E^3$ や ι に関する M 上の単位法ベクトル場 ν を U 上の E^3 値関数とみなす. U 上の滑らかな E^3 値関数 ξ に対し, $\xi_w := (1/2)(\xi_u - \sqrt{-1}\xi_v)$ とおく, 但し $\xi_u := \partial\xi/\partial u, \xi_v := \partial\xi/\partial v$ である. $\iota_u, \iota_v, \nu_u, \nu_v$ を U の各点での接平面の元とみなすことができることに注意して, U 上の複素数値関数 Φ を $\Phi := -2g(\iota_w, \nu_w)$ で定義する, 但しこの右辺については

$$\begin{aligned} & g(\iota_u - \sqrt{-1}\iota_v, \nu_u - \sqrt{-1}\nu_v) \\ & := g(\iota_u, \nu_u) - g(\iota_v, \nu_v) - \sqrt{-1}(g(\iota_u, \nu_v) + g(\iota_v, \nu_u)) \end{aligned}$$

とおく. (\tilde{U}, \tilde{x}) を点 a の別の座標近傍とし, $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ は等温であるとする. $\tilde{u} := \tilde{x}^1, \tilde{v} := \tilde{x}^2$ とおき, $\tilde{w} := \tilde{u} + \sqrt{-1}\tilde{v}$, $\tilde{\Phi} := -2g(\iota_{\tilde{w}}, \nu_{\tilde{w}})$ とおく. このとき $U \cap \tilde{U}$ 上で $\Phi dw^2 = \tilde{\Phi} d\tilde{w}^2$ が成り立つ, 但し

$$dw^2 := du^2 - dv^2 + 2\sqrt{-1}dudv$$

であり, $d\tilde{w}^2$ も同様に定める. 従って, M を上に現れた w や \tilde{w} を局所座標とする Riemann 面 (複素 1 次元複素多様体) とみなすとき, M 全体の上で複素 2 次微分 (complex quadratic differential) Q を $Q := \Phi dw^2$ によって定義することができる. Q を ι に関する M 上の Hopf 微分 (Hopf differential) という.

U 上で

$$l := h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad m := h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad n := h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とおく. このとき $\Phi = (l - n)/2 - \sqrt{-1}m$ が成り立つ. よって (2.7) を用いて, (3.6) は

$$l_v - m_u = E_v H, \quad m_v - n_u = -E_u H \quad (3.8)$$

と同値であることがわかる, 但し H は M の ι に関する平均曲率である. H は $H = (l + n)/2E$ と表されるので, (3.8) は $\Phi_{\tilde{w}} = E H_w$ と同値であることがわかる, 但し $\Phi_{\tilde{w}} := (1/2)(\Phi_u + \sqrt{-1}\Phi_v)$ である.

M の 1 点 a での接ベクトル $V = s\partial/\partial u + t\partial/\partial v$ が ι に関する主方向に含まれることと, a での主曲率の一つ k に対し $A(V) = kV$ が成り立つことは同値である. (3.3) を用いて, $A(V) = kV$ は

$$sl + tm = ksE, \quad sm + tn = ktE \quad (3.9)$$

と同値であることがわかる. よって (3.9) から k を消去することによって, V が ι に関する主方向に含まれることと $\text{Im}((s + \sqrt{-1}t)^2\Phi) = 0$ は同値であることがわかる. ここで $dw^2(V, V) = (s + \sqrt{-1}t)^2$ が成り立つと考えることができるので, V が ι に関する主方向に含まれることと $\text{Im}(Q(V, V)) = 0$ は同値である. M の 1 点 a が ι に関する臍点であることと, a で $Q = 0$ が成り立つことは同値である.

4 Hopf-Poincaré の定理

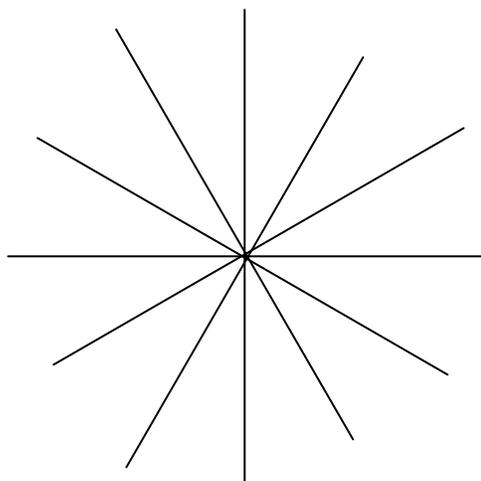
4.1 1次元分布の孤立特異点の定義および例

M を滑らかな 2 次元多様体とし, \mathcal{D} を M の領域 D 上の連続な 1 次元分布とする. $M \setminus D$ の点 a_0 が \mathcal{D} の 孤立特異点 (*isolated singularity*) であるとは, a_0 のある近傍 U_0 に対し $U_0 \setminus D = \{a_0\}$ が成り立ちかつ \mathcal{D} は a_0 まで連続に拡張されないときにいう.

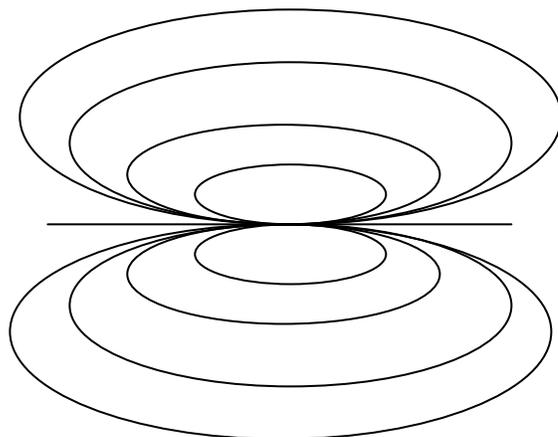
例 4.1 \mathbb{R}^2 の点 (u, v) に対し, $w := u + \sqrt{-1}v$ とおく. このとき $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し, $\mathcal{D}^{(n)}$ は $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の滑らかな 1 次元分布で, D の各点 (u, v) で

$$\operatorname{Re}(w^n) \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{Im}(w^n) \frac{\partial}{\partial v} \in \mathcal{D}^{(n)}(u, v)$$

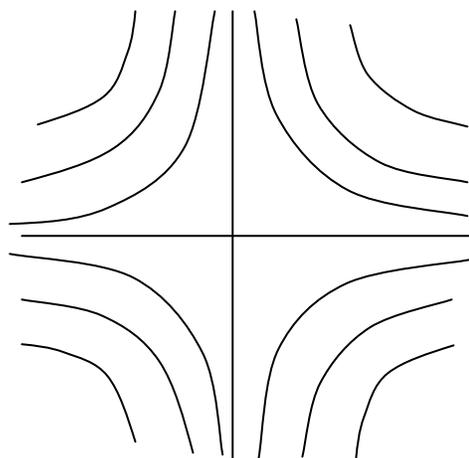
を満たすとする. このとき $(0, 0)$ は $\mathcal{D}^{(n)}$ の孤立特異点である.



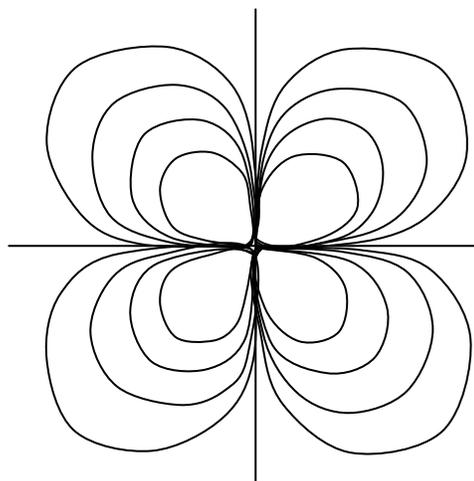
$\mathcal{D}^{(1)}$ の積分曲線



$\mathcal{D}^{(2)}$ の積分曲線



$\mathcal{D}^{(-1)}$ の積分曲線

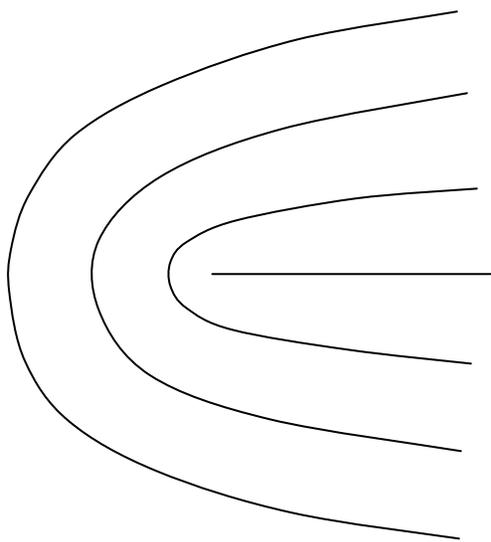


$\mathcal{D}^{(3)}$ の積分曲線

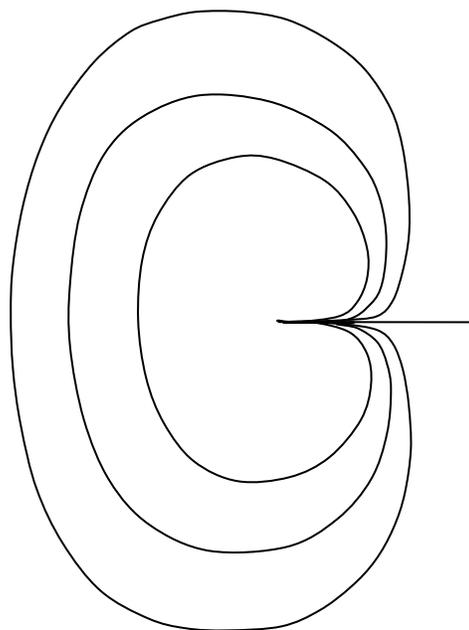
例 4.2 R^2 の点 (u, v) に対し $w := u + \sqrt{-1}v$ とおくと、 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し $f(w) := w^{n/2}$ は w の 1 価関数であるとは限らない: n が奇数ならば、 $f(w) = w^{n/2}$ は $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の 2 価関数である. 従って

$$V^{(n/2)} := \operatorname{Re}(w^{n/2}) \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{Im}(w^{n/2}) \frac{\partial}{\partial v}$$

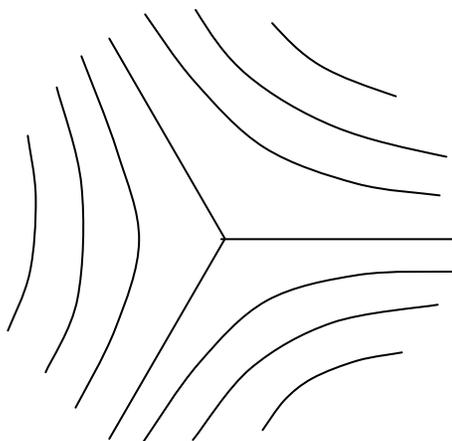
は $D := R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の 1 価ベクトル場であるとは限らないが、一方で $V^{(n/2)}$ は D の各点での接平面の 1 次元部分空間を唯一つ定める. こうして 1 価の 1 次元分布 $\mathcal{D}^{(n/2)}$ が得られ、そして $\mathcal{D}^{(n/2)}$ は滑らかである. $(0, 0)$ は $\mathcal{D}^{(n/2)}$ の孤立特異点である.



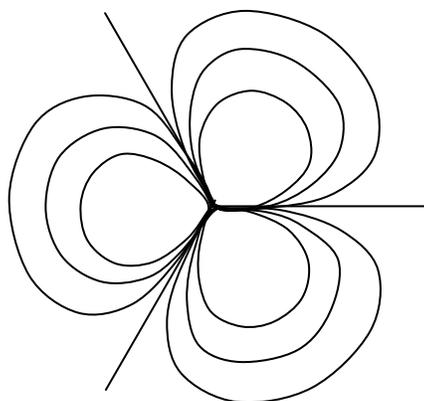
$\mathcal{D}^{(1/2)}$ の積分曲線



$\mathcal{D}^{(3/2)}$ の積分曲線



$\mathcal{D}^{(-1/2)}$ の積分曲線



$\mathcal{D}^{(5/2)}$ の積分曲線

4.2 孤立特異点の指数の定義

a_0 を M の領域 D 上の連続な 1 次元分布 \mathcal{D} の孤立特異点とする. $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow D$ を周期的なはめこみとする. 円板に同相な a_0 のある近傍 U_0 が存在して, $U_0 \setminus D = \{a_0\}$ が成り立ちかつ $C := \gamma(\mathbf{R})$ は U_0 の境界であるとする. l を γ の周期とし, $\gamma(l) = \gamma(0)$ を満たす最小の正数とする. ξ は $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow D$ に沿う連続なベクトル場で, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $\gamma(t)$ での D への接ベクトル $\xi(t)$ は零ではなくかつ U_0 の内側を向いているとする. そして ξ は周期的で, その周期は l であるとする. \mathbf{R} 上の連続関数 ψ で, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $\gamma(t)$ で

$$(\cos \psi(t))\dot{\gamma}(t) + (\sin \psi(t))\xi(t) \in \mathcal{D} \quad (4.1)$$

を満たすものが存在する. 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $\psi(t+l) - \psi(t)$ は π の整数倍と表されるので, $\psi(t+l) - \psi(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ の取り方に依らない. \mathcal{D} の孤立特異点 a_0 の 指数 (*index*) $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ を

$$\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D}) := \frac{\psi(l) - \psi(0)}{2\pi} + 1 \quad (4.2)$$

により定義する. $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ はある整数の半分 ($1/2$ 倍) と表され, 必ずしも整数であるとは限らない. (4.2) の右辺ははめこみ γ , γ に沿うベクトル場 ξ および関数 ψ の取り方に依存しない. 特に強調したいことは, 指数 $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ は曲線 C の向きに依存しないということである. $t \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\gamma_+(t) := \gamma(t), \quad \gamma_-(t) := \gamma(-t), \quad \xi_+(t) := \xi(t), \quad \xi_-(t) := \xi(-t)$$

とおく. $\varepsilon = +, -$ に対し, ψ_ε は \mathbf{R} 上の連続関数で, $\psi := \psi_\varepsilon$, $\gamma := \gamma_\varepsilon$, $\xi := \xi_\varepsilon$ に対し (4.1) が成り立つとする. このとき整数 n が存在して, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $\psi_-(t) = n\pi - \psi_+(-t)$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \psi_+(l) - \psi_+(0) &= \psi_+(0) - \psi_+(-l) \\ &= (n\pi - \psi_+(-l)) - (n\pi - \psi_+(0)) \\ &= \psi_-(l) - \psi_-(0) \end{aligned}$$

が成り立つので, (4.2) の右辺第 1 項は γ_+ , γ_- のいずれを選択するかに依存しない.

U は a_0 の近傍で, $U_0 \cup C \subset U$ を満たすとする. E_1, E_2 は U 上の連続なベクトル場で, U の各点での接平面の基底をなすとする. θ は \mathbf{R} 上の連続関数で, 各 $t \in \mathbf{R}$ に対し正数 $c(t)$ が存在して $\gamma(t)$ で

$$\dot{\gamma}(t) = c(t)((\cos \theta(t))E_1 + (\sin \theta(t))E_2)$$

が成り立つとする. このとき $-(\sin \theta(t))E_1 + (\cos \theta(t))E_2$ または $(\sin \theta(t))E_1 - (\cos \theta(t))E_2$ は $\gamma(t)$ で U_0 の内側を向いている. ここでは前者が U_0 の内側を向いているとし,

$$\xi(t) := c(t)(-(\sin \theta(t))E_1 + (\cos \theta(t))E_2)$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} & (\cos \psi(t))\dot{\gamma}(t) + (\sin \psi(t))\xi(t) \\ &= c(t)(\cos(\psi(t) + \theta(t))E_1 + \sin(\psi(t) + \theta(t))E_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

が成り立つ. \mathbf{R} 上の連続関数 ϕ を $\phi(t) := \psi(t) + \theta(t)$ で定めると, (4.1) および (4.3) から $\gamma(t)$ で

$$(\cos \phi(t))E_1 + (\sin \phi(t))E_2 \in \mathcal{D} \quad (4.4)$$

がわかり, そして (4.2) および $\theta(l) - \theta(0) = 2\pi$ から

$$\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D}) = \frac{\phi(l) - \phi(0)}{2\pi} \quad (4.5)$$

を得る.

$\gamma: \mathbf{R} \rightarrow D$ がはめこみであるとは限らないとしても, 連続で区分的に滑らかでありかつ $[0, l)$ の有限個の点を除いて $\dot{\gamma} \neq 0$ を満たす場合には, \mathbf{R} 上の連続関数 ϕ を (4.4) の中でのように定めることによって (4.5) を得る.

例 4.1 に現れた滑らかな 1 次元分布 $\mathcal{D}^{(n)}$ の孤立特異点 $(0, 0)$ の指数は n である. 例 4.2 に現れた滑らかな 1 次元分布 $\mathcal{D}^{(n/2)}$ の孤立特異点 $(0, 0)$ の指数は $n/2$ である.

4.3 Euler 数

n を自然数とする. \mathbf{R}^n の部分集合 C が 凸 (*convex*) であるとは, C の任意の 2 点 a, b に対し a と b を結ぶ線分が C に含まれるときにいう. \mathbf{R}^n の $p+1$ 個の点 a_0, a_1, \dots, a_p が c -独立 (*c-independent*) であるとは, p 個のベクトル $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$ が一次独立であるときにいう. a_0, a_1, \dots, a_p が c -独立であるとき, a_0, a_1, \dots, a_p を含む最小の凸集合を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ で表す. このとき

$$|a_0 a_1 \dots a_p| = \left\{ \sum_{i=0}^p c_i a_i \mid c_i \geq 0, \sum_{i=0}^p c_i = 1 \right\}$$

が成り立つ ([26, pp. 80–81]). $|a_0 a_1 \dots a_p|$ と表される \mathbf{R}^n の部分集合を 単体 (*simplex*) または p -単体 (*p-simplex*) という. p -単体 $|a_0 a_1 \dots a_p|$ に対し, p を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ の 次元 (*dimension*) という. 単体 σ の次元を $\dim \sigma$ で表す. a_0, a_1, \dots, a_p を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ の 頂点

(vertex) という. また $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ の部分集合 $\{a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_q}\}$ ($q \in \{0, 1, \dots, p\}$) に対し, q -単体 $|a_{j_0} a_{j_1} \dots a_{j_q}|$ を p -単体 $|a_0 a_1 \dots a_p|$ の 辺単体 (face) または q -辺単体 (q -face) という. 単体 σ の 0 -辺単体はちょうど σ の頂点である.

K を \mathbf{R}^n 内の有限個の単体からなる集合とする. K が 単体的複体 (simplicial complex) であるとは,

- (i) $\sigma \in K$ に対し, σ の辺単体は全て K に属し,
- (ii) $\sigma, \tau \in K$ が $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ を満たすならば, $\sigma \cap \tau$ は σ の辺単体でありかつ τ の辺単体である

ときという. K を単体的複体とする. このとき K に含まれる単体の次元の最大値を K の 次元 (dimension) といい, $\dim K$ で表す.

$\sigma = |a_0 a_1 \dots a_p|$ を p -単体とする. 集合 $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ の元の並べ方を指定して得られる全ての列からなる集合を $O(\sigma)$ で表す:

$$O(\sigma) := \{(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \mid \{i_0, i_1, \dots, i_p\} = \{0, 1, \dots, p\}\}.$$

$O(\sigma)$ に同値関係を導入する. $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}), (a'_{i'_0}, a'_{i'_1}, \dots, a'_{i'_p}) \in O(\sigma)$ に対し置換

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \dots & i_p \\ i'_0 & i'_1 & \dots & i'_p \end{pmatrix}$$

が偶置換である, つまり二つの置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ i_0 & i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ i'_0 & i'_1 & \dots & i'_p \end{pmatrix}$$

の符号が等しいとき, $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \sim (a'_{i'_0}, a'_{i'_1}, \dots, a'_{i'_p})$ と書く. \sim は $O(\sigma)$ における同値関係であり, \sim に関する $O(\sigma)$ の商集合 $O(\sigma)/\sim$ は二つの元からなる. $O(\sigma)/\sim$ の各元を σ の 向き (orientation) という. σ の向きを一つ指定するとき, 単体 σ は 向きづけられている (oriented) といい, 向きづけられた単体である σ を $\langle \sigma \rangle$ で表す. 向きづけられた単体 $\langle \sigma \rangle$ に対し, (a_0, a_1, \dots, a_p) が σ の指定された向きを与えるとき, $\langle \sigma \rangle$ を $\langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle$ とも表す.

K を単体的複体とする. このとき各 $p \in \{0, 1, \dots, \dim K\}$ に対し, K に含まれる p -単体の個数を N_p で表す. $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots, \sigma_{N_p}^p$ を K に含まれる全ての p -単体とする. このとき $\langle \sigma_1^p \rangle, \langle \sigma_2^p \rangle, \dots, \langle \sigma_{N_p}^p \rangle$ が生成する \mathbf{R} 上の自由加群を $C_p(K)$ で表す:

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle \sigma_i^p \rangle \mid r_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

$C_p(K)$ を K の p -鎖群 (*group of p -chains*) という. $C_p(K)$ の元を K の p -鎖 (*p -chain*) という. p -鎖 $\langle \sigma_i^p \rangle$ に対し, $\langle \sigma_i^p \rangle$ の逆元 $-\langle \sigma_i^p \rangle$ は σ_i^p にもう一つの向きを指定して得られる向きづけられた単体であるとする.

$p \in \{1, 2, \dots, \dim K\}$ とし, $\langle \sigma \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle$ を単体的複体 K の向きづけられた p -単体とする. $\langle \sigma \rangle$ の境界 (*boundary*) $\partial \langle \sigma \rangle$ とは, $(p-1)$ -鎖 $\partial \langle \sigma \rangle := \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle \sigma(i) \rangle$ である, 但し

$$\langle \sigma(i) \rangle := \langle a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p \rangle$$

である. こうして p -鎖 $\sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle \sigma_i^p \rangle$ に対し $(p-1)$ -鎖 $\sum_{i=1}^{N_p} r_i \partial \langle \sigma_i^p \rangle$ を対応させる写像 $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ が得られ, これを 境界準同型 (*boundary homomorphism*) という. $p \in \{2, 3, \dots, \dim K\}$ に対し, ∂_p と ∂_{p-1} の合成写像 $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ による $C_p(K)$ の像は $C_{p-2}(K)$ の零元だけからなる: $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ ([26, pp. 159–160], [30, pp. 97–98]). ここで

$$Z_p(K) := \{c \in C_p(K) \mid \partial_p c = 0\}$$

($p \in \{1, 2, \dots, \dim K\}$) および $Z_0(K) := C_0(K)$ とおく. また

$$B_p(K) := \{\partial_{p+1} c \mid c \in C_{p+1}(K)\}$$

($p \in \{0, 1, 2, \dots, \dim K - 1\}$) とおき, $B_{\dim K}(K)$ を $C_{\dim K}(K)$ の零元だけからなる集合とする. このとき $Z_p(K)$ および $B_p(K)$ は $C_p(K)$ の部分加群である. さらに $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ を用いて $B_p(K) \subset Z_p(K)$ がわかり, 従って $B_p(K)$ は $Z_p(K)$ の部分加群であることがわかる. よって商群 $H_p(K) := Z_p(K)/B_p(K)$ を定義できる. $H_p(K)$ を単体的複体 K の p 次元ホモロジー群 (*p th homology group*) という. K に含まれる全ての単体の和集合を $|K|$ で表す. このとき K のホモロジー群 $H_p(K)$ は $|K|$ の位相にのみ依存する: K' を単体的複体とし, $|K'|$ が $|K|$ と同相であるならば, $H_p(K')$ は $H_p(K)$ と同型である ([30, p. 146]). $H_p(K)$ をベクトル空間とみなすことができるが, $H_p(K)$ のベクトル空間としての次元を β_p で表し, K の p 次元 Betti 数 (*p th Betti number*) という. また $\chi(K) := \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \beta_p$ を K の Euler 数 (*Euler number*) という. このとき $\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p N_p$ が成り立つ ([26, pp. 162–163], [30, p. 102]).

M をコンパクトな可微分多様体とする. K を単体的複体とし, ある R^n が K の全ての元を含むとする. K は M の三角形分割を与えるとする, つまり $|K|$ から M への同相写像 $F : |K| \rightarrow M$ が存在するとする. さらに K は M の滑らかな三角形分割を与えるとする, つまり各 $\sigma \in K$ に対し σ を含む R^n のある $(\dim \sigma)$ 次元部分多様体 M_σ から M へのあるはめこみ $F_\sigma : M_\sigma \rightarrow M$ が存在して $F_\sigma|_\sigma = F|_\sigma$ を満たすとする. このとき M の Euler 数 (*Euler number*) $\chi(M)$ を $\chi(K)$ によって定める. K のホモロジー群は $|K|$ の位相にのみ依存するので, M の Euler 数 $\chi(M)$ は M の三角形分割を与える単体的複体の取り方に依存しない.

4.4 Hopf-Poincaré の定理およびその証明

可微分多様体 M が 向きづけ可能 (*orientable*) であるとは、 M の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ として次を満たすものをとることができるときにいう: $\lambda, \mu \in \Lambda$ が $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たすならば、 $x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上で写像 $x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$ の Jacobian $\det(\partial x_\mu^i / \partial x_\lambda^j)$ は正である. 本講義の目的は Hopf の定理およびその証明を理解することであり、次章においてこのための議論を行なうが、次の定理 (Hopf-Poincaré の定理, [13, p. 113]) は Hopf の定理の証明において重要な役割を果たす.

定理 4.3 M をコンパクトで向きづけ可能な 2 次元可微分多様体とする. \mathcal{D} は M から高々有限個の点を除いて得られる集合上で定義された連続な 1 次元分布で、これらの点は \mathcal{D} の孤立特異点であるとする. このとき \mathcal{D} の全ての孤立特異点の指数の和は M の Euler 数 $\chi(M)$ に等しい.

M をコンパクトで向きづけ可能な 2 次元可微分多様体とする. $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は M の C^∞ 級座標近傍系で、 $\lambda, \mu \in \Lambda$ が $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たすならば $x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上で $\det(\partial x_\mu^i / \partial x_\lambda^j) > 0$ が成り立つとする. 以下、座標近傍は全てこの座標近傍系に属するとする.

K および $F: |K| \rightarrow M$ をそれぞれ M の滑らかな三角形分割を与える単体的複体および同相写像とする. さらに K の各 2-単体 σ に対し、ある座標近傍 (U, x) が $F(\sigma) \subset U$ を満たすとする. σ のある内点の $x \circ F$ による像は $(0, 0)$ であると仮定する.

$\gamma: \mathbf{R} \rightarrow U$ を周期的、連続で区分的に滑らかな写像とし、 $C := \gamma(\mathbf{R})$ は $F(\sigma)$ の境界であるとする. l を γ の周期とし、 $\gamma(l) = \gamma(0)$ を満たす最小の正数とする. γ は $[0, l)$ において 3 点 t_1, t_2, t_3 以外では $\dot{\gamma} \neq 0$ を満たすとする (従って $\gamma(t_k)$ は σ の頂点の F による像である). ξ を $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow U$ に沿う連続なベクトル場とする. そして ξ は周期 l を持ち、任意の $t \in [0, l) \setminus \{t_1, t_2, t_3\}$ に対し $\gamma(t)$ での U への接ベクトル $\xi(t)$ は零ではなくかつ $F(\sigma)$ の内側を向いているとする. さらに、

$$\dot{\gamma}(t) := \dot{\gamma}^1(t) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{\gamma}^2(t) \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \xi(t) := \xi^1(t) \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(t) \frac{\partial}{\partial x^2}$$

と表すとき、任意の $t \in [0, l) \setminus \{t_1, t_2, t_3\}$ に対し

$$\dot{\gamma}^1(t)\xi^2(t) - \dot{\gamma}^2(t)\xi^1(t) > 0 \tag{4.6}$$

を仮定する.

g を M 上の Riemann 計量とし、 ∇ を g の Levi-Civita 接続とする. 座標近傍 (U, x) は $g = A^2 du^2 + dv^2$ を満たすとする、但し $u := x^1, v := x^2$ とおく. V は γ に沿う零ではない連続で区分的に滑らかなベクトル場で、 ∇ に関して平行であるとする. このとき $g(V, V)$

は一定であるので, R 上の区分的に滑らかな関数 α が存在して任意の $t \in R$ に対し $\gamma(t)$ での U への接ベクトル $V(t)$ は

$$V(t) = \cos \alpha(t) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} + \sin \alpha(t) \frac{\partial}{\partial v}$$

と表されると仮定してよい. このとき (2.1) および (2.5) から, 任意の $t \in [0, l] \setminus \{t_1, t_2, t_3\}$ に対し α は $\dot{\alpha}(t) = A_v(\gamma(t))\dot{\gamma}^1(t)$ を満たすことがわかる. よって Green の定理および (2.9) を用いて,

$$\alpha(l) - \alpha(0) = \int_0^l \dot{\alpha}(t) dt = \int_C A_v du = - \iint_{F(\sigma)} A_{vv} dudv = \iint_{F(\sigma)} K_g \Omega_g \quad (4.7)$$

が成り立つことがわかる, 但し K_g は M の各点での接平面に関する (M, g) の断面曲率である. 従って, $F(\sigma)^\circ$ を $F(\sigma)$ の内部とすると, $\alpha(l) - \alpha(0)$ は Riemann 多様体 $(F(\sigma)^\circ, g)$ 上の K_g の積分に等しい.

\mathcal{D} は M から高々有限個の点を除いて得られる集合上で定義された連続な 1 次元分布で, これらの点は \mathcal{D} の孤立特異点であるとする. \mathcal{D} の各孤立特異点 a_0 に対し, 単体的複体 K の 2-単体 σ が存在して, a_0 は $F(\sigma)$ の内点であるとする. さらに K の各 2-単体 σ に対し, $F(\sigma)$ に含まれる \mathcal{D} の孤立特異点の数は 1 以下であるとする. σ は K の 2-単体で, \mathcal{D} の孤立特異点 a_0 は $F(\sigma)$ の内点であるとする. 座標近傍 (U, x) は $F(\sigma) \subset U$ および $x(a_0) = (0, 0)$ を満たすとする. $\gamma: R \rightarrow U$ および ξ は二つ前の段落の中でのようなものとする. ϕ は R 上の連続関数で, 任意の $t \in R$ に対し $\gamma(t)$ で

$$\cos \phi(t) \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} + \sin \phi(t) \frac{\partial}{\partial v} \in \mathcal{D}$$

を満たすとする. このとき ϕ は (4.5) を満たす. α を前段落の中でのような R 上の連続で区分的に滑らかな関数とし, $\beta := \phi - \alpha$ とおく. このとき任意の $t \in R$ に対し, $\beta(t)$ は \mathcal{D} と V が $\gamma(t)$ でなす計量 g に関する角度であり, 従って座標近傍 (U, x) の取り方には依存しない. そして (4.5) および (4.7) から,

$$\frac{\beta(l) - \beta(0)}{2\pi} = \text{ind}_{a_0}(\mathcal{D}) - \frac{1}{2\pi} \iint_{F(\sigma)} K_g \Omega_g \quad (4.8)$$

を得る. K の 2-単体 σ に対し, $F(\sigma)$ は \mathcal{D} の孤立特異点を含まないとする. このとき以上と同様の議論をすることによって,

$$\frac{\beta(l) - \beta(0)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{F(\sigma)} K_g \Omega_g \quad (4.9)$$

を得ることができる. γ に沿う二つの平行なベクトル場が各点でなす g に関する角度は一定であることに注意すると, 任意の $t \in R$ に対し $\beta(t) - \beta(0)$ は平行なベクトル場 V の取

り方には依存しないことがわかる. 特に (4.8) または (4.9) の左辺の値は V の取り方には依存しない.

K に含まれる 2-単体の個数を N で表す. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ を K に含まれる全ての 2-単体とする. 各 2-単体 $\sigma := \sigma_i$ に対応する関数 β を β_i で表し, (4.8) または (4.9) の右辺に相当するものを K の各 2-単体 σ_i に対し考えることで,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N (\beta_i(l) - \beta_i(0)) = \sum_{a_0 \in S} \text{ind}_{a_0}(\mathcal{D}) - \frac{1}{2\pi} \iint_M K_g \Omega_g \quad (4.10)$$

を得る, 但し (4.10) の右辺第 1 項に現れた S は \mathcal{D} の全ての孤立特異点からなる集合である. Gauss-Bonnet の定理から, (4.10) の右辺第 2 項は $-\chi(M)$ に等しいことがわかる.

各 2-単体 $\sigma := \sigma_i$ に対応する γ を γ_i で表す. γ_i は $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} \in [0, l)$ 以外では $\dot{\gamma}_i \neq 0$ を満たすとする. $t_{i1} < t_{i2} < t_{i3}$ を仮定してよい. このとき γ_i に沿う二つの平行なベクトル場が各点でなす g に関する角度は一定であることに注意すると,

$$\beta_i(t_{i1}) - \beta_i(0) = \beta_i(l + t_{i1}) - \beta_i(l)$$

が成り立つことがわかり, 従って

$$\begin{aligned} & \beta_i(l) - \beta_i(0) \\ &= (\beta_i(t_{i2}) - \beta_i(t_{i1})) + (\beta_i(t_{i3}) - \beta_i(t_{i2})) + (\beta_i(l + t_{i1}) - \beta_i(t_{i3})) \end{aligned} \quad (4.11)$$

がわかる. よって (4.10) の左辺について,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\beta_i(l) - \beta_i(0)) \\ &= \sum_{i=1}^N ((\beta_i(t_{i2}) - \beta_i(t_{i1})) + (\beta_i(t_{i3}) - \beta_i(t_{i2})) + (\beta_i(l + t_{i1}) - \beta_i(t_{i3}))) \end{aligned} \quad (4.12)$$

が成り立つ. (4.11) の右辺の三つの項の各々は 2-単体 σ_i のある 1-辺単体 τ の F による像の二つの端点で \mathcal{D} と V がなす角度の差を表している. この 1-辺単体 τ に対し, σ_i 以外の K の 2-単体 σ_j が唯一つ存在して, τ は σ_j の 1-辺単体でもある. このとき添え字 i を j に置き換えた (4.11) の右辺の三つの項の一つに $F(\tau)$ の二つの端点で \mathcal{D} と V がなす角度の差が現れるが, この符号は添え字が i である場合のものと逆である: $\gamma_i(t_{ip}), \gamma_i(t_{ip+1})$ を $F(\tau)$ の端点 (但し $p \in \{1, 2, 3\}$ でありかつ $t_{i4} := l + t_{i1}$ とする) とし, また $\gamma_j(t_{jq}), \gamma_j(t_{jq+1})$ をやはり $F(\tau)$ の端点とするならば,

$$\gamma_j(t_{jq}) = \gamma_i(t_{ip+1}), \quad \gamma_j(t_{jq+1}) = \gamma_i(t_{ip})$$

が (4.6) からわかる. よって (4.12) の右辺は零であることがわかり, 従って (4.10) および (4.12) から定理 4.3 を得る.

5 主定理

5.1 主定理およびその証明

本講義の目的は次の定理 (Hopf の定理, [13, p. 138]) およびその証明を理解することである.

定理 5.1 M は滑らかな 2 次元多様体で, 球面 S^2 に同相であるとする. $\iota: M \rightarrow E^3$ は M の E^3 へのはめこみで, ι に関する平均曲率は一定であるとする. このとき ι はうめこみであり, そして正数 R および E^3 の 1 点 $a = (a^1, a^2, a^3)$ が存在して, M の ι による像 $\iota(M)$ は

$$\iota(M) = \{(r^1, r^2, r^3) \in E^3 \mid (r^1 - a^1)^2 + (r^2 - a^2)^2 + (r^3 - a^3)^2 = R^2\} \quad (5.1)$$

と表される, つまり $\iota(M)$ は *round sphere* (全臍的な球面) である.

M を滑らかな 2 次元多様体とし, $\iota: M \rightarrow E^3$ を M の E^3 へのはめこみとする. (u, v) を M の 1 点の近傍 U 上の局所座標系とし, そして (u, v) は ι による M 上の誘導計量 g に関して等温であるとする. このとき g は U 上で $g = E(du^2 + dv^2)$ と表される, 但し E は U 上の滑らかな正値関数である. $w := u + \sqrt{-1}v$ とおき, $Q := \Phi dw^2$ を ι に関する M 上の Hopf 微分とする. H を M の ι に関する平均曲率とする. このとき $\Phi_{\bar{w}} = EH_w$ が成り立つ. ここで H は一定であると仮定する. このとき $\Phi_{\bar{w}} \equiv 0$ を得る. 従って Φ は $w = u + \sqrt{-1}v$ の正則関数であり, Q は正則 2 次微分 (holomorphic quadratic differential) である. もし M 上で $Q \equiv 0$ ならば, $\iota: M \rightarrow E^3$ は全臍的である. ここで M は球面 S^2 に同相であると仮定する. このとき M はコンパクトであるので, $\iota(M)$ は (5.1) の中でのように表されることがわかる. $\iota(M)$ は単連結であり, $\iota: M \rightarrow \iota(M)$ は被覆写像であるので, ι は単射であり従ってうめこみである (M は S^2 に同相であると仮定したが, 以上の議論においては M がコンパクトであることだけを用いている).

以下においては, $Q \neq 0$ を仮定し矛盾を導きたい. $Q \neq 0$ ならば, Q の零点は孤立している. 従って M の ι に関する臍点は孤立していることがわかる. M はコンパクトであるので, M の ι に関する臍点は高々有限個存在することがわかる. 従って ι に関する M 上の主分布 \mathcal{D} は M からこれら有限個の点を除いて得られる集合である $\text{Reg}(M, \iota)$ 上で定義されている滑らかな 1 次元分布である. Hopf-Poincaré の定理によると, \mathcal{D} の全ての孤立特異点の指数の和は M の Euler 数 $\chi(M)$ に等しい. M は S^2 に同相であるので, $\chi(M) = 2$ が成り立ち, 特に $\chi(M)$ は正である. 一方で, 次の命題 ([13, p. 139]) が成り立つので, 矛盾が生じることがわかる.

命題 5.2 H は一定でありかつ $Q \neq 0$ が成り立つとする. このとき M の ι に関する孤立臍点は主分布 \mathcal{D} の孤立特異点であり, かつその指数は負である.

この命題が正しいならば, いずれも負である有限個の指数の和も負であり, M の Euler 数である 2 に等しくなることは有り得ない. 従ってこの命題を証明することによって, 定理 5.1 の証明が終わる.

命題 5.2 の証明 a_0 を M の ι に関する孤立臍点とする. (u, v) を a_0 の近傍 U 上の等温座標系とし, $(0, 0)$ が a_0 に対応するとする. このとき a_0 の近傍上で Φ は $\Phi(w) = w^n f(w)$ と表される, 但し n は自然数であり, f は $f(0) \neq 0$ を満たす $w = u + \sqrt{-1}v$ の正則関数である. r は正数で, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $(u, v) := (r \cos t, r \sin t)$ は U の点に対応しているとする. ϕ は \mathbf{R} 上の滑らかな関数で, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $V(t) := (\cos \phi(t))\partial/\partial u + (\sin \phi(t))\partial/\partial v$ は $(r \cos t, r \sin t)$ での ι に関する主方向に含まれるとする. このとき $\text{Im}(Q(V, V)) \equiv 0$ が成り立つ. 必要ならば r を小さく取り直すことによって, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $f(re^{\sqrt{-1}t}) \neq 0$ が成り立つことがわかる. \mathbf{R} 上の滑らかな関数 ρ, θ を $f(re^{\sqrt{-1}t}) = \rho(t)e^{\sqrt{-1}\theta(t)}$ で定める. このとき $\text{Im}(Q(V, V)) = 0$ と, ある整数 N が存在して任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

$$nt + \theta(t) + 2\phi(t) = N\pi \quad (5.2)$$

が成り立つことは同値である. さらに任意の正数 δ に対し, r を小さく取り直すことによって, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $|\theta(t) - \theta(0)| < \delta$ が成り立つことがわかる. 特に $\theta(2\pi) = \theta(0)$ がわかる. よって (5.2) を用いて,

$$\phi(2\pi) - \phi(0) = \frac{1}{2}(N\pi - 2n\pi - \theta(2\pi)) - \frac{1}{2}(N\pi - \theta(0)) = -n\pi \quad (5.3)$$

を得る. よって (4.5) および (5.3) を用いて, a_0 は ι に関する M 上の主分布 \mathcal{D} の孤立特異点でありかつその指数 $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ は $-n/2$ に等しいことがわかる. 特に指数 $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ は負であることがわかる. \square

5.2 主定理の一般化 (その 1)

M を滑らかな 2 次元多様体とし, $\iota : M \rightarrow E^3$ を M の E^3 へのはめこみとする. ι が Weingarten であるとは, 恒等的に零ではない滑らかな 2 変数関数 W が存在して M 上で $W(K, H) \equiv 0$ が成り立つときにいう, 但し K, H はそれぞれ M の ι に関する Gauss 曲率および平均曲率である. ι が Weingarten であるとき, M の ι による像を Weingarten 曲面 (*Weingarten surface*) という. 滑らかな 2 変数関数 W' を $W'(X', Y') := W(X'Y', (X' + Y')/2)$ とおく. k_1, k_2 は M 上の連続関数で, M の各点での ι に関する主曲率は k_1, k_2 のいずれかであるとする. このとき $W(K, H) \equiv 0$ と $W'(k_1, k_2) \equiv 0$ は同値

である. H が一定で恒等的に定数 H_0 に等しいならば, $W(X, Y) := Y - H_0$ とおくと M 上で $W(K, H) \equiv 0$ が成り立つので, ι は Weingarten である.

$\iota : M \rightarrow E^3$ を Weingarten とする. このとき ι が 特別である (*special*) とは, M 上 $W'(k_1, k_2) \equiv 0$ を満たす恒等的に零ではない滑らかな 2 変数関数 W' として次を満たすものをとることができるときにいう: M の ι に関する任意の臍点で,

$$\frac{\partial W'}{\partial X'}(k_1, k_2) \frac{\partial W'}{\partial Y'}(k_1, k_2) > 0 \quad (5.4)$$

が成り立つ. M の ι に関する臍点で, (5.4) と

$$H \frac{\partial W}{\partial X}(K, H) + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial Y}(K, H) \neq 0 \quad (5.5)$$

は同値である. H が一定で恒等的に定数 H_0 に等しいならば, $W(X, Y) := Y - H_0$ とおくと W は (5.5) を満たすので, ι は特別な Weingarten はめこみである.

Hartman-Wintner は [12] において定理 5.1 は ι が特別な Weingarten はめこみである場合にも成り立つことを示した. このことを示すための大まかな方針は定理 5.1 のものと同じである: 特別な Weingarten 曲面が全臍的ではないならば, M の ι に関する臍点は孤立していることがわかり, さらに命題 5.2 は ι が特別な Weingarten はめこみである場合にも成り立つことがわかるので, Hopf-Poincaré の定理を用いて矛盾を導くことができる.

Hartman-Wintner は, 前節における設定とは異なる設定に立脚して, 特別な Weingarten 曲面の臍点を調べた. 特別な Weingarten 曲面の臍点 a_0 の近傍を 2 変数関数 f のグラフとして表すと, f はある 2 階の楕円型偏微分方程式の解であることがわかる. 一方で, a_0 を含み a_0 での平均曲率が f のグラフの平均曲率に等しい全臍的な曲面をやはり局所的に 2 変数関数 g のグラフとして表すと, g も同じ方程式の解であることがわかる. f も g も $(0, 0)$ の近傍で定義されているとし, さらに $f(0, 0) = g(0, 0)$ を仮定する. Hartman-Wintner は [11] において $f \neq g$ ならば $f - g$ の $(0, 0)$ におけるある階数のある偏微分係数が 0 ではないことを示した. このことを用いて, 彼らは [12] において全臍的ではない特別な Weingarten 曲面の臍点は孤立していることを示し, さらに ι が特別な Weingarten はめこみである場合の命題 5.2 を得た.

以下においては, Chern によって考案された, 前節における設定に立脚して Hartman-Wintner の結果を示す方法の概略を紹介する. 滑らかな 2 変数関数 W に対し, やはり滑らかな 2 変数関数 W'' を $W''(X'', Y'') := W((X'')^2 - Y'', X'')$ により定義する. このとき

$$W'(X', Y') = W''\left(\frac{X' + Y'}{2}, \frac{(X' - Y')^2}{4}\right)$$

が成り立つので, $X'' := (X' + Y')/2$, $Y'' := (X' - Y')^2/4$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial X'}(X', Y') &= \frac{1}{2} \frac{\partial W''}{\partial X''}(X'', Y'') + \frac{X' - Y'}{2} \frac{\partial W''}{\partial Y''}(X'', Y''), \\ \frac{\partial W'}{\partial Y'}(X', Y') &= \frac{1}{2} \frac{\partial W''}{\partial X''}(X'', Y'') - \frac{X' - Y'}{2} \frac{\partial W''}{\partial Y''}(X'', Y'') \end{aligned}$$

がわかる. よって, $H = (k_1 + k_2)/2$ および $H^2 - K = (k_1 - k_2)^2/4$ に注意して, M の ι に関する臍点において (5.4) と $W''_{X''}(H, H^2 - K) \neq 0$ は同値であることがわかる, 但し $W''_{X''} := \partial W'' / \partial X''$ である.

ι を特別な Weingarten はめこみとし, 従って M の ι に関する任意の臍点において $W''_{X''}(H, H^2 - K) \neq 0$ が成り立つとする. (u, v) を M の ι に関する臍点 a_0 の近傍 U 上の等温座標系とし, $(0, 0)$ が a_0 に対応するとする. M 上 $W''(H, H^2 - K) \equiv 0$ が成り立つので, $(0, 0)$ の近傍上で

$$H_w = -\frac{W''_{Y''}(H, H^2 - K)}{W''_{X''}(H, H^2 - K)}(H^2 - K)_w \quad (5.6)$$

が成り立つ. (5.6), $\Phi_{\bar{w}} = EH_w$ および $H^2 - K = \Phi\bar{\Phi}/E^2$ を用いて, $\Phi_{\bar{w}} = P(\Phi\bar{\Phi})_w + Q\Phi\bar{\Phi}$ を得る, 但し

$$P := -\frac{1}{E} \frac{W''_{Y''}(H, H^2 - K)}{W''_{X''}(H, H^2 - K)}, \quad Q := 2 \frac{E_w}{E^2} \frac{W''_{Y''}(H, H^2 - K)}{W''_{X''}(H, H^2 - K)}$$

である. Chern は [9] において (恐らく [11] における議論を参考にして) $\Phi_{\bar{w}} = P(\Phi\bar{\Phi})_w + Q\Phi\bar{\Phi}$ を満たす滑らかな複素数値関数 Φ を調べ, 次を示した:

- (a) 自然数 n に対し $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w, \bar{w})/|w|^{n-1} = 0$ が成り立つならば, 極限 $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w, \bar{w})/w^n$ が存在する;
- (b) 任意の自然数 n に対し $\lim_{w \rightarrow 0} \Phi(w, \bar{w})/|w|^{n-1} = 0$ が成り立つならば, Φ は $w = 0$ の近傍上恒等的に零である.

これらから, ι が全臍的ではないならば, ある自然数 n が存在して Φ は $w = 0$ の近傍上で $\Phi(w, \bar{w}) = cw^n + \Psi(w, \bar{w})$ と表されることがわかる, 但し $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であり, Ψ は $\lim_{w \rightarrow 0} \Psi(w, \bar{w})/|w|^n = 0$ を満たす滑らかな関数である. この表示から, 臍点 a_0 は孤立していることがわかり, さらに命題 5.2 の証明と同様に議論することによって a_0 の指数 $\text{ind}_{a_0}(\mathcal{D})$ は $-n/2$ に等しいことがわかる.

5.3 主定理の一般化 (その 2)

M_0 は滑らかな 2 次元多様体で, 球面 S^2 に同相であるとする. $\iota_0 : M_0 \rightarrow E^3$ を M_0 の E^3 へのはめこみとし, $W_0 := \iota_0(M_0)$ とおく. ν_0 を ι_0 に関する N 上の単位法ベクトル場とする. ν_0 を M_0 から 2 次元単位球面 S^2 への可微分写像とみなすことができ, このとき ν_0 は M_0 の ι_0 に関する (球面)Gauss 写像 ((spherical) Gauss map) と呼ばれる. M_0 の ι_0 に関する Gauss 曲率が正であるとする. このとき ν_0 は M_0 から S^2 の上への微分同相写像である. M を向きづけ可能な 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \rightarrow E^3$ を M の E^3

へのはめこみとする. $\nu : M \rightarrow S^2$ を M の ι に関する球面 Gauss 写像とする. このとき各 $a \in M$ に対し, W_0 の点 $G(a)$ を $G(a) := \iota_0 \circ \nu_0^{-1} \circ \nu(a)$ で定める. 写像 $G : M \rightarrow W_0$ を M の (ι, W_0) に関する 非等方的 Gauss 写像 (*anisotropic Gauss map*) とよぶ. もし W_0 が 2 次元単位球面 S^2 であるならば, 非等方的 Gauss 写像 G は球面 Gauss 写像 ν である.

M の各点 a に対し, E^3 内の平面 $dt_p(T_a(M))$ は $a_0 := \nu_0^{-1} \circ \nu(a)$ での M_0 への接平面 $T_{a_0}(M_0)$ の $(dt_0)_{a_0}$ による像と E^3 内で平行である. よって a での接ベクトル $V \in T_a(M)$ に対し, $W \in T_a(M)$ が唯一つ存在して $dt_a(W)$ は E^3 において $dG_a(V)$ に等しい. 以下においては, $-W$ を $A_a(V)$ で表す. このとき A_a は $T_a(M)$ の線形変換であり, 従って M の各点 a に対し A_a を与える M 上の滑らかな $(1, 1)$ 型のテンソル場 A を得る. A を (ι, W_0) に関する M 上の 非等方的型作用素 (*anisotropic shape operator*) という. 一般に, A_a は対角化可能であるとは限らない. A のトレースを Λ で表し, M の (ι, W_0) に関する 非等方的平均曲率 または A -平均曲率 (*anisotropic mean curvature* または *A-mean curvature*) という. M の点 a が (ι, W_0) に関する 非等方的臍点 (*anisotropic umbilical point* または *anisotropic umbilic*) であるとは, A_a が点 a での接平面 $T_a(M)$ の恒等変換の定数倍と表されるときにいう.

Koiso-Palmer は [18] において次を示した: M が S^2 に同相でありかつ M の (ι, W_0) に関する非等方的平均曲率が一定であるならば, $\iota(M)$ は E^3 内で W_0 と相似である. W_0 が 2 次元単位球面 S^2 であるならば, この結果は定理 5.1 そのものである. Koiso-Palmer の結果を示すための大まかな方針は定理 5.1 のものと同じである: $\iota(M)$ が W_0 と相似ではないならば M の (ι, W_0) に関する臍点は孤立していることがわかり, さらに命題 5.2 は M の (ι, W_0) に関する非等方的平均曲率が一定である場合にも成り立つことがわかるので, Hopf-Poincaré の定理を用いて矛盾を導くことができる. Koiso-Palmer は, 次の二つの段落で説明される設定に基づきそして [7] 中の定理 (Hartman-Wintner が [11] で示した定理に相当する) を用いて, 上述の結果を得た. 一方, 筆者は [6] において, $\iota(M)$ および W_0 のそれぞれを局所的に 2 変数関数のグラフとして表し, [24] の設定に基づきそして Hartman-Wintner が [11] で示した定理を用いて, Koiso-Palmer の結果の別証明を与えた.

以下においては, Koiso-Palmer が上述の結果を示すために採用した [18] の設定を説明する. f を 2 次元単位球面 S^2 上の滑らかな正値関数とし, ∇f を S^2 上の Riemann 計量 g' に関する f の勾配ベクトル場とする. ∇f を S^2 上の E^3 値関数とみなすことができる. $\iota_f : S^2 \rightarrow E^3$ は S^2 から E^3 への滑らかな写像で, 各 $\nu \in S^2$ に対し $\iota_f(\nu) := \nabla f(\nu) + f(\nu)\nu$ によって定義されるとする. $W_f := \iota_f(S^2)$ とおく. $\nabla^2 f$ を g' に関する f の Hessian とする. $\nabla^2 f$ は S^2 上の滑らかな 2 次対称共変テンソル場である. $D^2 f$ は S^2 上の滑らかな $(1, 1)$ 型のテンソル場で, 各 $\nu \in S^2$ での接ベクトル $V, W \in T_\nu(S^2)$ に対し $g'(D^2 f(V), W) = \nabla^2 f(V, W)$ によって定義されるとする. $D^2 f$ は g' に関して対称である. Id は S^2 上の滑らかな $(1, 1)$ 型のテンソル場で, 任意の $\nu \in S^2$ に対し $T_\nu(S^2)$ の

恒等変換を与えとする. S^2 上の $(1,1)$ 型のテンソル場 T および接ベクトル $V \in T_\nu(S^2)$ に対し, $T(V)$ を E^3 の元と同一視することができる. このとき可微分写像 $\iota_f : S^2 \rightarrow E^3$ の微分 $d\iota_f$ を $d\iota_f = D^2f + f\text{Id}$ と表すことができ, 従って $d\iota_f$ を S^2 上の滑らかな $(1,1)$ 型のテンソル場とみなすことができる. D^2f は g' に関して対称であるので, $d\iota_f$ も対称であり従って $d\iota_f$ の固有値は全て実数である. $d\iota_f$ の固有値は全て正であると仮定する. このとき $\iota_f : S^2 \rightarrow E^3$ ははめこみであり, S^2 の ι_f に関する球面 Gauss 写像 ν_f は $\nu_f \circ \iota_f = \text{id}_{S^2}$ ($= S^2$ の恒等写像) を満たす. よって $d\nu_f \circ d\iota_f = \text{Id}$ が成り立ち, 従って可微分多様体である S^2 の ι_f に関する Gauss 曲率は正である.

M を向きづけ可能な 2 次元多様体とし, $\iota : M \rightarrow E^3$ を M の E^3 へのはめこみとする. このとき M の (ι, W_f) に関する非等方的 Gauss 写像は $G = \iota_f \circ \nu$ と表される, 但し ν は M の ι に関する球面 Gauss 写像である. よって (ι, W_f) に関する M 上の非等方的型作用素は $A = -d\iota_f \circ d\nu$ と表される. M 上の滑らかな関数 ψ および 0 を含む開区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対し, ι_ψ は $M \times I$ から E^3 への滑らかな写像で, 任意の $a \in M$ に対し $\iota_\psi(a, 0) = \iota(a)$ および $(\partial\iota_\psi/\partial t)(a, 0) = \psi(a)\nu(a)$ を満たすとする. 各 $(a, t) \in M \times I$ に対し, $\iota_{\psi,t}(a) := \iota_\psi(a, t)$ とおく. ここで M は S^2 に同相であるとする. このとき, 必要ならば I を小さく取り直す後に, 任意の $t \in I$ に対し $\iota_{\psi,t}$ は M の E^3 へのはめこみであることがわかる. はめこみ ι に対し,

$$\mathcal{J}_f(\iota) := \int_M f(\nu)\Omega_g$$

とおく, 但し g は ι による M 上の誘導計量である. 各 $t \in I$ に対し, $j_{f,\psi}(t) := \mathcal{J}_f(\iota_{\psi,t})$ とおく. このとき ι に対する \mathcal{J}_f の第一変分は非等方的平均曲率を用いて

$$\frac{dj_{f,\psi}}{dt}(0) = \int_M \psi \text{tr}(d\iota_f \circ d\nu)\Omega_g = - \int_M \psi \Lambda \Omega_g \quad (5.7)$$

と表される ([23]). 特に $f \equiv 1$ である場合には, \mathcal{J}_f は面積汎関数であり, (5.7) は面積汎関数の第一変分がよく知られた表現である.

5.4 孤立臍点の指数に関する話題

M を 2 次元可微分多様体とする. M の E^3 へのはめこみ ι が与えられたとき, ι によって誘導計量が与えられることによって, M は Riemann 多様体とみなされる. 各はめこみ $\iota : M \rightarrow E^3$ に対し, (M, g) 上での M の ι に関する平均曲率の 2 乗の積分を対応させる汎関数を Willmore 汎関数 (*Willmore functional*) という. Willmore 汎関数の第一変分が零であるはめこみを Willmore はめこみ (*Willmore immersion*) といい, Willmore はめこみによる像を Willmore 曲面 (*Willmore surface*) という. 筆者は [4] において, Hartman-Wintner が [11] で示した定理を用いて, Willmore 曲面上の孤立臍点の指数は $1/2$ 以下であること

を示した. この評価は最良である: Kusner によって発見された Willmore 射影平面 ([19]) は指数が $1/2$ である孤立臍点を持つ.

以上に現れた孤立臍点の指数の評価は, 孤立臍点の近傍の各点での主方向を与える方程式がある関数を用いて表された上で, その関数の孤立臍点でのある階数のある偏微分係数が 0 ではないことを用いてなされている. 筆者は [1], [3] においてこのような手順で評価できるより一般の場合について調べた. 一方で, 定数ではない滑らかな関数で, ある点で全ての階数の全ての偏微分係数が 0 であるようなものが存在する. F は R^2 における $(0, 0)$ の近傍 U 上で定義された滑らかな関数で, $F(0, 0) = 0$ を満たしかつ $U \setminus \{(0, 0)\}$ 上で正であるとする. このとき $U \setminus \{(0, 0)\}$ 上の滑らかな関数 $\exp(-1/F)$ は $(0, 0)$ まで滑らかに拡張され, この関数の $(0, 0)$ での全ての階数の全ての偏微分係数は 0 である. 特に E^3 の原点 $o := (0, 0, 0)$ は $\exp(-1/F)$ のグラフの臍点である. 筆者は [2] において o の周りでの $\exp(-1/F)$ のグラフ上の主分布の振る舞いを調べ, 各正数 c に対し R^2 における $(0, 0)$ のある近傍 U_c が存在して $U_c \setminus \{(0, 0)\}$ 上で $\log F$ の勾配ベクトル場の長さが下から c で押さえられるならば, o は $\exp(-1/F)$ のグラフの孤立臍点でありかつその指数は 1 であることを示した.

一般に, 曲面上の孤立臍点の指数は 1 以下であることが期待されている. これを 指数予想 (*index conjecture*) または 局所的な Carathéodory の予想 (*local Carathéodory's conjecture*) という. Carathéodory の予想 (*Carathéodory's conjecture*) とは, E^3 内のコンパクトな凸曲面は少なくとも二つの臍点を持つというものである. もし指数予想が正しいならば, Hopf-Poincaré の定理を用いて球面に同相な E^3 内の曲面は少なくとも二つの臍点を持つことがわかり, 従ってこのとき Carathéodory の予想が正しいことがわかる. F を 2 実変数 x, y の滑らかな実数値関数とし, $\partial_{\bar{z}} := (\partial/\partial x + \sqrt{-1}\partial/\partial y)/2$ とおく. このとき自然数 n に対する Loewner の予想 (*Loewner's conjecture*) とは, ベクトル場 $\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^n F)\partial/\partial x + \operatorname{Im}(\partial_{\bar{z}}^n F)\partial/\partial y$ が孤立零点 a_0 を持ちそして a_0 はこのベクトル場が定める 1 次元分布の孤立特異点であるならば, その指数は n 以下であるというものである ([15], [32]). $n = 1$ に対する Loewner の予想は正しい. $n = 2$ に対する Loewner の予想は指数予想と同値であり ([27]), 従って指数予想を Loewner の予想の一部とみなすことができる. 筆者は [5] において Loewner の予想とは異なるが指数予想を含む予想を考案し部分解答を与えた.

参考文献

- [1] N. Ando, The index of an isolated umbilical point on a surface, Contemporary Mathematics **308** “Differential Geometry and Integrable Systems”, 1–11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [2] N. Ando, An umbilical point on a non-real-analytic surface, Hiroshima Math. J. **33** (2003) 1–14.
- [3] N. Ando, The behavior of the principal distributions on a real-analytic surface, J. Math. Soc. Japan **56** (2004) 201–214.
- [4] N. Ando, An isolated umbilical point of a Willmore surface, Osaka J. Math. **41** (2004) 865–876.
- [5] N. Ando, A conjecture in relation to Loewner’s conjecture, J. Math. Soc. Japan **57** (2005) 1–20.
- [6] N. Ando, Hartman-Wintner’s theorem and its applications, to appear in Calculus of Variations and Partial Differential Equations.
- [7] L. Bers, Local behavior of solutions of general linear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955) 473–496.
- [8] S.-S. Chern, An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955) 771–782.
- [9] S.-S. Chern, On special W -surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955) 783–786.
- [10] M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976.
- [11] P. Hartman and A. Wintner, On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations, Amer. J. Math. **75** (1953) 449–476.
- [12] P. Hartman and A. Wintner, Umbilical points and W -surfaces, Amer. J. Math. **76** (1954) 502–508.
- [13] H. Hopf, Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math. vol.1000, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1989.
- [14] 剣持勝衛, 曲面論講義, 平均曲率一定曲面入門, 培風館, 2000.

- [15] T. Klotz, On Bol's proof of Carathéodory's conjecture, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 277–311.
- [16] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何 (改定版), 裳華房, 1995.
- [17] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, John Wiley & Sons, 1969.
- [18] M. Koiso and B. Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, *Indiana Univ. Math. J.* **59** (2010) 79–90.
- [19] R. Kusner, Comparison surfaces for the Willmore problem, *Pacific J. Math.* **138** (1989) 317–345.
- [20] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics **176**, Springer-Verlag, 1997.
- [21] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.
- [22] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, based on notes by D. W. Weaver, revised reprint of the 1965 original, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [23] B. Palmer, Stability of the Wulff shape, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998) 3661–3667.
- [24] R. C. Reilly, The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces, *Duke Math. J.* **43** (1976) 705–721.
- [25] 酒井隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1992.
- [26] I. M. シンガー・J. A. ソープ, トポロジーと幾何学入門, 赤堀也監訳, 松江広文・一楽重雄訳, 培風館, 1976.
- [27] B. Smyth and F. Xavier, Real solvability of the equation $\partial_{\bar{z}}^2\omega = \rho g$ and the topology of isolated umbilics, *J. Geom. Anal.* **8** (1998) 655–671.
- [28] J. J. Stoker, *Differential Geometry*, John Wiley & Sons, 1969.
- [29] 竹之内脩, 常微分方程式, 秀潤社, 1977.
- [30] 田村一郎, トポロジー, 岩波全書 276, 岩波書店, 1972.

- [31] 丹野修吉, 空間図形の幾何学, 培風館, 1994.
- [32] C. J. Titus, A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points, *Acta Math.* **131** (1973) 43–77.
- [33] 梅原雅顕・山田光太郎, 曲線と曲面, 微分幾何的アプローチ, 裳華房, 2002.
- [34] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer-Verlag, 1983.