4.4 S^3 内の Willmore 曲面上の正則 4 次微分

この節においては, $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)=M$ を仮定しない. (u,v) は M の各点の近傍上の局所座標で $g(\partial/\partial u,\partial/\partial v)=0$ を満たすとするが, $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が ι に関する主方向に含まれているとは仮定しない. g は $g=A^2du^2+B^2dv^2$ と表される. そして

$$e_0:=\iota,\quad e_1:=\frac{1}{A}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\quad e_2:=\frac{1}{B}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とおき, e_1, e_2 でそれぞれ $(1/A)\partial/\partial u$, $(1/B)\partial/\partial v$ も表す. 1-形式 ω_0^1, ω_0^2 を $de_0=e_1\omega_0^1+e_2\omega_0^2$ で定義する. h を $\iota: M\longrightarrow S^3$ に関する M の第二基本形式とし, $h_{ij}:=h(e_i,e_j)$ とおく $(i,j\in\{1,2\})$. このとき

$$\begin{aligned}
de_1&=-\frac{1}{2}e_0\omega_0^1+e_2\omega_1^2+e_3(h_{11}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2)+e_4\omega_0^1,\\
de_2&=-\frac{1}{2}e_0\omega_0^2-e_1\omega_1^2+e_3(h_{21}\omega_0^1+h_{22}\omega_0^2)+e_4\omega_0^2,\\
de_3&=-e_1(h_{11}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2)-e_2(h_{21}\omega_0^1+h_{22}\omega_0^2),\\
de_4&=-\frac{1}{2}(e_1\omega_0^1+e_2\omega_0^2)
\end{aligned}\tag{4.11}$$

が成り立つ, 但し ω_1^2 は 1-形式である. $dde_0=0$, (4.11) の第 1 式および第 2 式を用いて,

$$d\omega_0^1=\omega_1^2\wedge\omega_0^2,\quad d\omega_0^2=-\omega_1^2\wedge\omega_0^1\tag{4.12}$$

を得る. また

$$\hat{e}_0:=e_0,\quad \hat{e}_1:=e_1,\quad \hat{e}_2:=e_2,\quad \hat{e}_3:=e_3+He_0,\quad \hat{e}_4:=\frac{1}{2}H^2e_0+He_3+e_4$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned}
d\hat{e}_0&=\hat{e}_1\omega_0^1+\hat{e}_2\omega_0^2,\\
d\hat{e}_1&=\hat{e}_0\hat{\omega}_1^0+\hat{e}_2\omega_1^2+\hat{e}_3\left(\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2\right)+\hat{e}_4\omega_0^1,\\
d\hat{e}_2&=\hat{e}_0\hat{\omega}_2^0-\hat{e}_1\omega_1^2+\hat{e}_3\left(h_{21}\omega_0^1-\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^2\right)+\hat{e}_4\omega_0^2,\\
d\hat{e}_3&=\hat{e}_0dH-\hat{e}_1\left(\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^1+h_{12}\omega_0^2\right)-\hat{e}_2\left(h_{21}\omega_0^1-\frac{h_{11}-h_{22}}{2}\omega_0^2\right),\\
d\hat{e}_4&=\hat{e}_1\hat{\omega}_1^0+\hat{e}_2\hat{\omega}_2^0+\hat{e}_3dH
\end{aligned}\tag{4.13}$$

が成り立つ, 但し

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_1^0&:=\left(-\frac{1}{2}-Hh_{11}+\frac{1}{2}H^2\right)\omega_0^1-Hh_{12}\omega_0^2,\\
\hat{\omega}_2^0&:=-Hh_{21}\omega_0^1+\left(-\frac{1}{2}-Hh_{22}+\frac{1}{2}H^2\right)\omega_0^2
\end{aligned}$$

である. 関数 H_1, H_2 を $H_1 := e_1(H), H_2 := e_2(H)$ で定める. このとき $dH = H_1\omega_0^1 + H_2\omega_0^2$ が成り立つ. よって (4.13) の第 4 式および (4.12) を用いて,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(dH_1 - H_2\omega_1^2 - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0 - h_{21}\hat{\omega}_2^0\right) \wedge \omega_0^1 \\
&\quad + \left(dH_2 + H_1\omega_1^2 - h_{12}\hat{\omega}_1^0 + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0\right) \wedge \omega_0^2
\end{aligned}
$$

を得る. よって関数 p_{ij} $(i, j \in \{1, 2\})$ が存在して, $p_{12} = p_{21}$ および

$$
\begin{aligned}
dH_1 &= H_2\omega_1^2 + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0 + h_{12}\hat{\omega}_2^0 + p_{11}\omega_0^1 + p_{12}\omega_0^2, \\
dH_2 &= -H_1\omega_1^2 + h_{12}\hat{\omega}_1^0 - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0 + p_{21}\omega_0^1 + p_{22}\omega_0^2
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

が成り立つ. ここで

$$
\begin{aligned}
&\omega := \omega_0^1 + \sqrt{-1}\omega_0^2, \quad \alpha := \hat{\omega}_1^0 + \sqrt{-1}\hat{\omega}_2^0, \quad \varphi := \frac{1}{2}(H_1 - \sqrt{-1}H_2), \\
&\psi := \frac{h_{11}-h_{22}}{2} - \sqrt{-1}h_{12}, \quad q := \frac{1}{2}\left(\frac{p_{11}-p_{22}}{2} - \sqrt{-1}p_{12}\right)
\end{aligned}
$$

とおくと, (4.14) は

$$
d\varphi = \sqrt{-1}\varphi\omega_1^2 + \frac{1}{2}\psi\alpha + q\omega + \frac{1}{4}(p_{11}+p_{22})\bar{\omega} \tag{4.15}
$$

と表される. ∇ を Riemann 多様体 (M, g) の Levi-Civita 接続とするとき, (4.14) を用いて

$$
\begin{aligned}
&p_{11} + p_{22} \\
&= dH_1(e_1) - H_2\omega_1^2(e_1) - \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_1^0(e_1) - h_{12}\hat{\omega}_2^0(e_1) \\
&\qquad + dH_2(e_2) + H_1\omega_1^2(e_2) - h_{12}\hat{\omega}_1^0(e_2) + \frac{h_{11}-h_{22}}{2}\hat{\omega}_2^0(e_2) \\
&= e_1(e_1(H)) + e_2(e_2(H)) - g(\nabla_{e_1}e_1, e_2)e_2(H) - g(\nabla_{e_2}e_2, e_1)e_1(H) \\
&\qquad + \frac{(h_{11}-h_{22})^2}{2}H + 2h_{12}^2H \\
&= \Delta H + 2(H^2 - K + 1)H
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

がわかるので, ι が Willmore はめこみであるならば (4.15) および (4.16) から

$$
d\varphi = \sqrt{-1}\varphi\omega_1^2 + \frac{1}{2}\psi\alpha + q\omega \tag{4.17}
$$

を得る.

V_1, V_2, V_3 を M の開集合上のベクトル場とし, テンソル場 ∇h を

$$
(\nabla_{V_1}h)(V_2, V_3) := V_1(h(V_2, V_3)) - h(\nabla_{V_1}V_2, V_3) - h(V_2, \nabla_{V_1}V_3)
$$

で定める．そして $h_{ijk} := (\nabla_{e_k} h)(e_i, e_j)$ とおく $(i, j, k \in \{1, 2\})$．このとき $i, j \in \{1, 2\}$ に対し

$$dh_{ij} = \sum_{k=1}^{2} (h_{jk}\omega_i^k + h_{ik}\omega_j^k + h_{ijk}\omega_0^k) \tag{4.18}$$

が成り立つ, 但し $\omega_1^1 = 0$, $\omega_2^2 = 0$, $\omega_2^1 := -\omega_1^2$ である．(4.18) を用いて,

$$dH = \frac{h_{111} + h_{221}}{2}\omega_0^1 + \frac{h_{112} + h_{222}}{2}\omega_0^2$$

がわかり, 従って $H_i = (1/2)(h_{11i} + h_{22i})$ を得る．また Codazzi の方程式

$$(\nabla_{V_1} h)(V_2, V_3) = (\nabla_{V_2} h)(V_1, V_3)$$

が成り立つので, h_{ijk} は添字 i, j, k に関して対称である: $h_{112} = h_{121} = h_{211}$ および $h_{122} = h_{212} = h_{221}$ が成り立つ．h_{ijk} が i, j, k に関して対称であること, (4.18) および $H_i = (1/2)(h_{11i} + h_{22i})$ を用いて,

$$d\psi = 2\sqrt{-1}\psi\omega_1^2 + \varphi\bar{\omega} + \zeta\omega \tag{4.19}$$

を得る, 但し

$$\zeta := \frac{1}{4}(h_{111} - 3h_{221}) - \frac{\sqrt{-1}}{4}(3h_{112} - h_{222})$$

である．

以上に現れた ω, φ, ψ, q, ζ に対し,

$$\Phi := (\psi q - \varphi\zeta)\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega \tag{4.20}$$

は (u, v) の取り方に依存しない: $\check{e}_1$, $\check{e}_2$ が関数 θ を用いて

$$\check{e}_1 := (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2, \quad \check{e}_2 := -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$$

で与えられるとし, $\check{\omega}_1^2$, $\check{\omega}$, $\check{\alpha}$, $\check{\varphi}$, $\check{\psi}$, $\check{q}$, $\check{\zeta}$ は $(\check{e}_1, \check{e}_2)$ に関するものとすると,

$$\check{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + d\theta, \quad \check{\omega} = e^{-\sqrt{-1}\theta}\omega, \quad \check{\alpha} = e^{-\sqrt{-1}\theta}\alpha, \quad \check{\varphi} = e^{\sqrt{-1}\theta}\varphi, \quad \check{\psi} = e^{2\sqrt{-1}\theta}\psi$$

であるので, (4.15) および (4.16) を用いて $\check{q} = e^{2\sqrt{-1}\theta}q$ がわかり, (4.19) を用いて $\check{\zeta} = e^{3\sqrt{-1}\theta}\zeta$ がわかる．従って Φ は M 上で定義された複素 4 次微分である．

命題 4.7 ([11]) ι が *Willmore* はめこみであるならば, 複素 4 次微分 Φ は正則である．

証明　(4.12) から, $d\omega = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \omega$ を得る．また (4.13) を用いて

$$d\omega_1^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\psi\bar{\psi}\omega \wedge \bar{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\omega \wedge \bar{\alpha} + \alpha \wedge \bar{\omega}) \tag{4.21}$$

がわかり, また (4.12) および (4.18) を用いて

$$d\alpha = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \alpha - \varphi\bar{\psi}\omega \wedge \bar{\omega} \tag{4.22}$$

がわかる．(4.17), (4.19), $d\omega = -\sqrt{-1}\omega_1^2 \wedge \omega$, (4.21) および (4.22) を用いて,

$$\begin{aligned} dq &= 2\sqrt{-1}q\omega_1^2 + \frac{1}{2}\zeta\alpha - \frac{3}{2}\varphi\bar{\alpha} - \varphi\psi\bar{\psi}\bar{\omega} + a\omega, \\ d\zeta &= 3\sqrt{-1}\zeta\omega_1^2 - \frac{3}{2}\psi\bar{\alpha} - \psi^2\bar{\psi}\bar{\omega} + q\bar{\omega} + b\omega \end{aligned} \tag{4.23}$$

を得る, 但し a, b は複素数値関数である．よって (4.17), (4.19) および (4.23) を用いて,

$$d(\psi q - \varphi\zeta) = 4\sqrt{-1}(\psi q - \varphi\zeta)\omega_1^2 + (\psi a - \varphi b)\omega \tag{4.24}$$

を得る．ここで (u, v) が等温座標であるとする．このとき $w := u + \sqrt{-1}v$ に対し, $Adw = \omega$ が成り立つ．$f := (\psi q - \varphi\zeta)A^4$ とおくとき, Φ が正則であることと $df \wedge \omega = 0$ は同値である．そして (4.24) を用いて

$$df \wedge \omega = 4A^3(\psi q - \varphi\zeta)(\sqrt{-1}A\omega_1^2 + dA) \wedge \omega$$

(但し dA は A の微分であり, 面積要素ではない) がわかるが,

$$0 = ddw = d\left(\frac{1}{A}\omega\right) = -\frac{1}{A^2}(dA + \sqrt{-1}A\omega_1^2) \wedge \omega$$

が成り立つので, $df \wedge \omega = 0$ がわかる．従って Φ は正則である． $\square$

$e := \hat{e}_1 - \sqrt{-1}\hat{e}_2$ とおき,

$$Y := 2\varphi\bar{\varphi}\hat{e}_0 - \varphi\bar{\psi}e - \bar{\varphi}\psi\bar{e} + \psi\bar{\psi}\hat{e}_4$$

とおく．このとき $\langle Y, Y\rangle = 0$ がわかる．また

$$Z := 2\bar{\varphi}q\hat{e}_0 - \bar{\psi}qe - \bar{\varphi}\zeta\bar{e} + \bar{\psi}\zeta\hat{e}_4$$

とおく．このとき

$$\langle Z, Z\rangle = 0, \quad \langle Z, \bar{Z}\rangle = 2(\psi q - \varphi\zeta)\overline{(\psi q - \varphi\zeta)}$$

が成り立つ．ι が Willmore はめこみであるとする．このとき (4.13), (4.17) および (4.19) を用いて, $dY = Z\omega + \bar{Z}\bar{\omega}$ を得る．よって

$$\langle dY, dY\rangle = 2|\psi q - \varphi\zeta|^2(\omega \otimes \bar{\omega} + \bar{\omega} \otimes \omega) \tag{4.25}$$

を得る. $\langle Y, Y\rangle = 0$ および (4.25) から, Φ が恒等的に零であるならば L^+ の元 x_0 および $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上の正値関数 f' が存在して $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上 $Y = f'x_0$ が成り立つことがわかる.

ここで $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ の点の近傍上 $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が ι に関する主方向に含まれると仮定し,

$$\tilde{e}_0 := \iota, \quad \tilde{e}_1 := \frac{1}{\varepsilon A} d\gamma_\iota \left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \quad \tilde{e}_2 := \frac{1}{\varepsilon B} d\gamma_\iota \left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \tilde{e}_3 := \gamma_\iota, \quad \tilde{e}_4 := \nu$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}_0 = e_0, \quad \tilde{e}_1 = -e_1 + \tilde{H}_1 e_0, \quad \tilde{e}_2 = e_2 + \tilde{H}_2 e_0, \quad \tilde{e}_3 = e_3 + He_0, \\
&\tilde{e}_4 = \frac{1}{2}(H^2 + \tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2)e_0 - \tilde{H}_1 e_1 + \tilde{H}_2 e_2 + He_3 + e_4
\end{aligned}$$

が成り立つ, 但し $\tilde{H}_1 := (1/\varepsilon A)(\partial H/\partial u)$, $\tilde{H}_2 := (1/\varepsilon B)(\partial H/\partial v)$ である. よって

$$[e_0, e_1, e_2, e_3, e_4] = [\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4]\tilde{M}^{-1}$$

が成り立つ, 但し

$$\tilde{M}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_2 & -H & \frac{1}{2}(H^2 + \tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\tilde{H}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\tilde{H}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. また

$$[\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4] = [e_0, e_1, e_2, e_3, e_4]\hat{M}, \quad \hat{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & H & \frac{1}{2}H^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. よって

$$\tilde{M}^{-1}\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_1 & -\tilde{H}_2 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\tilde{H}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\tilde{H}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

および $h_{12}=0$ に注意して,

$$
\begin{aligned}
Y &= [\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4] \begin{pmatrix} 2\varphi\bar{\varphi} \\ -(\varphi\bar{\psi}+\bar{\varphi}\psi) \\ \sqrt{-1}(\varphi\bar{\psi}-\bar{\varphi}\psi) \\ 0 \\ \psi\bar{\psi} \end{pmatrix} \\
&= [\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4] \tilde{M}^{-1}\hat{M} \begin{pmatrix} 2\varphi\bar{\varphi} \\ -(\varphi\bar{\psi}+\bar{\varphi}\psi) \\ \sqrt{-1}(\varphi\bar{\psi}-\bar{\varphi}\psi) \\ 0 \\ \psi\bar{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \psi\bar{\psi}\tilde{e}_4
\end{aligned}
$$

を得る. 以上から, 次を得る:

命題 4.8 ([11]) ι が *Willmore* はめこみでありかつ正則 4 次微分 Φ が恒等的に零であるとする. このとき L^+ の元 x_0 および $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上の正値関数 f が存在して, $\mathrm{Reg}\,(M,\iota)$ 上で (4.6) によって定義された L^+-値関数 ν は fx_0 と表される.

4.5 Willmore 球面

M を連結かつコンパクトな Riemann 面とし, Φ を M 上の正則 4 次微分とする. このとき M の各点の近傍上の局所複素座標 $w := u+\sqrt{-1}v$ に対し, Φ は $\Phi = F(w)dw^4$ と表される, 但し F は w の正則関数であり, $dw^4 := dw\otimes dw\otimes dw\otimes dw$ である. M の点 p で $\Phi \neq 0$ とする. このとき M 上の 4 次共変テンソル場である $\mathrm{Im}\,\Phi$ に対し, $T_p(M)$ のある 4 つの 1 次元部分空間 l_1, l_2, l_3, l_4 が次を満たす:

(i) $\angle l_1 l_2 = \pi/4$, $\angle l_1 l_3 = \pi/2$, $\angle l_2 l_4 = \pi/2$, 但し $\angle l_i l_j$ で l_i と l_j の間の角度を表す;

(ii) $\{\eta \in T_p(M) \mid \mathrm{Im}\,\Phi(\eta,\eta,\eta,\eta)=0\} = l_1\cup l_2\cup l_3\cup l_4$.

$\mathrm{Im}\,\Phi$ は滑らかなので, p のある近傍 U_p 上で定義された滑らかで零にはならない 4 つのベクトル場 V_1, V_2, V_3, V_4 が次を満たす:

(i) U_p の任意の点で $\angle V_1V_2 = \pi/4$, $\angle V_1V_3 = \pi/2$, $\angle V_2V_4 = \pi/2$;

(ii) 各 $i \in \{1,2,3,4\}$ に対し $\mathrm{Im}\,\Phi(V_i,V_i,V_i,V_i) \equiv 0$ が成り立ち, さらに任意の $q \in U_p$ に対し $\mathrm{Im}\,\Phi(\eta,\eta,\eta,\eta)=0$ を満たす $\eta \in T_q(M)$ はある V_i の定数倍と表される.

従って $\operatorname{Im}\Phi$ は Φ の全ての非零点からなる開集合上の滑らかな 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ を定める. M の点 p_0 で $\Phi = 0$ とし, $\Phi \not\equiv 0$ とする. このとき p_0 のある近傍 U_{p_0} 上の Φ の零点は p_0 のみである. U_{p_0} 上の局所複素座標 $w = u + \sqrt{-1}v$ は p_0 で 0 であるとする. このとき U_{p_0} 上で Φ は $\Phi = w^n G(w) dw^4$ と表される, 但し $n \in \boldsymbol{N}$ であり G は $G(0) \neq 0$ を満たす w の正則関数である. r_0 は正数で, 任意の $r \in (0, r_0)$ および任意の $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し $re^{\sqrt{-1}\theta}$ は U_{p_0} の点に対応しているとする. このとき $(0, r_0) \times \boldsymbol{R}$ 上の連続関数 ϕ で, 任意の $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \boldsymbol{R}$ に対し

$$V := \cos\phi(r,\theta)\frac{\partial}{\partial u} + \sin\phi(r,\theta)\frac{\partial}{\partial v}$$

が $re^{\sqrt{-1}\theta}$ で $\operatorname{Im}\Phi(V, V, V, V) = 0$ を満たすようなものが存在する. このとき

$$\frac{\phi(r, \theta + 8\pi) - \phi(r, \theta)}{8\pi}$$

は $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \boldsymbol{R}$, 連続関数 ϕ および複素座標 w の取り方には依らず, 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ にのみ依存する有理数である. この有理数を $\mathcal{D}$ に関する p_0 の <u>指数</u> (*index*) と呼び, $\operatorname{ind}_{p_0}(\mathcal{D})$ で表す. U_{p_0} の点 $re^{\sqrt{-1}\theta}$ で

$$\Phi(V, V, V, V) = r^n e^{\sqrt{-1}(n\theta + 4\phi(r,\theta))} G(re^{\sqrt{-1}\theta})$$

が成り立つことに注意すると, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し十分小さい $r_0 > 0$ およびある実数 $\psi_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在して任意の $r \in (0, r_0)$ および任意の $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対し $|n\theta + 4\phi(r,\theta) + \psi_0| < \varepsilon$ が成り立つことがわかる. このことと $\phi(r, \theta + 8\pi) - \phi(r, \theta)$ が π の整数倍と表されることに注意すると, $\operatorname{ind}_{p_0}(\mathcal{D}) = -n/4$ であることがわかり, 特に $\operatorname{ind}_{p_0}(\mathcal{D})$ は負であることがわかる.

さて $\Phi \not\equiv 0$ であるならば, M がコンパクトであることから Φ の零点は高々有限個存在することがわかる. この場合, Hopf-Poincaré の定理 ([26, p. 113]) の証明を参考にすることによって, 4 価 1 次元分布 $\mathcal{D}$ に関する Φ の零点の指数の和は M の Euler 数に等しいことがわかる. ここで M が球面に同相であるとすると, 負である指数の和が M の Euler 数である $2 > 0$ に等しいことになり, 矛盾が生じる. この矛盾は $\Phi \not\equiv 0$ から生じたものである. 以上から, 次を得る:

命題 4.9 ([11]) *M を S^2 に同相な可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を Willmore はめこみとする. このとき (4.20) で定義された正則 4 次微分 Φ は恒等的に零である.*

M の点 p に対し, $\boldsymbol{R}^5$ において Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $\gamma_\iota(p)$ に直交する超平面と $\left\{x \in L^+ \;\middle|\; x^{(0)} = 1\right\}$ の共通部分は S^3 内の全臍的球面で, 平均曲率ベクトルが ι に関する p での M の平均曲率ベクトルに等しいものである. 従って次を得る:

命題 4.10 ([11]) はめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ および $p \in \mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ に対し, Σ_p は $\iota(p)$ で $\iota(M)$ に接する S^3 内の全臍的球面で, 平均曲率ベクトルが ι に関する p での M の平均曲率ベクトルに等しいものであるとする. このとき Σ_p は $\nu(p)$ が定める S^3 の点を含む.

命題 4.8, 命題 4.9 および命題 4.10 を用いて, 次の定理を証明できる:

定理 4.11 ([11]) M は S^2 に同相であるとし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を *Willmore* はめこみとする. このときある $x_0 \in \iota(M)$ に対し, 立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ による $\iota(M) \setminus \{x_0\}$ の像は, E^3 内の連結, 完備かつ無限遠点で正則な極小曲面で平坦なエンドを持つものである.

証明　命題 4.9 によると, (4.20) で定義された正則 4 次微分 Φ は恒等的に零である. よって命題 4.8 から, (4.6) によって定義された $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ 上の L^+-値関数 ν が定める S^3 の点は $\mathrm{Reg}\,(M, \iota)$ の点の取り方に依存しないことがわかる. ν が定める S^3 の点を x_0 で表すとき, 命題 4.10 から任意の $p \in M$ に対し $x_0 \in \Sigma_p$ がわかる. 立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{x_0\} \longrightarrow E^3$ は共形的でありかつ $\Sigma_p \setminus \{x_0\}$ の π による像は E^3 内の平面であるので, π による $\iota(M) \setminus \{x_0\}$ の像は E^3 内の極小曲面でありそしてこのことから $x_0 \in \iota(M)$ がわかる. この曲面は連結かつ完備でありそして定理 3.15 の条件 (b) を満たすので, 定理 4.11 を得る. $\square$