Willmore予想およびWillmore曲面について

安藤　直也 (熊本大学大学院自然科学研究科)

山口大学大学院理工学研究科集中講義

(平成２２年１１月１５日 (月) ～１１月１９日 (金))

はじめに

この講義録は平成２２年１１月に山口大学で行なわれた集中講義「Willmore 予想および Willmore 曲面について」において配布されたプリントに基づいて作成されたものである．この講義は Willmore 予想および Willmore 曲面について解説することを目的として実施された．Willmore 予想, Willmore 曲面についての魅力的な研究結果は少なくないが, この講義においてはそれらの各々を理解するだけではなくそれらを可能な限り関連づけて体系的に理解することを目指した.

Willmore 汎関数 (*Willmore functional*) とは, 各曲面に対しその平均曲率の 2 乗の積分を対応させるものである．Willmore 予想 (*Willmore conjecture*) とは,

(i) 3 次元 Euclid 空間 E^3 にはめこまれたトーラスに対する Willmore 汎関数の値は $2\pi^2$ 以上であり,

(ii) (i) において等号が成り立つことと, はめこまれたトーラスが 3 次元球面 S^3 内の Clifford トーラスの立体射影による像と E^3 の共形変換によってうつりあうことは同値である

というものである．Willmore は

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\sin v, \quad z = b\sin u$$

(但し $a > b > 0$) で与えられる回転トーラスに対する Willmore 汎関数の値を考察した ([58], [59])．この型のトーラスに対する Willmore 汎関数の値は $2\pi^2$ 以上であり, そして等号が成り立つこと, $b = a/\sqrt{2}$ およびこの型の回転トーラスが Clifford トーラスの立体射影による像と E^3 の共形変換によってうつりあうことは同値である．より一般に, Willmore および Shiohama-Takagi は E^3 内の閉曲線の管状近傍の境界と表されるトーラスを調べ, このようなトーラスに限定すると Willmore 予想は正しいことを示した ([60], [46])．これらの結果やはめこまれたトーラスに対する Willmore 汎関数の値が空間の共形変換によって不変である ([57], [10]) ことに立脚して, Willmore 予想は定式化されたと思われる．第１章において, 以上について解説する.

Willmore 汎関数の停留曲面を Willmore 曲面 (*Willmore surface*) という．E^3 内の Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式は $\Delta H + 2(H^2 - K)H = 0$ で与えられる ([15]), 但し K, Δ はそれぞれ曲面の第一基本形式に関する Gauss 曲率および Laplacian であり, H は曲面の平均曲率である．Weiner は S^3 内の極小曲面の立体射影による像は Willmore 曲面であることを示した ([56])．射影平面以外のコンパクトな 2 次元多様体の S^3 への極小はめこみが存在する ([34]) ので, 射影平面以外のコンパクトな 2 次元多様体の E^3 への Willmore はめこみが存在することがわかる．Weiner は S^3 内の極小曲面である Clifford

トーラスに対する Willmore 汎関数の第 2 変分を求め, そして Willmore 汎関数に関して Clifford トーラスは安定であることを示した ([56]). これは Clifford トーラスの “近傍” において Willmore 予想は正しいということを意味する. 第２章において, 以上について解説する.

Li-Yau は n 次元球面 S^n 内の曲面に対し共形面積の概念を定義し, その性質を調べた ([35]). そして Li-Yau は共形面積と Willmore 汎関数の関係を用いて, 共形構造が Clifford トーラスのものの近くのある部分にあるトーラスに対し Willmore 予想は正しいことを示した ([35]). Montiel-Ros は Li-Yau の手法に立脚して, より多くの共形構造に対し Willmore 予想が正しいことを示した ([37]). またトーラスの代わりに射影平面に対し Willmore 予想の類似物を考えることができるが, [35] および [9] の結果から射影平面の E^3 へのはめこみに対する Willmore 汎関数の値は 12π 以上であることがわかり, そして Kusner は Willmore 汎関数の値がちょうど 12π であるはめこみを発見した ([31], [32]). このはめこみは Willmore であるので, このことと第２章の内容から任意のコンパクトな 2 次元多様体に対しその E^3 への Willmore はめこみが存在することがわかる. Kusner が発見した Willmore 射影平面は E^3 内のある種の極小曲面のある反転による像のコンパクト化であるが, このような集合が実際に滑らかな曲面であるかどうかは Bryant によって考察された ([11]). 第３章において, 以上について解説する.

Bryant は S^3 内の曲面に対し曲面から 4 次元 de Sitter 空間 S^4_1 への写像である共形 Gauss 写像を定義した ([11]). 共形 Gauss 写像によって S^4_1 から導かれる計量は臍点で退化し非臍点で退化しないが, S^3 の共形変換で曲面をうつしてもこの計量は変わらない. 第１章でコンパクトな曲面に対する Willmore 汎関数の値は空間の共形変換によって不変であることがわかるが, このことは共形 Gauss 写像が導く計量を考察することによっても示される. 空間にはめこまれたトーラスで臍点を持たないものに対する Willmore 汎関数の値は共形 Gauss 写像によって導かれた計量に関する面積に等しい. Bryant は臍点を持たない曲面が Willmore であることとその共形 Gauss 写像が極小はめこみであることは同値であることを示した ([11]). 第４章において, 以上について解説する.

Konopelchenko や Taimanov によって考案された一般の曲面に対する表現公式 ([29], [52]) は E^3 内のトーラスに対する Willmore 汎関数の興味深い表現を与える (一般の曲面に対する表現公式としては平均曲率と Gauss 写像の観点での Kenmotsu の表現公式 ([27]) が以前から知られている). この表現公式に立脚して, E^3 内のトーラス上に Dirac 方程式およびその解を見い出すことができ, 逆に複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上ポテンシャルが実数値でありかつ 2 重周期的である Dirac 方程式およびこの解で幾つかの周期条件を満たすものから E^3 内のトーラスを構成できる. E^3 内のトーラスに対する Willmore 汎関数の値は, そのトーラスに対応する Dirac 作用素のポテンシャルの L^2 ノルムの 2 乗の 4 倍と表される. E^3 内の回転トーラスに対しその mKdV 変形というものを考えることができる. これは, 回転

トーラスに対応する Dirac 作用素のポテンシャルを初期関数とする mKdV 方程式の解を用いて構成される回転面の族である．回転トーラスの mKdV 変形は互いに共形同値な回転トーラスからなり, さらに回転トーラスの mKdV 変形に対し Willmore 汎関数は一定値を取る ([51])．第５章において, 以上について解説する.

山口大学において集中講義を実施する機会を与えて下さった中内伸光先生に心から感謝の意を表します.

平成２２年１２月

安藤　直也

目　次

1 Willmore 予想

1.1 Willmore 汎関数の基本性質

M をコンパクトかつ向きづけ可能な 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow E^3$ を M の E^3 へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率とする. このとき $\mathcal{W}(\iota)$ によって ι に関する M の全平均曲率を表す:

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^2\, dA,$$

ただし dA は ι によって導かれた計量に関する M の面積要素である. $\mathcal{W}$ は M の E^3 への各はめこみに実数を一つ対応させる汎関数である. 汎関数 $\mathcal{W}$ をWillmore 汎関数(*Willmore functional*) とよぶ. 次の定理が成り立つ:

定理 1.1 ([58], [59]) *$\mathcal{W}(\iota) \geqq 4\pi$ が成り立ち, さらに $\mathcal{W}(\iota) = 4\pi$ が成り立つことと $\iota(M)$ が全臍的な球面 (round sphere) であることは同値である.*

証明　K を ι によって導かれた計量に関する M の Gauss 曲率とする. このとき M 上で $H^2 - K \geqq 0$ が成り立つ. また

$$M_+ := \{p \in M \mid K(p) > 0\}, \qquad M_0 := \{p \in M \mid K(p) = 0\}$$

とおく. このとき次が成り立つ:

$$\int_M H^2\, dA \geqq \int_{M_+} H^2\, dA \geqq \int_{M_+} K\, dA. \tag{1.1}$$

$\nu : M \longrightarrow S^2$ を ι に関する M の Gauss 写像とする. このとき $\nu|_{M_+}$ は局所微分同相であり, (1.1) の最右辺は $\nu|_{M_+}$ が導く計量に関する M_+ の面積である. 各 $q \in S^2$ に対し, M 上の関数 f を $f(x) := \iota(x) \cdot q$ で定める ($x \in M$). M はコンパクトなので, M 上で f が最大値を取る点 p_1 および最小値を取る点 p_2 が存在する. このとき $p_1 \neq p_2$ が成り立ち, $i = 1, 2$ に対し $\nu(p_i) \in \{q, -q\}$ および $p_i \in M_+ \cup M_0$ が成り立つ. よって $(\nu|_{M_+ \cup M_0})^{-1}(\{q, -q\})$ は少なくとも 2 点を持ち, 各 $q \in S^2$ に対し q, $-q$ の少なくとも一つは $\nu(M_+ \cup M_0)$ に含まれる. M_0 は ν の全ての臨界点からなる集合であるので, Sard の定理から $\nu(M_0)$ は測度 0 の集合であることがわかる. よって $-\nu(M_0) := \{q \in S^2 \mid -q \in \nu(M_0)\}$ とおくと, $A := \nu(M_+) \setminus (\nu(M_0) \cup (-\nu(M_0)))$ の面積は S^2 の面積の半分である 2π 以上であり, 各 $q \in A$ に対し $(\nu|_{M_+})^{-1}(\{q, -q\})$ は少なくとも 2 点を持つ. よって (1.1) の最右辺の値は 4π 以上である. $\mathcal{W}(\iota) = 4\pi$ を仮定する. このとき (1.1) から M 上 $H^2 \equiv K$ が成り立つことがわかる. よって M の各点での主曲率は唯一つであり, その値は M 上で一定であ

る．M はコンパクトなので，$\iota(M)$ は全臍的な球面である．また直接計算することで，全臍的な球面に対する Willmore 汎関数の値は 4π であることがわかる． $\square$

注意 第 3 章において，ι がうめこみではないはめこみである場合には $\mathcal{W}(\iota) \geqq 8\pi$ が成り立つことを示す．

M として種数が 1 のものを考えたい．a, b は正数で，$a > b$ を満たすとする．$\boldsymbol{R}^2$ の E^3 へのはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow E^3$ を

$$\iota(u,v) := ((a + b\cos u)\cos v,\ (a + b\cos u)\sin v,\ b\sin u) \tag{1.2}$$

で定める．$(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$ によって生成される $\boldsymbol{R}^2$ の格子を Γ とし，$M := \boldsymbol{R}^2/\Gamma$ とおく．このとき ι を M の E^3 へのうめこみとみなすことができる．$T_{a,b} := \iota(M)$ とおく．Willmore は [58] において $T_{a,b}$ の全平均曲率を調べた．$T_{a,b}$ の第一基本量は

$$E = \iota_u \cdot \iota_u, \qquad F = \iota_u \cdot \iota_v, \qquad G = \iota_v \cdot \iota_v$$

であり，第二基本量は

$$l = -\iota_u \cdot \nu_u, \qquad m = -\iota_u \cdot \nu_v, \qquad n = -\iota_v \cdot \nu_v$$

である，但し ν は $T_{a,b}$ の単位法ベクトル場 $\iota_u \times \iota_v / |\iota_u \times \iota_v|$ である．(1.2) を用いて $T_{a,b}$ の平均曲率 H は

$$H = \frac{En - 2Fm + Gl}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos u}{a + b\cos u} + \frac{1}{b}\right)$$

と表されることがわかるので，$\sqrt{EG - F^2} = b(a + b\cos u)$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_{T_{a,b}} H^2\, dA &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\left(\frac{b\cos^2 u}{a + b\cos u} + 2\cos u + \frac{a + b\cos u}{b}\right) du dv \\ &= \frac{\pi^2}{(b/a)\sqrt{1 - (b/a)^2}}\end{aligned} \tag{1.3}$$

を得る．この右辺は $b = a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ に等しく，$b \neq a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ より真に大きい．よって

$$\int_{T_{a,b}} H^2\, dA \geqq 2\pi^2$$

であり，さらに等号が成り立つことと $b = a/\sqrt{2}$ は同値である．より一般に，次の定理が成り立つ:

定理 1.2 ([46], [60]) C を E^3 内の閉曲線とする．また T_C は C の開管状近傍の境界でありそしてはめこまれた曲面を形成するとする．このとき T_C の全平均曲率は $2\pi^2$ 以上である:

$$\int_{T_C} H^2\, dA \geqq 2\pi^2. \tag{1.4}$$

さらに, この式において等号が成り立つことと T_C がある正数 $a>0$ に対し $T_{a,a/\sqrt{2}}$ と合同であることは同値である.

証明　$\boldsymbol{R}$ から E^3 への滑らかな写像 $\gamma:\boldsymbol{R}\longrightarrow E^3$ は $|\gamma'|\equiv 1$ および $\gamma(\boldsymbol{R})=C$ を満たすとする. このとき γ は周期的であり, 最小の周期を $l>0$ とする: 任意の $s\in\boldsymbol{R}$ に対し $\gamma(s+l)=\gamma(s)$ が成り立ち, かつ各 $a\in(0,l)$ に対しある $s\in\boldsymbol{R}$ が存在して $\gamma(s+a)\neq\gamma(s)$ が成り立つ. ここで C の曲率 κ は 0 にはならないと仮定する. このとき $\boldsymbol{t}:=\gamma'$ とおき, そして単位主法線ベクトル, 単位従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ とおく: $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{t}'=\kappa\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'=-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'=-\tau\boldsymbol{n}$ を満たす (Frenet-Serret の公式). そして正数 $r>0$ に対し, $\boldsymbol{R}^2$ から E^3 への滑らかな写像 $\iota:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow E^3$ を

$$\iota(s,t):=\gamma(s)+r(\cos t)\boldsymbol{n}(s)+r(\sin t)\boldsymbol{b}(s)$$

によって定義する. ι がはめこみであるように, r は十分小さいとする. $T_C:=\iota(\boldsymbol{R}^2)$ とおく. このとき Frenet-Serret の公式に注意して,

$$\begin{aligned}\iota_s&=(1-r\kappa\cos t)\boldsymbol{t}-r\tau(\sin t)\boldsymbol{n}+r\tau(\cos t)\boldsymbol{b},\\ \iota_t&=-r(\sin t)\boldsymbol{n}+r(\cos t)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

を得る. よって T_C の第一基本量 $E=\iota_s\cdot\iota_s$, $F=\iota_s\cdot\iota_t$, $G=\iota_t\cdot\iota_t$ は

$$E=(1-r\kappa\cos t)^2+r^2\tau^2,\qquad F=r^2\tau,\qquad G=r^2$$

と表される. また

$$\begin{aligned}\iota_s\times\iota_t&=-r(1-r\kappa\cos t)((\cos t)\boldsymbol{n}+(\sin t)\boldsymbol{b})\\ |\iota_s\times\iota_t|&=\sqrt{EG-F^2}=r(1-r\kappa\cos t)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって T_C の単位法ベクトル場 ν は $-(\cos t)\boldsymbol{n}-(\sin t)\boldsymbol{b}$ で与えられる. このとき

$$\begin{aligned}\nu_s&=\kappa(\cos t)\boldsymbol{t}+\tau(\sin t)\boldsymbol{n}-\tau(\cos t)\boldsymbol{b},\\ \nu_t&=(\sin t)\boldsymbol{n}-(\cos t)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

を得る. よって T_C の第二基本量 $l=-\iota_s\cdot\nu_s$, $m=-\iota_s\cdot\nu_t$, $n=-\iota_t\cdot\nu_t$ は

$$l=-r\tau^2+\kappa\cos t(1-r\kappa\cos t),\qquad m=-r\tau,\qquad n=-r$$

と表される. このとき T_C の平均曲率 H は

$$H=\frac{En-2Fm+Gl}{2(EG-F^2)}=-\frac{1-2r\kappa\cos t}{2r(1-r\kappa\cos t)}$$

と表される. よって

$$\begin{aligned}\int_{T_C} H^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{l} \frac{(1-2r\kappa\cos t)^2}{4r(1-r\kappa\cos t)}\,dsdt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^l \frac{\kappa}{r\kappa\sqrt{1-r^2\kappa^2}}\,ds \\ &\geqq \pi\int_0^l \kappa\,ds\end{aligned}$$

が成り立つ, 但し最後の不等式において等号が成り立つことと $r\kappa\equiv 1/\sqrt{2}$ は同値である. よって空間曲線に対する Fenchel の定理 (例えば [28] の第 1 章第 5 節で解説されている) を用いて (1.4) を得ることができ, さらに等号が成り立つことと C がある平面内の半径が $\sqrt{2}r$ の円であることは同値であることがわかる. 以上においては C の曲率 κ は 0 にはならないと仮定したが, κ が 0 になる場合には $\kappa\neq 0$ である点の集合上で上の議論を行えば同じ結論を得ることができる. □

1.2 Willmore 汎関数と空間の共形変換

M を前節の冒頭で与えられたようなものとし, E^n を n 次元 Euclid 空間とする ($n\geqq 3$). $\iota: M \longrightarrow E^n$ を M の E^n へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率ベクトルとする. このとき ι に関する M の全平均曲率

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M |H|^2\,dA$$

について, 次の定理が成り立つ:

定理 1.3 ([57], [10], [16]) X は E^n の共形変換で, $\infty\notin X\circ\iota(M)$ を満たすとする. このとき $X\circ\iota$ に関する M の全平均曲率 $\mathcal{W}(X\circ\iota)$ は ι に関する M の全平均曲率 $\mathcal{W}(\iota)$ に等しい:

$$\mathcal{W}(X\circ\iota) = \mathcal{W}(\iota).$$

注意 E^n の共形変換は等長変換, 相似変換および反転の有限積によって表される: E^n の領域 D から 領域 D' への共形写像は, 等長変換, 相似変換および反転の有限積を D に制限したものである (Liouville の定理, [49, pp. 209]). 但し反転は反転の中心を無限遠点に対応させているので, E^n の共形変換を厳密には E^n の 1 点コンパクト化である n 次元球面 S^n の共形変換と呼ぶべきであろう. しかしながら "E^n の共形変換" という言い方を以下においても使用することにする.

参考 $n=3$ に対する定理 1.3 は White によって示された ([57]). ただし Blaschke によっても示されていたことが知られている ([10]). 一般の $n \geqq 3$ に対しては Chen によって示された ([16]).

定理 1.3 の証明　X が等長変換または相似変換である場合には, $\mathcal{W}(X \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota)$ を示すことは容易である. X が反転である場合を考える. X は原点を中心とし半径が R の球面に関する反転であるとする. このとき $X \circ \iota = (R^2/|\iota|^2)\iota$ が成り立つので,

$$d(X \circ \iota) = R^2 \frac{d\iota}{|\iota|^2} - 2R^2(\iota \cdot d\iota)\frac{\iota}{|\iota|^4}$$

を得る. よって ι によって導かれた計量と $X \circ \iota$ によって導かれた計量の関係式

$$d(X \circ \iota) \cdot d(X \circ \iota) = R^4 \frac{d\iota \cdot d\iota}{|\iota|^4}$$

を得る. よって

$$dA_X = \frac{R^4}{|\iota|^4}\, dA \tag{1.5}$$

を得る, 但し dA_X は $X \circ \iota$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. ここで $n=3$ とする. ν を ι に関する M の単位法ベクトル場とするとき, $X \circ \iota$ に関する M の単位法ベクトル ν_X を

$$\nu_X = \frac{2}{|\iota|^2}(\iota \cdot \nu)\iota - \nu$$

と表すことができる. このとき ι および $X \circ \iota$ に関する第二基本形式の間の関係式

$$-d(X \circ \iota) \cdot d\nu_X = \frac{R^2}{|\iota|^2} d\iota \cdot d\nu - \frac{2R^2}{|\iota|^4}(\iota \cdot \nu)(d\iota \cdot d\iota)$$

を得る. 特に $X \circ \iota$ に関する M の主曲率 $k_{i,X}$ と ι に関する M の主曲率 k_i の間の関係式

$$k_{i,X} = -\frac{|\iota|^2}{R^2}k_i - \frac{2}{R^2}\iota \cdot \nu \tag{1.6}$$

を得る. (1.5) および (1.6) から,

$$(H_X^2 - K_X)\, dA_X = (H^2 - K)\, dA \tag{1.7}$$

を得る, 但し H_X, K_X は $X \circ \iota$ に関する M の平均曲率および Gauss 曲率である. よって Gauss-Bonnet の定理から

$$\int_M K dA = \int_M K_X dA_X$$

がわかるので, $\mathcal{W}(X \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota)$ を得る. 以上を参考にして, $n \geqq 4$ の場合を考える. $\nu_1, \ldots, \nu_{n-2}$ は ι に関する M の滑らかな単位法ベクトル場で, M の各点で $\nu_a \cdot \nu_b = \delta_{ab}$ を満たすとする, 但し δ_{ab} は Kronecker のデルタである. このとき

$$\nu_{a,X} := \frac{2}{|\iota|^2}(\iota \cdot \nu_a)\iota - \nu_a$$

とおくと, $\nu_{1,X},\dots,\nu_{n-2,X}$ は $X\circ\iota$ に関する M の滑らかな単位法ベクトル場で, M の各点で $\nu_{a,X}\cdot\nu_{b,X}=\delta_{ab}$ を満たす. よって

$$-d(X\circ\iota)\cdot d\nu_{a,X}=\frac{R^2}{|\iota|^2}d\iota\cdot d\nu_a-\frac{2R^2}{|\iota|^4}(\iota\cdot\nu_a)(d\iota\cdot d\iota)$$

を得る. 特に $X\circ\iota$ に関する, 法ベクトル場 $\nu_{a,X}$ に対する M の主曲率 $k_{i,X}(\nu_{a,X})$ と, ι に関する法ベクトル場 ν_a に対する M の主曲率 $k_i(\nu_a)$ の間の関係式

$$k_{i,X}(\nu_{a,X})=-\frac{|\iota|^2}{R^2}k_i(\nu_a)-\frac{2}{R^2}\iota\cdot\nu_a \tag{1.8}$$

を得る. (1.5) および (1.8) から,

$$(|H_X|^2-K_X)\,dA_X=(|H|^2-K)\,dA \tag{1.9}$$

を得る, 但し H_X は $X\circ\iota$ に関する M の平均曲率ベクトルである. よって Gauss-Bonnet の定理を用いて, $\mathcal{W}(X\circ\iota)=\mathcal{W}(\iota)$ を得る. $\square$

注意 (1.7) および (1.9) は局所的に成り立つ関係式である. 第 4 章において曲面の共形 Gauss 写像によって導かれる計量が空間の共形変換によって不変であることを示すが, このことから (1.7) は直ちに導かれることが第 4 章でわかる.

$S^n(1)$ を E^{n+1} の原点を中心とする半径 1 の超球面とし, $S^n(1)$ の点 p_+ を $p_+:=(0,\dots,0,1)$ とする. $\pi:S^n(1)\setminus\{p_+\}\longrightarrow\{x_{n+1}=-1\}$ を p_+ から超平面 $\{x_{n+1}=-1\}$ への立体射影とする. また ι は M の E^{n+1} へのはめこみで, $\iota(M)\subset S^n(1)\setminus\{p_+\}$ をみたすとする. このとき $\pi\circ\iota$ を M の E^n へのはめこみとみなすことができる. π は p_+ を中心とする半径が 2 の超球面に関する反転を $S^n(1)\setminus\{p_+\}$ に制限したものであるので, 定理 1.3 から次を得る:

系 1.4 $\mathcal{W}(\pi\circ\iota)=\mathcal{W}(\iota)$.

注意 系 1.4 において, $\mathcal{W}(\iota)$ は ($S^n(1)$ ではなく) E^{n+1} における平均曲率ベクトルの長さの 2 乗を M 上積分したものである.

定理 1.2 および定理 1.3 が成り立つので, 一般に次の Willmore 予想 (*Willmore conjecture*) が肯定的に解決されることが期待される:

予想 1.5 (Willmore 予想, [58]) M の種数を 1 とする. このとき M の E^3 へのはめこみ ι に対し $\mathcal{W}(\iota)\geqq 2\pi^2(>4\pi)$ が成り立ち, さらに等号が成り立つことと $\iota(M)$ が E^3 の共形変換によって $T_{\sqrt{2},1}$ とうつりあうことは同値である.

注意 第 2 章において, $T_{\sqrt{2},1}$ は S^3 内の Clifford トーラスの立体射影による像であることがわかる.

2　Willmore 曲面

2.1　Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式

M および ι を第 1 章の冒頭に与えられたようなものとし, ν を ι に関する M 上の単位法ベクトル場とする. M 上の滑らかな関数 f に対し, ι_f は $M \times \boldsymbol{R}$ から E^3 への滑らかな写像で任意の $p \in M$ に対し $\iota_f(p, 0) = \iota(p)$ および $(\partial \iota_f / \partial t)(p, 0) = f(p)\nu(p)$ を満たすものとする. また各 $(p, t) \in M \times \boldsymbol{R}$ に対し, $\iota_{f,t}(p) := \iota_f(p, t)$ とおく. このとき 0 を含む開区間 I が存在して, 任意の $t \in I$ に対し $\iota_{f,t}$ は M の E^3 へのはめこみである. $t \in I$ に対し,

$$w_f(t) := \mathcal{W}(\iota_{f,t})$$

とおく. このとき ι が Willmore はめこみ (*Willmore immersion*) であるとは, 任意の f に対し次が成り立つときにいう:

$$\frac{dw_f}{dt}(0) = 0$$

(すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の第 1 変分が 0 であるようなはめこみが Willmore はめこみである). ι が Willmore はめこみであるとき, M の ι による像 $\iota(M)$ を Willmore 曲面 (*Willmore surface*) という (すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の停留曲面が Willmore 曲面である). Willmore 曲面については, 次の定理が成り立つ:

定理 2.1 ([15]) *M, ι および H を前章の冒頭に与えられたようなものとし, K, Δ をそれぞれ ι によって導かれた計量に関する M の Gauss 曲率および M 上の Laplacian とする. このとき ι が Willmore はめこみであることと M 上次の方程式が成り立つことは同値である:*

$$\Delta H + 2\big(H^2 - K\big)H = 0. \tag{2.1}$$

(2.1) は Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式である.

定理 2.1 の証明　(u, v) を M の点 p の近傍 U 上の局所座標系とする. また f の台は U に含まれるものとする. そして $t \in I$ に対し

$$E_{f,t} := (\iota_{f,t})_u \cdot (\iota_{f,t})_u, \qquad F_{f,t} := (\iota_{f,t})_u \cdot (\iota_{f,t})_v, \qquad G_{f,t} := (\iota_{f,t})_v \cdot (\iota_{f,t})_v$$

とおき, さらに

$$\nu_{f,t} := \frac{(\iota_{f,t})_u \times (\iota_{f,t})_v}{|(\iota_{f,t})_u \times (\iota_{f,t})_v|},$$
$$l_{f,t} := (\iota_{f,t})_{uu} \cdot \nu_{f,t}, \qquad m_{f,t} := (\iota_{f,t})_{uv} \cdot \nu_{f,t}, \qquad n_{f,t} := (\iota_{f,t})_{vv} \cdot \nu_{f,t}$$

および

$$H_{f,t} := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\right) \tag{2.2}$$

とおく．このとき $H_{f,t}$ ははめこみ $\iota_{f,t}$ に関する M の平均曲率である．よって

$$\begin{aligned} \frac{dw_f}{dt}(0) &= \frac{d}{dt}\iint_U H_{f,t}^2\sqrt{E_{f,t}G_{f,t}-F_{f,t}^2}\,dudv\bigg|_{t=0} \\ &= \iint_U \frac{\partial}{\partial t}\Big(H_{f,t}^2\sqrt{E_{f,t}G_{f,t}-F_{f,t}^2}\Big)\bigg|_{t=0} dudv \\ &= \iint_U \left\{2H\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\bigg|_{t=0}\sqrt{EG-F^2}+H^2\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E_{f,t}G_{f,t}-F_{f,t}^2}\bigg|_{t=0}\right\}dudv \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ, 但し $E := E_{f,0}$, $F := F_{f,0}$, $G := G_{f,0}, \ldots$ である．(2.3) の最右辺の第 2 項については,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E_{f,t}G_{f,t}-F_{f,t}^2}\bigg|_{t=0} = -2fH\sqrt{EG-F^2} \tag{2.4}$$

が成り立つ．(2.3) の最右辺の第 1 項について,

$$\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\big\{\Delta f + \big(4H^2-2K\big)f\big\} \tag{2.5}$$

を示したい．(2.2) から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{t=0}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \\ &+\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る．ここで

$$\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{t=0}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} \\ &= 2f\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．よって (2.6) の右辺第 1 項は

$$f\mathrm{tr}\left\{\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\right)^2\right\} = \bigl(4H^2 - 2K\bigr)f \tag{2.7}$$

に等しいことがわかる．また (2.6) の右辺第 2 項について，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} &= \begin{pmatrix} \partial_t(\iota_{f,t})_{uu}\big|_{t=0}\cdot\nu & \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}\big|_{t=0}\cdot\nu \\ \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}\big|_{t=0}\cdot\nu & \partial_t(\iota_{f,t})_{vv}\big|_{t=0}\cdot\nu \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \iota_{uu}\cdot\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0} & \iota_{uv}\cdot\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0} \\ \iota_{uv}\cdot\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0} & \iota_{vv}\cdot\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.8}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}&\bigl[\partial_t(\iota_{f,t})_{uu}\big|_{t=0},\ \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}\big|_{t=0},\ \partial_t(\iota_{f,t})_{vv}\big|_{t=0}\bigr] \\ &= [f_{uu}\nu + 2f_u\nu_u + f\nu_{uu},\ f_{uv}\nu + f_u\nu_v + f_v\nu_u + f\nu_{uv},\ f_{vv}\nu + 2f_v\nu_v + f\nu_{vv}]\end{aligned}$$

が成り立つので，(2.8) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \nu_u\cdot\nu_u & \nu_u\cdot\nu_v \\ \nu_u\cdot\nu_v & \nu_v\cdot\nu_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.9}$$

と表される．また $\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0}$ は ν と直交しているので，U の各点で

$$\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0} = c_1\iota_u + c_2\iota_v \tag{2.10}$$

と表される $(c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$．ここで

$$\bigl(\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0}\cdot\iota_u,\ \partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0}\cdot\iota_v\bigr) = -\bigl(\nu\cdot\partial_t(\iota_{f,t})_u\big|_{t=0},\ \nu\cdot\partial_t(\iota_{f,t})_v\big|_{t=0}\bigr) = -(f_u,\ f_v)$$

であるので，(2.10) の右辺における c_1, c_2 は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

によって与えられる (すなわち $-\partial_t\nu_{f,t}\big|_{t=0}$ は ι によって導かれた計量に関する f の勾配ベクトル場に等しい)．よって (2.8) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix}\iota_u\cdot(c_1\iota_u + c_2\iota_v) + \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix}\iota_v\cdot(c_1\iota_u + c_2\iota_v) \\ &= -\left\{\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix}f_u + \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix}f_v\right\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

と表される, 但し Γ_{ab}^{c} は Christoffel の記号で, 例えば $\iota_{uv}=\Gamma_{uv}^{u}\iota_u+\Gamma_{uv}^{v}\iota_v+m\nu$ が成り立つ. よって (2.8), (2.9) および (2.11) から, (2.6) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Biggl\{\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f_{uu}-\Gamma_{uu}^{u}f_u-\Gamma_{uu}^{v}f_v & f_{uv}-\Gamma_{uv}^{u}f_u-\Gamma_{uv}^{v}f_v\\ f_{uv}-\Gamma_{uv}^{u}f_u-\Gamma_{uv}^{v}f_v & f_{vv}-\Gamma_{vv}^{u}f_u-\Gamma_{vv}^{v}f_v\end{pmatrix}\\ &\qquad\qquad -f\left(\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}l & m\\ m & n\end{pmatrix}\right)^2\Biggr\}\\ &=\frac{1}{2}\bigl\{\Delta f-\bigl(4H^2-2K\bigr)f\bigr\}\end{aligned} \tag{2.12}$$

と表されることがわかる. (2.6), (2.7) および (2.12) から, (2.5) を得る. (2.3), (2.4) および (2.5) から,

$$\frac{dw_f}{dt}(0)=\iint_U\bigl\{H\Delta f+2\bigl(H^2-K\bigr)Hf\bigr\}dA \tag{2.13}$$

を得る. Stokes の定理を用いて, (2.13) を

$$\frac{dw_f}{dt}(0)=\iint_U f\bigl\{\Delta H+2\bigl(H^2-K\bigr)H\bigr\}dA \tag{2.14}$$

と書き換えることができる. よって ι が Willmore はめこみであるならば, M 上の任意の滑らかな関数 f に対し (2.14) が成り立つので, U 上 (2.1) が成り立つことがわかる. 点 p は任意にとってよいので, M 上 (2.1) が成り立つ.
逆に M 上 (2.1) が成り立つとき ι が Willmore であることを示す. M はコンパクトであるので, M の座標近傍系で有限個の座標近傍からなるもの $\{(U_i,(u_i,v_i))\}_{i=1}^{m}$ および $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ に従属する単位の分割 $\{\chi_i\}_{i=1}^{m}$ が存在する. $\{(U_i,(u_i,v_i))\}_{i=1}^{m}$ は M の向きの一つを与えると仮定してよい. このとき (2.4), (2.5) および Stokes の定理を用いて, M 上の滑らかな関数 f に対し

$$\begin{aligned}\frac{dw_f}{dt}(0)&=\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}\iint_{U_i}\chi_i H_{f,t}^2\sqrt{E_{f,t,i}G_{f,t,i}-F_{f,t,i}^2}\,du_i dv_i\Big|_{t=0}\\ &=\sum_{i=1}^{m}\iint_{U_i}\chi_i\bigl\{H\Delta f+2\bigl(H^2-K\bigr)Hf\bigr\}dA\\ &=\iint_M f\bigl\{\Delta H+2\bigl(H^2-K\bigr)H\bigr\}dA\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. よって M 上 (2.1) が成り立つならば, $(dw_f/dt)(0)=0$ が成り立つ. よって ι は Willmore はめこみである. □

注意 はめこみが Willmore であるということを定義する際, M がコンパクトである必要はない: 上に現れた f の台がコンパクトであることおよび台に含まれない点 $p\in M$ およ

び任意の $t \in I$ に対し $\iota_f(p,t) = \iota(p)$ が成り立つという条件を付け加えることによって, やはりはめこみの Willmore 性を定義することができる. さらに M が向きづけ可能である必要もない: f の台は M の向きづけ可能な領域に含まれるという条件を付け加えればよい. M のコンパクト性や向きづけ可能性を仮定しない場合においても, Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式はやはり (2.1) によって与えられる.

注意 X を E^3 の共形変換とするとき, M の $X \circ \iota$ による像がコンパクトであるならば, 定理 1.3 を用いて ι が Willmore であることと $X \circ \iota$ が Willmore であることは同値であることがわかる. さらに, M のコンパクト性や向きづけ可能性を仮定しないとしても, $\infty \notin X \circ \iota(M)$ が成り立つならば, 領域に対する Gauss-Bonnet の定理を用いて ι が Willmore であることと $X \circ \iota$ が Willmore であることは同値であることがわかる.

参考 M をコンパクトかつ向きづけ可能な $(n-1)$ 次元可微分多様体 $(n \geqq 3)$ とし, $\iota : M \longrightarrow E^n$ を M の E^n へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率とする. そして

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^{n-1}\, dV, \qquad \mathcal{W}_*(\iota) := \int_M |H|^{n-1}\, dV$$

とおく, ただし dV は ι によって導かれた計量に関する M の体積要素である. このとき $\mathcal{W}_*(\iota)$ は $(n-1)$ 次元単位球面の体積以上であり, そして等号が成り立つことと $\iota(M)$ が全臍的な超球面であることは同値である ([13], 定理 1.1 の一般化). また汎関数 $\mathcal{W}$ の第 1 変分が 0 であるようなはめこみに対する Euler-Lagrange 方程式は次によって与えられる ([15]):

$$\Delta H^{n-2} + \big\{(n-1)(n-2)H^2 - S\big\} H^{n-2} = 0, \tag{2.15}$$

ただし S, Δ はそれぞれ ι によって導かれた計量に関する M のスカラー曲率および M 上の Laplacian である. $n = 3$ に対する方程式 (2.15) はちょうど方程式 (2.1) である.

2.2 S^3 内の Willmore 曲面

M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を M の 3 次元単位球面 S^3 へのはめこみとする. また H を M の S^3 における平均曲率とする. そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M \big(H^2 + 1\big)\, dA \tag{2.16}$$

(M が向きづけ不可能であるならば H を M 上連続に定義することはできないが, H^2 は M 上連続であるので (2.16) の右辺は ι によって確かに定義される). 汎関数 $\mathcal{W}_1$ の

ことも Willmore 汎関数 とよぶ．汎関数 $\mathcal{W}_1$ の第 1 変分が 0 であるようなはめこみを S^3 への Willmore はめこみ という．$\iota_1 : S^3 \longrightarrow E^4$ は S^3 の E^4 への等長なうめこみで, $\iota_1(S^3) = S^3(1)$ が成り立つものとする．このとき $\iota_1 \circ \iota$ は M の E^4 へのはめこみであるが, M の E^4 における平均曲率ベクトルの長さの 2 乗は (2.16) の右辺の被積分関数 $H^2 + 1$ に等しいことに注意すると,

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\iota_1 \circ \iota)$$

がわかる．よって $p_+ \notin \iota_1 \circ \iota(M)$ ならば, 系 1.4 を用いて

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\pi \circ \iota_1 \circ \iota) \tag{2.17}$$

を得る．よって次の命題を得る:

命題 2.2 ([56]) $\iota : M \longrightarrow S^3$ は M の S^3 へのはめこみで, $p_+ \notin \iota_1 \circ \iota(M)$ が成り立つものとする．このとき ι が *Willmore* であることと $\pi \circ \iota_1 \circ \iota : M \longrightarrow E^3$ が *Willmore* であることは同値である．

Weiner は S^3 への Willmore はめこみ ι に対する Euler-Lagrange 方程式は次によって与えられることを示した ([56]):

$$\Delta H + 2\bigl(H^2 - K_1\bigr)H = 0, \tag{2.18}$$

ただし K_1 は M の S^3 における 2 つの主曲率の積 (Gauss-Kronecker 曲率) である．方程式 (2.18) によると, S^3 内の極小曲面は Willmore 曲面である．M が射影平面と同相ではないならば M の S^3 への極小はめこみが存在する ([34]) ので, 命題 2.2 を用いて次の定理を得る:

定理 2.3 ([56]) M が射影平面と同相ではないならば, M の E^3 への *Willmore* はめこみが存在する．

定理 2.3 によると, E^3 内のコンパクトな Willmore 曲面は豊富に存在し, そしてこの根拠は S^3 内のコンパクトな極小曲面が豊富に存在することにある．このとき E^3 内の任意のコンパクトな Willmore 曲面は S^3 内の極小曲面の立体射影による像と E^3 の共形変換によって互いにうつりあうかどうかが興味の対象となる．Pinkall は [39] において S^3 内の Hopf トーラスを調べた, 但し S^3 内の Hopf トーラスとは S^2 内の閉曲線の Hopf 写像 $S^3 \longrightarrow S^2$ による逆像のことである (S^2 内の各閉曲線が S^3 内の Hopf トーラスを一つ定める)．S^3 内の Hopf トーラスは平坦である．Pinkall は [39] において S^3 にうめこまれた Hopf トーラスの中には Willmore 曲面であるものがたくさん存在することを示しさらにそのような Hopf トーラスのうち S^3 内の極小曲面とはいかなる共形変換によっても互いに

うつりあわないものが存在することを示した. 命題 2.2 からこのような Hopf トーラスの立体射影による像は E^3 内の Willmore 曲面であることがわかるので, 以上から次の定理を得る:

定理 2.4 ([39]) E^3 内のコンパクトな *Willmore* 曲面で S^3 内の極小曲面の立体射影による像と E^3 の共形変換によって互いにうつりあわないものが存在する.

また射影平面の S^3 への極小はめこみは存在しない. これは, 射影平面のはめこみが S^2 のはめこみの一種であり, そして S^2 の S^3 への極小はめこみは全測地的であり ([1]) 従ってうめこみであることからわかる. 一方で射影平面の E^3 への Willmore はめこみは存在する (このことについては第 3 章において議論する).

2.3 Clifford トーラスの Willmore 汎関数に関する安定性

S^3 内の Clifford トーラス (*Clifford torus*) とは

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E^4 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2},\ x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}\right\}$$

で与えられる S^3 にうめこまれたトーラスである. E^2 から S^3 への写像 ι を

$$\iota(u, v) := \left(\frac{\cos\sqrt{2}u}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin\sqrt{2}u}{\sqrt{2}},\ \frac{\cos\sqrt{2}v}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin\sqrt{2}v}{\sqrt{2}}\right)$$

($(u, v) \in E^2$) とおく. Γ を $(\sqrt{2}\pi, 0)$, $(0, \sqrt{2}\pi)$ で生成される格子とし, $M := E^2/\Gamma$ とおく. このとき $\iota : M \longrightarrow S^3$ はうめこみであり, $\iota(M)$ は Clifford トーラスである. ι は等長である:

$$d\iota = (-\sin\sqrt{2}u, \cos\sqrt{2}u, 0, 0)du + (0, 0, -\sin\sqrt{2}v, \cos\sqrt{2}v)dv$$

なので, $d\iota \cdot d\iota = du^2 + dv^2$ が成り立つ. ι は極小である:

$$\nu(u, v) := \left(\frac{\cos\sqrt{2}u}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin\sqrt{2}u}{\sqrt{2}},\ -\frac{\cos\sqrt{2}v}{\sqrt{2}},\ -\frac{\sin\sqrt{2}v}{\sqrt{2}}\right)$$

とおくと, ν は M の S^3 における単位法ベクトル場であり,

$$\iota_{uu} \cdot \nu = -1, \qquad \iota_{uv} \cdot \nu = 0, \qquad \iota_{vv} \cdot \nu = 1$$

が成り立つので, M の S^3 における平均曲率 H は 0 である. 従って Clifford トーラスは Willmore 曲面である.

Clifford トーラスの立体射影による像は $T_{\sqrt{2},1}$ である. S^3 の点 $p_+ := (0, 0, 0, 1)$ から $\{x_4 = 0\}$ への立体射影 $\pi : S^3 \setminus \{p_+\} \longrightarrow \{x_4 = 0\} \cong E^3$ による $\iota(u, v)$ の像は

$$\pi \circ \iota(u, v) = \left(\frac{\cos\sqrt{2}u}{\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}v},\ \frac{\sin\sqrt{2}u}{\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}v},\ \frac{\cos\sqrt{2}v}{\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}v}\right)$$

であり, E^2 内の曲線

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\sqrt{2}v},\ \frac{\cos\sqrt{2}v}{\sqrt{2}-\sin\sqrt{2}v}\right)\ \middle|\ v \in \boldsymbol{R}\right\}$$

は $\bigl(\sqrt{2}, 0\bigr)$ を中心とする半径が 1 の円であるので, $T_{\sqrt{2},1} = \pi \circ \iota(M)$ がわかる. よって命題 2.2 から, $T_{\sqrt{2},1}$ は Willmore 曲面であることがわかる. $T_{\sqrt{2},1}$ は $\mathcal{W}$ が $2\pi^2$ を達成するトーラスであるので, $\mathcal{W}_1(\iota) = 2\pi^2$ がわかる.

Willmore 予想においては $T_{\sqrt{2},1}$ は $\mathcal{W}$ が $2\pi^2$ を達成する (E^3 の共形変換による像を除いて) 唯一のトーラスであることが期待されている. Weiner は Clifford トーラスに対する汎関数 $\mathcal{W}_1$ の第 2 変分を計算した. f を M 上の滑らかな関数とし, I は 0 を含む開区間とする. ι_f は $M \times I$ から S^3 への滑らかな写像で, 任意の $p \in M$ に対し $\iota_f(p, 0) = \iota(p)$ および $(\partial\iota_f/\partial t)(p, 0) = f(p)\nu(p)$ を満たすものとする. 各 $(p, t) \in M \times I$ に対し, $\iota_{f,t}(p) := \iota_f(p, t)$ とおく. 任意の $t \in I$ に対し $\iota_{f,t}$ は M の E^3 へのはめこみであると仮定する. $t \in I$ に対し,

$$w_{1,f}(t) := \mathcal{W}_1(\iota_{f,t})$$

とおく. このとき

$$\frac{dw_{1,f}}{dt}(0) = \int_M \bigl(\Delta H + 2\bigl(H^2 - K_1\bigr)H\bigr) f dA$$

が成り立つ. さらに, Clifford トーラスは極小であることに注意すると,

$$\frac{d^2 w_{1,f}}{dt^2}(0) = 2\int_M \left(\left.\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\right|_{t=0}\right)^2 dA + \frac{d^2 a_f}{dt^2}(0) \tag{2.19}$$

がわかる, 但し

$$a_f(t) := \int_M dA_t$$

であり, dA_t は $\iota_{f,t}$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. (2.19) の右辺第 1 項については,

$$\left.\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\bigl\{\Delta f + \bigl(4H^2 - 2K_1 + 2\bigr)f\bigr\} = \frac{1}{2}(\Delta f + 4f) \tag{2.20}$$

が成り立つ. (2.20) は (2.5) を導くやり方を参考にすれば得られるが, (2.10) の右辺は ι_u, ι_v および ι の 1 次結合になることに注意すべきである. $(d^2 a_f/dt^2)(0)$ を求めるために, まず $(da_f/dt)(t)$ を求める:

$$\frac{da_f}{dt}(t) = -2\int_M H_{f,t}\langle W, \nu\rangle dA_t,$$

但し $W(p, t) := (\partial\iota_f/\partial t)(p, t)$ である ([19, pp. 54–56] を参考にして, 曲面が E^3 内にある場合と同様に求めることができる). Clifford トーラスに対しては $H \equiv 0$ なので,

$$\frac{d^2 a_f}{dt^2}(0) = -2\int_M \left.\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\right|_{t=0} f dA = -\int_M f(\Delta f + 4f) dA \tag{2.21}$$

が成り立つ. (2.19), (2.20) および (2.21) から,

$$\frac{d^2 w_{1,f}}{dt^2}(0) = \frac{1}{2}\int_M (\Delta f + 2f)(\Delta f + 4f)dA \tag{2.22}$$

を得る. Clifford トーラス上の Laplacian Δ の固有値の集合は $\{2(m^2+n^2) \mid m, n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ で与えられる. 特に $2 < \lambda < 4$ を満たす固有値 λ は存在しないことがわかる. よって $(d^2 w_{1,f}/dt^2)(0) \geqq 0$ がわかる. M の S^3 へのはめこみ全体からなる集合を $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ で表し, $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ に C^k 位相を導入する (ただし $k \in \boldsymbol{N}$ は十分大きいとする). Weiner は $(d^2 w_{1,f}/dt^2)(0) = 0$ となる f を調べ, 次の定理を得た:

定理 2.5 ([56]) $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ における ι のある近傍 $\mathcal{O}$ においては $\mathcal{W}_1 \geqq 2\pi^2$ が成り立ち, かつ $\mathcal{W}_1 = 2\pi^2$ が成り立つことと $\mathcal{O}$ の元が M の微分同相写像, ι および S^3 の共形変換の合成と表されることは同値である.

定理 2.5 から, 「$T_{\sqrt{2},1}$ の近傍においては Willmore 予想は肯定的に解決される」ということができる.

参考 $T_{\sqrt{2},1}$ が $\mathcal{W}$ の最小値を与えるかどうかはまだわからないが, Simon は [47], [48] において $\mathcal{W}$ の最小値を与えるトーラスが存在することを示した.

3　共形面積

3.1　共形面積の幾つかの性質

M をコンパクトな 2 次元多様体とし, M に一つの共形構造を与える. そして $\iota : M \longrightarrow S^n$ を M の n 次元単位球面 S^n への共形的なはめこみとする. また G_n を S^n の共形変換群とする (G_n は Lorentz 群 $O(n+1,1)$ の部分群と同型である). このとき ι についての M の n-共形面積 (*n-conformal area*) $A_c(n,\iota)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n,\iota) := \sup_{X \in G_n} \int_M dA_X,$$

ただし dA_X は $X \circ \iota$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. そして M の n-共形面積 $A_c(n,M)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n,M) := \inf\{A_c(n,\iota) \mid \iota : M \longrightarrow S^n \ \text{ は共形的なはめこみ}\}.$$

このとき Li-Yau は次の定理を示した:

定理 3.1 ([35]) *M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とし, g を M の Riemann 計量とする. λ_1, dA をそれぞれ g に関する Laplacian Δ の第 1 固有値および面積要素とする. そして M の S^n への共形的なはめこみが存在するとする. このとき次が成り立つ:*

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n,M).$$

さらに等号が成り立つならば, $\lambda_1 = 2$ となるように g を g の正数倍で置き換えたとき, M の S^n への等長かつ極小なはめこみが存在する.

$\iota : M \longrightarrow S^n$ を M の S^n への共形的なはめこみとする. S^n を E^{n+1} の単位超球面 $S^n(1)$ と同一視する. また $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ を E^{n+1} の直交座標系とする. 定理 3.1 を証明するために, 次の補題を必要とする.

補題 3.2 *G_n の元 X が存在して, 任意の $i \in \{1,\ldots,n+1\}$ に対し次が成り立つ:*

$$\int_M x_i \circ X \circ \iota \, dA = 0.$$

証明　[35] においても証明が与えられているが, ここでは [45, pp. 142–144] を参考にして証明を記す. $B^{n+1} := \{x \in E^{n+1} \mid |x| < 1\}$ とおく. $a \in B^{n+1}$ および $x \in \overline{B^{n+1}}$ に対し $1 - 2a\cdot x + |a|^2|x|^2 > 0$ が成り立つことに注意して,

$$g_a(x) := \frac{(1-|a|^2)x - (1 - 2a\cdot x + |x|^2)a}{1 - 2a\cdot x + |a|^2|x|^2} \tag{3.1}$$

とおく．このとき

$$1-|g_a(x)|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|x|^2)}{1-2a\cdot x+|a|^2|x|^2}$$

が成り立つので, $x\in B^{n+1}$ に対し $g_a(x)\in B^{n+1}$ が成り立ち, $x\in S^n=\partial B^{n+1}$ に対し $g_a(x)\in S^n$ が成り立つ．また

$$dg_a\cdot dg_a=\frac{(1-|a|^2)^2}{(1-2a\cdot x+|a|^2|x|^2)^2}dx\cdot dx \tag{3.2}$$

が成り立つので, g_a は B^{n+1} から B^{n+1} への共形写像を与えかつ S^n から S^n への共形写像を与えることがわかる．さらに次が成り立つ．

(i) $g_a|_{S^n}:S^n\longrightarrow S^n$ は全射である: $g_a(S^n)$ は空ではない閉集合であり, また (3.2) から $g_a|_{S^n}$ は局所微分同相写像であることがわかるので $g_a(S^n)$ は開集合である．

(ii) $g_a|_{S^n}:S^n\longrightarrow S^n$ は単射である: $g_a|_{S^n}:S^n\longrightarrow S^n$ は被覆写像であり, S^n は単連結である．

よって $g_a|_{S^n}:S^n\longrightarrow S^n$ は微分同相写像であり, 従って g_a は G_n の元を与える．ここで各 $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ および各 $a\in B^{n+1}$ に対し

$$H_i(a):=-\int_M x_i\circ g_a\circ\iota\,dA\Big/\int_M dA$$

とおき, $H(a):=(H_1(a),\ldots,H_{n+1}(a))$ とおく．このとき $|a|<1$ および L^2 内積に関する Schwarz の不等式から, $|H(a)|<1$ がわかる．よって H は B^{n+1} から B^{n+1} への滑らかな写像である．ここで g_a が (3.1) の中でのように与えられていることに注意すると, $a\in B^{n+1}$ が $a_0\in S^n$ に近づくとき, 任意の $x\in\overline{B^{n+1}}\setminus\{a_0\}$ に対し $g_a(x)$ は $-a_0$ に近づくので, $H(a)$ は a_0 に近づく．よって H を $\overline{B^{n+1}}$ から $\overline{B^{n+1}}$ への連続写像とみなすことができ, このとき $H|_{S^n}$ は S^n の恒等変換に等しい．そして各 $c\in(-1,1)$ に対し $\overline{B^{n+1}}\cap\{x_{n+1}=c\}$ の H による像を調べることによって, $H:\overline{B^{n+1}}\longrightarrow\overline{B^{n+1}}$ は全射であることがわかる．よってある $b\in B^{n+1}$ に対し $H(b)=(0,\ldots,0)$ が成り立つ．よって $X\in G_n$ として $X:=g_b|_{S^n}$ をとることによって, 補題 3.2 を得る． □

以下, 補題 3.2 の中に現れた X に対し, $X\circ\iota$ を単に ι で表す．従って

$$\int_M x_i\circ\iota\,dA=0$$

が成り立つ $(i=1,2,\ldots,n+1)$．このとき次が成り立つ ([45, pp. 88]):

$$\lambda_1\int_M(x_i\circ\iota)^2\,dA\leqq\int_M|\nabla(x_i\circ\iota)|^2\,dA, \tag{3.3}$$

ただし M 上の滑らかな関数 f に対し $|\nabla f|$ は M の計量 g に関する f の勾配ベクトル場の長さを表すとする.

定理 3.1 の証明　$|\tilde{\nabla} f|$ を ι によって導かれた計量 $\tilde{g}$ に関する f の勾配ベクトル場の ($\tilde{g}$ に関する) 長さとし, $d\tilde{A}$ を $\tilde{g}$ に関する M の面積要素とする. $\tilde{g}$ は g と共形的であるので, 2 次元多様体上の Dirichlet 積分の共形不変性に注意すると, M 上の滑らかな関数 f に対し次が成り立つことがわかる:

$$\int_M |\nabla f|^2 \, dA = \int_M \left|\tilde{\nabla} f\right|^2 d\tilde{A}. \tag{3.4}$$

よって次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota)|^2 \, dA = \sum_{i=1}^{n+1} \int_M \left|\tilde{\nabla}(x_i \circ \iota)\right|^2 d\tilde{A} = 2 \int_M d\tilde{A} \leqq 2A_c(n, \iota). \tag{3.5}$$

よって (3.3), (3.5) および

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \iota)^2 \, dA = \int_M dA$$

を用いて,

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n, \iota)$$

を得る. これより定理 3.1 の不等式を得る. 定理 3.1 の不等式において等号が成り立つとする. この式の左辺の値は, 計量 g を g の正数倍に置き換えることによって不変である. g を正数倍して, $\lambda_1 = 2$ が成り立つとする. このとき次が成り立つ:

$$\int_M dA = A_c(n, M). \tag{3.6}$$

$\{\iota_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ は M の S^n への共形的なはめこみの列で,

$$\lim_{k \to \infty} A_c(n, \iota_k) = A_c(n, M) \tag{3.7}$$

を満たしかつ任意の $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ および任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対し次を満たすとする:

$$\int_M x_i \circ \iota_k \, dA = 0. \tag{3.8}$$

(3.8) から,

$$2 \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA \leqq \int_M |\nabla (x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \tag{3.9}$$

を得る. よって次が成り立つ:

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \leqq 2A_c(n, \iota_k). \tag{3.10}$$

$C^\infty(M)$ を M 上の全ての滑らかな関数からなる集合とする．$C^\infty(M)$ をベクトル空間とみなすことができる．各 $p \geqq 1$ に対し, 次の二つのノルム

$$||f||_{L^p(M)} := \left(\int_M |f|^p dA\right)^{1/p}, \qquad ||f||_{L^p_1(M)} := \left(\int_M (|f|^p + |\nabla f|^p) dA\right)^{1/p}$$

による $C^\infty(M)$ の完備化をそれぞれ $L^p(M)$ および $L^p_1(M)$ で表す．このとき (3.10) から, 各 $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対し $\{x_i \circ \iota_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ は $L^2_1(M)$ の有界集合であることがわかる．$L^2_1(M)$ は

$$\langle\langle f_1, f_2 \rangle\rangle := \int_M (f_1 f_2 + g(\nabla f_1, \nabla f_2)) dA$$

を内積とする Hilbert 空間であり, 一般に Hilbert 空間の有界集合は弱点列コンパクトである ([30, pp. 193]) ので, $\{x_i \circ \iota_k\}$ のある部分列は $L^2_1(M)$ において弱収束する．$\{x_i \circ \iota_k\}$ は $L^2_1(M)$ の有界集合であるので, M がコンパクトであることと Hölder の不等式を用いて, 任意の $p \in (1, 2)$ に対し $\{x_i \circ \iota_k\}$ は $L^{2/p}_1(M)$ の有界集合であることがわかる．Kondrakov のうめこみ定理 ([7, pp. 55]) を用いてうめこみ $L^{2/p}_1(M) \longrightarrow L^2(M)$ はコンパクト作用素であることがわかるので, $\{x_i \circ \iota_k\}$ のさらにある部分列が $L^2(M)$ において強収束する．その収束列をそのまま $\{x_i \circ \iota_k\}$ で表し, またその極限を f_i で表す．このとき

$$\lim_{k \to \infty} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA = \int_M f_i^2 \, dA \tag{3.11}$$

が成り立つ．また $\{x_i \circ \iota_k\}$ は $L^2_1(M)$ において f_i に弱収束するので, [30, pp. 191] を参考にして

$$\liminf_{k \to \infty} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \geqq \int_M |\nabla f_i|^2 \, dA \tag{3.12}$$

を得る．また (3.8) から,

$$\int_M f_i \, dA = 0$$

がわかる．よって

$$2 \int_M f_i^2 \, dA \leqq \int_M |\nabla f_i|^2 \, dA \tag{3.13}$$

が成り立つことがわかる．また (3.6), (3.7) および (3.10) を用いて

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA = \lim_{k \to \infty} 2 \sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA$$

が成り立つことがわかるので, (3.9) を用いて

$$\lim_{k \to \infty} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA = 2 \lim_{k \to \infty} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA \tag{3.14}$$

を得る. よって (3.11)～(3.14) から

$$\lim_{k\to\infty}\int_M |\nabla(x_i\circ\iota_k)|^2\,dA=\int_M |\nabla f_i|^2\,dA$$

がわかり, $\{x_i\circ\iota_k\}$ は $L_1^2(M)$ において f_i に強収束することがわかる. また (3.13) において等号が成り立つことから, $f:=f_i$ は 2 階の線形楕円型方程式 $\Delta f+2f=0$ の弱解であることがわかり, 従って f_i は滑らかである ([21, pp. 186]). このとき $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$ は M 上 $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2=1$ を満たすことに注意して, M から S^n への写像 F を $F:=(f_1,\dots,f_{n+1})$ で定義すると, F は共形的なはめこみである. さらに $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2=1$ の両辺に Δ を作用させることによって $\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla f_i|^2=2$ がわかり, 従って F は等長である. そして Takahashi の定理 ([54]) から, F は極小であることがわかる. □

命題 3.3 ([35]) M をコンパクトな 2 次元 *Riemann* 多様体とし, dA を M の面積要素とする. また $\iota_0: M\longrightarrow S^n$ を M の $S^n(n\geqq 3)$ への等長かつ極小なはめこみとする. このとき次が成り立つ:

$$A_c(n,\iota_0)=\int_M dA.$$

証明　$\iota: M\longrightarrow S^n$ を M の S^n への等長なはめこみとする. また H を M の S^n における平均曲率ベクトルとする. そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota):=\int_M \left(|H|^2+1\right)dA.$$

このとき定理 1.3 および系 1.4 を用いて, 任意の $X\in G_n$ に対し次が成り立つことがわかる:

$$\mathcal{W}_1(X\circ\iota)=\mathcal{W}_1(\iota).$$

よって次を得る:

$$A_c(n,\iota)\leqq \mathcal{W}_1(\iota). \tag{3.15}$$

特に $\iota=\iota_0$ であるならば,

$$A_c(n,\iota_0)\leqq\int_M dA$$

が成り立つ. よって $A_c(n,\iota_0)$ の定義より,

$$A_c(n,\iota_0)=\int_M dA$$

を得る. □

定理 3.1 および命題 3.3 を用いて, 次を得る:

系 3.4 ([35]) *M はコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体で, M 上の Laplacian の第 1 固有値は 2 であるとする. また M の $S^n (n \geqq 3)$ への等長かつ極小なはめこみ ι が存在するとする. このとき次が成り立つ:*

$$\int_M dA = A_c(n, M) = A_c(n, \iota).$$

S^2 上の Laplacian の固有値の集合は $\{k(k+1) \mid k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ で与えられ, 各固有値 $\lambda_k := k(k+1)$ に対応する固有関数は E^3 上の k 次球面調和関数の S^2 への制限で与えられる. 従って第 1 固有値は $\lambda_1 = 2$ である. また S^2 の S^3 への全測地的なうめこみ $\iota : S^2 \longrightarrow S^3$ は等長でありかつ極小である. 従って次を得る:

系 3.5 ([35]) $A_c(n, S^2) = 4\pi$.

3.2 共形面積の評価と Willmore 予想

(2.17) および (3.15) を用いて, 共形面積と全平均曲率の関係に関する次の補題を得る:

補題 3.6 ([35]) $\iota : M \longrightarrow E^n$ を M の $E^n (n \geqq 3)$ へのはめこみとする. また $\pi : S^n \setminus \{p_+\} \longrightarrow E^n$ を立体射影とする. このとき次が成り立つ:

$$\mathcal{W}(\iota) \geqq A_c(n, \pi^{-1} \circ \iota).$$

補題 3.6 に注意して, Li-Yau は共形面積を用いて Willmore 予想の考察を行なった. $\mathcal{F}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合で, $0 \leqq x \leqq 1/2$, $y > 0$ および $x^2 + y^2 \geqq 1$ を満たす $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ のようなものの全体からなる集合とする. また $(x, y) \in \mathcal{F}$ に対し, $\{(1, 0), (x, y)\}$ によって生成される格子が定める平坦トーラスを $T(x, y)$ で表す. このときコンパクト, 向きづけ可能かつ種数が 1 である 2 次元 Riemann 多様体 M に対し, ある $(x, y) \in \mathcal{F}$ が存在して M と $T(x, y)$ は共形同値となる (Riemann 面として同一視できる). $T(x, y)$ 上の Laplacian の固有値の集合は

$$\left\{ 4\pi^2 \left(m^2 \frac{x^2 + y^2}{y^2} - 2mn \frac{x}{y^2} + n^2 \frac{1}{y^2} \right) \;\middle|\; m, n \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

で与えられる. よって第 1 固有値は $\lambda_1 = 4\pi^2 / y^2$ である. また $T(x, y)$ の面積 は $A = y$ である. 従って $\lambda_1 A = 4\pi^2 / y$ が成り立つ. ここで $y \leqq 1$ を仮定すると, $\lambda_1 A \geqq 4\pi^2$ が成り立つ. よって定理 3.1 を用いて, 次を得る:

系 3.7 ([35]) *$\sqrt{3}/2 \leqq y \leqq 1$ とし, $M := T(x, y)$ の S^n への共形的なはめこみが存在するとする. このとき $A_c(n, M) \geqq 2\pi^2$ が成り立ち, さらに等号が成り立つならば $y = 1$ が成り立つ.*

定理 3.1, 補題 3.6 および系 3.7 を用いて, 次の定理を得る:

定理 3.8 ([35]) $(x, y) \in \mathcal{F}$ が $\sqrt{3}/2 \leqq y \leqq 1$ を満たすものとする．また ι を $M := T(x, y)$ から $E^n (n \geqq 3)$ への共形的なはめこみとする．このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 2\pi^2$ が成り立つ．さらに等号が成り立つならば, $y = 1$ であり, $\iota(M)$ は S^n 内の極小曲面でその上の *Laplacian* の第 1 固有値が 2 であるものの立体射影による像と E^n の共形変換によってうつりあう．

Montiel-Ros は [37] において次の命題を示した:

命題 3.9 ([37]) 任意の $(x, y) \in \mathcal{F}$ に対し, 次が成り立つ:

$$A_c(n, T(x, y)) \geqq \frac{4\pi^2 y}{1 + y^2 + x^2 - x}.$$

補題 3.6 および命題 3.9 を用いて, 次の定理を得る:

定理 3.10 ([37]) $(x, y) \in \mathcal{F}$ が $2y \geqq 1 + y^2 + x^2 - x$ を満たすとする．また ι を $T(x, y)$ から $E^n (n \geqq 3)$ への共形的なはめこみとする．このとき次が成り立つ:

$$\mathcal{W}(\iota) \geqq \frac{4\pi^2 y}{1 + y^2 + x^2 - x} \geqq 2\pi^2.$$

注意 命題 3.9 を用いて, 系 3.7 および定理 3.8 において等号が成り立つならば $(x, y) = (0, 1)$ であることがわかる．また Montiel-Ros は [37] において次のことを示している: コンパクトな曲面の共形構造を一つとったとき, その中に次の条件を満たす計量が存在するならばそのような計量は一意に定まる: その計量に関する Laplacian の第 1 固有値に対する固有関数によって S^n への極小はめこみが構成される．$T(0, 1)$ の S^n への極小はめこみの例は像が Clifford トーラスと合同であるものがあり, このはめこみは Clifford トーラス上の Laplacian の第 1 固有値である 2 に対する固有関数によって構成されている．よって定理 3.8 において等号が成り立つ場合に現れる S^n 内の極小曲面に導入される計量は平坦である．このとき第 1 固有値の重複度は 4 であるから, $T(0, 1)$ の S^n への極小はめこみによる像は S^3 に含まれるとみなすことができる．さらに S^3 に極小にはめこまれた平坦トーラスは Clifford トーラスに限る ([34]) ので, 定理 3.8 において等号が成り立つ場合に現れる極小曲面は Clifford トーラスである．

注意 Montiel-Ros は [37] において $y \in \left[1, \sqrt{5/3}\right]$ であるならば

$$A_c(3, T(0, y)) = \frac{4\pi^2 y}{1 + y^2}$$

が成り立つことを示している．よって $y \neq 1$ であるならば, $A_c(3, T(0, y)) < 2\pi^2$ が成り立つ．このことは補題 3.6 を用いて Willmore 予想を完全に解決することはできないことを示している．

3.3 Willmore 射影平面

M が射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$ と同相である場合に $A_c(n,M)$ を調べ, そして M の E^n へのはめこみ ι に対する $\mathcal{W}(\iota)$ を調べる. まず

$$S^2\big(\sqrt{3}\big) := \big\{(x_1,x_2,x_3)\in E^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=3\big\}$$

とおく. そして

$$\begin{aligned} &y_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3, \qquad y_2 := \frac{1}{\sqrt{3}}x_3x_1, \qquad y_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2,\\ &y_4 := \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2-x_2^2), \qquad y_5 := \frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2-x_3^2) \end{aligned}$$

とおく. このとき E^3 の各点 (x_1,x_2,x_3) に対し E^5 の点 (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) を対応させる写像 $\Phi : E^3 \longrightarrow E^5$ は次を満たす:

(i) $\Phi(x_1',x_2',x_3')=\Phi(x_1,x_2,x_3)$ は, (x_1',x_2',x_3') が (x_1,x_2,x_3) または $(-x_1,-x_2,-x_3)$ に等しいことと同値である;

(ii) $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)\subset S^4$;

(iii) $\Phi : S^2\big(\sqrt{3}\big) \longrightarrow S^4$ は等長なはめこみである: $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &(dy_1)^2+(dy_2)^2+(dy_3)^2+(dy_4)^2+(dy_5)^2\\ &=(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2+\frac{1}{9}(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2; \end{aligned}$$

(iv) 等長はめこみ $\Phi : S^2\big(\sqrt{3}\big) \longrightarrow S^4$ は極小である: $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上の Laplacian の固有値の集合は $\{k(k+1)/3 \mid k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}\}$ で与えられ, 各固有値 $\lambda_k := k(k+1)/3$ に対応する固有関数は, E^3 上の k 次球面調和関数の $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ への制限で与えられるので, 各 y_i は固有値 $\lambda_2=2$ に対応する固有関数であり, 従って Takahashi の定理から Φ は極小であることがわかる.

従って $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ を S^4 に極小にうめこまれた射影平面とみなすことができ, これを Veronese 曲面 (*Veronese surface*) という. $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ 上 well-defined な固有関数はちょうど E^3 上の偶数次の球面調和関数によって与えられるので, $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ 上の Laplacian の第 1 固有値は $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ 上の Laplacian の第 2 固有値 $\lambda_2=2$ である. $\Phi\big(S^2\big(\sqrt{3}\big)\big)$ の面積は $S^2\big(\sqrt{3}\big)$ の面積の半分であり, 6π に等しい. よって系 3.4 から, 次を得る:

系 3.11 ([35]) *$n\geqq 4$ に対し, $A_c(n,\boldsymbol{R}P^2)=6\pi$ が成り立つ.*

補題 3.6 および系 3.11 を用いて, 次の定理を証明することができる:

定理 3.12 ([35]) $\boldsymbol{R}P^2$ の $E^n(n \geqq 4)$ へのはめこみ ι に対し, $\mathcal{W}(\iota) \geqq 6\pi$ が成り立つ. さらに等号が成り立つならば, $\iota(\boldsymbol{R}P^2)$ は S^4 内のある極小曲面の立体射影による像と E^n の共形変換によってうつりあう. また *Veronese* 曲面に対する $\mathcal{W}$ の値は 6π である.

証明　$\mathcal{W}(\iota) = 6\pi$ が成り立つ場合を吟味すればよい. $\pi : S^n \setminus \{p_+\} \longrightarrow E^n$ を立体射影とし, $\iota_1 := \pi^{-1} \circ \iota$ とおく. $\tilde{\nabla}$, $d\tilde{A}$ をそれぞれ ι_1 によって $\boldsymbol{R}P^2$ 上に導かれた計量に関する勾配ベクトル場を与える作用素および面積要素とし, ∇, dA をそれぞれ Veronese 曲面から $\boldsymbol{R}P^2$ 上に導かれた計量に関する勾配ベクトル場を与える作用素および面積要素とする. $i = 1, 2, \ldots, n+1$ に対し ι_1 は

$$\int_{\mathbf{R}P^2} x_i \circ \iota_1 \, dA = 0$$

を満たすと仮定してよい. Veronese 曲面上の Laplacian の第 1 固有値は 2 なので

$$12\pi = 2\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\mathbf{R}P^2} (x_i \circ \iota_1)^2 \, dA \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\mathbf{R}P^2} |\nabla(x_i \circ \iota_1)|^2 \, dA \tag{3.16}$$

がわかり, また

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\mathbf{R}P^2} \left|\tilde{\nabla}(x_i \circ \iota_1)\right|^2 d\tilde{A} = 2\int_{\mathbf{R}P^2} d\tilde{A} \leqq 2\mathcal{W}_1(\iota_1) = 2\mathcal{W}(\iota) = 12\pi \tag{3.17}$$

が成り立ち, (3.4) から (3.16) の最右辺と (3.17) の最左辺が等しいことがわかるので,

$$\int_{\mathbf{R}P^2} d\tilde{A} = \mathcal{W}_1(\iota_1)$$

を得る. これは ι_1 が極小はめこみであることを意味する. □

以上においては, $n \geqq 4$ である場合の $A_c(n, \boldsymbol{R}P^2)$ および $\mathcal{W}(\iota)$ を調べた. $n = 3$ の場合を考えたい. まず次の命題に注意する:

命題 3.13 ([35]) M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とする. また $\iota : M \longrightarrow E^n$ は M の $E^n(n \geqq 3)$ へのはめこみで, $\iota(M)$ のある点の ι による逆像は k 個の点 $(k \in \boldsymbol{N})$ からなるものとする. このとき $A_c(n, \pi^{-1} \circ \iota) \geqq 4k\pi$ が成り立つ.

証明　M の k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ が ι によって E^n の原点 o にうつるとする: $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し, $\iota(p_i) = o$ が成り立つ. U_i を p_i の M における近傍とし, $i \neq j$ のとき $U_i \cap U_j = \emptyset$ が成り立つとする. $\pi : S^n \setminus \{p_+\} \longrightarrow E^n$ を $p_+ := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ からの立体射影とし, 正数 $r > 0$ に対し E^n の共形変換 X_r を $X_r(x) := rx \ (x \in E^n)$ で定める. このとき任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 正数 $R > 0$ を $\pi^{-1} \circ X_R \circ \iota(U_i)$ の面積が $4\pi - \varepsilon$ より大きくなるようにとることができる. よって $A_c(n, \pi^{-1} \circ \iota) \geqq 4k\pi$ が成り立つ. □

注意　補題 3.6 および命題 3.13 から, $\iota : M \longrightarrow E^3$ に対し定理 1.1 における不等式 $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4\pi$ を得る. また $\iota : M \longrightarrow E^3$ がうめこみではないはめこみである場合には, $\mathcal{W}(\iota) \geqq 8\pi$ が成り立つことがわかる.

$M = \boldsymbol{R}P^2$ かつ $n = 3$ ならば, 命題 3.13 における k は $\iota(M)$ のある点で 3 以上である ([9]). よって $A_c(3, \boldsymbol{R}P^2) \geqq 12\pi$ がわかり, そして補題 3.6 からはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ に対し $\mathcal{W}(\iota) \geqq 12\pi$ を得る. そして Kusner は $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たすはめこみ $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ を発見し ([31], [32]), さらに Bryant は $\mathcal{W}$ が 12π を達成する $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 への全てのはめこみからなるモジュライ空間を描写した ([12]). よって $A_c(3, \boldsymbol{R}P^2) = 12\pi$ がわかる. $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たす $\iota : \boldsymbol{R}P^2 \longrightarrow E^3$ は Willmore はめこみであるので, このことと定理 2.3 から任意のコンパクトな 2 次元可微分多様体に対しその E^3 への Willmore はめこみが存在することがわかる.

Kusner は E^3 内のある種の極小曲面に注目して Willmore 射影平面を発見した. p を 3 以上の奇数とし, 複素変数 $z \in \boldsymbol{C}$ の有理関数 f_p, g_p を次で定義する:

$$f_p(z) := \sqrt{-1}\frac{(sz^p+1)^2}{(z^{2p}+rz^p-1)^2}, \qquad g_p(z) := \frac{z^{p-1}(z^p-s)}{sz^p+1},$$

但し $s := \sqrt{2p-1}$, および $r := 2s/(p-1)$ である. $\boldsymbol{C}$ から $z^{2p}+rz^p-1$ の零点を除いた領域を D とし, D の固定された 1 点 z_0 と D の各点 z を結ぶ D 内の曲線を C とする. C の向きを z が終点であるものとする. D から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像 $\Phi_p : D \longrightarrow \boldsymbol{C}^3$ を

$$\Phi_p(z) := \left(\int_C f_p\bigl(1-g_p^2\bigr)dz, \quad \sqrt{-1}\int_C f_p\bigl(1+g_p^2\bigr)dz, \quad 2\int_C f_p g_p dz \right)$$

で定める. このとき $z \in D$ には依らない $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{C}^3$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対し

$$\begin{aligned} &\Phi_p(z) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{z^{2p}+rz^p-1}\left(z^{2p-1}-z,\ -\sqrt{-1}(z^{2p-1}+z),\ \frac{p-1}{p}(z^{2p}+1) \right) + \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{3.18}$$

が成り立つ. よって Φ_p は 1 価である. (3.18) から, 任意の $z \in D \setminus \{0\}$ に対し

$$\Phi_p\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) - \boldsymbol{c} = \overline{\Phi_p(z) - \boldsymbol{c}} \tag{3.19}$$

を得る. 次が成り立つ:

(i) $\pi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ を立体射影とすると, $z \in \boldsymbol{C}$ に対し

$$\pi^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\bigl(z+\bar{z},\ -\sqrt{-1}(z-\bar{z}),\ -1+|z|^2\bigr)$$

が成り立つので,

$$\pi^{-1}\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\pi^{-1}(z)$$

が成り立つ, すなわち球面上では $-1/\bar{z}$ は z の対せき点を与える;

(ii) p が奇数であることに注意すると, $z^{2p}+rz^p-1$ の零点 a に対し $-1/\bar{a}$ も $z^{2p}+rz^p-1$ の零点であることがわかるので, 方程式 $z^{2p}+rz^p-1=0$ は $\boldsymbol{R}P^2$ のちょうど p 個の点 $a_1', a_2', \ldots, a_p'$ を定める.

(i), (ii) から, $\iota_p := \mathrm{Re}\,\Phi_p$ は $M_p := \boldsymbol{R}P^2 \setminus \{a_1', a_2', \ldots, a_p'\}$ から E^3 への滑らかな写像を与えることがわかる. さらに f_p は g_p の極でのみ零点を持ちかつ f_p の零点の位数は対応する g_p の極の位数の 2 倍であるので, $\iota_p : M_p \longrightarrow E^3$ は極小はめこみであり, 従って ι_p は Willmore はめこみである.

X は E^3 の $\iota_p(M_p)$ に含まれない点を中心とする球面に関する反転であるとする. このとき $X \circ \iota_p$ は M_p の E^3 へのはめこみである. はめこみ $X \circ \iota_p$ の定義域は M_p であるが, 仮にこのはめこみの定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できるならば, つまり $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 へのあるはめこみが存在してその M_p への制限が $X \circ \iota_p$ に等しいならば, $\boldsymbol{R}P^2$ の E^3 への Willmore はめこみが得られることになる. ここでは $X \circ \iota_p$ の定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できると仮定する. K_X, dA_X をそれぞれ $X \circ \iota_p$ によって導かれた計量に関する $\boldsymbol{R}P^2$ の Gauss 曲率および面積要素とし, H_X^2 を $X \circ \iota_p$ に関する平均曲率の 2 乗とする ($\boldsymbol{R}P^2$ は向きづけ不可能なので $\boldsymbol{R}P^2$ 上で連続になるように平均曲率を定義することはできないが, 平均曲率の 2 乗については可能である). このとき (1.7) を用いて,

$$\int_{\mathbf{R}P^2} H_X^2 dA_X = \int_{\mathbf{R}P^2} K_X dA_X - \int_{M_p} K_p dA_p \tag{3.20}$$

を得る, 但し K_p, dA_p はそれぞれ ι_p によって導かれた計量に関する M_p の Gauss 曲率および面積要素である. Gauss-Bonnet の定理から, (3.20) の右辺第 1 項は 2π に等しいことがわかる. また

(i) 右辺第 2 項は極小曲面 $\iota_p(M_p)$ の Gauss 写像によって導かれた ($K_p=0$ となる点で退化する) 計量に関する M_p の面積であり,

(ii) 極小曲面 $\iota_p(M_p)$ の Gauss 写像は立体射影 π の逆写像 π^{-1} と有理関数 g_p の合成 $\pi^{-1} \circ g_p$ と表され,

(iii) g_p は $\boldsymbol{C}$ から高々可算個の点を取り除いて得られる領域 E から, $\boldsymbol{C}$ から高々可算個の点を取り除いて得られる領域 E' の上への $(2p-1)$ 重被覆である

ことに注意すると, (3.20) の右辺第 2 項は $2(2p-1)\pi$ に等しいことがわかる. よって

$$\int_{\mathbf{R}P^2} H_X^2 dA_X = 4p\pi$$

を得る. 特に $p=3$ の場合には, この右辺は 12π に等しい. よって Willmore 汎関数の値がちょうど 12π である Willmore 射影平面が存在することになる. 以上においては $X \circ \iota_p$ の定義域を $\boldsymbol{R}P^2$ 全体に拡張できると仮定したが, この点については次節で検証する.

参考 曲面の臍点ではない各点で主方向の一つを与える連続な 1 次元分布を曲面上の 主分布 (*principal distribution*) という．曲面が孤立臍点を持つとき, この周りでの主分布の振る舞いに関する量として孤立臍点の 指数 (*index*) というものが定義される ([26, pp. 137])．これは連続なベクトル場の孤立零点の指数と同類のものであるが, ベクトル場の孤立零点の指数は整数であるのに対し 1 次元分布の孤立特異点の指数は整数の半分と表され必ずしも整数であるとは限らない．平均曲率一定曲面の孤立臍点の指数は負であり ([26, pp. 139]), より一般に特別な Weingarten 曲面の孤立臍点の指数は負である ([23])．[2] において, 筆者は次のことを示した: E^3 にはめこまれた Willmore 曲面の孤立臍点の指数は 1/2 以下である．このことを示すために, まず孤立臍点での平均曲率が零であることを仮定する．E^3 の共形変換でうつすことによってこのようにすることが可能であり, また E^3 の共形変換によって Willmore 曲面は Willmore 曲面にうつり曲面の主方向は像の主方向にうつるので, 上の仮定によって一般性を失わない．平均曲率が恒等的に零であるならば曲面は極小曲面であり, このとき孤立臍点の指数は負である．平均曲率 H が恒等的に零ではないとする．このとき曲面が Willmore であることから, $f := H$ は方程式 $\bigl\{\Delta + 2\bigl(H^2 - K\bigr)\bigr\}f = 0$ の解であることがわかり, またこの方程式は自明な解 $f := 0$ $(\not\equiv H)$ を持つ．このとき二つの解の差である H は零ではない 2 変数同次多項式によって孤立臍点の近傍上で近似される ([22])．この同次多項式に着目することによって, Willmore 曲面の孤立臍点の指数は 1/2 以下であることを示すことができる．Kusner が発見した Willmore 射影平面は指数が 1/2 である孤立臍点を持つので, 1/2 という値による評価は最良である．

3.4 E^3 内の極小曲面と Willmore 曲面

Kusner が発見した Willmore 射影平面は E^3 内のある種の連結かつ完備な極小曲面のある反転による像のコンパクト化である．一般に, S を E^3 内の連結かつ完備な極小曲面とする．このとき S は Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式 (2.1) を満たす, すなわち S は Willmore 曲面である．X を, 中心が S に含まれない球面に関する反転とする．このとき $X(S)$ のコンパクト化は必ずしも滑らかな曲面であるとは限らない (つまりあるはめこみによるコンパクトな 2 次元可微分多様体の像であるとは限らない)．$X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であるとき, それはコンパクトな Willmore 曲面である．それではどのような場合に $X(S)$ のコンパクト化は滑らかな曲面であるだろうか？E^3 内の連結かつ完備な極小曲面 S が 無限遠点で正則である (*regular at infinity*) とは, S のコンパクト集合 T が存在して次を満たすときにいう:

(i) $S \setminus T$ の連結成分の個数は有限である (S の位相は E^3 に対する相対位相ではない);

(ii) $S \setminus T$ の各連結成分 Σ に対し, E^3 内のある平面 P および P の有界領域 D が存在して Σ は $P \setminus \overline{D}$ 上の滑らかな関数 f のグラフである;

(iii) (x, y) を P 上の直交座標系とするとき, f は次のように漸近展開される:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& a\log\left(x^2+y^2\right)+b+\frac{cx}{x^2+y^2}+\frac{dy}{x^2+y^2} \\ &+O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad ((x,y)\longrightarrow\infty), \end{aligned} \tag{3.21}$$

但し a, b, c, d は実数である.

次が成り立つ:

定理 3.14 ([44]) S を E^3 内の連結かつ完備な極小曲面とする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) S は無限遠点で正則である;

(b) S の全曲率は有限でありかつ S の任意のエンドはうめこまれている.

S は無限遠点で正則であるとする. このとき S のエンドの <u>対数増大度が零である</u> (*the logarithmic growths are zero*) またはエンドが <u>平坦</u> (*flat*) であるとは, $S \setminus T$ の任意の連結成分に対し対応する (3.21) における係数 a が 0 であるときにいうことにする. 次が成り立つ:

定理 3.15 ([11]) S を E^3 内の連結かつ完備な極小曲面とする. このとき次の (a), (b) は同値である:

(a) S は無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度は零である;

(b) $X(S)$ のコンパクト化は滑らかな曲面である.

Kusner の Willmore 射影平面は無限遠点で正則でありかつ平坦なエンドを持つ極小曲面のある反転による像のコンパクト化である: $z^{2p}+rz^p-1$ の各零点の十分小さい近傍の ι_p による像を Σ とおくと, Σ は (3.21) における a が零であるような関数 f のグラフと表される.

定理 3.15 の証明　まず $X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であることを仮定して, S は無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度は零であることを示す. 仮定から, S のエンドがうめこまれていることは直ちにわかる. K, dA をそれぞれ S の Gauss 曲率

および面積要素とし, H_X^2, K_X, dA_X をそれぞれ $X(S)$ の平均曲率の 2 乗, Gauss 曲率および面積要素とする. このとき (1.7) から

$$\int_S (-K)dA = \int_{X(S)} (H_X^2 - K_X)dA_X$$

がわかり, そしてこの式の右辺は有限の値であるので, S の全曲率は有限であることがわかる. よって定理 3.14 から, S は無限遠点で正則であることがわかる. そこで T を S の然るべき条件を満たすコンパクト集合とし, Σ を $S \setminus T$ の連結成分の一つとする. Σ に対し, P, D, f および (x, y) を上述のようなものとする. さらに (x, y, z) は E^3 上の直交座標系を構成するものとする. X を E^3 の原点 o を中心とする半径 1 の球面に関する反転とする:

$$X(x, y, z) := \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x, y, z).$$

$o \notin \Sigma$ を仮定する. $X(\Sigma)$ に o を付け加えたものを Σ_0 によって表す. Σ_0 は滑らかな曲面である. (u, v) は $P \setminus \{o\}$ 上の座標系で, 次を満たすものとする:

$$(u, v) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y).$$

このとき (u, v) を Σ_0 における o の近傍上の局所座標系とみなすことができ, そしてこのとき o は $(u, v) = (0, 0)$ に相当することがわかる. $\Sigma_0 \setminus \{o\}$ の点 $X(x, y, f(x, y))$ の第 3 成分は次のように表される:

$$\frac{f(x, y)}{x^2 + y^2 + f(x, y)^2}. \tag{3.22}$$

(u, v) を用いて, (3.22) を次のように書き直すことができる:

$$\frac{\left(u^2 + v^2\right) g(u, v)}{1 + \left(u^2 + v^2\right) g(u, v)^2} \ (=: G(u, v)), \tag{3.23}$$

但し

$$g(u, v) := -a \log\left(u^2 + v^2\right) + b + cu + dv + o\Big(\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}\Big) \quad ((u, v) \longrightarrow (0, 0))$$

である. 仮定から, G は $(0, 0)$ の近傍上の滑らかな関数であることがわかる. ここでもし $a \neq 0$ であるならば G は $(0, 0)$ で C^1 級ではあるが C^2 級ではないので, $a = 0$ を得る. $S \setminus T$ の他の連結成分についても同様である. よって S のエンドの対数増大度は零であることがわかる.

以上の議論を参考にすることによって, 逆を示すことができる: S が無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度が零であることを仮定して $X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であることを示すことができる. □

注意 定理 2.4 において与えられた Willmore 曲面は定理 3.15 の中の条件 (a) を満たす E^3 内の極小曲面のある反転による像のコンパクト化と E^3 の共形変換によってうつりあわない. なぜならば

(i) 定理 2.4 において与えられた Willmore 曲面は S^3 内の Hopf トーラスの立体射影による像であるので, この曲面は臍点を持たないことがわかり,

(ii) 定理 3.15 の証明に現れる Σ_0 における o の近傍は写像

$$\Phi(u,v) := \frac{1}{1+\bigl(u^2+v^2\bigr)g(u,v)^2}\bigl(u,\ v,\ \bigl(u^2+v^2\bigr)g(u,v)\bigr)$$

による $(0,0)$ の近傍の像と表されるが, 直接計算することによって $o=\Phi(0,0)$ は Σ_0 の臍点であることがわかる

からである. S^3 内の極小トーラスの立体射影による像も定理 3.15 の中の条件 (a) を満たす E^3 内の極小曲面のある反転による像のコンパクト化と E^3 の共形変換によってうつりあわない.

参考 S を E^3 内の連結かつ完備な極小曲面とし, さらに無限遠点で正則であるものとする. このとき定理 3.14 から, S の全曲率は有限であることがわかる. このような S または S の 2 重被覆に対し, コンパクトな 2 次元 Riemann 多様体 $\tilde{S}$ および $\tilde{S}$ の有限個の点 $\{p_i\}_{i=1}^m$ が存在して S または S の 2 重被覆は $\tilde{S}\setminus\{p_i\}_{i=1}^m$ と共形同値であり, さらにその Gauss 写像 ν は $\tilde{S}$ 上の有理型関数に拡張される ([38, Lemma 9.5]). S の臍点はちょうど ν の微分が零であるような S の点であるので, S の臍点の個数は有限であることがわかる. S のエンドの個数も有限であるので, S のエンドの対数増大度が零であるならば S のある反転による像のコンパクト化の臍点の個数は有限であることがわかる. このような曲面上の主分布に対しては Hopf-Poincaré の定理が成り立ち, 特に曲面が $\boldsymbol{R}P^2$ のあるはめこみによる像である場合には曲面の全ての臍点の指数の和は $\boldsymbol{R}P^2$ の Euler 数である 1 に等しい. Willmore 曲面の孤立臍点の指数は 1/2 以下であるので, Kusner が発見した Willmore 射影平面は指数が 1/2 である孤立臍点を持つことがわかる.

参考 [11] において, Bryant は次のことを示した: M が S^2 に同相であるならば, M の E^3 への Willmore はめこみによる像は定理 3.15 の中の条件 (a) を満たす E^3 内の完備な極小曲面のある反転による像のコンパクト化である.

4 共形Gauss写像

4.1 S^3 の共形変換

$\langle\ ,\ \rangle$ を $\boldsymbol{R}^5$ の Lorentz 計量とする: $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^5$ の不定値で対称な双線形形式で,

$$x := \left(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\right), \quad y := \left(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}\right) \in \boldsymbol{R}^5$$

に対し

$$\langle x, y\rangle := -x^{(0)}y^{(0)} + x^{(1)}y^{(1)} + x^{(2)}y^{(2)} + x^{(3)}y^{(3)} + x^{(4)}y^{(4)}$$

で定義される. ベクトル $x \in \boldsymbol{R}^5$ が

(i) <u>空間的</u> (*space-like*) であるとは, $\langle x, x\rangle > 0$ が成り立つときにいう;

(ii) <u>時間的</u> (*time-like*) であるとは, $\langle x, x\rangle < 0$ が成り立つときにいう;

(iii) <u>光的</u> (*light-like*) または<u>零的</u> (*null*) であるとは, x は零ベクトルではなくかつ $\langle x, x\rangle = 0$ を満たすときにいう.

時間的または光的ベクトル $x \in \boldsymbol{R}^5$ が<u>未来を向いている</u> (*future-directed*) とは, $x^{(0)} > 0$ が成り立つときにいう. L^+ を $\boldsymbol{R}^5$ の全ての未来を向いている光的ベクトルからなる集合とする. 二つの $x, y \in L^+$ に対し, x と y が一次従属であるとき $x \sim y$ と書くことにする. $\sim$ は L^+ における同値関係であり, 商空間 $L^+/\sim$ を 3 次元単位球面 S^3 と同一視できる: L^+ の部分集合 $\left\{x \in L^+ \;\middle|\; x^{(0)} = 1\right\}$ は $\sim$ の全ての同値類の代表元からなる集合すなわち代表系であり, この集合は $\langle\ ,\ \rangle$ の引き戻しを付与されることによって S^3 と等長な Riemann 多様体とみなされる.

$O(4,1)$ を de Sitter 群 (符号数が $(4,1)$ である Lorentz 群) とする: $\boldsymbol{R}^5$ の線形変換で Lorentz 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つものの全体からなる集合は合成を演算とする群をなし, これが $O(4,1)$ である. $O(4,1)$ の元で, $\boldsymbol{R}^5$ の向きおよび未来の方向を保つものの全体からなる集合を G で表す. G は $O(4,1)$ の部分群である.

命題 4.1 *G の各元 X は S^3 の共形変換 t_X を引き起こし, t_X は S^3 の向きを保つ.*

証明　S^3 を $L^+ \cap \left\{x^{(0)} = 1\right\}$ と同一視する. このとき $y \in S^3$ に対し, $X(y)$ は光的ベクトルで未来を向いている. $X(y)$ によって決まる $\boldsymbol{R}^5$ の 1 次元部分空間と S^3 の共通部分は 1 点からなり, その点を $t_X(y)$ で表す:

$$t_X(y) = \frac{1}{X(y)^{(0)}} X(y).$$

このとき写像 $t_X : S^3 \longrightarrow S^3$ は全単射である. さらに微分同相でありそして共形的である. このことを示すために, S^3 における点 $p := (1,0,0,0,1)$ の近傍を, $\boldsymbol{R}^3$ における $(0,0,0)$ のある近傍 U を用いて,

$$\left\{ \left(1, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \sqrt{1-(y^{(1)})^2-(y^{(2)})^2-(y^{(3)})^2} \right) \;\middle|\; (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}) \in U \right\}$$

と表す. そして X を 5 次の正方行列とみなし, $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ と 5 つの列ベクトル x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 で X を表したとき, $T_p(S)$ の元 $\partial/\partial y^{(i)}$ は写像 t_X の微分 dt_X によって

$$dt_X\left(\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}\right) = -\frac{x_i^{(0)}}{(x_0^{(0)}+x_4^{(0)})^2}(x_0+x_4) + \frac{1}{x_0^{(0)}+x_4^{(0)}}x_i \tag{4.1}$$

にうつされることがわかる ($X(p)$ は未来を向いているので, $x_0^{(0)}+x_4^{(0)} > 0$ が成り立つことに注意). ここで, $\langle x_0, x_0 \rangle = -1$, $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ $(i = 1,2,3,4)$ および $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ に注意すると,

$$\left\langle dt_X\left(\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}\right), dt_X\left(\frac{\partial}{\partial y^{(j)}}\right) \right\rangle = \frac{1}{(x_0^{(0)}+x_4^{(0)})^2}\delta_{ij}$$

がわかる, 但し i, $j \in \{1,2,3\}$ であり, δ_{ij} は Kronecker のデルタである. 以上の議論は点 p で行なわれたが, 他の点でも同様である. よって t_X は共形的である. X は $\boldsymbol{R}^5$ の向きおよび未来の方向を保ちさらに空間的ベクトルを空間的ベクトルにうつすので, t_X は S^3 の向きを保つ. $\square$

S^3 の共形変換と E^3 の共形変換は一対一に対応し, E^3 の共形変換は等長変換, 相似変換および反転の有限積と表される (Liouville の定理). E^3 の等長変換と相似変換は S^3 の点 $p_+ := (0,0,0,1)$ からの立体射影を通して p_+ を固定する S^3 の共形変換を引き起こし, そして S^3 と $L^+ \cap \left\{x^{(0)} = 1\right\}$ の同一視を通して $O(4,1)$ の元を与える. 例えば, 正数 $a > 0$ に対し E^3 の相似変換 X' を $X'(y) := ay$ $(y \in E^3)$ で定めると, X' が引き起こす S^3 の共形変換に対応する $O(4,1)$ の元 X は

$$X = \begin{pmatrix} (a+a^{-1})/2 & 0 & 0 & 0 & (a-a^{-1})/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a-a^{-1})/2 & 0 & 0 & 0 & (a+a^{-1})/2 \end{pmatrix}$$

であることがわかる. また E^3 の反転は p_+ を S^3 の別の点にうつす S^3 の共形変換を引き起こし, 同様に $O(4,1)$ の元を与える. 以上に注意すると, S^3 の向きを保つ共形変換は G のある元 X が定める共形変換 t_X に等しいことがわかる. このような X は一意であ

り, X_1, $X_2 \in G$ に対し $t_{X_1} \circ t_{X_2} = t_{X_1X_2}$ が成り立つので, 群 G は S^3 の向きを保つ共形変換の群と同型であることがわかる. $O(4,1)$ を Lie 群とみなしたとき, G は $O(4,1)$ の単位元を含む連結成分である.

4.2 S^3 内の曲面の共形 Gauss 写像

M を向きづけられた 2 次元多様体とし, $\iota : M \longrightarrow S^3$ を M の S^3 へのはめこみとする. 各 $X \in G$ に対し, $e_{4,X}$ は $t_X(\iota)$ で S^3 の接空間に直交する M に沿う滑らかなベクトル場で, $e_{4,X} \in L^+$ および $\langle e_{4,X}, t_X(\iota)\rangle = -1$ を満たすとする. また $e_{3,X}$ は $t_X \circ \iota : M \longrightarrow S^3$ に関する M の単位法ベクトル場で, 各 $p \in M$ および M の向きを与える $T_p(M)$ の基底 (v_1, v_2) に対し,

$$(t_X(\iota(p)),\ d(t_X \circ \iota)(v_1),\ d(t_X \circ \iota)(v_2),\ e_{3,X}(p),\ e_{4,X}(p))$$

は $\boldsymbol{R}^5$ の向きを与える $T_{t_X(\iota(p))}(\boldsymbol{R}^5)$ の基底であるとする. H_X を $t_X \circ \iota : M \longrightarrow S^3$ に関する M の平均曲率とする. G の単位元 $\mathrm{id} \in G$ に対し, $e_4 := e_{4,\mathrm{id}}$, $e_3 := e_{3,\mathrm{id}}$ および $H := H_{\mathrm{id}}$ とおく. M から 4 次元 de Sitter 空間 $S^4_1 := \{x \in \boldsymbol{R}^5\ ;\ \langle x, x\rangle = 1\}$ への滑らかな写像 $\gamma_{\iota,X} : M \longrightarrow S^4_1$ を

$$\gamma_{\iota,X} := e_{3,X} + H_X t_X \circ \iota$$

で定義する. $\gamma_\iota := \gamma_{\iota,\mathrm{id}}$ とおくと, $\gamma_{\iota,X} = \gamma_{t_X \circ \iota}$ が成り立つ. $\mathrm{Reg}(M,\iota)$ を ι に関する M の全ての非臍点からなる集合とする. p を $\mathrm{Reg}(M,\iota)$ の元とし, U_p を $\mathrm{Reg}(M,\iota)$ における p の近傍とする. (u,v) は U_p 上の局所座標で, $\partial/\partial u$ および $\partial/\partial v$ は ι に関する主方向に含まれるとする. k_1, k_2 をそれぞれ $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ に対応する主曲率とする. $k_1 > k_2$ を仮定する. このとき, 次が成り立つ:

$$d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -k_1 d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + H d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + H_u \iota = -\frac{k_1 - k_2}{2} d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + H_u \iota, \tag{4.2}$$

$$d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = -k_2 d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + H d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + H_v \iota = \frac{k_1 - k_2}{2} d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + H_v \iota. \tag{4.3}$$

g を ι によって導かれた計量とし, K を g に関する M の曲率とする. このとき $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}(M,\iota)}$ は計量 $\tilde{g}$ を導き, $\tilde{g}$ は $\tilde{g} = \varepsilon^2 g$ と表される, 但し

$$\varepsilon := \frac{k_1 - k_2}{2} = \sqrt{H^2 - K + 1} \tag{4.4}$$

である. よって次を得る:

命題 4.2 $\gamma_\iota|_{\mathrm{Reg}(M,\iota)}$ が導く計量 $\tilde{g}$ は ι が導く計量 g と共形的であり, $\tilde{g} = \varepsilon^2 g$ が成り立つ.

p が ι に関する M の臍点であるとき, p の近傍上の局所座標 (u, v) に対し, $(d\gamma_\iota)_p(\partial/\partial u)$ および $(d\gamma_\iota)_p(\partial/\partial v)$ は光的ベクトルである. 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S^4_1$ をはめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ の共形 Gauss 写像 (*conformal Gauss map*) と呼ぶ.

注意 $\iota_0 : M \longrightarrow E^n$ を M の E^n へのはめこみとする ($n \geqq 3$). g_0 を ι_0 によって導かれた M 上の計量とする. K_0, dA_0 をそれぞれ g_0 に関する M の Gauss 曲率および面積要素とし, H_0 を ι_0 に関する M の平均曲率ベクトルとする. 定理 1.3 の証明において見たように, $(|H_0|^2 - K_0)dA_0$ は E^n の共形変換によって不変である. 以下においては, $n = 3$ とし, H_0 を ι_0 に関する M の平均曲率とする. p_0 を S^3 の 1 点とし, $\pi : S^3 \setminus \{p_0\} \longrightarrow E^3$ を p_0 からの立体射影とする. このとき π は E^4 のある反転の $S^3 \setminus \{p_0\}$ への制限である. $\pi \circ \iota = \iota_0$ を満たすはめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に対し, H を ι に関する M の平均曲率とする. このとき ι と S^3 の自然なうめこみ $\mathrm{id} : S^3 \longrightarrow E^4$ の合成 $\mathrm{id} \circ \iota : M \longrightarrow E^4$ に関する M の平均曲率ベクトルの長さは $\sqrt{H^2 + 1}$ で与えられるので, $\varepsilon^2 dA = \varepsilon_0^2 dA_0$ を得る, 但し dA は g に関する M の面積要素であり, $\varepsilon_0 := \sqrt{H_0^2 - K_0}$ である. π は共形的であるので, $\tilde{g}$ は g_0 と共形的であり, $\tilde{g} = \varepsilon^2 g = \varepsilon_0^2 g_0$ が成り立つ. M がトーラスと同相でありかつ ι_0 に関する臍点を持たない場合には, $\tilde{g}$ に関する M の面積は ι_0 に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota_0)$ に等しい.

以下においては, $\mathrm{Reg}(M, \iota) = M$ を仮定する. このとき任意の $X \in G$ に対し $\mathrm{Reg}(M, t_X \circ \iota) = M$ が成り立ち, 従って $\gamma_{\iota,X} : M \longrightarrow S^4_1$ は共形はめこみである. $\varepsilon^2 dA$ は S^3 の共形変換によって不変であるので, $\gamma_{\iota,X}$ によって導かれる計量は $X \in G$ に依存しないことがわかる. さらに次が成り立つ:

命題 4.3 任意の $X \in G$ に対し, $\gamma_{\iota,X} = X \circ \gamma_\iota$.

証明　各 $X \in G$ に対し, M に沿う滑らかなベクトル場 $X(e_3)_+$ および M 上の滑らかな関数 a_X が存在して

$$X(e_3) = X(e_3)_+ + a_X X(\iota), \qquad X(e_3)_+ \in S^4_1 \cap \left\{x^{(0)} = 0\right\}$$

が成り立つ. よって

$$X(\gamma_\iota) = X(e_3) + HX(\iota) = X(e_3)_+ + (a_X + H)X(\iota)$$

を得る. $e_- := (-1, 0, 0, 0, 0)$, $b_X := \langle e_-, X(\iota) \rangle$ とおく. このとき $X(\iota) = b_X t_X(\iota)$ が成り立つ. (4.1) から $e_{3,X} = X(e_3)_+$ がわかるので,

$$X(\gamma_\iota) = e_{3,X} + (a_X + H)b_X t_X(\iota) \tag{4.5}$$

を得る. F は M から S_1^4 への共形写像で, M 上のある滑らかな関数 f に対し $F = e_{3,X} + ft_X \circ \iota$ が成り立つとする. このとき (4.2), (4.3) を参考にして $dF(\partial/\partial u)$ および $dF(\partial/\partial v)$ を計算することによって, $f \equiv H_X$ を得る. よって F は恒等的に $\gamma_{\iota,X}$ に等しい. 特に, (4.5) に注意して, $\gamma_{\iota,X} = X \circ \gamma_\iota$ および $H_X = (a_X + H)b_X$ を得る. □

4.3 S_1^4 内の極小曲面と S^3 内の Willmore 曲面

M 上の $\boldsymbol{R}^5$-値関数 ν を次のように定義する:

$$\nu := \frac{1}{2}\left(\frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} + \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2} + H^2\right)\iota - \frac{H_u}{A^2\varepsilon}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_v}{B^2\varepsilon}d\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + He_3 + e_4, \tag{4.6}$$

但し (u, v) は M の開集合 U 上の局所座標であり, $\partial/\partial u$ および $\partial/\partial v$ ははめこみ $\iota : M \longrightarrow S^3$ に関する主方向に含まれるものとし, また

$$A := \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right)}, \qquad B := \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}$$

とおく. このときまず ν は L^+-値関数である, つまり ν は L^+ に値をとることがわかる. また直接の計算によって, $\langle \nu, \iota \rangle = -1$ がわかる. また ι, ν の各々は γ_ι, $d\gamma_\iota(\partial/\partial u)$, $d\gamma_\iota(\partial/\partial v)$ の各々と直交しているので, ι, ν は $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する M の法ベクトル場である. 法ベクトル場 ι, ν の各々について, M の γ_ι に関する型作用素のトレースを求めたい. (4.2) および (4.3) から,

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial u}\iota = -\frac{1}{\varepsilon}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_u}{\varepsilon}\iota, \qquad \overline{\nabla}_{\partial/\partial v}\iota = \frac{1}{\varepsilon}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{H_v}{\varepsilon}\iota$$

を得る, 但し $\overline{\nabla}$ は $(\boldsymbol{R}^5, \langle\ ,\ \rangle)$ の Levi-Civita 接続である. よって次を得る:

補題 4.4 M の $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する法ベクトル場 ι についての型作用素のトレースは零である.

ν は

$$\nu = \frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right)\iota + He_3 + e_4$$

と表され, また ι を $\left(1, \iota^{(1)}, \iota^{(2)}, \iota^{(3)}, \iota^{(4)}\right)$ と表すと

$$e_4 = -\frac{1}{2}\left(-1, \iota^{(1)}, \iota^{(2)}, \iota^{(3)}, \iota^{(4)}\right)$$

が成り立つ. これらに注意すると,

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial u}\nu := c_{11}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + c_{12}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + c_{13}\iota + c_{14}\nu + c_{10}\gamma_\iota$$

とおくとき,

$$\begin{aligned} c_{11} = \frac{H_{uu}}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}(\log A\varepsilon)_u + \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}(\log A\varepsilon)_v \\ + \frac{Hk_1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

がわかる. 同様に

$$\overline{\nabla}_{\partial/\partial v}\nu := c_{21}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + c_{22}d\gamma_\iota\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) + c_{23}\iota + c_{24}\nu + c_{20}\gamma_\iota$$

とおくとき,

$$\begin{aligned} c_{22} = \frac{H_{vv}}{B^2\varepsilon^2} - \frac{H_v}{B^2\varepsilon^2}(\log B\varepsilon)_v + \frac{H_u}{A^2\varepsilon^2}(\log B\varepsilon)_u \\ - \frac{Hk_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\left(H^2 - \frac{H_u^2}{A^2\varepsilon^2} - \frac{H_v^2}{B^2\varepsilon^2}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

がわかる. (4.7) および (4.8) から, 次を得る:

補題 4.5 M の $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する法ベクトル場 ν についての型作用素のトレースは $-\big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)$ に等しい, 但し $\tilde{\Delta}$ は $\tilde{g}$ に関する M 上の *Laplacian* である.

$\tilde{h}$ を $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する M の第二基本形式とする. このとき M の 1 点での二つの接ベクトル v_1, v_2 および γ_ι に関する M の法ベクトル ξ に対し,

$$\tilde{g}\big(\tilde{A}_\xi(v_1), v_2\big) = \big\langle \tilde{h}(v_1, v_2), \xi \big\rangle \tag{4.9}$$

が成り立つ, 但し $\tilde{A}_\xi$ は ξ についての M の型作用素である. よって補題 4.4, 補題 4.5, $\langle \nu, \iota \rangle = -1$ および (4.9) を用いて,

$$\frac{1}{A^2\varepsilon^2}\tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{1}{B^2\varepsilon^2}\tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)\iota \tag{4.10}$$

を得る. (4.10) から, $\big(\tilde{\Delta}H + 2H\big)\iota$ は $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ に関する M の平均曲率ベクトル $\tilde{H}$ の 2 倍に等しいことがわかる. Δ を g に関する M 上の Laplacian とすると, (4.4) から $\big(H^2 - K + 1\big)\tilde{\Delta} = \Delta$ がわかる. よって Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式に注意して, 次の定理を得る:

定理 4.6 ([11]) $\mathrm{Reg}(M, \iota) = M$ を仮定する. このとき共形 *Gauss* 写像 $\gamma_\iota : M \longrightarrow S_1^4$ が極小はめこみであることと, $\iota : M \longrightarrow S^3$ が *Willmore* であることは同値である.

注意 $\tilde{H}$ は光的ベクトルである.

参考 [3] において, 筆者は次のことを示した: M を向きづけられた 2 次元多様体とし, また $\iota : M \longrightarrow S^3$ は Willmore はめこみで M は ι に関する臍点を持たないとするとき,

$\iota(M)$ の立体射影による像が E^3 内のある極小曲面と E^3 の共形変換によってうつりあうことと ι の共形 Gauss 写像 γ_ι によって導かれた計量に関する M の曲率が恒等的に 1 に等しいことは同値である.

5 Dirac 作用素を用いた曲面の考察

5.1 一般の曲面に対する Taimanov の表現公式

O を複素平面 $\boldsymbol{C}$ の単連結な領域とし, U を O 上の滑らかな実数値関数とする. そして

$$\partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

および

$$D_U := \begin{pmatrix} U & \partial \\ -\overline{\partial} & U \end{pmatrix}$$

とおく. $\Psi := {}^t(\psi_1, \psi_2)$ は O 上の滑らかな $\boldsymbol{C}^2$-値関数で, Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ (但し

$$D_U\Psi = \begin{pmatrix} U & \partial \\ -\overline{\partial} & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\psi_1 + \partial\psi_2 \\ -\overline{\partial}\psi_1 + U\psi_2 \end{pmatrix}$$

である) の解であるとする.

命題 5.1 O 上の 1 形式

$$\omega_1 := \mathrm{Re}\big(\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\overline{z}\big), \quad \omega_2 := \mathrm{Im}\big(\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\overline{z}\big), \quad \omega_3 := \psi_1\overline{\psi}_2 dz + \overline{\psi}_1\psi_2 d\overline{z}$$

は閉である.

証明　次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
2d\omega_1 &= \big\{\partial\big(\overline{\psi}_1^2 - \psi_2^2\big) - \overline{\partial}\big(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\big)\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 2\big\{\overline{\psi}_1\partial\overline{\psi}_1 - \psi_2\partial\psi_2 - \psi_1\overline{\partial}\psi_1 + \overline{\psi}_2\overline{\partial\psi_2}\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 2\big\{\overline{\psi}_1 \times \overline{U\psi}_2 - \psi_2 \times (-U\psi_1) - \psi_1 \times U\psi_2 + \overline{\psi}_2 \times \big(-\overline{U\psi_1}\big)\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって ω_1 は閉である. 同様に ω_2 も閉であることがわかる. ω_3 が閉であることは $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ および U が実数値関数であることを用いて示される. □

注意 U が複素数値関数でありしかし実数値関数であるとは限らない場合, ω_1, ω_2 はやはり閉であるが, ω_3 は閉であるとは限らない.

O は単連結であるので, 命題 5.1 および Poincaré の補題から ω_k は O 上の完全形式であることがわかる: O の固定された 1 点 z_0 および O の各点 z に対し C を O 内で z と

z_0 を結ぶ曲線とし C の向きを z が終点であるものとするとき, ω_k の C に沿う線積分の値は終点 z にのみ依存し C の選び方には依らない. そこで

$$\iota_k(z,\overline{z}) := \int_C \omega_k, \qquad \iota(z,\overline{z}) := (\iota_1(z,\overline{z}),\ \iota_2(z,\overline{z}),\ \iota_3(z,\overline{z}))$$

とおく.

定理 5.2 ([52]) ι は O から E^3 への滑らかな共形写像である. さらに O 上 $\Psi \neq {}^t(0,0)$ が成り立つならば,

(a) ι ははめこみである;

(b) ι が導く計量 g は $g = e^{2\alpha}dzd\overline{z}$ で与えられる, 但し $\alpha := \log\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$ である;

(c) ι に関する平均曲率は $-2Ue^{-\alpha}$ で与えられる.

証明　まず

$$\partial\iota \cdot \partial\iota = \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2 - 2\sqrt{-1}\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y}\right)$$

が成り立つ. 一方 ι の定義から,

$$\partial\iota \cdot \partial\iota = \frac{1}{4}\left(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2\right)^2 + \psi_1^2\overline{\psi}_2^2 = 0$$

を得る. よって ι は共形写像である. また

$$\partial\iota \cdot \overline{\partial}\iota = \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2$$

が成り立ち, 一方 ι の定義から,

$$\partial\iota \cdot \overline{\partial}\iota = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)^2$$

を得る. 以下, O 上で $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を仮定する. このとき ι ははめこみである. $\alpha := \log\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$ とおくと, ι が導く計量は $e^{2\alpha}dzd\overline{z}$ と表されることがわかる. また

$$\partial\iota \times \overline{\partial}\iota = \frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial\iota}{\partial x} \times \frac{\partial\iota}{\partial y}$$

が成り立ち, 一方 ι の定義から,

$$\partial\iota \times \overline{\partial}\iota = -\frac{\sqrt{-1}e^{\alpha}}{2}\left(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$$

を得る. よって

$$\frac{\partial\iota}{\partial x} \times \frac{\partial\iota}{\partial y} = -e^{\alpha}\left(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$$

を得る．よって ι に関する単位法ベクトル場 ν は

$$\nu = -e^{-\alpha}\big(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)$$

で与えられる．ι に関する平均曲率 H は $H=2e^{-2\alpha}\big(\partial\overline{\partial}\iota\big)\cdot\nu$ で与えられるが, ι の定義および $D_U\Psi={}^t(0,0)$ から,

$$\partial\overline{\partial}\iota = U\big(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)$$

がわかるので, $\big(\partial\overline{\partial}\iota\big)\cdot\nu=-Ue^{\alpha}$ を得る．よって $H=-2e^{-\alpha}U$ を得る． □

注意 $U\equiv 0$ とする．このとき Ψ は $\overline{\partial}\psi_1=0$ および $\partial\psi_2=0$ を満たす．よって ψ_1 および $\overline{\psi_2}$ は z の正則関数である．O 上の関数 f, g を $f:=-\overline{\psi_2}^2$, $g:=-\psi_1/\overline{\psi_2}$ とおくと, ι は極小曲面に対する Enneper-Weierstrass の表現公式

$$\iota(z)=\mathrm{Re}\left(\int_C f\big(1-g^2\big)dz,\quad \sqrt{-1}\int_C f\big(1+g^2\big)dz,\quad 2\int_C fg dz\right)$$

の形態で表される．よって定理 5.2 は極小曲面に対する Enneper-Weierstrass の表現公式の一般化である．

定理 5.3 ([52]) $\iota : O \longrightarrow E^3$ を共形的なはめこみとする．ι が導く計量 g を $g=e^{2\alpha}dzd\overline{z}$ とし, ι に関する平均曲率を H とする．このとき $U:=-He^{\alpha}/2$ に対し, *Dirac* 方程式 $D_U\Psi={}^t(0,0)$ および $\Psi\neq{}^t(0,0)$ を満たす O 上の滑らかな $\boldsymbol{C}^2$-値関数 Ψ が存在して, 対応する O から E^3 への写像が ι と E^3 の平行移動との合成と表される．

証明　ι は共形的なので, $\partial\iota\cdot\partial\iota=0$ を得る．$\iota:=(\iota_1,\iota_2,\iota_3)$ とおくと, $\partial\iota\cdot\partial\iota=0$ は

$$(\partial\iota_1)^2+(\partial\iota_2)^2+(\partial\iota_3)^2=0 \tag{5.1}$$

と同値である．$F:=\iota_1+\sqrt{-1}\iota_2$ とおく．このとき O の点 p で, $\big(\partial F,\overline{\partial}F\big)=(0,0)$ が成り立つことと $(\partial\iota_1,\partial\iota_2)=(0,0)$ が成り立つことは同値である．$(\partial\iota_1,\partial\iota_2)=(0,0)$ が成り立つならば ι ははめこみではない．よって O 上 $\big(\partial F,\overline{\partial}F\big)\neq(0,0)$ が成り立つ．(5.1) から, $(\partial F)\big(\partial\overline{F}\big)=-(\partial\iota_3)^2$ がわかる．よって $\partial\iota_3\neq 0$ が成り立つ点の近傍上 $\psi_1^2=\partial F$ および $\psi_2^2=-\overline{\partial}F$ を満たす 1 価複素数値関数 ψ_1, ψ_2 が存在する．さらに, $\partial\iota_3=0$ が成り立つ点 p の近傍上においても, このような ψ_1, ψ_2 は存在する: 仮に p で $\partial F=0$ が成り立つとすると p で $\overline{\partial}F\neq 0$ が成り立つので, p のある近傍上 $\partial F=-(\partial\iota_3)^2/\partial\overline{F}$ が成り立ちよって上のような ψ_1, ψ_2 が存在する．O は単連結であるので, O 上 1 価な $\boldsymbol{C}^2$-値関数 $\Psi:={}^t(\psi_1,\psi_2)$ で $\Psi\neq{}^t(0,0)$, $\psi_1^2=\partial F$ および $\psi_2^2=-\overline{\partial}F$ を満たすものが存在することがわかる．Ψ に対し ω_k を命題 5.1 の中でのように定義するとき, ω_k を線積分することに

よって得られる写像は予め与えられている ι と E^3 のある平行移動の合成に等しい: はめこみ ι に対し,

$$\partial\iota_1 = \frac{1}{2}\big(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\big), \qquad \partial\iota_2 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\big(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2\big) \tag{5.2}$$

が成り立つので, ι_1 と

$$\int_C \omega_1 = \mathrm{Re}\int_C \big(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\big)dz$$

の差および ι_2 と

$$\int_C \omega_2 = \mathrm{Im}\int_C \big(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2\big)dz$$

の差は終点 z によらないことがわかる; また ι_3 については, $(\partial\iota_3)^2 = \psi_1^2\overline{\psi}_2^2$ であることから (必要ならば ψ_2 を $-\psi_2$ にとりかえることによって) $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ を得るので, ι_3 と

$$\int_C \omega_3 = 2\mathrm{Re}\int_C \psi_1\overline{\psi}_2 dz$$

の差は終点 z によらない. 以上のような Ψ が Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ を満たすことを示したい. まず $\psi_2 \neq 0$ が成り立つ点の近傍で考える. $\psi_2^2 = -\overline{\partial}F$ を用いて, 次を得る:

$$\partial\psi_2 = -\frac{\partial\overline{\partial}\iota_1 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\iota_2}{2\psi_2}. \tag{5.3}$$

また

$$\begin{aligned}
U\psi_1 &= -\frac{He^{\alpha}}{2}\psi_1 \\
&= -e^{-\alpha}\psi_1\big(\partial\overline{\partial}\iota\big)\cdot\nu \\
&= e^{-2\alpha}\psi_1\big(\partial\overline{\partial}\iota_1,\ \partial\overline{\partial}\iota_2,\ \partial\overline{\partial}\iota_3\big)\cdot\big(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\big\{2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + 2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_2 \\
&\qquad\qquad + \psi_1\psi_2\big(-|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)\partial\overline{\partial}\iota_3\big\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

が成り立つ. ここで (5.1) から

$$(\partial\iota_3)\partial\overline{\partial}\iota_3 = -(\partial\iota_1)\partial\overline{\partial}\iota_1 - (\partial\iota_2)\partial\overline{\partial}\iota_2$$

がわかるが, (5.2) および $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ に注意して,

$$\psi_1\overline{\psi}_2\partial\overline{\partial}\iota_3 = -\frac{1}{2}\big(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\big)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}\big(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2\big)\partial\overline{\partial}\iota_2 \tag{5.5}$$

を得る. (5.4) の右辺第 3 項に (5.5) を代入すると,

$$\begin{aligned}
U\psi_1 &= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + 2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_2 \\
&\qquad + \psi_1^2\Big(\frac{1}{2}(\overline{\psi}_1^2 - \psi_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\overline{\psi}_1^2 + \psi_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big) \\
&\qquad + \psi_2^2\Big(-\frac{1}{2}(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big)\Big\} \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{\Big(2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2) + \frac{1}{2}|\psi_1|^4 - \psi_1^2\psi_2^2 + \frac{1}{2}|\psi_2|^4\Big)\partial\overline{\partial}\iota_1 \\
&\qquad + \Big(2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2) + \frac{\sqrt{-1}}{2}|\psi_1|^4 + \sqrt{-1}\psi_1^2\psi_2^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}|\psi_2|^4\Big)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big\} \\
&= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{\frac{1}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\partial\overline{\partial}\iota_2\Big\} \\
&= \frac{1}{2\psi_2}\big(\partial\overline{\partial}\iota_1 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\iota_2\big) \\
&= -\partial\psi_2
\end{aligned}$$

を得る, 但し最後の等式は (5.3) による. $\psi_2 = 0$ が成り立つ点 p の近傍でも $U\psi_1 = -\partial\psi_2$ を示すことができる: (5.4) に注意すると p で $U\psi_1 = -\partial\overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ が成り立ち, 一方 p の近傍上で $\psi_2 = \overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ が成り立つので p で $\partial\psi_2 = \partial\overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ を得る. 以上と同じやり方で, $\overline{\partial}\psi_1 = U\psi_2$ を得る. □

系 5.4 Λ を $\boldsymbol{C}$ の格子とし, $\iota : \boldsymbol{C}/\Lambda \longrightarrow E^3$ を共形的なはめこみとする. このとき ι に対する *Willmore* 汎関数の値は ι に対して定理 *5.3* の中でのように定まる *Dirac* 作用素のポテンシャル U の L^2 ノルムの 2 乗の 4 倍に等しい.

証明　ι が導く計量を $g = e^{2\alpha}dzd\bar{z}$ と表すと, g に関する面積要素は $dA = e^{2\alpha}dx \wedge dy$ で与えられる. また ι に関する平均曲率を H とするとき $U := -He^{\alpha}/2$ とおくと, ι に対する Willmore 汎関数の値は

$$\mathcal{W}(\iota) = \int_{\mathbf{C}/\Lambda} H^2 dA = 4\int_{\mathbf{C}/\Lambda} U^2 dxdy$$

と表される. よって ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ は Dirac 作用素 D_U のポテンシャル U の L^2 ノルムの 2 乗の 4 倍に等しい. □

系 5.5 Λ, ι および U を系 *5.4* の中でのようなものとし, Ψ は $\boldsymbol{C}$ 上 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を満たす滑らかな $\boldsymbol{C}^2$-値関数で, 対応する $\boldsymbol{C}$ から E^3 への写像が ι と E^3

の平行移動との合成と表されるようなものとする．このとき任意の $z \in \boldsymbol{C}$ および任意の $\gamma \in \Lambda$ に対し $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ, 但し $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \{1, -1\}$ は Λ から 2 元 $1, -1$ からなる群 $\{1, -1\}$ への準同型写像である ($\gamma, \gamma' \in \Lambda$ に対し $\varepsilon(\gamma)\varepsilon(\gamma') = \varepsilon(\gamma+\gamma')$ が成り立つ).

証明　ι_k は Λ に関して周期的であり, そして ψ_1, ψ_2 は (5.2) および $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ を満たすことに注意して, 系 5.5 を得る. □

系 5.6 Λ を $\boldsymbol{C}$ の格子とする. U は $\boldsymbol{C}$ 上の滑らかな実数値関数で, Λ に関して周期的であるとする. Ψ は $\boldsymbol{C}$ 上滑らかな $\boldsymbol{C}^2$-値関数で $D_U\Psi = {}^t(0,0)$, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を満たし, さらに任意の $z \in \boldsymbol{C}$ および任意の $\gamma \in \Lambda$ に対し $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つとする, 但し ε は Λ から $\{1, -1\}$ への準同型写像である．このとき Ψ および U から構成される $\boldsymbol{C}$ から E^3 への写像 ι が $\boldsymbol{C}/\Lambda$ から E^3 への写像として *well-defined* であることは, Λ に関して同値な 2 点を端点とする曲線 C に沿う ω_k の線積分が 0 になることと同値である.

5.2　回転トーラスの mKdV 変形

[51] を参考にして, E^3 内の回転面に対し定理 5.3 の中でのように定まるポテンシャル U および Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ の解 $\Psi \neq {}^t(0,0)$ について考察したい.

E^3 内の回転面は次のような写像による像と合同である:

$$\iota(x, y) := (f(y)\cos x,\ f(y)\sin x,\ g(y)),$$

但し f, g は開区間 $I \subset \mathbf{R}$ 上の滑らかな関数で, $f > 0$ および $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ を満たすとする．直ちに

$$\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial x} = f^2, \qquad \frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\iota}{\partial y}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y} = (f')^2 + (g')^2$$

がわかる．$\tilde{y}$ は $y \in I$ の関数で, $d\tilde{y}/dy = \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\big/f$ を満たすとする．このとき $(x, \tilde{y})$ は ι による像の局所座標であり,

$$\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial x} = \frac{\partial\iota}{\partial\tilde{y}}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial\tilde{y}} = f^2$$

が成り立つ. 以下, 座標 $(x, \tilde{y})$ を (x, y) で表す．こうして ι は共形的なはめこみとみなされる．$z := x + \sqrt{-1}y$ とおく．関数 f, g の微分は取り直した変数 y に関するものであるとする．このとき $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ が成り立つ．ι に関する単位法ベクトル場 ν は

$$\nu(x, y) = \frac{1}{f(y)}(g'(y)\cos x,\ g'(y)\sin x,\ -f'(y))$$

で与えられる. ι に関する平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2f^2}\left(\frac{\partial^2\iota}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\iota}{\partial y^2}\right)\cdot\nu$$

で与えられるので,

$$H(x,y) = -\frac{f'(y)g''(y) + g'(y)(f(y) - f''(y))}{2f(y)^3}$$

がわかる (x に依らない). よってポテンシャル $U = -Hf/2$ は

$$U(x,y) = \frac{f'(y)g''(y) + g'(y)(f(y) - f''(y))}{4f(y)^2} \tag{5.6}$$

と表される (x に依らない). 定理 5.3 の証明の中でのように, ι の第 1 成分と第 2 成分を用いて関数 F を $F(x,y) := e^{\sqrt{-1}x}f(y)$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} \partial F(x,y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(f(y) - f'(y)), \\ \overline{\partial}F(x,y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(f(y) + f'(y)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

を得る. よって ∂F と $\overline{\partial}F$ が同時に 0 になることはない. $\partial F = 0$ が成り立つ点はちょうど $f = f'$ が成り立つ点であり, そしてこのような点の近傍では ∂F は

$$\partial F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\frac{g'(y)^2}{f(y) + f'(y)}$$

と表される. 同様に $\overline{\partial}F = 0$ が成り立つ点はちょうど $f = -f'$ が成り立つ点であり, そしてこのような点の近傍では $\overline{\partial}F$ は

$$\overline{\partial}F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\frac{g'(y)^2}{f(y) - f'(y)}$$

と表される. よって x, y の滑らかな複素数値関数 ψ_1, ψ_2 で

$$\psi_1^2 = \partial F, \qquad \psi_2^2 = -\overline{\partial}F, \qquad \psi_1\overline{\psi}_2 = \frac{g'}{2\sqrt{-1}}\ (= \partial g)$$

を満たすものが存在し, この条件を満たす滑らかな関数の組は (ψ_1, ψ_2) と $(-\psi_1, -\psi_2)$ のみである. ∂F と $\overline{\partial}F$ が同時に 0 になることはないので, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ がわかり, また $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ に注意して $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ を示すことができる.

以下においては, f, g は $\boldsymbol{R}$ 上定義されているとする. このとき ι は $\boldsymbol{C}$ から E^3 への共形的なはめこみである. さらに f, g は周期的であり, 周期 $l > 0$ を共有するとする. $\boldsymbol{C}$ の格子 Λ を 2π, $\sqrt{-1}l$ によって生成されるものとすると, ι は $\boldsymbol{C}/\Lambda$ から E^3 への共形的なはめこみとみなされる. (5.6) から, U は周期 l を持つ周期関数であることがわかる. Ψ は Λ に関す

る周期関数ではない: まず $\gamma := 2\pi$ および任意の $z \in \boldsymbol{C}$ に対し, $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = -\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ; さらに ι がうめこみである場合, $\gamma := \sqrt{-1}l$ および任意の $z \in \boldsymbol{C}$ に対し, $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = -\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ. 準同型写像 $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \{1, -1\}$ が存在して, 任意の $\gamma \in \Lambda$ および任意の $z \in \boldsymbol{C}$ に対し $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ.

例 f や g として次のようなものをとる:

$$f(y) := R + r\cos\phi(y), \qquad g(y) := r\sin\phi(y), \tag{5.8}$$

但し $R > r > 0$ でありまた ϕ は $\boldsymbol{R}$ 上の滑らかな単調増加関数で任意の $y \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$\phi'(y) = \frac{R + r\cos\phi(y)}{r} \tag{5.9}$$

および $\phi(y+l) = \phi(y) + 2\pi$ を満たすものである (条件 (5.9) は f と g が $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ を満たすためのものである). f, g に対応する共形的なはめこみ ι による $\boldsymbol{C}$ の像は, xz-平面上の中心が $(R, 0)$, 半径が r である円を z-軸の周りの回転によって動かして得られる回転トーラスである (特に $R/r = \sqrt{2}$ である場合に現れる回転トーラスは S^3 内の Clifford トーラスの立体射影による像と E^3 の共形変換によってうつりあう). (5.6) に (5.8) を代入して (5.9) に注意することによって,

$$U(y) = \frac{R + 2r\cos\phi(y)}{4r} \tag{5.10}$$

を得る. また (5.7) に (5.8) を代入して,

$$\begin{aligned} \partial F(x, y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(R + r\cos\phi(y))(1 + \sin\phi(y)), \\ \overline{\partial}F(x, y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(R + r\cos\phi(y))(1 - \sin\phi(y)) \end{aligned} \tag{5.11}$$

を得る. ここで注意したいことは, 例えば $\psi_1^2 = \partial F$ を満たす滑らかな複素数値関数 ψ_1 を得たいならば, (5.11) における ∂F についての式の右辺の平方根をただ考えても駄目 (ψ_1 の滑らかさについての考慮が必要) であるということで, この式の右辺の因数の一つである $1 + \sin\phi(y)$ をこの零点 (例えば $\phi = -\pi/2$ が成り立つ点) の付近で $\cos^2\phi(y)\big/(1 - \sin\phi(y))$ と表せるので, ψ_1 としてはこうした点の付近では

$$\psi_1(x, y) = \pm\frac{e^{\sqrt{-1}(x/2+\pi/4)}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R + r\cos\phi(y)}{1 - \sin\phi(y)}}\ \cos\phi(y)$$

と表されるものを採用しなければならない (従って $\psi_1(x, y+l) = -\psi_1(x, y)$ が成り立つ). ψ_2 についても同様である. 最後に ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ を求めたい.

系 5.4 によると, (5.10) において与えられている U の 2 乗 U^2 を $\boldsymbol{C}/\Lambda$ 上積分して得られる値を 4 倍することによって $\mathcal{W}(\iota)$ を求めることができる. (5.9) に注意して,

$$\begin{aligned}4\int_{\mathbf{C}/\Lambda} U^2 dxdy &= \frac{\pi}{2r^2}\int_0^l (R+2r\cos\phi(y))^2 dy \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\int_0^l dy \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{(R/r)+\cos\phi} \\ &= \frac{(R/r)^2\pi^2}{\sqrt{(R/r)^2-1}}\end{aligned} \tag{5.12}$$

を得る. 第 1 章において (1.3) を考察したときと同様に, (5.12) の最右辺は $R/r=\sqrt{2}$ のときに最小値 $2\pi^2$ をとる.

f, g は周期 $l>0$ を持つ周期的な 1 変数関数で $f>0$ および $f^2=(f')^2+(g')^2$ を満たすとし, U は (5.6) の中でのように与えられた 1 変数 y の関数であるとする. 2 変数 y,t の関数 u は y に関して周期 l を持ち, $u(y,0)=4U(y)$ および mKdV 方程式 (*modified Korteweg-deVries equation*)

$$u_t = u_{yyy}+\frac{3}{2}u^2u_y \tag{5.13}$$

を満たすとする. ここで

$$A := \frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -u\\ u & 1\end{pmatrix}, \qquad B := \frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-u^2-2 & B_{12}\\ B_{21} & u^2+2\end{pmatrix}$$

とおく, 但し

$$B_{12} := -2u_{yy}+2u_y-u^3-2u, \qquad B_{21} := 2u_{yy}+2u_y+u^3+2u$$

である. このとき優決定系 (過剰決定系, over-determined system)

$$A\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.14}$$

の整合条件 (compatibility condition) は A と B の交換子積 $[A,B]$ が恒等的に零行列 O であることと表現され, $[A,B]=O$ は u が mKdV 方程式 (5.13) を満たすことと同値である. ϕ_{10}, ϕ_{20} は 1 変数 y の滑らかな関数で,

$$\phi_{10}^2=f-f', \qquad \phi_{20}^2=f+f', \qquad \phi_{10}\phi_{20}=-g'$$

を満たすとする. このとき $D_U\Psi={}^t(0,0)$ から, $\Phi_0:={}^t(\phi_{10},\phi_{20})$ は $A(y,0)\Phi_0={}^t(0,0)$ を満たすことがわかる. u は mKdV 方程式を満たすので, (5.14) の解 $\Phi:={}^t(\phi_1,\phi_2)$ で

$\phi_i(y,0)=\phi_{i0}(y)$ を満たすものが唯一つ存在する．$\tilde{f}:=(1/2)(\phi_1^2+\phi_2^2)$ とおく．このとき $A\Phi={}^t(0,0)$ を用いて，

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}=\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial y}+\phi_2\frac{\partial\phi_2}{\partial y}=\frac{1}{2}(\phi_2^2-\phi_1^2) \tag{5.15}$$

を得る．$\tilde{g}$ は y, t の滑らかな関数で，$\partial\tilde{g}/\partial y=-\phi_1\phi_2$ を満たすとする．$\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ は x, y, t の滑らかな複素数値関数で，

$$\tilde{\psi}_1(x,y,t)^2=\frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\left(\tilde{f}(y,t)-\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(y,t)\right),$$
$$\tilde{\psi}_2(x,y,t)^2=-\frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\left(\tilde{f}(y,t)+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(y,t)\right)$$

および

$$\tilde{\psi}_1(x,y,t)\overline{\tilde{\psi}_2(x,y,t)}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y}(y,t)$$

を満たすとする．このとき $\tilde{U}:=u/4$ に対し，$\tilde{\Psi}:={}^t\big(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2\big)$ は $D_{\tilde{U}}\tilde{\Psi}={}^t(0,0)$ を満たす．よって定理 5.2 から，0 を含む十分小さい開区間 I が存在して各 $t\in I$ に対し $\tilde{U}$, $\tilde{\Psi}$ は曲面を与えることがわかる．ここで

$$\tilde{\imath}(x,y,t):=\big(\tilde{f}(y,t)\cos x,\ \tilde{f}(y,t)\sin x,\ \tilde{g}(y,t)\big)$$

および $\tilde{\imath}_t(x,y):=\tilde{\imath}(x,y,t)$ とおくと，$\tilde{\imath}_t$ が与える回転面に対応する Dirac 作用素のポテンシャルは $\tilde{U}$ に等しいことが，(5.6) および $A\Phi={}^t(0,0)$ を用いてわかる．$\tilde{F}(x,y,t):=e^{\sqrt{-1}x}\tilde{f}(y,t)$ とおくと，$\tilde{\psi}_1^2=\partial\tilde{F}$ および $\tilde{\psi}_2^2=-\overline{\partial}\tilde{F}$ が成り立つので，定理 5.3 の証明と同様の議論をすることで，各 $t\in I$ に対して $\tilde{U}$, $\tilde{\Psi}$ が定める曲面は写像 $\tilde{\imath}_t$ と E^3 の平行移動との合成による像に含まれることがわかる．こうして得られる回転面の族を f, g が定める回転トーラスの mKdV 変形 (*mKdV deformation*) という．

定理 5.7 ([51]) 回転トーラスの *mKdV* 変形は互いに共形同値な回転トーラスからなる．

証明　$\tilde{\psi}_{i,t}(x,y):=\tilde{\psi}_i(x,y,t)$ とおき，

$$\tilde{\omega}_{1,t}:=\mathrm{Re}\big(\tilde{\psi}_{1,t}^2dz-\tilde{\psi}_{2,t}^2d\overline{z}\big),\qquad \tilde{\omega}_{2,t}:=\mathrm{Im}\big(\tilde{\psi}_{1,t}^2dz-\tilde{\psi}_{2,t}^2d\overline{z}\big),$$
$$\tilde{\omega}_{3,t}:=\tilde{\psi}_{1,t}\overline{\tilde{\psi}_{2,t}}dz+\overline{\tilde{\psi}_{1,t}}\tilde{\psi}_{2,t}d\overline{z}$$

とおく．また

$$C:=\left\{z=x+\sqrt{-1}y\ \middle|\ 0\leqq y\leqq l\right\}$$

とおき，C の向きを定めておく．定理 5.7 を証明するためには，$k=1,2,3$ に対し

$$\int_C\tilde{\omega}_{k,t}=0 \tag{5.16}$$

を示せばよい. $k=1,2$ に対する (5.16) は

$$\frac{d}{dt}\int_0^l (\phi_1^2-\phi_2^2)dy \equiv 0 \tag{5.17}$$

と同値であるが, (5.15) および $\phi_1^2+\phi_2^2$ が y に関して周期 l を持つことから

$$\int_0^l (\phi_1^2-\phi_2^2)dy = 0$$

がわかるので, (5.17) を得る. また $k=3$ に対する (5.16) は

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \phi_1\phi_2 dy \equiv 0 \tag{5.18}$$

と同値である. そして Φ は (5.14) の解であるので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^l \phi_1\phi_2 dy &= \int_0^l \left(\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l u_y(\phi_1^2+\phi_2^2)dy + \frac{1}{4}\int_0^l (2u_{yy}+u^3+2u)(\phi_1^2-\phi_2^2)dy \\ &= \frac{3}{2}\int_0^l u(\phi_1^2-\phi_2^2)dy \\ &= 3\int_0^l (\phi_1\phi_2)_y dy \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.19}$$

から (5.18) を得る, 但し (5.19) において途中で部分積分および $\phi_1\phi_2$ が y に関して周期 l を持つことを用いる. □

定理 5.8 ([51]) 回転トーラスの *mKdV* 変形に対し, *Willmore* 汎関数は一定値を取る.

証明　系 5.4 から, 定理 5.8 を証明するためには

$$\frac{d}{dt}\int_0^l u^2 dy \equiv 0 \tag{5.20}$$

を示せばよいことがわかる. u は mKdV 方程式を満たすので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2 dy &= 2\int_0^l uu_t dy \\ &= 2\int_0^l uu_{yyy}dy + 3\int_0^l u^3u_y dy \\ &= \int_0^l \left(2uu_{yy}-u_y^2+\frac{3}{4}u^4\right)_y dy \\ &= 0\end{aligned}$$

から (5.20) を得る. □

参考文献

[1] F. J. Almgren, Jr., Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, Ann. of Math. **84** (1966) 277–292.

[2] N. Ando, An isolated umbilical point of a Willmore surface, Osaka J. Math. **41** (2004) 865–876.

[3] N. Ando, Willmore surfaces in S^3 and minimal surfaces in S^4_1, Kumamoto J. Math. **18** (2005) 57–68.

[4] N. Ando, Hartman-Wintner's theorem and its applications, preprint.

[5] 安藤直也, Willmore 曲面, S^3 の極小曲面および $\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面, 京都大学数理解析研究所講究録 1403 「部分多様体論とその周辺領域における新しい研究対象と方法」(2004) 54–76.

[6] 安藤直也, 谷口哲也, Willmore 予想およびその書き換え ～ E^3 にはめこまれたトーラス上の Dirac 作用素およびその複素 Fermi 曲線～, 京都大学数理解析研究所講究録 1527 「部分多様体論のさらなる発展にむけて」(2007) 74–99.

[7] T. Aubin, Some nonlinear problems in Riemannian geometry, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[8] M. Babich and A. Bobenko, Willmore tori with umbilic lines and minimal surfaces in hyperbolic space, Duke Math. J. **72** (1993) 151–185.

[9] T. Banchoff, Triple points and surgery of immersed surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974) 407–413.

[10] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, Berlin, 1929.

[11] R. Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geom. **20** (1984) 23–53.

[12] R. Bryant, Surfaces in conformal geometry, Proc. Symp. Pure Math. **48** (1988) 227–240.

[13] B.-Y. Chen, On a theorem of Fenchel-Borsuk-Willmore-Chern-Lashof, Math. Ann. **194** (1971) 19–26.

[14] B.-Y. Chen, On an inequality of mean curvature, J. London Math. Soc. **4** (1972) 647–650.

[15] B.-Y. Chen, On a variational problem on hypersurfaces, J. London Math. Soc. **6** (1973) 321–325.

[16] B.-Y. Chen, An invariant of conformal mappings, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973) 563–564.

[17] S.-S. Chern, M. P. do Carmo and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag (1970) 59–75.

[18] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math. **93** (1971) 43–62.

[19] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster and O. Wohlrab, Minimal surfaces, I, Grundl. Math. Wiss. **295**, Springer-Verlag, 1992.

[20] N. Ejiri, Willmore surfaces with a duality in $S^N(1)$, Proc. London Math. Soc. **57** (1988) 383–416.

[21] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[22] P. Hartman and A. Wintner, On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations, Amer. J. Math. **75** (1953) 449–476.

[23] P. Hartman and A. Wintner, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math. **76** (1954) 502–508.

[24] D. Hoffman and H. Karcher, Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature, Geometry V, 5–93, Encyclopaedia Math. Sci. **90**, Springer, Berlin, 1997.

[25] D. Hoffman and W. H. Meeks, III, Minimal surfaces based on the Catenoid, Amer. Math. Monthly **97** no. 8 Special Geometry Issue (Oct. 1990) 702–730.

[26] H. Hopf, Differential geometry in the large, Lecture Notes in Math. vol.1000, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1989.

[27] K. Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, Math. Ann. **245** (1979) 89–99.

[28] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何 (改定版), 裳華房, 1995.

[29] B. G. Konopelchenko, Induced surfaces and their integrable dynamics, Stud. Appl. Math. **96** (1996) 9–52.

[30] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.

[31] R. Kusner, Conformal geometry and complete minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987) 291–295.

[32] R. Kusner, Comparison surfaces for the Willmore problem, Pacific J. Math. **138** (1989) 317–345.

[33] J. Langer and D. Singer, Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space, Bull. London Math. Soc. **16** (1984) 531–534.

[34] H. B. Lawson, Jr., Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. **92** (1970) 335–374.

[35] P. Li and S.-T. Yau, A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and first eigenvalues of compact surfaces, Invent. Math. **69** (1982) 269–291.

[36] S. Montiel, Willmore two-spheres in the four-sphere, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000) 4469–4486.

[37] S. Montiel and A. Ros, Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area, Invent. Math. **83** (1985) 153–166.

[38] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1986.

[39] U. Pinkall, Hopf tori in S^3, Invent. Math. **81** (1985) 379–386.

[40] U. Pinkall and I. Sterling, Willmore surfaces, Math. Intelligencer **9** (1987) 38–43.

[41] R. C. Reilly, On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space, Comment. Math. Helv. **52** (1977) 525–533.

[42] A. Ros, The Willmore conjecture in the real projective space, Math. Res. Lett. **6** (1999) 487–493.

[43] M. U. Schmidt, A proof of the Willmore conjecture, preprint (math.DG/0203224).

[44] R. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, J. Differential Geom. **18** (1983) 791–809.

[45] R. Schoen and S.-T. Yau, Lectures on Differential Geometry, International Press, 1994.

[46] K. Shiohama and R. Takagi, A characterization of a standard torus in E^3, J. Differential Geom. **4** (1970) 477–485.

[47] L. Simon, Existence of Willmore surfaces, Proc. Centre for Math. Anal. **10** (1985) 187–216.

[48] L. Simon, Existence of surfaces minimizing the Willmore functional, Commun. Anal. Geom. **1** (1993) 281–326.

[49] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol.III, 2nd ed., Publish or Perish, 1979.

[50] I. A. Taimanov, Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces, preprint (arXiv:dg-ga/9511005).

[51] I. A. Taimanov, Surfaces of revolution in terms of solitons, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997) 419–435.

[52] I. A. Taimanov, The Weierstrass representation of closed surfaces in $\mathbf{R}^3$, Funct. Anal. Appl. **32** (1998) 258–267.

[53] I. A. Taimanov, Two-dimensional Dirac operator and surface theory, preprint (arXiv:math.DG/0512543).

[54] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **18** (1966) 380–385.

[55] G. Thomsen, Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der konformen flächentheorie, Abh. Math. Sem. Hamburg (1923) 31–56.

[56] J. L. Weiner, On a problem of Chen, Willmore et alia, Indiana University Math. J. **27** (1978) 19–35.

[57] J. H. White, A global invariant of conformal mappings in space, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973) 162–164.

[58] T. J. Willmore, Note on embedded surfaces, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat. (1965) 493–496.

[59] T. J. Willmore, Mean curvature of immersed surfaces, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat. (1968) 99–103.

[60] T. J. Willmore, Mean curvature of Riemannian immersions, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971) 307–310.

[61] T. J. Willmore, Riemannian Geometry, Oxford University Press, 1993.