# 微分積分 II 中間試験問題

2006 年 12 月 8 日 8：40-10：10

**1.** (1) $f(x,y)=\dfrac{\sin y}{1+x}$ に対し，$f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ．
(2) $f(x,y)=e^{xy}$ に対し，$f_{xy}(x,y)$ を求めよ．

**2.** グラフ $z=\sin x\cos y$ として定まる曲面の，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

**3.** (1) $f(x,y)=4x^2+2xy+y^2-14x+4y+30$ の極値を求めよ．その値が極大値であるか極小値であるかも示せ．
(2) $f(x,y)=x^3+xy+y^3$ の極値を求めよ．その値が極大値であるか極小値であるかも示せ．

**4.** $x^3-2xy^2+y^3+5y^2-2x=3$ で定まる曲線の，点 $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

**5.** 閉領域 $D=\{\,(x,y)\mid x^2+3y^2\leq 1\,\}$ における，関数 $f(x,y)=x^2+xy+2y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

## 解答

**1.** (1) $f = \dfrac{\sin y}{1+x}$ より，$f_x$ を求めるときは分子の $\sin y$ は定数と見なし，また $f_y$ を求めるときは $\dfrac{1}{1+x}$ を定数と見なせばよいので，

$$f_x = -\frac{\sin y}{(1+x)^2}, \qquad f_y = \frac{\cos y}{1+x}$$

(2) $f_{xy}$ を求めるため，まず $f_x$ を求める．

$$f_x = ye^{xy}$$

今度はこれを $y$ で偏微分する．するとさっきは定数として扱った $y$ が今度は変数となることに注意して，

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = e^{xy} + y \cdot xe^{xy} = (1+xy)e^{xy}$$

となる．

**2.** $f(x,y) = \sin x \cos y$ とおくと，

$$f_x = \cos x \cos y, \quad f_y = -\sin x \sin y$$

よって点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の法ベクトルは，

$$\begin{aligned} f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

により

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

となることがわかる．したがって求める接平面の方程式は，

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

となる．これを整理して，

$$x - y - 2z + 1 = 0$$

としてもよい．

**3.** (1)

$$\begin{cases} f_x = 8x + 2y - 14 = 0 \\ f_y = 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

を解いて，$x = 3, y = -5$ を得る．よって極値を与える可能性のある点は，$(x, y) = (3, -5)$ のみ．また

$$f_{xx} = 8, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 2$$

であるので，

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 16 - 4 = 12 > 0$$

これと $f_{xx} = 8 > 0$ を合わせて，$(3, -5)$ において極小となることがわかる．

$$f(3, -5) = -1$$

であるので，$f(x, y)$ は点 $(3, -5)$ において極小値 $-1$ をとる．

(2)

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y = 0 & \cdots [1] \\ f_y = x + 3y^2 = 0 & \cdots [2] \end{cases}$$

[1] より $y = -3x^2$，これを [2] に代入すると，

$$0 = x + 3 \cdot (-3x^2)^2 = x + 27x^4 = x(1 + 27x^3)$$

これより $x = 0, -\dfrac{1}{3}$ となる．$y$ は $y = -3x^2$ を用いると決まるので，

$$(x, y) = (0, 0), \ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

である．この 2 点が極値を与える可能性を持つ．

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = 1$$

より，まず $(x, y) = (0, 0)$ においては

$$f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 0 - 1 = -1 < 0$$

となるので，極値とはならない．$(x, y) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ においては，

$$f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) f_{yy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - \left(f_{xy}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

となり，これと $f_{xx} = -2 < 0$ を合わせて，極大となることがわかる．

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

であるので，$f(x,y)$ は点 $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ において極大値 $\dfrac{1}{27}$ をとる．

**4.**

$$f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y^3 + 5y^2 - 2x - 3$$

とおく．$f(x, y(x)) = 0$ で定まる陰関数 $y(x)$ の，$(x,y) = (1,1)$ における微分係数を計算すればよい．

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y^2 - 2$$
$$f_y(x,y) = -4xy + 3y^2 + 10y$$

であるので，陰関数定理により

$$y'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{-1}{9} = \frac{1}{9}$$

となることがわかる．したがって求める接線の方程式は，

$$y - 1 = \frac{1}{9}(x-1)$$

となる．

**5.** $1^\circ$ $D$ の内部で．

$$\begin{cases} f_x = 2x + y = 0 \\ f_y = x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,y) = (0,0)$ を得る．これは確かに $D$ 内の点なので，内部で最大・最少を与える可能性のある点は $(0,0)$ の 1 点である．

$2^\circ$ $D$ の境界で．

Lagrange の方法を使う．

$$\varphi(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1$$

とおくと，$D$ の境界は $\varphi(x,y) = 0$ で表される．$\varphi_x = 2x$, $\varphi_y = 6y$ なので，

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 & \cdots [1] \\ 2x + y + \lambda \cdot 2x = 0 & \cdots [2] \\ x + 4y + \lambda \cdot 6y = 0 & \cdots [3] \end{cases}$$

をみたす $(x, y, \lambda)$ を探す．[2]，[3] は連立 1 次方程式なので，

$$\begin{pmatrix} 2\lambda + 2 & 1 \\ 1 & 6\lambda + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるが，左辺の行列の行列式が 0 でなければ逆行列を持ち，そのときは $(x,y) = (0,0)$ となる．しかしこれは [1] をみたさない．したがって左辺の行列の行列式は 0 でなければならない．

$$0 = (2\lambda + 2)(6\lambda + 4) - 1 = 12\lambda^2 + 20\lambda + 7 = (2\lambda + 1)(6\lambda + 7)$$

より，

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ -\frac{7}{6}$$

を得る．

　$\lambda = -\dfrac{1}{2}$ のとき．[2] に代入すると $x+y=0$，したがって $y=-x$．これを [1] に代入すると，

$$1 = x^2 + 3x^2 = 4x^2$$

よって $x = \pm\dfrac{1}{2}$．$y=-x$ だったので，

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$$

　$\lambda = -\dfrac{7}{6}$ のとき．[3] に代入すると $x=3y$．これを [1] に代入して

$$1 = 9y^2 + 3y^2 = 12y^2$$

よって $y = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$．$x=3y$ だったので

$$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

3°　以上で最大・最少を与える可能性のある点をすべて列挙することができた．すなわち

$$(x,y) = (0,0),\ \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

それぞれの点における $f(x,y)$ の値を計算する．

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となるので，この中で一番大きな $\dfrac{7}{6}$ が最大値，一番小さな 0 が最小値となる．すなわち $f(x,y)$ は点 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ において最大値 $\dfrac{7}{6}$，点 $(0,0)$ において最小値 0 をとる．