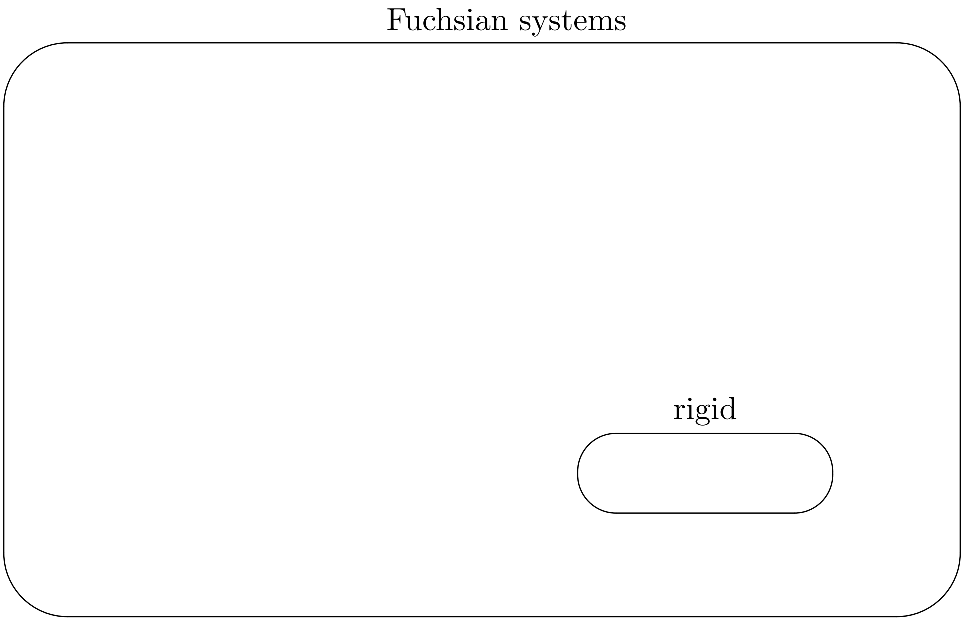
アクセサリー・パラメーターとモノドロミー
— 概説 —

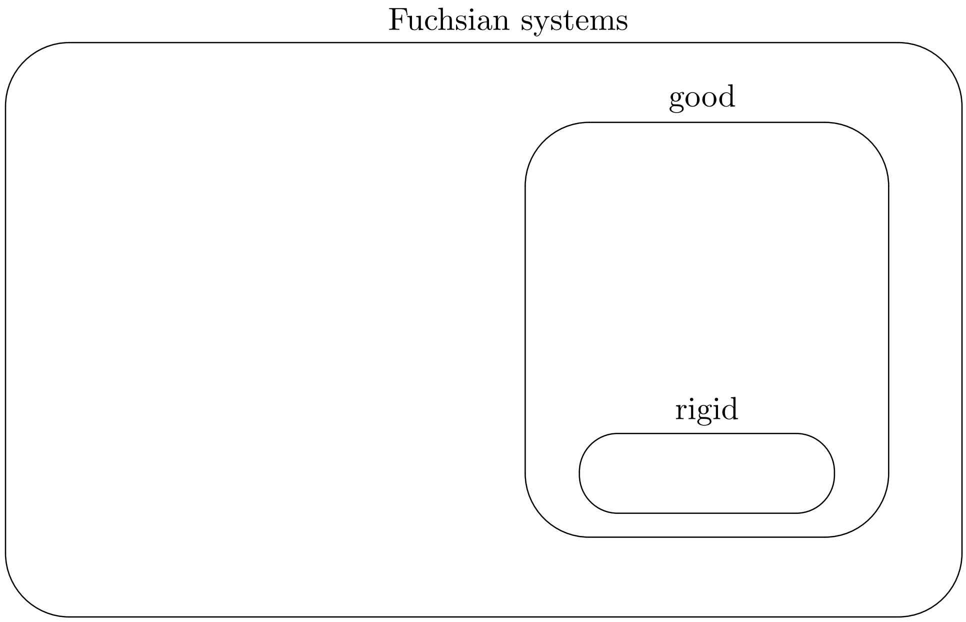
原岡喜重

（熊本大学大学院自然科学研究科）

Encounter with Mathematics

2008 年 10 月 17 日　中央大学


Fuchsian systems
rigid


Fuchsian systems
good
rigid

Gauss の超幾何微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{x-1}\right)\frac{du}{dx}+\frac{\alpha\beta}{x(x-1)}u=0$$

$x\in\mathbb{C}$: 独立変数,　$u=u(x)$: 未知関数,　$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$: パラメーター

方程式の**特異点**は, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で考えるならば $x=0,1,\infty(\leftarrow t=1/x$ で書いたときの $t=0)$.

特異点 $x=0,1,\infty$ はすべて **確定特異点**.（Fuchs の判定法による）

一般に確定特異点 $x=a$ においては,

$$u(x)=(x-a)^\rho\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-a)^m \quad (c_0\neq 0)$$

という形の解により基本解系が構成される．この表示における $\rho\in\mathbb{C}$ を，$x=a$ における **特性指数** という．

Gauss の超幾何微分方程式の場合，たとえば $x=0$ では

$$\begin{aligned}u_{01}(x)&=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\cdots\\ u_{02}(x)&=x^{1-\gamma}\left(1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2-\gamma}x+\cdots\right)\end{aligned}$$

という形の解が構成できるので，$x=0$ における特性指数は

$$0,1-\gamma$$

となることが分かる．特性指数は，方程式から計算可能な量である．
特異点と特性指数を表にまとめたものを **Riemann scheme** という．
Gauss の超幾何微分方程式の Riemann scheme は次で与えられる．

$$\left\{\begin{matrix}x=0 & x=1 & x=\infty\\ 0 & 0 & \alpha\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta\end{matrix}\right\}$$

■ この表のデータは，すべて方程式から計算可能
■ すべての特性指数の和 $=1$ が成立（Fuchs の関係式）
■ この表は，解の特異点の近傍における局所挙動を与えている

この最後の主張を示そう．

■ Riemann scheme $\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{matrix}\right\}$ は，解の特異点の近傍における局所挙動を与えている

<u>証明</u>

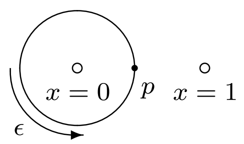
$x=0$ の近傍では次の形の解があった．

$$u_{01}(x)=f_{01}(x), \quad u_{02}(x)=x^{1-\gamma}f_{02}(x)$$

ここで $f_{01}(x), f_{02}(x)$ は $|x|<1$ における収束ベキ級数．

$\{0<|x|<1\} \ni p$ を 1 つ取り固定．p における $x^{1-\gamma}$ の分枝も 1 つ取り固定．すると $u_{01}(x), u_{02}(x)$ は p の近傍で一価正則．

ϵ を，p を始点として $x=0$ を正の向きに一周する loop とするとき，



$$\epsilon_* u_{01}(x)=u_{01}(x), \quad \epsilon_* u_{02}(x)=e(1-\gamma)u_{02}(x)$$

となることが分かる．ただし

$$e(a):=e^{2\pi\sqrt{-1}a}$$

これをまとめて書くと，

$$\epsilon_*(u_{01}(x),u_{02}(x))=(u_{01}(x),u_{02}(x))\begin{pmatrix}1 & \\ & e(1-\gamma)\end{pmatrix}$$

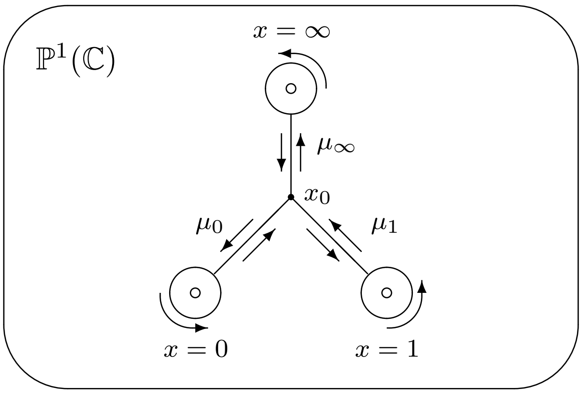
となる．右辺の行列

$$\begin{pmatrix}1 & \\ & e(1-\gamma)\end{pmatrix}=:\Lambda_0$$

を**局所モノドロミー**という．このように，局所モノドロミーは特性指数から求めることができ，1 つの特異点を回ったときの多価性を記述している． □

解の大域的挙動を調べたい．

解は，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ 上，多価正則．この多価性は，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ 内の loop に沿った解析接続から生じる．そこでそのもとになる loop のホモトピー類，即ち基本群を調べよう．



基本群の表示 (presentation) として，

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},x_0)=\langle \mu_0,\mu_1,\mu_\infty \mid \mu_\infty\mu_1\mu_0=1\rangle$$

$(u_1(x),u_2(x))$ を $x=x_0$ における基本解系とすると，

$$(\mu_j)_*(u_1(x),u_2(x))=(u_1(x),u_2(x))M_j,\qquad \exists M_j\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$$

即ち多価性を記述する写像

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},x_0) & \to & \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \\ \mu_j & \mapsto & M_j\end{array}$$

が決まる．この写像を**モノドロミー表現**という．

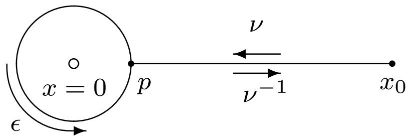
モノドロミー表現は，行列の 3 つ組 (M_0,M_1,M_∞) を与えることで決まる．この 3 つ組は何でも良いわけではなく，次の条件をみたす必要がある．

$$M_\infty M_1 M_0=I,$$
$$M_0\sim\begin{pmatrix}1 & \\ & e(1-\gamma)\end{pmatrix},\ M_1\sim\begin{pmatrix}1 & \\ & e(\gamma-\alpha-\beta)\end{pmatrix},\ M_\infty\sim\begin{pmatrix}e(\alpha) & \\ & e(\beta)\end{pmatrix}$$

$$M_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(1-\gamma) \end{pmatrix} = \Lambda_0$$

の <u>証明</u>

loop μ_0 を次のように分解する.



ϵ は先に出てきた $x=0$ を回る loop で，ν は x_0 と p を結ぶ道．すなわち

$$\mu_0 = \nu^{-1}\epsilon\nu$$

とする.

x_0 における基本解系 $(u_1(x), u_2(x))$ を ν に沿って p まで解析接続すると，そこに元々あった基本解系 $(u_{01}(x), u_{02}(x))$ の線形結合で表すことができる．すなわち

$$\nu_*(u_1(x), u_2(x)) = (u_{01}(x), u_{02}(x))C, \qquad \exists C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

また先に見たように

$$\epsilon_*(u_{01}(x), u_{02}(x)) = (u_{01}(x), u_{02}(x))\Lambda_0$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}(\mu_0)_*(u_1, u_2) = (\nu^{-1}\epsilon\nu)_*(u_1, u_2) &= (\nu^{-1})_*\epsilon_*\nu_*(u_1, u_2) \\ &= (\nu^{-1})_*\epsilon_*(u_{01}, u_{02})C \\ &= (\nu^{-1})_*(u_{01}, u_{02})\Lambda_0 C \\ &= (u_1, u_2)C^{-1}\Lambda_0 C\end{aligned}$$

すなわち

$$M_0 = C^{-1}\Lambda_0 C$$

となる．したがって

$$M_0 \sim \Lambda_0$$

□

3 つ組 (M_0, M_1, M_∞) に課された条件

$$
\begin{aligned}
&M_\infty M_1 M_0 = I, \\
&M_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(1-\gamma) \end{pmatrix}, \quad M_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(\gamma-\alpha-\beta) \end{pmatrix}, \quad M_\infty \sim \begin{pmatrix} e(\alpha) & \\ & e(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

は，“外から見て” 分かる条件である．

モノドロミー表現の同型：$\exists P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

$$(M_0, M_1, M_\infty) \sim (P^{-1} M_0 P, P^{-1} M_1 P, P^{-1} M_\infty P)$$

実は今の場合，(M_0, M_1, M_∞) は，上の「“外から見て” 分かる条件」により，同型を除いて一意的に決まってしまう．この性質を **rigid** と呼ぶ．

<u>rigid であることの証明</u>

まず $e(1-\gamma) = e(-\gamma)$ に注意しておく．

$M_\infty M_1 M_0 = I$ だから，M_0, M_1 を決めればよい．P を

$$P^{-1} M_0 P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(-\gamma) \end{pmatrix}$$

となるように取り，この P による一斉相似変換を既に行ったと思うと，

$$(M_0, M_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & e(-\gamma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

としてよい．さらに

$$Q = \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

による一斉相似変換を行うと，既に対角化されている M_0 は変化せず，

$$Q^{-1} M_1 Q = \begin{pmatrix} a & 1 \\ bc & d \end{pmatrix}$$

となる．そこで Q による一斉相似変換も既に行ったと思い，bc をあらためて c と書けば，

$$(M_0, M_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & e(-\gamma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

としてよい．

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(\gamma - \alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

より

$$a + d = 1 + e(\gamma - \alpha - \beta), \quad ad - c = e(\gamma - \alpha - \beta)$$

を得る．また

$$M_1 M_0 = {M_\infty}^{-1} \sim \begin{pmatrix} e(-\alpha) & \\ & e(-\beta) \end{pmatrix}$$

であり，

$$M_1 M_0 = \begin{pmatrix} a & e(-\gamma) \\ c & de(-\gamma) \end{pmatrix}$$

だから，これより trace をとることで

$$a + de(-\gamma) = e(-\alpha) + e(-\beta)$$

を得る．以上 3 本の a, c, d に関する連立方程式を解くと，a, c, d が一意的に決まることが分かる． □

つまり Gauss の超幾何微分方程式については，解の多価性を，方程式を外から見ることで記述できてしまうのである．もう少し正確に言うと，局所モノドロミーがモノドロミー表現を決定してしまうのである．

似たようなことが微分方程式に対しても成立する．Gauss の超幾何微分方程式からその Riemann scheme が決まったが，逆にその Riemann scheme を実現する微分方程式は，Gauss の超幾何微分方程式に限られる．この性質を**アクセサリー・パラメーターを持たない**という．

モノドロミー表現が rigid であることと，微分方程式がアクセサリー・パラメーターを持たないことは，実は同じ仕組みで成り立っている．そこでアクセサリー・パラメーターを持たない微分方程式のことも，**rigid** と呼ぶことにする．この仕組みについてはこの後説明するが，その前にアクセサリー・パラメーターを説明しよう．

Heun の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x}+\frac{1-\beta}{x-1}+\frac{1-\gamma}{x-t}\right)\frac{du}{dx}+\frac{\delta_1\delta_2 x+h}{x(x-1)(x-t)}u=0$$

Riemann scheme

$$\begin{Bmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta_2 \end{Bmatrix}$$

ただし Fuchs の関係式として

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta_1+\delta_2=2.$$

方程式に含まれる係数 h がどのような値であっても，Riemann scheme には影響しない．逆に言えば，係数 h は Riemann scheme からは決まらない．このような係数 h のことを，**アクセサリー・パラメーター**という．

Heun の微分方程式のモノドロミー表現

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,t,\infty\},x_0) & \to & \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \\ \mu_j & \mapsto & M_j \end{array}$$

4 つ組 (M_0,M_1,M_t,M_∞) がみたすべき条件

$$\begin{aligned} &M_\infty M_t M_1 M_0 = I, \\ &M_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(\alpha) \end{pmatrix}, \\ &M_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(\beta) \end{pmatrix}, \\ &M_t \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(\gamma) \end{pmatrix}, \\ &M_\infty \sim \begin{pmatrix} e(\delta_1) & \\ & e(\delta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この条件だけからは，同型を除いても (M_0,M_1,M_t,M_∞) は一意的には決まらない．すなわち，Heun の微分方程式のモノドロミー表現は rigid ではない．

Fuchsian system of rank n

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j}\right) U$$

$$U = U(x) = {}^t(u_1(x), \ldots, u_n(x)) : \text{未知関数ベクトル}, \quad A_j : n \times n \text{ 定数行列}$$

$x = t_j$ は確定特異点．局所解

$$U(x) = (x - t_j)^\rho \sum_{m=0}^{\infty} g_m (x - t_j)^m \qquad (g_0 \neq 0)$$

を考える．$\rho \in \mathbb{C}$ が**特性指数**．この表示を system に代入すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\rho + m) g_m (x - t_j)^{\rho+m-1} = \left(\frac{A_j}{x - t_j} + O(1)\right) \sum_{m=0}^{\infty} g_m (x - t_j)^{\rho+m}$$

最低次 $(x - t_j)^{\rho-1}$ の係数を比較して，

$$\rho g_0 = A_j g_0$$

$$\Longrightarrow \rho \text{ は } A_j \text{ の固有値，} g_0 \text{ はその } \rho\text{-固有ベクトル．}$$

$x = \infty (=: x_{p+1})$ も確定特異点．局所解

$$U(x) = (x^{-1})^\rho \sum_{m=0}^{\infty} g_m x^{-m}$$

を考える．$\rho \in \mathbb{C}$ が特性指数．

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} = \sum_{j-1}^{p} \frac{1}{x} \cdot \frac{A_j}{1 - t_j/x} = \left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right) x^{-1} + O(x^{-2})$$

に注意して代入すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-\rho - m) g_m x^{-\rho-m-1} = \left[\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right) x^{-1} + O(x^{-2})\right] \sum_{m=0}^{\infty} g_m x^{-\rho-m}$$

最低次 $x^{-\rho-1}$ の係数を比較して，

$$-\rho g_0 = \left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right) g_0$$

そこで $A_{p+1} = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ とおくと，ρ は A_{p+1} の固有値，g_0 はその ρ-固有ベクトル．

説明を簡単にするため，次の 2 つを仮定する．

(A1)　A_j $(1 \leq j \leq p+1)$ は対角化可能
(A2)　各 j について，A_j の異なる固有値間に整数差なし

A_j の固有値を $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jn}$ とする．このとき各 j に対し，$x = t_j$ における局所解

$$U_{jk}(x) := (x - t_j)^{\lambda_{jk}} \sum_{m=0}^{\infty} g_{jk,m}(x - t_j)^m \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

からなる基本解系が取れる．これらを並べた基本解行列を

$$\mathcal{U}_j(x) = (U_{j1}(x), \dots, U_{jn}(x))$$

とおく．

ϵ_j を $x = t_j$ の近傍内で t_j の周りを正の向きに一周する loop とすると，

$$(\epsilon_j)_* U_{jk}(x) = U_{jk}(x) e(\lambda_{jk})$$

したがって

$$(\epsilon_j)_* \mathcal{U}_j(x) = \mathcal{U}_j(x) \begin{pmatrix} e(\lambda_{j1}) & & \\ & \ddots & \\ & & e(\lambda_{jn}) \end{pmatrix}$$

ここに現れた行列

$$\begin{pmatrix} e(\lambda_{j1}) & & \\ & \ddots & \\ & & e(\lambda_{jn}) \end{pmatrix} =: \Lambda_j$$

を $x = t_j$ における**局所モノドロミー**という．

Riemann scheme は

$$\begin{Bmatrix} x = t_1 & x = t_2 & \cdots & x = t_p & x = t_{p+1} (= \infty) \\ \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{p1} & \lambda_{p+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{pn} & \lambda_{p+1,n} \end{Bmatrix}$$

ただし A_{p+1} の定義から，

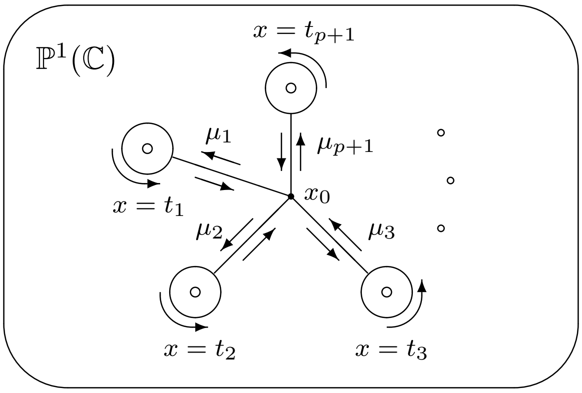
$$\sum_{j=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} = 0$$

が成り立つことが分かる．これが Fuchs の関係式．

解の大域的挙動

$x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_p, t_{p+1}(=\infty)\}$：基点

μ_j：x_0 を基点とし，t_j の周りを一周する loop $(1 \le j \le p+1)$



基本群の表示

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_{p+1}\}, x_0) = \langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1} \mid \mu_{p+1}\mu_p \cdots \mu_1 = 1 \rangle$$

$\mathcal{U}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$：$x_0$ における基本解行列

以上によりモノドロミー表現

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_{p+1}\}, x_0) & \to & \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ \mu_j & \mapsto & M_j \end{array}$$

が定まる．ここで M_j は

$$(\mu_j)_* \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x) M_j$$

により定まる $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の元.

モノドロミー表現 $(M_1, \ldots, M_{p+1})$ がみたすべき条件

$$\begin{aligned} &M_{p+1} M_p \cdots M_1 = I \\ &M_j \sim \Lambda_j \quad (1 \le j \le p+1) \end{aligned}$$

これらの条件によって $(M_1, \ldots, M_{p+1})$ が同型を除いて一意的に決まる場合，そのモノドロミー表現を **rigid** という．rigid かどうかを判定する方法（rigidity 指数）については後述．その前に，

モノドロミー表現から分かること

(1) モノドロミー表現が可約 $\Longleftrightarrow$ 方程式がより rank の低いものに帰着する

(2) モノドロミー群が有限群 $\Longleftrightarrow$ すべての解が代数関数

(3) モノドロミー群が算術的離散群 $\longleftrightarrow$ 保型関数に関係する

(2) を 証明 しよう．**モノドロミー群**とは，モノドロミー表現の像となる $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群を指す．

モノドロミー群を G とおこう．任意の解 $U(x)$ の任意の成分 $u(x)$ を考える．G が有限群なので，μ を基本群のすべてにわたって動かしても，$\mu_* u(x)$ は有限個しかない．それらを $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)$ とおく．すると $\forall\mu$ について，μ_* は $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x))$ に置換として働く．

$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)$ の k 次基本対称式を $s_k(x)$ とすると，

★ $s_k(x)$ は $\forall\mu_*$ で不変 $\Longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_{p+1}\}$ 上 1 価正則

★ $s_k(x)$ は Fuchsian system の解の成分の多項式 $\Longrightarrow$ 孤立特異点 $t_1, \ldots, t_{p+1}$ は高々極

したがって $s_k(x)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上有理型, 即ち有理関数．$s_k(x)$ の定義より，$u_1(x), u_2(x), \ldots,$ $u_N(x)$ は代数方程式

$$X^N - s_1(x)X^{N-1} + s_2(x)X^{N-2} - \cdots + (-1)^N s_N(x) = 0$$

の解であり，係数 $s_k(x)$ すべてが有理関数なので，その解は代数関数．とくにはじめに取った $u(x)$ は代数関数． $\square$

◊ K. Takano and E. Bannai: A global study of Jordan-Pochhammer differential equations, *Funkcial. Ekvac.*, **19** (1976), 85-99.

◊ F. Beukers and G. Heckman: Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, *Invent. Math.*, **95** (1989), 325–354.

加藤満生氏の講演へ・・・

次の数を **rigidity 指数**という．

$$\iota := (2-(p+1))n^2 + \sum_{j=1}^{p+1} \dim Z(M_j)$$

ただしここで $Z(M_j)$ は M_j の中心化群，つまり M_j と可換な行列の全体．たとえば

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \lambda_3 I_{n_3} \end{pmatrix} \implies \dim Z(M) = {n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2$$

定理 (N. M. Katz)　モノドロミー表現 $(M_1, \dots, M_{p+1})$ が既約なら $\iota \leq 2$．そしてこのとき

$$\iota = 2 \iff \text{rigid}$$

例 1　Gauss の超幾何微分方程式の場合は，

$$\dim Z(M_0) = \dim Z(M_1) = \dim Z(M_\infty) = 1^2 + 1^2 = 2$$

なので，

$$\iota = (2-3) \times 2^2 + 2 + 2 + 2 = 2$$

従って rigid.

Heun の微分方程式の場合は，やはり $\dim Z(M_j) = 2$ なので

$$\iota = (2-4) \times 2^2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 0$$

よって rigid でない．

例 2　n が一般で $p+1=3$ の場合で，M_1, M_2, M_3 が対角化可能，その固有値の重複度 (spectral type) がそれぞれ

$$(n-1, 1),\ (1, 1, \dots, 1),\ (1, 1, \dots, 1)$$

とすると，

$$\iota = (2-3)n^2 + ((n-1)^2 + 1^2) + (1^2 + \cdots + 1^2) + (1^2 + \cdots + 1^2) = 2$$

となるので rigid．これは一般化超幾何級数 ${}_nF_{n-1}$ のみたす微分方程式のモノドロミー表現に相当する．

例 3 $n=1$ の場合には，$\dim Z(M_j)=1$ だから，

$$\iota=(2-(p+1))\times 1^2+(p+1)\times 1=2$$

となる．即ち，rank 1 のモノドロミー表現は常に rigid.

以上のモノドロミー表現の rigidity に関する話は，Fuchsian system に対しても同様に展開できる．

Fuchsian system

$$\frac{dU}{dx}=\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{A_j}{x-t_j}\right)U$$

を考えるということは，行列の組

$$(A_1,\dots.A_p,A_{p+1})$$

で

$$A_1+\cdots+A_p+A_{p+1}=O$$

をみたすものを考えるということと同じ（$t_1,\dots,t_p$ は固定されていると思う）．

モノドロミー表現の同型に対応するものとして，Fuchsian system の**同型**を

$$(A_1,\dots.A_p,A_{p+1})\sim(P^{-1}A_1P,\dots,P^{-1}A_pP,P^{-1}A_{p+1}P),\quad \exists P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

により定める．これは，未知関数の変換

$$U=PV$$

を行ったときの，U のみたすもとの system と V のみたす system

$$\frac{dV}{dx}=\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{P^{-1}A_jP}{x-t_j}\right)V$$

を同型と言っていることになる．

Fuchsian system が **rigid**（あるいは**アクセサリー・パラメーターを持たない**）とは，その Riemann scheme により Fuchsian system が同型を除いて一意的に決まることとする．

行列の組で言えば，$(A_1, \ldots, A_p, A_{p+1})$ が **rigid**（あるいは**アクセサリー・パラメーターを持たない**）とは，条件

$$
\begin{aligned}
&A_1 + \cdots + A_p + A_{p+1} = O \\
&A_j \sim \begin{pmatrix} \lambda_{j1} & & & \\ & \lambda_{j2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{jn} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq p+1)
\end{aligned}
$$

により，$(A_1, \ldots, A_p, A_{p+1})$ が同型を除いて一意的に決まることである．

問題　rigid な Fuchsian system をすべて求めよ．その全体の構造を明らかにせよ．

Katz 理論

rigid なモノドロミー表現の構成（乗法版）と，rigid な Fuchsian system の構成（加法版）は並行して行える．説明しやすいので，加法版の方を紹介する．

Fuchsian system

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) U \quad \leftrightarrow \quad (A_1, \ldots, A_p)$$

行列のサイズ（方程式の rank）は n とする．

$(A_1, \ldots, A_p)$ に対する 2 つの操作：addition と middle convolution を次のように定義する．

<u>addition</u>　$a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$

$$add_{(a_1,\ldots,a_p)} : (A_1, \ldots, A_p) \mapsto (A_1 + a_1, \ldots, A_p + a_p)$$

Fuchsian system で言うと，

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) U \quad \to \quad \frac{dV}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j + a_j}{x - t_j} \right) V$$

$$V = \prod_{j=1}^{p} (x - t_j)^{a_j} \cdot U$$

次は容易にわかる．

$$add_{(a_1,\ldots,a_p)} \circ add_{(b_1,\ldots,b_p)} = add_{(a_1+b_1,\ldots,a_p+b_p)}$$
$$(add_{(a_1,\ldots,a_p)})^{-1} = add_{(-a_1,\ldots,-a_p)}$$

<u>middle convolution</u>　$\lambda \in \mathbb{C}$

$$c_\lambda : (A_1, \ldots, A_p) \mapsto (G_1, \ldots, G_p)$$

$$G_j = \begin{pmatrix} O & \cdots & O & \cdots & O \\ & & \cdots & & \\ A_1 & \cdots & A_j + \lambda & \cdots & A_p \\ & & \cdots & & \\ O & \cdots & O & \cdots & O \end{pmatrix} \leftarrow j \qquad pn \times pn\text{-行列}$$

$$\mathcal{K} := \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} ; X_j \in \mathrm{Ker} A_j \quad (1 \le j \le p) \right\}$$
$$\mathcal{L} := \mathrm{Ker}(G_1 + \cdots + G_p)$$

$\mathcal{K}, \mathcal{L}$ は $(G_1, \ldots, G_p)$-不変部分空間

$$\overline{G}_j \ : \ G_j の\ \mathbb{C}^{pn}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})\ への作用$$

middle convolution mc_λ は

$$mc_\lambda : (A_1, \ldots, A_p) \mapsto (\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_p)$$

で定義される．

Fuchsian system で言うと，

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) U \quad \to \quad \frac{dV}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{G}_j}{x - t_j} \right) V$$
$$V(x) = L \left[\int_\Delta (s - x)^\lambda \tilde{U}(s) \, ds \right]$$

L はある線形変換，$\tilde{U}$ は U を少しいじったもの．

次が成り立つ．

$$mc_\lambda \circ mc_\mu = mc_{\lambda+\mu}$$
$$(mc_\lambda)^{-1} = mc_{-\lambda}$$

定理 (Katz)　Fuchsian system

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) U$$

が既約，rigid なら，それは rank 1 の system に，addition と middle convolution を有限回施すことで得られる．

例

$$(a_1, a_2) \qquad\qquad \frac{dU}{dx} = \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x-1}\right) U$$

$$\downarrow \ mc_\lambda \qquad\qquad U(x) = x^{a_1}(x-1)^{a_2}$$

$$(A_1, A_2) = \left(\begin{pmatrix} a_1+\lambda & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2+\lambda \end{pmatrix}\right) \qquad\qquad \frac{dV}{dx} = \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}\right) V$$

$$\downarrow \ add_{(b_1,b_2)} \qquad\qquad V(x) = \begin{pmatrix} \int_\Delta s^{a_1-1}(s-1)^{a_2}(s-x)^\lambda\, ds \\ \int_\Delta s^{a_1}(s-1)^{a_2-1}(s-x)^\lambda\, ds \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1+\lambda+b_1 & a_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ a_1 & a_2+\lambda+b_2 \end{pmatrix}\right) \qquad\qquad \frac{dW}{dx} = \left(\frac{A_1+b_1}{x} + \frac{A_2+b_2}{x-1}\right) W$$

$$\downarrow \ mc_\mu \qquad\qquad W(x) = x^{b_1}(x-1)^{b_2} V(x)$$

$$(\overline{G}_1, \overline{G}_2)$$

ここで $(\overline{G}_1, \overline{G}_2)$ は次のように決まる.

$$G_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1+b_1+\lambda+\mu & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1+\mu & a_1 & a_2+b_2+\lambda \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$G_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1+b_1+\lambda & a_2 & b_2+\mu & 0 \\ 0 & b_1 & a_1 & a_2+b_2+\lambda+\mu \end{array}\right)$$

いま μ を

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + \lambda + \mu = 0$$

をみたすように取ったとしよう.

このとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \operatorname{Ker}(G_1+G_2)\\ &= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} a_1+b_1+\lambda+\mu & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_1+\mu & a_1 & a_2+b_2+\lambda\\ a_1+b_1+\lambda & a_2 & b_2+\mu & 0\\ 0 & b_1 & a_1 & a_2+b_2+\lambda+\mu\end{pmatrix}\\ &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

そこで $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =: w$ とおき，$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^4$ を補って $\{v_1, v_2, v_3, w\}$ が $\mathbb{C}^4$ の basis となるようにする．たとえば

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

と取れる．

$$P = (v_1, v_2, v_3, w) = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

とおく．すると

$$P^{-1}G_1P = \begin{pmatrix} -a_2-b_2 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & -a_1-a_2-b_2-\lambda & a_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & \overline{G}_1 & & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$P^{-1}G_2P = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & -a_1 & 0\\ 0 & -b_1 & -a_1 & 0\\ a_1+b_1+\lambda & a_2-b_1 & -2a_1-a_2-b_1-\lambda & 0\\ 0 & b_1 & a_1 & 0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & \overline{G}_2 & & 0\\ \hline * & * & * & 0\end{array}\right)$$

により $(\overline{G}_1, \overline{G}_2)$ が決まる．

このとき

$$
\begin{aligned}
\overline{G}_1 &\sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -a_2-b_2 & \\ & & -a_1-a_2-b_2-\lambda \end{pmatrix} \\
\overline{G}_2 &\sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -a_1-b_1 & \\ & & -a_1-a_2-b_1-\lambda \end{pmatrix} \\
-\overline{G}_1-\overline{G}_2 &\sim \begin{pmatrix} a_1+a_2 & & \\ & a_1+a_2+b_1+b_2+\lambda & \\ & & a_1+a_2+b_1+b_2+\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

固有値の重複度を見ると，

$$
(1,1,1),\ (1,1,1),\ (2,1)
$$

となっているので，これは rigid の例で挙げた一般化超幾何級数 ${}_3F_2$ に帰着するものである．

対応する Fuchsian system の解は何か？

$$
\frac{dX}{dx} = \left(\frac{G_1}{x} + \frac{G_2}{x-1}\right) X
$$

に対して，先の P を用いた未知関数の変換

$$
X = PY
$$

を行うと，

$$
\frac{dY}{dx} = \left(\frac{P^{-1}G_1P}{x} + \frac{P^{-1}G_2P}{x-1}\right) Y
$$

$P^{-1}G_1P, P^{-1}G_2P$ の形から，この system は可約である．すなわち

$$
Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \hline y_2 \end{pmatrix}
$$

のように分割すると，Y_1 は閉じた system をみたす．それがすなわち middle convolution された system である：

$$
\frac{dY_1}{dx} = \left(\frac{\overline{G}_1}{x} + \frac{\overline{G}_2}{x-1}\right) Y_1
$$

★ Katz 理論は rigid な Fuchsian system のリストを与えるものではない．

★ しかし rigid な Fuchsian system の構造の研究にはより適していると考えられる．たとえば，

定理 既約 rigid な Fuchsian system は，Selberg 型の解の積分表示をもつ：

$$U(x) = L\left[\int_\Delta \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{p}(s_i - t_j)^{a_{ij}} \prod_{i=1}^{\ell-1}(s_{i+1} - s_i)^{b_i}(x - s_\ell)^c \frac{ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_\ell}{\prod_{i=1}^{\ell}(s_i - t_{j_i})}\right]$$

注意 一般の Selberg 型積分は，

$$\prod_{i=1}^{\ell-1}(s_{i+1} - s_i)^{b_i}$$

のところが

$$\prod_{i<j}(s_i - s_j)^{b_{ij}}$$

となっているものである．

◊ N. M. Katz: Rigid Local Systems, Pinceton Univ. Press, 1996.

◊ M. Dettweiler and S. Reiter: An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.*, **30** (2000), 761-798.

◊ M. Dettweiler and S. Reiter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra*, **318** (2007), 1–24.

大久保理論

大久保型方程式系とは,

$$(x-T)\frac{dU}{dx} = AU$$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_p I_{n_p} \end{pmatrix} \text{ : 対角行列}, \quad A \text{ : 定数行列}$$

という形の方程式系を指す.

$$(x-T)^{-1} = \begin{pmatrix} (x-t_1)^{-1} I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (x-t_p)^{-1} I_{n_p} \end{pmatrix}$$

なので,大久保型方程式系は

$$A_j := \begin{pmatrix} O & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{n_j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & O \end{pmatrix} A$$

により,Fuchsian system

$$\frac{dU}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x-t_j} \right) U$$

の特別な場合になっていることがわかる.

大久保型方程式系の特徴

★ Riemann-Liouville 変換（Euler 変換）ときわめて相性がよい：

$$U(x) : (x-T)\frac{dU}{dx} = AU \text{ の解}$$

とするとき，その Riemann-Liouville 変換

$$V(x) = \int_\Delta (s-x)^{\lambda-1} U(s)\, ds$$

は，

$$(x-T)\frac{dV}{dx} = (A+\lambda)V$$

という，A をスカラーシフトしただけの大久保型方程式系をみたす．

<u>証明</u>

$$\begin{aligned}
(x-T)\frac{dV}{dx} &= (x-T)\int_\Delta (-(\lambda-1))(s-x)^{\lambda-2} U(s)\, ds \\
&= \int_\Delta ((x-s)+(s-T))(-(\lambda-1))(s-x)^{\lambda-2} U(s)\, ds \\
&= (\lambda-1)\int_\Delta (s-x)^{\lambda-1} U(s)\, ds + \int_\Delta (-(\lambda-1))(s-x)^{\lambda-2}(s-T)U(s)\, ds
\end{aligned}$$

最後の式の第 1 項は $(\lambda-1)V(x)$ で，第 2 項に部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}
&\int_\Delta (-(\lambda-1))(s-x)^{\lambda-2}(s-T)U(s)\, ds \\
&\qquad = \left[-(s-x)^{\lambda-1}\cdot (s-T)U(s)\right]_{\partial\Delta} + \int_\Delta (s-x)^{\lambda-1}\frac{d}{ds}\big((s-T)U(s)\big)\, ds \\
&\qquad = \int_\Delta (s-x)^{\lambda-1}\left(U(s) + (s-T)\frac{dU(s)}{ds}\right) ds \\
&\qquad = V(x) + \int_\Delta (s-x)^{\lambda-1} AU(s)\, ds \\
&\qquad = V(x) + AV(x)
\end{aligned}$$

以上を合わせて，

$$(x-T)\frac{dV}{dx} = (\lambda-1)V(x) + V(x) + AV(x) = (A+\lambda)V(x)$$

を得る． □

この性質は，Katz の middle convolution を積分で実現する表示の証明の，本質的な部分にも用いられる．

★ Laplace 変換により，不確定特異点を持つ微分方程式系の標準形である Birkhoff 標準形へ移る：

$$U(x)\,:\,(x-T)\frac{dU}{dx}=AU \text{ の解}$$

とするとき，その Laplace 変換

$$V(x)=\int_\Delta e^{xs}U(s)\,ds$$

は，Poincaré rank 1 の Birkhoff 標準形

$$\frac{dV}{dx}=\left(T-\frac{A+1}{x}\right)V$$

をみたす．

注意　一般に Poincaré rank r の Birkhoff 標準形は，

$$\frac{dV}{dx}=x^{r-1}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\cdots+\frac{B_r}{x^r}\right)V$$

という形の方程式系を指す．

証明

$$\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dx}&=\int_\Delta se^{xs}U(s)\,ds\\ xV(x)&=\int_\Delta xe^{xs}U(s)\,ds\\ &=[e^{xs}U(s)]_{\partial\Delta}-\int_\Delta e^{xs}\frac{dU(s)}{ds}\,ds\\ &=-\int_\Delta e^{xs}\frac{dU(s)}{ds}\,ds\end{aligned}$$

に注意しておく．

$$\begin{aligned}xTV(x)&=-\int_\Delta Te^{xs}\frac{dU(s)}{ds}\,ds\\ &=\int_\Delta (s-T-s)e^{xs}\frac{dU(s)}{ds}\,ds\\ &=\int_\Delta e^{xs}(s-T)\frac{dU(s)}{ds}\,ds-\int_\Delta se^{xs}\frac{dU(s)}{ds}\,ds\\ &=\int_\Delta e^{xs}AU(s)\,ds-[se^{xs}U(s)]_{\partial\Delta}+\int_\Delta (e^{xs}+xse^{xs})U(s)\,ds\\ &=AV(x)+V(x)+x\frac{dV(x)}{dx}\qquad\square\end{aligned}$$

Balser-Jurkat-Lutz 理論：この対応により，大久保方程式系の接続係数と，Birkhoff 標準形の Stokes 係数が，ダイレクトに対応する．

◊ W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz: On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities, I, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 691-721.

大久保謙二郎氏

■ 大久保型方程式系に対し，解の基本系の標準的なとり方を与え，それらの Wronskian がガンマ関数の積の商で表されるという **Gauss-Okubo の公式**を証明することで，線形独立性を示した．

■ 大久保型方程式系のいろいろな操作に対する親和性を活かして，方程式系やモノドロミー表現を計算するメカニズムを開発した．

■ とくに rigid な大久保型方程式系の分類とその構造の研究に対する方向性を与えた．

■ Gauss-Okubo の公式は，一般化超幾何微分方程式の接続係数の計算にも用いられた．

◊ 大久保謙二郎：On the Group of Fuchsian Equations, 都立大学数学教室セミナー報告，1987.

◊ Mitsuhiko Kohno: Global Analysis in Linear Differential Equations, Kluwer, 1999.

◊ K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida: A connection problem for the generalized hypergeometric equation, *Funkcial. Ekvac.*, **31** (1988), 483–495.

そして横山利章氏，大島利雄氏の講演へと続く・・・