

アクセサリー・パラメーターの決定問題

原岡喜重

(熊本大学大学院自然科学研究科)

Encounter with Mathematics

2008年10月18日 中央大学

$$x(x-2)(x-27)y'' + \frac{10x^2 - 203x + 216}{6}y' + \left(\frac{7x}{144} - \frac{7}{18}\right)y = 0$$

$$(x^3 - 34x^2 + x)y'' + (2x^2 - 51x + 1)y' + \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right)y = 0$$

$$x(x-2)(x-27)y'' + \frac{10x^2 - 203x + 216}{6}y' + \left(\frac{7x}{144} + \left[-\frac{7}{18}\right]\right)y = 0$$

$$(x^3 - 34x^2 + x)y'' + (2x^2 - 51x + 1)y' + \left(\frac{x}{4} + \left[-\frac{5}{2}\right]\right)y = 0$$

[] で囲んだところがアクセサリ・パラメーター

===== ♣ =====

$$x(x-2)(x-27)y'' + \frac{10x^2 - 203x + 216}{6}y' + \left(\frac{7x}{144} + \left[-\frac{7}{18}\right]\right)y = 0$$

===== ♣ =====

{2, 5} で分岐する quaternion algebra over \mathbb{Q} :

$$\mathbf{A} = \mathbb{Q}[b, e], \quad b^2 + 2 = e^2 - 5 = be + eb = 0$$

$\mathbf{A}^*/\mathbb{Q}^*$ の部分群として, arithmetic group $\Gamma^*(1)$ が定義される. $\Gamma^*(1)$ の基本領域として, Shimura curve $\chi^*(1)$ が得られる. それらに対応する Schwarz 微分方程式が上記のものになる.

つまり, (Riemann scheme および) アクセサリー・パラメーターの値は, 射影モノドロミーが $\mathbb{P}(\Gamma^*(1))$ となるように定められている.

◇ Noam D. Elkies: Shimura curve computations, Algorithmic number theory (Portland, OR, 1998), 1–47, Lecture Notes in Comput. Sci., **1423**, Springer, Berlin, 1998.

===== ♣ =====

$$(x^3 - 34x^2 + x)y'' + (2x^2 - 51x + 1)y' + \left(\frac{x}{4} + \left[-\frac{5}{2}\right]\right)y = 0$$

===== ♣ =====

この方程式は、R. Apéry による $\zeta(3)$ の無理性の証明に現れたものである。
漸化式

$$(n+1)^3 u_{n+1} = (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n - n^3 u_{n-1}$$

$$u_0 = 1, u_1 = 5 \Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2$$

$$u_0 = 0, u_1 = 6 \Rightarrow c_n$$

すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \zeta(3)$$

これを用いて無理性が示された。

数列 $\{a_n\}$ の母関数 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ のみたす微分方程式は、漸化式から計算できて、

$$(x^4 - 3x^3 + x^2)y''' + (6x^3 - 153x^2 + 3x)y'' + (7x^2 - 112x + 1)y' + (x - 5)y = 0$$

これは可約で、2 階の微分方程式の対称積であることが分かる。その 2 階方程式が上のもの。

この微分方程式は、(若干の変換の後)、modular 群

$$\Gamma_1(6) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}); a \equiv d \equiv 1 \pmod{6}, c \equiv 0 \pmod{6} \right\}$$

に対する楕円曲線族の Picard-Fuchs 方程式であることが分かる。

★ (Riemann scheme および) アクセサリー・パラメーターは、次のもの (のうちの1つ) から決まったとすることができる:

- 解の級数展開
- 射影モノドロミー群
- 解の積分表示 (楕円曲線族の周期を与える積分)

◇ Roger Apéry: Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes, Mathematics, pp. 37–53, CTHS: Bull. Sec. Sci., III, Bib. Nat., Paris, 1981.

◇ Frits Beukers; Consequences of Apéry's work on $\zeta(3)$,
<http://www.math.uu.nl/people/beukers/>

これらの例を、「微分方程式の解が良い数論的性質を持つように、アクセサリー・パラメーターの値を決める問題」ととらえる。

このように数論と関わる微分方程式の場合には、mod p reduction が手法としてよく用いられている。

Bombieri-Dwork 予想 ほとんどすべての p について p -曲率がベキ零ならば、その微分方程式は geometric origin である。

Grothendieck 予想 ほとんどすべての p について p -曲率が0ならば、その微分方程式のモノドロミーは有限群である。

Dotsenko-Fateev: 2次元共形場理論に関して,

$$u(x) = \int_{\Delta} s_1^a (s_1 - 1)^b (s_1 - x)^c s_2^a (s_2 - 1)^b (s_2 - x)^c (s_1 - s_2)^g \frac{ds_1 \wedge ds_2}{s_1 s_2}$$

という Selberg 型積分のみたす微分方程式を求めた. system で書くと,

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \right) U$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2a + 2c + g & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b + g & a + c \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b + 2c + g & a \\ 2a + g & 0 & b + c \end{pmatrix}$$

このとき

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2c + g & & \\ & a + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}, A_2 \sim \begin{pmatrix} 2b + 2c + g & & \\ & b + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + A_2 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c + g & & \\ & a + b + 2c + g & \\ & & 2c \end{pmatrix}$$

単独高階の形では,

$$x^2(x-1)^2 u''' + p(x)u'' + q(x)u' + (r_1 x + r_0)u = 0$$

これらの Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & x = 1 & x = \infty \\ 0 & 0 & -2c \\ a + c & b + c + 1 & -(a + b + 2c + g) \\ 2a + 2c + g & 2b + 2c + g + 2 & -(2a + 2b + 2c + g) \end{array} \right\}$$

r_0 がアクセサリ・パラメーターで, その値は

$$r_0 = c(2a + 2c + g - 1)(2a + 2b + 2c + g)$$

アクセサリー・パラメーター r_0 の値を動かしても, Riemann scheme は変化しない. しかし「解が積分表示を持つ」という性質は失われると考えられる.

見方を変えると, 次の問題が考えられる.

問題 Riemann scheme

$$\left(\begin{array}{ccc} x = 0 & x = 1 & x = \infty \\ 0 & 0 & -2c \\ a + c & b + c + 1 & -(a + b + 2c + g) \\ 2a + 2c + g & 2b + 2c + g + 2 & -(2a + 2b + 2c + g) \end{array} \right)$$

を持つ方程式

$$x^2(x-1)^2 u''' + p(x)u'' + q(x)u' + (r_1 x + r_0)u = 0$$

の, アクセサリー・パラメーター r_0 の値を, 解が積分表示を持つように特定せよ.

この問題は, もちろん解の積分表示からスタートするのではなく, 方程式を「外から見て」 r_0 の値を決定することを求めている.

◇ V. S. Dotsenko and V. A. Fateev: Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models, *Nuclear Phys.* **B 240** (1984), no. 3, 312–348.

多変数の場合の rigidity

例として, Appell の 2 変数超幾何級数

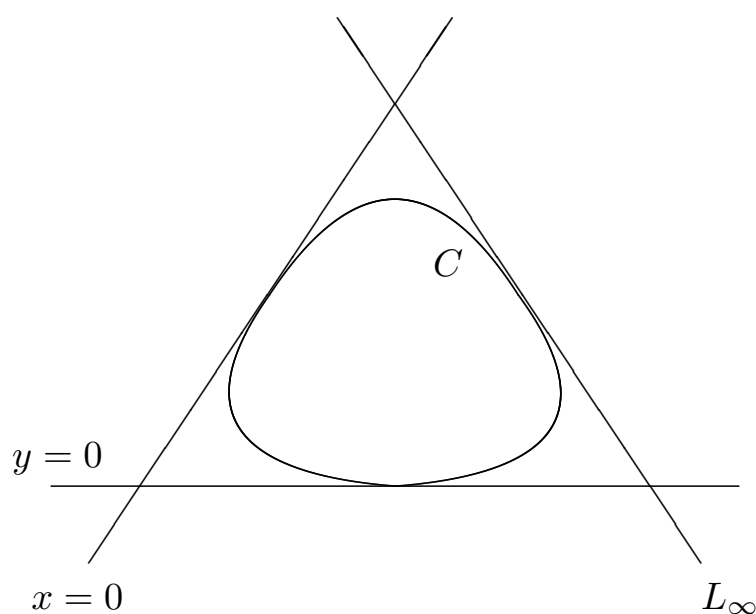
$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)m!n!} x^m y^n$$

のみたす微分方程式系を考える. それは rank 4 の Pfaffian system

$$dU = [A(x, y)dx + B(x, y)dy]U$$

の形に書くことができる. ここで $A(x, y), B(x, y)$ は x, y の有理関数を成分とする 4×4 行列.

Pfaffian system より, singular locus が求められる ($\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ で考える):



$$C : (1 - x - y)^2 - 4xy = 0$$

Riemann scheme は

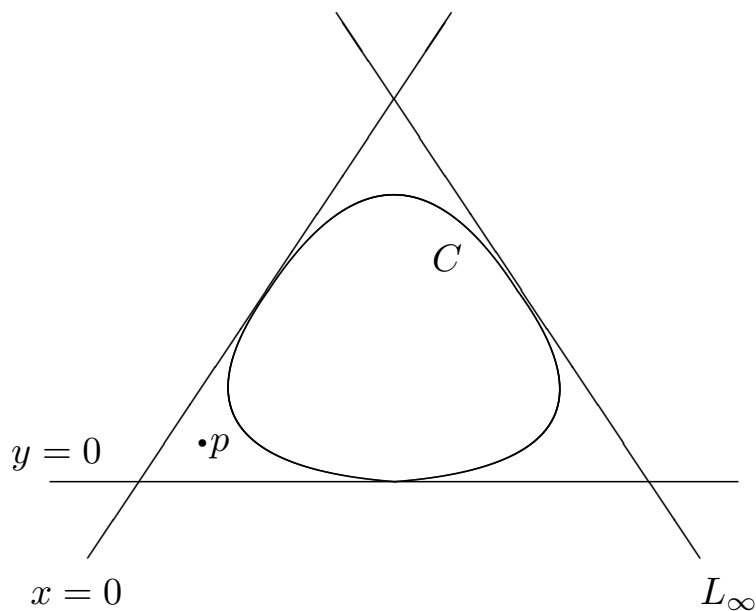
$$\left(\begin{array}{cc|cc} x=0 & y=0 & C & L_\infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\gamma' & 0 & \beta \\ 1-\gamma & 1-\gamma' & \gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\frac{1}{2} & \beta \end{array} \right)$$

singular locus を S とおく :

$$S = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup C \cup L_\infty$$

基点 p をとる. モノドロミー表現は基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S, p)$ の表現になるので, 基本群の表示を求めておく.

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S, p) = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \mid \mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_1, (\mu_1\mu_3)^2 = (\mu_3\mu_1)^2, (\mu_2\mu_3)^2 = (\mu_3\mu_2)^2, \mu_4\mu_3\mu_2\mu_3\mu_1 = 1 \rangle$$



μ_1 : $x=0$ を回る loop, μ_2 : $y=0$ を回る loop,
 μ_3 : C を回る loop, μ_4 : L_∞ を回る loop

p における基本解系を 1 つ定め, モノドロミー表現を

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S, p) & \rightarrow & \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \\ \mu_j & \mapsto & M_j \end{array}$$

とすると, Riemann scheme と基本群の表示より, 行列の組 (M_1, M_2, M_3, M_4) は次をみたさなくてはならないことが分かる.

$$\begin{aligned} M_1 &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & e(-\gamma) & \\ & & & e(-\gamma) \end{pmatrix} \\ M_2 &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & e(-\gamma') & \\ & & & e(-\gamma') \end{pmatrix} \\ M_3 &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & e(c) \end{pmatrix} \\ M_4 &\sim \begin{pmatrix} e(\alpha) & & & \\ & e(\alpha) & & \\ & & e(\beta) & \\ & & & e(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 M_2 &= M_2 M_1, & (M_1 M_3)^2 &= (M_3 M_1)^2, \\ (M_2 M_3)^2 &= (M_3 M_2)^2, & M_1 M_3 M_2 M_3 M_4 &= I \end{aligned}$$

ただし

$$c = \gamma + \gamma' - \alpha - \beta - \frac{1}{2}$$

定理 (M_1, M_2, M_3, M_4) が既約なら, それらは上の条件により, 一斉相似変換を除いて一意的に定まる.

即ち F_4 のモノドロミー表現は rigid である.

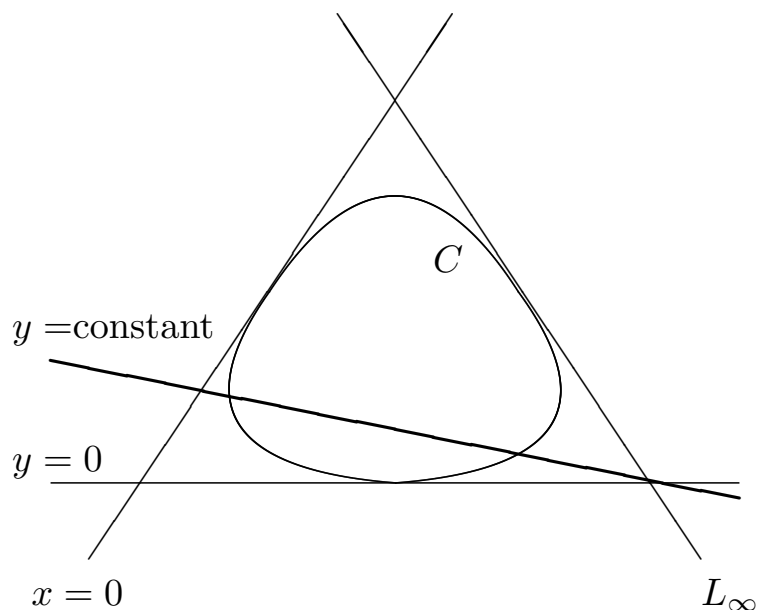
F_4 のみたす Pfaffian system

$$dU = [A(x, y)dx + B(x, y)dy]U$$

を, $y = \text{constant}$ に制限して得られる常微分方程式を考えてみよう.

$$\frac{dU}{dx} = A(x, y)U$$

となる. ただし y は定数と見ている.



この常微分方程式の Riemann scheme は,

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = 0 & x = y - 2\sqrt{y} + 1 & x = y + 2\sqrt{y} + 1 & x = \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \gamma' + 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & \beta \\ -\gamma & \gamma + \gamma' - \alpha - \beta - \frac{5}{2} & \gamma + \gamma' - \alpha - \beta - \frac{5}{2} & \beta - \gamma' + 1 \end{array} \right\}$$

これは常微分方程式なので、rigidity は rigidity 指数を計算することで判定できる。

$$l = (2 - 4) \cdot 4^2 + (2^2 + 2^2) + 2(3^2 + 1^2) + (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 0$$

したがって rigid でない。

2変数の holonomic 系としては rigid であったが、1変数に制限したものは rigid ではなくなった。このような「ずれ」は、喜ぶべきこと。

話を逆転させて考えると、rigid ではない常微分方程式

$$\frac{dU}{dx} = A(x, y)U$$

に対して、その特異点の位置を定めるパラメーター y を第2の変数として、 (x, y) についての holonomic 系に延長することを考えると、それは可能で、

$$dU = [A(x, y)dx + B(x, y)dy]U$$

が得られ、それは rigid である。したがってモノドロミーが計算でき、それを戻すと、元の常微分方程式のモノドロミーも計算できる。

即ち、延長により rigid でない方程式のモノドロミーが計算できたことになる。

★ holonomic 系に延長すると、特異点の形状によっては基本群の生成元の間関係式が増えることがあり、その分、モノドロミーが決まりやすくなる。

今の例で言えば、 $M_1M_2 = M_2M_1$, $(M_1M_3)^2 = (M_3M_1)^2$, $(M_2M_3)^2 = (M_3M_2)^2$ といった関係式は、常微分を考えているときには現れなかったものである。

微分方程式の延長・制限の様子が一番見やすいと思われる，3 階の Jordan-Pochhammer 方程式 (JP_3) を見てみよう.

JP_3 は 3 階の Fuchs 型常微分方程式で，それを system に書いたときの Riemann scheme は

$$\left(\begin{array}{cccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ \lambda & \mu & \nu & \kappa \end{array} \right)$$

rigidity 指数は

$$\iota = (2 - 4) \cdot 3^2 + 4(2^2 + 1^2) = 2$$

となり，rigid.

解の積分表示

$$u(x) = \int_{\Delta} s^a (s-1)^b (s-t)^c (s-x)^d ds$$

これを見ると，独立変数 x と特異点の位置 t は，積分の中では同じような役割を果たしている．するとこれを x の関数と見るより， (x, t) の 2 変数関数と見る方が自然である．

t についての微分方程式を求め，それをもとの x についての方程式と連立させると， (x, t) に関する holonomic system が得られる．それは Appell の 2 変数超幾何関数

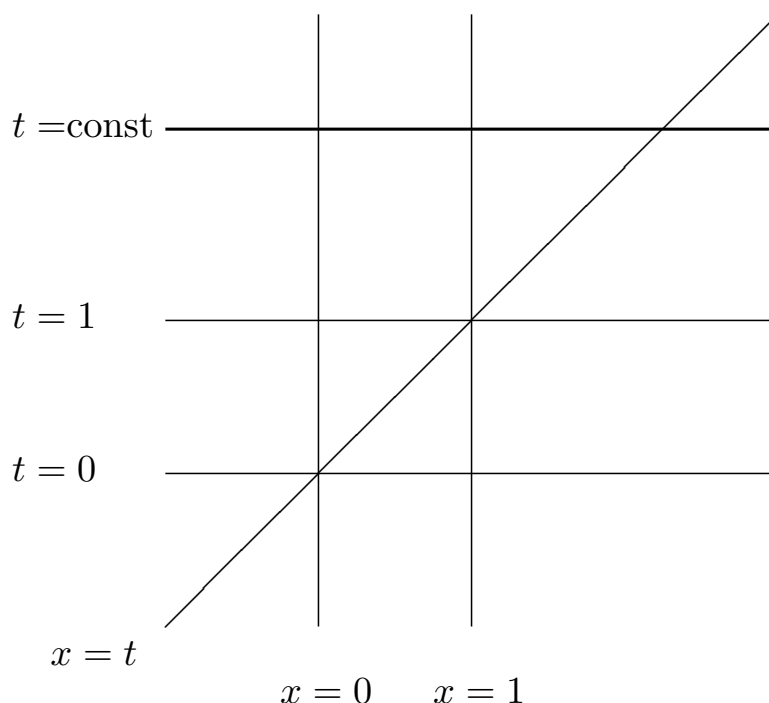
$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)m!n!} x^m t^n$$

のみたす rank 3 の Pfaffian system である．

その singular locus は, \mathbb{C}^2 においては

$$S = \{x = 0\} \cup \{x = 1\} \cup \{t = 0\} \cup \{t = 1\} \cup \{x = t\}$$

であることがわかる.



こうして JP_3 を 2 変数 holonomic system に延長することができた.

逆に JP_3 に戻るには, $t = \text{constant}$ とすればよい. すると $t = \text{constant}$ という section 上では, S との交点として

$$x = 0, 1, t$$

が特異点として現れ, JP_3 の特異点がちゃんと復活していることがわかる.

以上の例のように, 延長する場合の新しい変数としては, 特異点の位置を採用するのが良さそうに思われる. しかし特異点が 3 点の場合には, それらを $0, 1, \infty$ に normalize してしまうと, 変数となりうる特異点が残らない. Dotsenko-Fateev の場合はまさにそうになっている.

singular locus への制限

holonomic system の singular locus 上では、一般に解は特異性を示すが、中には正則なものもある。そのような正則なものだけを取り出し、それに対して制限を行うことを singular locus への制限という。

Appell の F_4 の singular locus への制限は、加藤満生氏により求められている。その中でもとくに 2 次曲線 C への制限は、実は Dotsenko-Fateev の方程式と一致する。そこで C への制限をどうやって求めるのかを説明しよう。

F_4 の Pfaffian system

$$dU = ((A(x, y)dx + B(x, y)dy)U$$

に、

$$X = xy, \quad Y = (x - 1)(y - 1)$$

により定まる変数変換 $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ を行うと、その結果

$$dU = \left[P_1 \frac{dX}{X} + P_2 \frac{dY}{Y} + P_3 \frac{d(X - 1)}{X - 1} + P_4 \frac{d(Y - 1)}{Y - 1} + P_5 \frac{d(X - Y)}{X - Y} \right] U$$

という logarithmic form で書かれる Pfaffian system に変換される。新しい変数における singular locus は

$$X = 0, Y = 0, X = 1, Y = 1, X = Y, L_\infty$$

であり、そのうち $X = Y$ が 2 次曲線 C に対応する。したがって C への制限は、新しい Pfaffian system における $X = Y$ への制限ということになる。

$X = Y$ に対する留数行列は P_5 であり、その固有値は

$$0, 0, 0, \epsilon$$

となっている。これは正則解が3次元分あり、 $(X - Y)^\epsilon$ という特異性を持つ解が1次元分あることを意味する。独立変数を $(X, X - Y)$ とすると、正則解は

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(X)(X - Y)^m$$

という展開で与えられる。これを方程式に代入して、 $(X - Y)^m$ についての係数比較をすると、

$$P_5 g_0(X) = 0$$

が得られる。簡単のため

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \epsilon \end{pmatrix}$$

となっているとしよう。すると

$$g_0(X) = \begin{pmatrix} g_0^1(X) \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

となる。

正則解

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(X)(X - Y)^m$$

を Pfaffian system

$$dU = \left[P_1 \frac{dX}{X} + P_2 \frac{dY}{Y} + P_3 \frac{d(X-1)}{X-1} + P_4 \frac{d(Y-1)}{Y-1} + P_5 \frac{d(X-Y)}{X-Y} \right] U$$

に代入し、両辺に $X = Y$ を代入することにより、 $g_0^1(X)$ のみたす微分方程式

$$\frac{dg_0^1}{dX} = \left(\frac{B_1}{X} + \frac{B_2}{X-1} \right) g_0^1$$

が得られる. ここに

$$P_1 + P_2 = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & * \\ \hline * & * \end{array} \right), \quad P_3 + P_4 = \left(\begin{array}{c|c} B_2 & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$$

これが singular locus $X = Y$ への制限方程式である. そしてこれが Dotsenko-Fateev に一致するのである.

★ Dotsenko-Fateev を, この延長可能性により特定することはできないだろうか.

定理 B_1, B_2 は

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2c + g & & \\ & a + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \sim \begin{pmatrix} 2b + 2c + g & & \\ & b + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 + B_2 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c + g & & \\ & a + b + 2c + g & \\ & & 2c \end{pmatrix}$$

をみたすとする. ある rank 4 の holonomic system

$$\frac{dU}{dx} = \left[R_1 \frac{dx}{x} + R_2 \frac{dy}{y} + R_3 \frac{d(x-1)}{x-1} + R_4 \frac{d(y-1)}{y-1} + R_5 \frac{d(x-y)}{x-y} \right] U$$

で,

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \\ & & & \epsilon \end{pmatrix}$$

をみたすものが存在し,

$$R_1 + R_2 = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & * \\ \hline * & * \end{array} \right), \quad R_3 + R_4 = \left(\begin{array}{c|c} B_2 & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$$

となるなら, (B_1, B_2) は一斉相似変換を除いて一意に定まる.

この一意に定まるものが, Dotsenko-Fateev である. つまりこの定理は, 延長可能性によって Dotsenko-Fateev のアクセサリー・パラメーターの値がきまることを示している.

注意 定理の中の仮定

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2c + g & & \\ & a + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}, B_2 \sim \begin{pmatrix} 2b + 2c + g & & \\ & b + c & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_1 + B_2 \sim \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c + g & & \\ & a + b + 2c + g & \\ & & 2c \end{pmatrix}$$

は, Riemann scheme を指定するものだが, これもはずせるであろうと思われる (計算中).