解析概論 III　定期試験問題

2012 年 2 月 10 日 10：20 － 11：50

1. 微分方程式

$$y' = \sin y$$

について以下の問に答えよ.

(1) 任意に与えた $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，初期条件

$$y(a) = b$$

をみたす解は一意的に存在することを示せ.

(2) 任意の解は $\mathbb{R}$ 全体に延長されることを示せ.

(3) 任意の解 $\varphi(x)$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\psi(x) = \varphi(x + c)$$

とおくとき，$\psi(x)$ も解となることを示せ.

2. 微分方程式

$$\text{(E)} \qquad y'' = x(y')^2 - y^3$$

について以下の問に答えよ..

(1) 新しい未知関数 y_1, y_2 を

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'$$

と定めることで，(E) を y_1, y_2 に関する連立 1 階型の微分方程式に書き換えよ.（連立 1 階型とは，未知関数ベクトル $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ についての微分方程式のことと思って良い.）

(2) 任意に与えた $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ に対し，初期条件

$$y(a) = b_1, \quad y'(a) = b_2$$

をみたす (E) の解は一意的に存在することを示せ.

3. 微分方程式

$$y' = \frac{x}{y^3}$$

について以下の問に答えよ.

(1) 一般解を求めよ.

(2) 初期条件

$$y(a) = b$$

をみたす解が $\mathbb{R}$ 全体に延長されるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ のなす $\mathbb{R}^2$ の部分集合を求め，図示せよ.

解答

1. (1)　$f(x,y)=\sin y$ とおく．$r>0,\ \rho>0$ を任意に取り，

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}\,;\ |x-a|\leqq r,\ |y-b|\leqq\rho\}$$

とおくと，E 上で $f(x,y)$ は連続であり，$|f(x,y)|\leqq 1$ をみたす．任意の y,z に対し，平均値の定理を用いると

$$f(x,y)-f(x,z)=\sin y-\sin z=\cos c\cdot(y-z)$$

となる c が存在するので，

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqq|\cos c||y-z|\leqq|y-z|$$

が成り立つ．したがって $f(x,y)$ は Lipschitz 条件をみたしている．よってこの微分方程式の初期条件 $y(a)=b$ をみたす解は一意的に存在する．

(2)　$M=1$ が $|f(x,y)|$ の上界であったので，今の解は

$$|x-a|\leqq\min\left(r,\frac{\rho}{M}\right)=\min(r,\rho)$$

の範囲で存在する．$r,\ \rho$ は任意に大きく取れるので，この解は $\mathbb{R}$ 全体に延長される．

(3)

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\varphi(x+c)=\varphi'(x+c)=\sin\varphi(x+c)=\sin\psi(x)$$

であるから，$\psi(x)$ も解となる．(微分方程式の右辺が x を含まないことが効いている．)

2. (1)

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}y_2\\ x{y_2}^2-{y_1}^3\end{pmatrix}$$

(2)　$\mathbb{R}^2$ のノルムとして

$$||\vec{y}||=\max(|y_1|,|y_2|)$$

を使おう（他のノルムでもできる）．(1) で求めた方程式の右辺を $\vec{f}(x,\vec{y})$ とおく．$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ とおく．$r>0,\ \rho>0$ を任意に取り，

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}\,;\ |x-a|\leqq r,\ ||\vec{y}-\vec{b}||\leqq\rho\}$$

と定めると，$\vec{f}(x,\vec{y})$ は 2 つの成分とも多項式なので E 上で連続である．$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$,

$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ を任意に取るとき，

$$\begin{aligned}
|f_1(x,\vec{y}) - f_1(x,\vec{z})| &= |y_2 - z_2| \leqq ||\vec{y} - \vec{z}||, \\
|f_2(x,\vec{y}) - f_2(x,\vec{z})| &= |(x{y_2}^2 - {y_1}^3) - (x{z_2}^2 - {z_1}^3)| \\
&= |x({y_2}^2 - {z_2}^2) - ({y_1}^3 - {z_1}^3)| \\
&\leqq |x(y_2 + z_2)||y_2 - z_2| + |{y_1}^2 + y_1 z_1 + {z_1}^2||y_1 - z_1| \\
&\leqq K_1|y_1 - z_1| + K_2|y_2 - z_2| \\
&\leqq \max(K_1, K_2)||\vec{y} - \vec{z}||
\end{aligned}$$

となる．ただしここで K_1, K_2 は，

$$|{y_1}^2 + y_1 z_1 + {z_1}^2| \leqq K_1,\ |x(y_2 + z_2)| \leqq K_2$$

となるような定数で，$(x,\vec{y}), (x,\vec{z}) \in E$ としているとき確かに存在する．（たとえば $K_1 = 3(\max(|b_1| + \rho, |b_2| + \rho))^2$, $K_2 = (|a| + r)(|b_2| + \rho)$ などとすればよい．）これにより，$\max(1, K_1, K_2) = L$ とおくと，

$$||\vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{z})|| \leqq L||\vec{y} - \vec{z}||$$

が成り立つので，Lipschitz 条件がみたされる．したがって初期条件に対する解は一意的に存在する．

3. (1) 変数分離形の微分方程式として，求積法で一般解を求めることができる．一般解は

$$y = \pm\sqrt[4]{2x^2 + C}$$

で，C は任意定数．

(2) 初期条件を課すと，

$$C = b^4 - 2a^2$$

となることがわかる．(1) の解が $\mathbb{R}$ 全体に延長されるためには，y が定義できて $y \neq 0$ となる必要があるので，そのための条件は $C > 0$ である．したがって求める (a,b) の領域は，

$$b^4 - 2a^2 > 0$$

という不等式をみたす領域となる．この領域を具体的に求めるなら，

$$b^4 - 2a^2 = (b^2 - \sqrt{2}a)(b^2 + \sqrt{2}a) > 0$$

より，

$$b^2 > \sqrt{2}a \ \text{ かつ } \ b^2 > -\sqrt{2}a$$

となる．図は省略する．