

問題 3 — 4, 5 の解答

4.

(1) $\sqrt[3]{1.01} = (1.01)^{\frac{1}{3}}$ なので,

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

とおいたときの $f(1.01)$ を求める問題と考えることにする.

1 は 1.01 に近く, しかも $f^{(n)}(1)$ の値がすべて計算できるので, $f(x)$ の $x = 1$ における Taylor 展開を考えることにする.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & f'(1) &= \frac{1}{3} \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} & f''(1) &= -\frac{2}{9} \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} & f'''(1) &= \frac{10}{27} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}} & f^{(4)}(1) &= -\frac{80}{81} \end{aligned}$$

この計算により, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ の $x = 1$ における Taylor 展開は,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)^2 + \frac{1}{3!} \frac{10}{27}(x-1)^3 + \frac{1}{4!} \left(-\frac{80}{81}\right)(x-1)^4 + \dots$$

となることが分かる. この式の右辺をどこかで打ち切って近似多項式を手に入れ, 残りの無限項を Taylor の定理に現れた誤差項として表して, その絶対値を評価することになる. 何次の項で打ち切ればよいかは, やって見ないと分からないところもあるので, とりあえず 2 次で打ち切ってみよう. すなわち

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)^2 + R_3$$

とする. このときの誤差項 R_3 は Taylor の定理により,

$$R_3 = \frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3$$

と表される. ここで c は x と 1 の間の数である. この打ち切り方で良かったかどうかを調べるため, R_3 の大きさを見てみる. 今, $x = 1.01$ とするので, $x - 1 = 0.01 = 10^{-2}$ に注意する. また c については, $1 < c < 1.01$ となっている. したがって

$$|R_3| = \left| \frac{1}{3!} \frac{10}{27} c^{-\frac{8}{3}} (0.01)^3 \right| \leq \frac{10}{3! \cdot 27} \times 10^{-6} \leq 10^{-6}$$

という評価が得られ, R_3 の値は小数第 4 位には影響しないことが分かる. さてそこで, 近似多項式

$$1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)^2$$

を用いて値を計算しよう. この多項式に $x - 1 = 0.01$ を代入する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x-1) &= 0.0033333 \dots \\ \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)^2 &= -\frac{10^{-4}}{9} = 0.00001111 \dots \end{aligned}$$

より、近似多項式の $x = 1.01$ における値は、

$$1 + 0.003333 \cdots - 0.00001111 \cdots = 1.0033 \cdots$$

となる。これと $|R_3| \leq 10^{-6}$ を合わせると、

$$\sqrt[3]{1.01} = f(1.01) \doteq 1.0033$$

となることが分かる。

コメント 実は $|R_2| < 1.2 \times 10^{-5}$ という評価も成り立つので、1次で打ち切っても良かった。

(2) $\tan \theta = 0.05$ ということは、

$$\theta = \tan^{-1} 0.05$$

ということなので、 $f(x) = \tan^{-1} x$ としたとき $f(0.05)$ を求める問題ととらえる。0.05 は 0 に近いので、 $f(x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開を利用しよう。

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan^{-1} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} & f'''(0) &= -2 \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4} & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

この計算により、 $f(x) = \tan^{-1} x$ の $x = 0$ における Taylor 展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-2}{3!}x^3 + 0 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

となることが分かる。これを何次で打ち切れば十分なのかはやってみないと分からないが、とりあえず2次で打ち切り、

$$f(x) = x + R_3$$

として、 R_3 の評価を行ってみる。 $x = 0.05$ のとき、Taylor の定理により

$$|R_3| = \left| \frac{f'''(c)}{3!} x^3 \right| = \left| \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3} \frac{1}{3!} 0.05^3 \right| \leq \frac{1}{3} 0.05^3 \leq 0.00005$$

という評価を得る。このことから R_3 の値は小数第3位には影響を与えないことが分かる。したがって近似多項式として x を採用することができて、

$$\theta = \tan^{-1} 0.05 = f(0.05) \doteq 0.050$$

という値を得る。

コメント Taylor 展開の2次の項が0なので、1次で打ち切っても2次で打ち切っても近似多項式は変わらない。しかし誤差項は R_2 と R_3 で異なり、一般に R_n の n が大きい方が絶対値が小さくなる期待されるので、2次で打ち切ったことにして $|R_3|$ を評価する方が良いと考えられる。

5.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

(2) $\sin x$ と $\log x$ を直接比較するのは難しいが, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を思い出すと, x を仲立ちとして比較できるのではないかと考えられる. $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ も用いると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \cdot \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \log x \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x \log 5 - 3^x \log 3}{1} = \log 5 - \log 3$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cos(1-x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x(-\cos(1-x)) = 1 \cdot (-1) = -1$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3 - 1}{\cos^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3x^2}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-\sqrt{1-x^2}) \cdot 3x^2 = 0 \cdot 3 = 0$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^2)e^{-x} = 0$$

(7) $x^x = e^{x \log x}$ であることを思い出す.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

であることから,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} = e^0 = 1$$

(8) 全問と同様に $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$ であったので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log n = 0$$

であることから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$$