# 解析概論 I 中間試験

**1.** 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するなら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つことを示せ。

**2.** $f(x)$ を $(a,b)$ 上の連続関数とし，$c \in (a,b)$ とする。$f(c) \neq 0$ であれば，$\dfrac{1}{f(x)}$ は $x = c$ の近傍で定義されて連続であることを示せ。

**3.** (1) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ 内で稠密であることを示せ。

(2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ 内で稠密であることを示せ。

(3) $S = \{\sin x \mid x \in \mathbb{Q}\}$ は区間 $[-1,1]$ 内で稠密であることを示せ。

**4.** $f(x)$ を恒等的には 0 でない多項式とするとき，ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ の収束半径を求めよ。

**5.** 開区間 $I$ 上の微分可能関数からなる関数列 $\{f_n(x)\}$ で，$I$ 上一様収束するが，その極限は $I$ 上で微分可能ではないような例を作れ。

**6.** ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の長さ $|x|$ を

$$|x| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

により定義する。$n \times n$ 行列 $A$ に対して，そのノルム（と呼ばれる量）$||A||$ を

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

により定義する。このとき次を示せ。（以下で $A, B$ は $n \times n$ 行列とする。）

(1) $||A|| = 0$ ならば $A$ はゼロ行列である。

(2) $c \in \mathbb{R}$ に対して，$||cA|| = |c|\,||A||$ が成り立つ。

(3) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ が成り立つ。

(4) $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ が成り立つ。

(5) $\displaystyle ||A|| = \sup_{|x|=1} |Ax|$ が成り立つ。

(6) $A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ と書くとき，任意の $i,j$ に対して $|a_{ij}| \leq ||A||$ が成り立つ。

解答

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することの定義は,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で定まる数列 $\{S_n\}$ が収束すること。これは $\{S_n\}$ が Cauchy 列となることと同値。

したがって $\forall \varepsilon > 0$ に対し $N$ が存在して，$n-1 > N$ なら

$$|S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

が成り立つ。$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから，これは $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を意味する。

**2.** $f(c) = \gamma \neq 0$ とおく。$f(x)$ は連続だから，$0 < \varepsilon < \ |\gamma|$ となる $\varepsilon$ を取ると，ある $\delta > 0$ が存在して,

$$|x - c| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成り立つ。この不等式から直ちに

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \ \Rightarrow\ |f(x)| > |\gamma| - \varepsilon > 0$$

が得られる。特に区間 $(c - \delta, c + \delta)$ においては $f(x) \neq 0$。よってここで $1/f(x)$ は定義される。

さてまず $1/f(x)$ が $x = c$ で連続であることを示す。$f(x)$ は $x = c$ で連続だから，$\forall \varepsilon_1 > 0$ に対して，$\delta_1 > 0$ が存在して,

$$|x - c| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon_1(|\gamma| - \varepsilon)|\gamma|$$

とできる。$\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$ とすると，$|x - c| < \delta_2$ なら

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)} \right| = \frac{|f(x) - f(c)|}{|f(x)||f(c)|} \leq \frac{|f(x) - f(c)|}{(|\gamma| - \varepsilon)|\gamma|} < \varepsilon_1$$

となるから，$1/f(x)$ は $x = c$ で連続。

$x_0 \in (c - \delta, c + \delta)$ を任意に取ると，$f(x_0) \neq 0$ である。すると上記の議論で $c$ のところを $x_0$ に置き換えれば，$1/f(x)$ が $x = x_0$ で連続であることが示される。

**3.** (1) $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ の完備化として定義した。すなわち $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{Q}$ の元からなる Cauchy 列 $\{a_n\}$ が存在して

$$|a_n - \alpha| \to 0$$

となる。言い換えると，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，ある $N$ が存在して，$n > N$ なら

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ。$a_n \in \mathbb{Q}$ だから，これは $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密であることを意味する。

(2) たとえば $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ である。$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$n$ を十分大きく取ると,

$$10^{-n}\sqrt{2} < \varepsilon$$

とできる。さて$q \in \mathbb{Q}$を任意に取ると，$\mathbb{Q}$は四則演算に関して閉じているので，$q+10^{-n}\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$である。そして

$$|q-(q+10^{-n}\sqrt{2})| = 10^{-n}\sqrt{2} < \varepsilon$$

であるから，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密である。

(3)

$$\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = [-1,1]$$

である。よって $\forall y \in [-1,1]$ に対して $z \in \mathbb{R}$ が存在して，$\sin z = y$ となる。$\sin x$ は連続だから，$\forall \varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，

$$|x-z| < \delta \;\Rightarrow\; |\sin x - \sin z| < \varepsilon$$

が成り立つ。$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密なので，$|x-z| < \delta$ をみたす $x \in \mathbb{Q}$ が存在する。

以上をつなげると，$\forall y \in [-1,1]$ に対して，$x \in \mathbb{Q}$ があって，

$$|\sin x - y| < \varepsilon$$

が成り立つので，$\{\sin x \mid x \in \mathbb{Q}\}$ は $[-1,1]$ で稠密である。

**4.** これは演習問題 85 番と同じ。まだ未解答なのでここには解答を載せない。

**5.** これは演習問題 73, 74, 75 番を解けばよい。（それ以外にも多くの例を作ることができる。）これも解答は載せない。

**6.** まず定義から，$x \neq 0$ に対して

$$|Ax| \leq ||A|||x| \qquad (*)$$

が成り立つことに注意しておく。

(1) $||A|| = 0$ なら，不等式 $(*)$ から，任意の $x \neq 0$ に対して $|Ax| = 0$ となる。

$x = {}^t(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ と取る。1 は第 $j$ 成分にあるとする。すると $Ax$ は $A$ の第 $j$ 列である。$|Ax| = 0$ であるから，$A$ の第 $j$ 列はゼロベクトルである。$j$ は任意に取れるので，$A$ のすべての列がゼロベクトルとなり，$A = O$ が従う。

(2)

$$||cA|| = \sup_{x\neq 0}\frac{|cAx|}{|x|} = \sup_{x\neq 0}\frac{|c||Ax|}{|x|} = |c|\sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|} = |c|||A||$$

(3) $x \neq 0$ に対し，三角不等式と不等式 $(*)$ を使うと

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq ||A|||x| + ||B|||x| = (||A|| + ||B||)|x|$$

が得られる。これより

$$\frac{|(A+B)x|}{|x|} \leq ||A|| + ||B||$$

したがって左辺の sup を取っても不等号が成り立つので,

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

(4)　$x \neq 0$ に対し，不等式 $(*)$ を繰り返し使うと,

$$|ABx| = |A(Bx)| \leq ||A|||Bx| \leq ||A||||B|||x|$$

が得られる。これより

$$\frac{|ABx|}{|x|} \leq ||A||||B||$$

左辺の sup を取っても不等号は成り立つので,

$$||AB|| \leq ||A||||B||$$

(5)　任意の $x \neq 0$ に対して $|x| = c(\neq 0)$ とおくと，$|1/c \cdot x| = 1$ となる。すなわち $1/c \cdot x = y$ とおくと $|y| = 1$ であり，任意の $|y| = 1$ となるベクトルはこのようにして得られる。

$$\frac{|Ax|}{|x|} = \frac{|Ax|}{c} = \frac{|A\frac{1}{c}x|}{1} = |Ay|$$

であるから，両辺の sup を取れば,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|y|=1} |Ay|$$

(6)　(1) と同じ $x = {}^t(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ を取ると，不等式 $(*)$ により

$$|Ax| \leq ||A|||x| = ||A||$$

となるが，左辺は $A$ の第 $j$ 列の長さである。したがって

$$|a_{ij}| \leq \sqrt{{a_{1j}}^2 + \cdots + {a_{nj}}^2} = |Ax| \leq ||A||$$