数学演習 I　第 14 回

復習シリーズ第 2 回

1. (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

の 2 つの固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の 3 つの固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．(実際に固有値・固有ベクトルを求めるやり方では困難.)

2. $a > 0$ に対して，広義積分

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

が収束することを示せ．

3. 偏微分方程式

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

を，極座標 (r, θ) を用いて書き直せ．

4. 複素平面上の曲線の媒介変数表示とは，

$$z = z(t) \quad (t \in [a, b])$$

という連続関数であって，その軌跡が与えられた曲線に一致するようなものを指す．次の曲線について，媒介変数表示を求めよ．

(1) 2 点 $2 + i, -1 + 3i$ を結ぶ線分

(2) $|z - \alpha| = r$（α はある固定された複素数）

(3) $\arg(z - \alpha) = \theta$（$\alpha$ はある固定された複素数，θ はある固定された実数）

(4) 方程式 $|z| = \arg z$ で定まる曲線

5. $n \times n$-行列 A に対して，ある多項式 $f(x)$ があって

$$f(A) = O$$

が成り立っているとする．このとき A の任意の固有値 λ に対し，

$$f(\lambda) = 0$$

となることを示せ．

数学演習 I　第 14 回　解答

1. (1)

$$\left| xI - \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \right| = (x-10)(x+4)$$

より固有値は $10, -4$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} 3v_1 + 7v_2 = 10v_1 \\ 7v_1 + 3v_2 = 10v_2 \end{cases}$$

これを解いて，固有値 10 に対する固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る．同様に，固有値 -4 に対する固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る．内積をとると，

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

となり，これらの固有ベクトルが直交していることがわかる．

(2)　固有多項式を $f(x)$ とおくと，

$$f(x) = |xI - A| = x^3 - 8x^2 - 6x + 99$$

となる．$f(x)$ が重解を持たないことを示そう．$f(x) = 0$ が重解を持つことは，$f(x) = 0$ と $f'(x) = 0$ が共通解を持つことと同値である．$f'(x) = 3x^2 - 16x - 6$ である．共通解があれば，それは

$$3f(x) - xf'(x) = -8x^2 - 12x + 287 = 0$$

の解となり，さらにまた

$$3(-8x^2 - 12x + 287) + 8f'(x) = -164x + 843 = 0$$

の解ともなる．ところがこれの解 $843/164$ は $f'(x) = 0$ の解とはならない．従って $f(x) = 0$ と $f'(x) = 0$ は共通解を持たず，よって固有値に重複はない．

対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する（第 9 回 1 (2)）ので，A の 3 つの固有ベクトルは互いに直交することが示された．

2. $0<a<1$ のときは $x=0$ のところでも広義積分となるので，

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon^R x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

である．2 つの極限は分離した方が考えやすいので，

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon^R x^{a-1}e^{-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

として，それぞれの極限が収束することを示そう．

区間 $[0,1]$ においては $0<e^{-x}\le 1$ なので，

$$0\le x^{a-1}e^{-x}\le x^{a-1}$$

したがって

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx \le \int_\varepsilon^1 x^{a-1}\,dx = \left[\frac{x^a}{a}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{a}-\frac{\varepsilon^a}{a}\to\frac{1}{a}$$

となって，積分は上に有界．積分の中の関数は正なので，$\varepsilon\to+0$ のとき単調増加．従って第一の極限は収束する．

第二の極限については，

$$x^{a-1}e^{-x} = x^{a-1}e^{-x/2}e^{-x/2}$$

とすると，

$$\lim_{x\to\infty}x^{a-1}e^{-x/2}=0$$

となるので，区間 $[1,\infty)$ において

$$0<x^{a-1}e^{-x/2}\le A$$

となるある定数 $A>0$ がとれる．従って

$$\int_1^R x^{a-1}e^{-x}\,dx \le A\int_1^R e^{-x/2}\,dx = A[-2e^{-x/2}]_1^R = A(-2e^{-R/2}+2e^{-1/2})\to Ae^{-1/2}$$

となって，やはり積分は上に有界．また積分は $R\to\infty$ で単調増加なので，第二の極限も収束することがわかる．

3. 演習第 5 回 2 (1), (2) により，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\end{aligned}$$

である．これを代入して，

$$\begin{aligned}y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y} &= r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-r\cos\theta\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\ &= -\frac{\partial u}{\partial\theta}\end{aligned}$$

となるので，変数変換後の微分方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

となる．

4. (1) $z(t) = (1-t)(2+i) + t(-1+3i) \qquad (t \in [0,1])$

(2) $z(\theta) = \alpha + re^{i\theta} \qquad (\theta \in [0, 2\pi])$

(3) $z(t) = \alpha + te^{i\theta} \qquad (t \in [0, \infty))$

(4) $z(\theta) = \theta e^{i\theta} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$

5. v を λ に対する固有ベクトルとすると，

$$Av = \lambda v$$

である．従って

$$A^m v = \lambda^m v$$

が任意の自然数 m に対して成り立つ（第 12 回 1）．このことを使う．いま

$$f(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \cdots + a_{N-1} x + a_N$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f(A)v &= (a_0 A^N + a_1 A^{N-1} + \cdots + a_{N-1} A + a_N I)v \\ &= a_0 \lambda^N v + a_1 \lambda^{N-1} v + \cdots + a_{N-1} \lambda v + a_N v \\ &= f(\lambda) v \end{aligned}$$

である．$f(A) = O$ だから左辺は 0-ベクトルになり，固有ベクトル v は 0-ベクトルではないので，

$$f(\lambda) = 0$$

でなければならない．