微分積分 I 中間試験

2007 年 7 月 6 日 8:40-10:10

1.

(1) $\tan^{-1}(-1)$ の値を求めよ．

(2) $\sin(\cos^{-1}\dfrac{1}{2})$ の値を求めよ．

(3) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{2}{3})$ の値を求めよ．

(4) $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ である三角形 ABC について，$\angle\mathrm{A}$ の値を a,b,c を用いて表せ．

2.

(1) $f(x)=\log x$ の $x=1$ における Taylor 展開を求めよ．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ．

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ．

3.

(1) $f(x)=e^x$ の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ．

(2) $1.0512 < e^{0.05} < 1.0514$ となることを示せ．必要なら $e<3$ を用いよ．

4.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ を求めよ．

解答

1.

(1) $\tan^{-1}(-1) = y$ とおくと，

$$\begin{cases} \tan y = -1 \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

である．これをみたす y は $y = -\dfrac{\pi}{4}$ に限る．したがって $\tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = y$ とおくと，

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

である．これをみたす y は $y = \dfrac{\pi}{3}$ に限る．したがって $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2}{3}\right) = y$ とおくと，

$$\begin{cases} \sin y = \sin\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

である．$0 < \dfrac{2}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ だから，これをみたす y は $y = \dfrac{2}{3}$ に限る．したがって $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

(4) 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

したがって

$$\angle\mathrm{A} = \cos^{-1}\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2.

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \tfrac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -\tfrac{2\cdot 3}{x^4} & f^{(4)}(1) &= -3! \end{aligned}$$

よって一般に $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\ (n \geq 1)$ がわかる．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{1-x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{(1-x)^2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \tfrac{2}{(1-x)^3} & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= \tfrac{2\cdot 3}{(1-x)^4} & f'''(0) &= 3! \\ f^{(4)}(x) &= \tfrac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5} & f^{(4)}(0) &= 4! \end{aligned}$$

よって一般に $f^{(n)}(0) = n!$ $(n \geq 1)$ がわかる．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

(3)　これは上のようなやり方で求めるのは困難．(2) の結果を利用させてもらう．

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)}$$

と見ることができるので，(2) の x に $-x^3$ を代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} \end{aligned}$$

3.

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \end{aligned}$$

よって明らかに $f^{(n)}(0) = 1$ がわかる．したがって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

(2)　0.05 は 0 に近いので，(1) で求めた e^x の $x = 0$ における Taylor 展開を利用する．問題は小数第 4 位のあたりの数値を問うているので，Taylor 展開の 2 次の項まで用いてみることにしよう．

$$e^{0.05} = 1 + \frac{0.05}{1} + \frac{(0.05)^2}{2} + R_3,$$

ここで

$$R_3 = \frac{f'''(c)}{3!}(0.05)^3 = \frac{e^c}{3!}(0.05)^3 \qquad (0 < c < 0.05)$$

となる．誤差項 R_3 の大きさを評価する．c の値がわからないが，$0 < c < 1$, $e < 3$ より $e^c < e < 3$ はわかるので，

$$|R_3| < \frac{3}{3!}(0.05)^3 = \frac{1}{2} \times 5^3 \times 10^{-6} < 10^{-4}$$

を得る．

一方，$1 + \dfrac{0.05}{1} + \dfrac{(0.05)^2}{2} = 1.05125$ で，また Taylor 展開のすべての項は正なので，

$$1.05125 < e^{0.05} < 1.05125 + 10^{-4} = 1.05135$$

を得る．したがってもちろん

$$1.0512 < e^{0.05} < 1.0514$$

が成り立つ．

4.

(1) ロピタルの定理を使う．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) = t$$

と置換積分すると，$dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,dt$ より

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})^2} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} t + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) \right) + C \end{aligned}$$

(3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \qquad\qquad \frac{x}{\sqrt{2}} = t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \sin^{-1} t + C$$

$$= \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$