線形数学 (10 月 4 日)

数学の学問の方法は論理である．証明とはある数学的主張が真理であると確信するためのプロセスである．よくこの証明で正しいかとの質問を受けるが，重要なのは本人がその証明で納得できたか否かだ．証明を書いてみたけれど良くわからないというのでは証明とは言わない．

このような学問の特質から，数学を学ぶことは自分で考えることに尽きる．すると授業中は教員の話を聞いたり板書を写したりで，あまり考える時間がないことに気づくだろう．学びは，テキスト（この講義ではプリント）やノートを参考に自分で考えるという行為の中にある．それは基本的には家で行われる（友人や教員との議論も重要だ）．

この講義メモはそのような自習に役立てるために作成している．是非活用して欲しい．

本日の講義の要点

1. 線形空間の公理

   和とスカラー倍が定義され，しかるべき条件（線形空間の公理，プリント p.2）を満たす集合を線形空間とよぶ．スカラーは一般には四則演算が自由に行える数の集合（体といいプリントでは K と書いている．）にとるが，実数，あるいは複素数と思っていて差し支えない．公理の一つ一つの内容は，$\boldsymbol{R}^n$ や連続関数全体の集合では当たり前なことだ．講義では，この公理を論理の出発点として扱う．今まで学習した線形空間は，線形空間の一つの例に過ぎなくなる．

2. 公理からの帰結

   公理は最小限になるよう精選されているので，0 元の一意性などは公理に加えていない．これは証明すべき事項であり，命題 1.1 に記述した．証明について公理の一つ一つの事項がどのように使われているのか確認して欲しい．なお，脚注にも書いておいたが，0 元の一意性が証明できて初めて 0 元を $\vec{0}$ と書くことが許される．

   命題 1.2 も証明すべき事項である．板書での証明とプリントに記してある証明を参考に考えて欲しい．なお，命題 1.2 によって具体的な線形空間で 0 元や逆元が何を意味するのか簡単に知ることができる．例えば連続関数全体のなす線形空間において，0 元は 0 に値をとる定数関数である．また $f(x)$ の逆元はそれを -1 倍した関数 $-f(x)$ である．

3. 一次結合

   線形空間は一般には無限次元（正確な意味は来週以降に述べる）なので無限個の要素の一次結合を考えることも必要である．この場合，一次結合の係数は有限個のものを除いて 0 になっていると仮定する．一次結合は実質的に有限和であり，公理から厳密に定義できる．

4. 一次結合に関連する概念

   一次結合を利用して一次独立および生成する空間が定義される．この定義は有限個の要素の組の場合には 1 年次の線形代数で学習したことと同じである．なお，無限個の要素については難しいので定義できることだけ抑えておいて欲しい．とりあえずは有限個の要素の組が一次独立であること，有限個の要素の組の生成する空間を理解するように．なお，無限個の場合については多項式の例を解説した．この例は無限個であっても比較的分かりやすいのではないか．

5. 命題 1.3

   今日の講義で扱ったもっとも証明らしい証明である．ただし，一次独立であることの条件として十分

性しか示さなかった．要するに

$$\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle, \qquad 1 \leqq k \leqq n$$

が成り立てば，一次独立になるということのみ示した．背理法で証明したが，仮定と結論が不明確だったので混乱した人もいた．申し訳ない．プリントの証明は否定命題どうしの同値性で記述しているが，このほうが分かりやすい．ぜひ考えてみて欲しい．

抽象的な議論が多いので分かりづらいと感じた人も多いだろう．線形代数の議論においてはイメージはすでに知っている線形空間をもとに描けばよい．$\boldsymbol{R}^3$ なら座標空間なので幾何学的イメージも持てるはずだ．しかし，イメージで理解しようとしてはいけない．論理の組み立ては公理に基づいて抽象的に展開しなくてはならない．これによって数学の厳密な理解が可能になる．

数学に対する感覚は多くの論理（証明）をとことん考えるという経験の中で培われる．論理力をつけるには別に何かの秘訣があるわけではないので，地道な努力のみが必要だ．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 1.1

  命題 1.2 の後半の証明が参考になる．ただし，形式を真似るのではなく意味を考えて取り組むこと．
- 問題 1.3

  スカラーを有理数にしているので一次結合は

  $$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}, \qquad a, b, c \text{ は有理数}$$

  だ．これが 0 になるのは $a = b = c = 0$ の場合に限ることを示す．$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ はすべて無理数であることを使う．
- 問題 1.4

  3 つの関数の一次結合が 0 元になるのはいつかが問われている．なお，0 元とは 0 に値をとる定数関数であることに注意すること．

線形数学 (10 月 11 日)

前回のレポート課題

- 問題 1.1 は $(-\alpha)\vec{x}$ が $\alpha\vec{x}$ の逆元であることを示せば良い．すなわち 2 つを足して $\vec{0}$ になることを言えば良い．これは次の変形で簡単に示せる．

  $$\alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = (\alpha - \alpha)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$$

  最初の等式は分配法則 (II-1)，次の等式はスカラーの計算，最後の等式は命題 1.2 である．
  【コメント】　この問題は比較的よくできていた．ただし $-\alpha\vec{x}$ と書いてしまうと失敗する．$-(\alpha\vec{x})$ は $\alpha\vec{x}$ の逆元の意味でありそれが $\vec{x}$ の $-\alpha$ 倍 $(-\alpha)\vec{x}$ と等しいことを示すのが課題だからだ．$-\alpha\vec{x}$ ではどちらの意味か分からない．なお $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$ は証明されている．これを利用して

  $$-(\alpha\vec{x}) = (-1)(\alpha\vec{x}) = (-\alpha)\vec{x}$$

  としてもよい．２番目の等式は結合法則だ．
- 問題 1.3 では，$\boldsymbol{R}$ を有理数体上の線形空間と見ている．演算としては加法と有理数倍だけを考えることになる．このように定義されている演算の一部だけを考えることにより，具体例を作ることも良くある．
  さて，一次独立性を示すのであるから

  $$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \qquad a, b, c \in \boldsymbol{Q}$$

  が成り立っているとする．第 3 項を移項して両辺を 2 乗すれば

  $$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2$$

  を得る．ここで $ab \neq 0$ なら $\sqrt{2} = \dfrac{3c^2 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \boldsymbol{Q}$ となり $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．ゆえに $ab = 0$ である．同様に第 2 項を移項して両辺を 2 乗すれば $\sqrt{3}$ が無理数であることから $ac = 0$ を得る．さらに $bc = 0$ も成り立つので a, b, c のうち少なくとも 2 つは 0 でなくてはならない．しかし一つだけ 0 でないということはありえないので $a = b = c = 0$ を得る．
  【コメント】何を言うべきかは理解できているようだが，$a = b = c = 0$ を結論付ける議論はほとんどが失敗している．典型的なのは $b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ が有理数だから $b = c = 0$ とするものだが二つの無理数の和は有理数になるとは限らないのでこれは間違いだ．これをどう説明するかはまさに数学的論理力を発揮する場だ．別に受験問題として出しても（惨憺たる結果になるのは目に見えているが）差し支えない内容である．なお，解答例の $ab = 0$ 以降を以下のように書き直してもよい．
  　$b = 0$ の場合は $a + c\sqrt{3} = 0$ となるが，$\sqrt{3}$ は無理数なので $c = a = 0$ でなくてはならない．$a = 0$ の場合は $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ であるが，両辺に $\sqrt{3}$ をかけて $b\sqrt{6} + 3c = 0$ を得る．$\sqrt{6}$ は無理数なので $b = c = 0$ を得る．ゆえに $a = b = c = 0$ である．
- 問題 1.4 は 3 つの関数の一次結合が 0 元（定数関数 0）になるのはいつかを考える．まず

  $$1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

  なので $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ は一次独立ではない．次に単振動の合成を用いて

  $$a + b\sin x + c\cos x = a + \sqrt{b^2 + c^2}\sin(x + \alpha)$$

となるが右辺が定数関数になるのは $\sqrt{b^2+c^2}=0$ の場合，すなわち $b=c=0$ の場合である．さらにその値が 0 であることは $a=0$ を意味する．ゆえに

$$a + b\sin x + c\cos x = 0$$

が関数として成り立てば $a=b=c=0$ を得る．よって一次独立である．

【コメント】 この問題のポイントは $a+b\sin x+c\cos x=0$ の等式が線形空間（この場合は関数を要素とする集合）での等式だということに注意を払うことだ．特定の x について等式が成立したとしても，この等式が成り立っているとは言えない．= という記号は様々な対象について使われるので意味を考えないと間違ってしまう．

より一般に関数のなす線形空間において $af(x)+bg(x)+ch(x)=0$ であることを言うにはいくつかの x について言うだけでは不十分である．ただし，この等式が成り立たないことを言うにはいくつかの x で十分だ．議論を間違えた人はこの関係をしっかり意識するように．

本日の講義の要点

1. 命題 1.3 について

   命題 1.3 では一次独立なベクトルの組に，それらの生成する空間に含まれないベクトルを付け加えたとき，それも一次独立になることを主張している．前回の講義では明確な形で表現しなかったので補足した．この事実は次回以降の講義で使うのできちんと意味を理解していおくように．

2. 基底

   一次独立な V のベクトルの組が V を生成しているとき基底という．基底は無限個のベクトルからなる場合（例えば多項式全体のなす線形空間における $\{x^n \mid n=1,2,3,\ldots\}$）もあるが，ここでは有限個の場合しか考えない．

   特殊な例として複素数全体のなす集合 $\boldsymbol{C}$ を実数体上の線形空間と考えた時の $\{1, i\}$ を与えた．このように特定の演算のみに注目してその代数的な構造を調べることはいろいろな例を作るときに使われる．分かりづらいかもしれないが決して難しくはないので慣れておくとよい．

3. 命題 1.4 について

   基底を構成するベクトルの個数が一定であることを主張している．証明は基本的なのでじっくり味わってほしい．なお，この命題によって線形空間の次元（基底を構成するベクトルの個数）が定義できる．有限個のベクトルの組で基底が作れるというこの命題の仮定は「有限次元」という言葉で表現される．

4. 基底と座標

   線形空間 V の基底を一組とるとそれによる座標が定義できる．プリントの脚注 9 が基底の定義と座標の意味を述べている．基底をとることが座標を定めることに対応していることに注意してほしい．基底を変換すると座標も変換される．それを表す行列は基底を V の要素を成分とする行ベクトルとみなすとよい．

5. 例：座標平面の基底と座標変換

   座標平面の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ について $\boldsymbol{p}_1$ の位置に X 軸の 1 の目盛を，$\boldsymbol{p}_2$ の位置に Y 軸の 1 の目盛をおいて新しい座標を導入すると，二つの座標の関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

で与えられる．新しい座標に行列をかけると古い座標になっていることに注意せよ．これはプリントに記載した座標変換の形と本質的に一致している．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 1.7
  基底の変換の行列 A は正方行列なので $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみに成り立つことを示せばよい．背理法を使うと簡単かもしれない．
- 問題 1.8
  生成することと一次独立であることを示すように．

次回は 1.5 節の線形部分空間を紹介する．1.6 節まで終えた後，1 週あけて第 1 章の試験を行う．

線形数学 (10 月 18 日)

前回のレポート課題

解答例に入る前に，V のベクトルの組を V に成分をとる行ベクトルと扱うことをもっと強調しておこう．なおこの行ベクトルを $\mathcal{P}$ という書体（カリグラフィック体 : 筆記体）で表示する．これを含めこの授業でのそれぞれの対象に対する表記の仕方をまとめておく．線形代数では様々な種類の対象を同時に扱うので記号の使い方には注意すること．

$\vec{v}$	線形空間 V の要素 (ベクトル)	
$\mathcal{P}$	V の要素の組，V の要素を成分とする行ベクトル	カリグラフィック体
$\boldsymbol{x}$	通常の実（または複素）列ベクトル	ボールド体
A	通常の行列	ローマ字の大文字
a, α	スカラー	ローマ字，ギリシャ文字の小文字

- 一次結合は列ベクトルとの積 $\mathcal{P}\boldsymbol{c}$ と表せる．これは V の要素である．これによって $\mathcal{P}$ を K^n から V への写像とみなす．

$$\mathcal{P}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + \cdots + c_n\vec{p}_n \in V$$

- 行ベクトル以外に V に成分を持つ行列は考えてはいけない．V の二つの要素の積は定義されない．なお，1 年次の線形代数で k 個のベクトルの組が 1 次独立か否かを考えたはずだ．そのとき k 個のベクトルを横に並べて行列を作った．1 年次の線形代数の教科書を見直してほしい．
- $\mathcal{P}$ に右から行列をかけたものは V のベクトルの組でありやはり V に成分をとる行ベクトルである．
- 結合法則 $(\mathcal{P}A)\boldsymbol{c} = \mathcal{P}(A\boldsymbol{c})$ は成立する．この証明は線形空間の公理を使って行列の積の結合法則の証明とまったく同様に行える．
- 一次独立は $\mathcal{P}\boldsymbol{c} = \vec{0} \Longrightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と記述できる．ここで $\boldsymbol{0}$ と $\vec{0}$ が使い分けられていることに注意せよ．

さて，解答例を示そう．

- 問題 1.7 の解答例

  V の二つの基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ と $\mathcal{Q} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ をとる．基底の変換の行列は

$$\vec{q}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{p}_i, \qquad \mathcal{Q} = \mathcal{P}A$$

  ここで A が正則でないとすると $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でない数ベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．すると

$$\sum_j c_j\vec{q}_j = \mathcal{Q}\boldsymbol{c} = (\mathcal{P}A)\boldsymbol{c} = \mathcal{P}(A\boldsymbol{c}) = \vec{0}$$

  が成り立つ．これは $\mathcal{Q}$ が一次独立であることに矛盾する．よって A は正則である．

  【コメント】

  – $\mathcal{P}$ を $\mathcal{Q}$ に変換する行列を A，$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ に変換する行列を B として $\mathcal{P} = \mathcal{P}(AB)$ から $AB = E$ を示した答案があったがこの解答も分かりやすいいい解答だ．ただし，$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ が何を表すかをきちんと理

解していないと意味不明な回答になる．特に $\mathcal{P}$ は行ベクトルなので行列は右からしかかけられない．$\mathcal{Q} = A\mathcal{P}$ と書いた答案は正解とは扱えない．

なお，$\mathcal{P} = \mathcal{P}(AB)$ から $AB = E_n$ を導く際に $\mathcal{P}$ が一次独立であることを使う．

– $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ から $A = O$ とする答案があったが，行列やベクトルの世界では $AB = O$ は $A = O$ または $B = O$ を意味しない．さらに「$A = O$ となるので A が正方行列であることに矛盾する」と続けられると，苦笑するしかない．正方行列であることと O 行列であることは別に矛盾しない．これらは 1 年次の線形代数（しかも基本事項）に対する理解の不足である．

– A が正則であることを示すべきなのに，A^{-1} の存在を仮定している答案がある．これで証明になるはずがない．他にも意味不明な議論が多すぎる．問題で仮定されているのは $\mathcal{Q}$，$\mathcal{P}$ が基底であるということなので，これに矛盾することをどういうかが考えるべきことだ．解答例を味わっておくこと．

– $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ と書くのは記号の混乱，A は行列なのでその列は数ベクトルであり $\boldsymbol{a}_j$ と表すこと．

- 問題 1.7 の逆

命題　$\mathcal{P}$ が V の基底でありかつ A が正則であれば $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ も V の基底になる．

証明　$\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \vec{0}$ とすれば

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = (\mathcal{P}A)\boldsymbol{c} = \mathcal{P}(A\boldsymbol{c}) = \vec{0}$$

であるが $\mathcal{P}$ が一次独立であることから $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を得る．A は正則なので $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であり $\mathcal{Q}$ も一次独立である．

次に $\forall \vec{x} \in V$ について $\mathcal{P}$ は V を生成しているので $\vec{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{c}$ を満たす $\boldsymbol{c} \in K^n$ が存在する．$\boldsymbol{d} = A^{-1}\boldsymbol{c}$ とおけば

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{d} = \mathcal{P}AA^{-1}\boldsymbol{c} = \mathcal{P}\boldsymbol{c} = \vec{x}$$

であり，$\vec{x}$ が $\mathcal{Q}$ の一次結合で表されることが分かる．ゆえに $\mathcal{Q}$ は V を生成し，基底である．　□

- 問題 1.8 の解答例

上の命題を使えば変換の行列の正則性のみを示せばよい．変換の行列については次の計算で簡単に求められる．

$$\begin{pmatrix}\cos^2 x & \cos x \sin x & \sin^2 x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+\cos 2x}{2} & \frac{\sin 2x}{2} & \frac{1-\cos 2x}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cos 2x & \sin 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

解答例として基底の定義に基づく議論を紹介しておく．$\cos^2 x, \cos x \sin x, \sin^2 x$ が V の要素であることは三角関数の 2 倍角の公式を使えば簡単だ．またこれらが一次独立であることも

$$a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2x + \frac{b}{2}\sin 2x = 0$$

より，$a + c = a - c = b = 0$ すなわち $a = b = c = 0$ を得るので成立する．また V の要素は $a + b\cos 2x + c\sin 2x$ と表せるので

$$a + b\cos 2x + c\sin 2x = (a+b)\cos^2 x + 2c\cos x \sin x + (a-b)\sin^2 x$$

より，$\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ の一次結合で表せる．$\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ は V を生成しており基底である．

【コメント】

- 解答例の行列は基底 $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ を $\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ に変換する行列である．問題文では「二つの基底の変換を表す行列」としたので，この逆を答えても正解とする．
- $1,\ \cos 2x,\ \sin 2x$ を縦に並べた解答がある．その場合行列は左からかけることになるので，変換の行列は解答の転置行列になる．これでも本質的な部分は理解できているが，最初の注意にもあるように V の要素を成分とする列ベクトルは考えないので正解とはみなさない．
- 基底であることを言う時に一次独立性のみで済ましている答案がある．基底とは一次独立であり V を生成するベクトルの組だ．ただし，n 次元線形空間においては n 個の一次独立なベクトルの組は基底になる．
- 生成することを言う際に $\cos^2 x, \cos x \sin x, \sin^2 x$ を $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ の一次結合で表している答案がある．これは $\cos^2 x$ 等が V の要素であると言っているにすぎず，$\{\cos^2 x, \cos x \sin x, \sin^2 x\}$ が V を生成していることの証明にはなっていない．解答例と比較すること．
- 一次結合を $1 + \cos 2x + \sin 2x$ のことと誤解している人がいる．一次結合はスカラー倍したものの和であって単なる和ではない．

本日の講義の要点

1. 部分空間の定義

   部分空間の定義は W の中で和とスカラー倍が自由に行えることに他ならない．なお，プリントでは W が空でないことを落としてしまった．空集合は部分空間と呼ばないので注意しておくこと．

   座標空間 $\mathbb{R}^3$ においては部分空間は，原点のみ，原点を通る直線，原点を含む平面，空間全体の 4 種類である．部分空間についてほイメージはこの程度で十分だ．ただし，線形空間は様々な対象で考えるので，部分空間も多様である．論証はイメージに頼らず，論理のみで行っていくことになる．

2. 基底の延長

   命題 1.5 の証明を行った． なお，この証明ではまず W の基底を構成し，それにベクトルを付け加えた形で V の基底を構成している．鍵は命題 1.3 の一次独立であることの必要十分条件なのでよく読んでほしい．

3. 定理 1.6 のについて

   V の二つの部分空間 $W_1,\ W_2$ についてその和空間 $W_1 + W_2$ を定義した．定理の (2) は和空間が部分空間であること，(3) は次元に関する等式である．(2) の証明は部分空間の定義を直接確認するだけなので簡単だ．(3) については命題 1.5 の基底の延長という考え方が巧妙に使われていることに気づくだろう．講義ノートに証明をきちんと書いてあるのでじっくり読んでおくこと．

   講義ノート 7 ページの証明の後の注意について補足しておく．$\mathbb{R}^3$ で原点を通る直線は部分空間だがその合併は 2 本の直線になり，部分空間ではない．2 本の直線上のベクトルの和は，それを含む平面全体を形作る．それが和空間である．直感的に理解していただけただろうか．

4. 部分空間の直和

   和空間がさらにある種の条件を満たすとき直和という．その条件を列記したのが定理 1.7 だ．ただし講義で証明したのは (1)(2)(3) の同値性までで，有限次元の場合の次元による特徴づけ (4) は扱っていない．中途半端になってしまったが次回解説しよう．

   講義での証明はプリントの証明と同じである．記号が多くなかなか論理が入ってこない人もいると思うが，決して難しいものではない．考えてほしい．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 1.9

  W の基底を延長した形で V の基底を作るとき $\dim V = \dim W$ が何を意味するかを考えよ．なお，W の基底についてその生成する空間は W 自身である．
- 問題 1.10

  定理 1.6(1) を証明せよと訂正しておいてほしい．証明には部分空間の定義と共通部分の定義を使う．$\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ とは $\vec{x} \in W_1$ かつ $\vec{x} \in W_2$ である．

線形数学 (10 月 25 日)

前回のレポート課題

- 問題 1.9 の解答例

  【解答例 1】W の基底 $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ をとる．$W=\langle\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\rangle\subset V$ である．ここで $W\subsetneq V$ とすると，$\vec{q}\in V-W$ が取れることになり，V は $n+1$ 個の一次独立なベクトルの組 $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n,\vec{q}\}$ を持つ．これは $\dim W=\dim V$ の仮定に矛盾する．ゆえに $W=V$ である．

  【解答例 2】W の基底 $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ を延長して V の基底を作るとき，$\dim W=\dim V$ より付け加えるベクトルはない．よって $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ は V の基底であり，その生成する空間は V に一致する．ゆえに $W=V$ である．

  【コメント】

  - $W\subset V$ のとき $W=V$ を言うには $V-W$ に要素が取れたとして矛盾を導くのが基本だ．解答例 1 はそのアイデアで記述している．
  - 基底の延長を利用する解答が多かった．W の基底を延長して V の基底が作れることと $\dim W=\dim V$ を結び付ければよい．おそらく分かっているのだろうが分かりやすい解答は決して多くない．延長で付け加えられるベクトルは一つもないことがポイントで解答例 2 のようにしてはいかがか.
  - W の基底 $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ は $n=\dim V$ でありかつ一次独立だから V の基底であるという解答があった．正しい議論だが，「次元に等しい個数の一次独立なベクトルの組は基底である」というのは証明すべき命題である．V を生成することを言えばよいので次のように背理法で証明できる．

    V に $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ の一次結合で表せない，ベクトルがあったとしそれを $\vec{q}$ とおく．$\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\}$ は一次独立であり

    $$\vec{q}\notin\langle\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n\rangle$$

    が成り立つので $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n,\vec{q}\}$ は一次独立である．これは $\dim V=n$ に矛盾する．
  - 講義ノートの一部のみ写して意味のない解答を書いている人がいる．自分がいかにおかしなことを書いたのか納得するまで考えるように.
  - 集合に関する記号が怪しい人がいる．$A\subset B$ は二つの集合の包含関係を記述する記号であり $a\in A$ とは要素と集合の関係を記述する記号である．間違えた人にはチェックを入れているので確認すること．

- 問題 1.10 の解答例

  0 元 $\vec{0}$ は W_1 と W_2 に共通に含まれるので $\vec{0}\in W_1\cap W_2$ であり $W_1\cap W_2$ は空集合ではない.

  $W_1\cap W_2$ から 2 つのベクトル $\vec{x},\vec{y}$ をとる．また 2 つのスカラー $\alpha,\beta\in K$ をとる．$\vec{x},\vec{y}\in W_1$ と W_1 が部分空間であることから $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W_1$ が成り立つ．同様に $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W_2$ も成り立つので $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W_1\cap W_2$ を得る．ゆえに $W_1\cap W_2$ も部分空間である．

  【コメント】

  - まず $W_1\cap W_2$ が空集合でないことを言うこと．ただし，$\vec{0}$ を考えれば明らかなことが多く，言い忘れてしまうことも多い.
  - 部分空間であることを $\vec{x}+\vec{y}\in W_1\cap W_2$ と $\alpha\vec{x}\in W_1\cap W_2$ に分けて示してもよい．そういう答案も多かった．ただし和だけでは証明したことにならない.

– 基底を使った議論が見受けられるが，W_j は有限次元とは仮定していないので有限個のベクトルの組からなる基底が取れるとは限らない．$W_1 \cap W_2$ の基底を取ったと思われる議論もあるが，これでは $W_1 \cap W_2$ が部分空間であることを仮定したことになる．

記号の使い分けについて

線形空間 V の要素について，講義では $\vec{p}$ などの記号を使っている．1 年次に使用した線形代数のテキストでは $\boldsymbol{p}$ としているが，この講義ではこれは数ベクトルに対してのみに限定して使用している．両方を同時に使う場合があるので記号を変えたほうが分かりやすいからだ．皆さんもそういう使い分けをしてほしい．

なお，記号の使い方は本によって異なる．何かの本を参考にする際には，その本がどのような記号の使い方をしているかをまず読み取らなくてはならない．そしてレポートではこの講義に合わせた記号の使い方に修正してほしい．修正できないのであればどのような記号の使い方をしているかを明示しなくてはならない．

ベクトルをボールド体 $\boldsymbol{v}$ で表記している本を参考にしたと思えるレポートで，通常の字体 v を使って書いている人もいる．記号の使い方をまったく意識していない答案で，学習しようとする姿勢に疑いを感じる．

本日の講義の要点

1. 直和の次元による特徴づけ

   定理 1.7 の証明について前回は (1)(2)(3) の同値性を証明した．ここでは各 W_k が有限次元の場合に (4) も同値になることを証明した．証明は W_k の基底を集めたベクトルの組を考察することによって行う．

   なお，(2) から (4) を示す際の講義ノートの証明は厳密ではない．講義ではきちんと証明したのでここにも掲載しておく．

   $\{\vec{p}_{ik} | 1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq i \leqq s_k\}$ の一次結合について

   $$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{s_k} c_{ik}\vec{p}_{ik}\right) = \vec{0}$$

   が成り立つとすれば，（２）から各 k について

   $$W_k \ni \sum_{i=1}^{s_k} c_{ik}\vec{p}_{ik} = \vec{0}$$

   である．ここで $\{\vec{p}_{ik} | 1 \leqq i \leqq s_k\}$ は W_k の基底なので一次独立であり $c_{1k} = c_{2k} = \cdots = c_{s_k k} = 0$ が成り立つ．k は任意なのですべての係数は 0 である．

   なお，1.6 節に入る直前の 2 行の説明（直和という用語と記号 $\oplus$）にコメントするのを忘れてしまった．申し訳ない．

2. 同値関係，同値類，商集合

   数学の多くの分野で使われる基本概念であり，他の講義でも学習することになる．

   - 同値関係とは

     集合 X の二つの要素 $x, y \in X$ について $x \sim y$(「x は y と同値である」と読むこと) が同値関係であるとは，反射律（$x \sim x$），対称律（$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$），推移律（$x \sim y$ かつ $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$） が成

り立つことを言う．

- 同値類

  集合 X とその同値関係 $\sim$ について

$$[a] = \{x \in X | a \sim x\} \subset X$$

  を a の属する同値類という．a を同値類の代表元という．同値類について次が成り立つ．

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow [a] = [b]$$

- 商集合

  集合 X とその同値関係 $\sim$ について，同値類を要素とする集合 $X/\sim$ を商集合と呼ぶ．同値類は $[a] \subset X$ であるが $[a] \in X/\sim$ である．$\subset$ と $\in$ の記号の意味するところを理解してほしい．

以上で基本的な要点をまとめたが，これだけで分かったと思える人はまれだろう．講義では整数全体の集合での「$n \sim m$
$Longleftrightarrow n - m$ は 5 の倍数」という同値関係と，線形空間 V とその部分空間 W についての「$\vec{p} \sim \vec{q} \Longleftrightarrow \vec{p} - \vec{q} \in W$」という同値関係について解説した．

3. 商空間

   講義で扱った線形空間 V とその部分空間 W による同値関係「$\vec{p} \sim \vec{q} \Longleftrightarrow \vec{p} - \vec{q} \in W$」の商集合には線形空間としての構造が入る．それを商空間と呼ぶ．これについての基本事項は定理 1.8 にまとめている．証明のポイントだけ箇条書きしておく．詳細は講義ノートを参考にすること．

   - 和とスカラー倍が代表元の取り方によらず定義されていること
   - 和とスカラー倍が線形空間の公理を満たすこと
   - 次元の等式を示すための基底を利用した議論

   0 元は $0[\vec{p}] = [0\vec{p}] = [\vec{0}]$ である．$[\vec{p}]$ の逆元は $(-1)[\vec{p}] = [(-1)\vec{p}] = [-\vec{p}]$ である．また

$$[\vec{p}] = [\vec{0}] \longleftrightarrow \vec{p} \in W$$

   に注意すること．

本日のレポート課題とヒント

前回のレポート課題の解説に時間をとりすぎて，全体の時間配分に失敗してしまった．別のレポート課題を用意していたが，説明の時間がなく断念した．課題としては質が悪くなってしまったことをお詫びする．今回はヒントは不要だろう．

課題 1 V/W におけるスカラー倍が代表元の取り方によらないことを示せ．
課題 2 分配法則 $(a + b)[\vec{p}] = a[\vec{p}] + b[\vec{p}]$ を示せ．

線形数学 (11 月 1 日)

今週は大学祭の準備で授業がないので，前回のレポート課題の解答例とコメントのみ掲載する．なお，レポートの返却を希望する者は 11 月 2 日に研究室 (理学部 3 号館 D416）に来てほしい．次回 11 月 8 日は第 1 回の試験なので勉強しておくこと．

前回のレポート課題

課題 1 V/W におけるスカラー倍が代表元の取り方によらないことを示せ．

【解答例】 $[\vec{x}] \in V/W$ について，別の代表元 $\vec{u}$ をとる．$[\vec{x}] = [\vec{u}]$ より $\vec{x} \sim \vec{u}$ なので $\vec{x} - \vec{u} \in W$ である．W は部分空間なので

$$\alpha\vec{x} - \alpha\vec{u} = \alpha(\vec{x} - \vec{u}) \in W$$

であり，$\alpha\vec{x} \sim \alpha\vec{u}$ を得る．よって $[\alpha\vec{x}] = [\alpha\vec{u}]$ であり，$\alpha[\vec{x}]$ の定義は代表元の取り方によらないことが分かる．

【コメント】

- よくできていたが何を言うべきか理解していない答案がある．解答例は丁寧に書いたのでじっくり考えてほしい．
- 和について言及している答案があるが，この問題はスカラー倍についてだけなので余分なことは書くべきではない．
- $[\vec{x}]$ は $\vec{x}$ と同値な要素全体の集合であって，V の要素ではない．$[\vec{x}] \in V$ のような書き方は許されない．$[\vec{x}] = \vec{x}$ のような書き方も誤りである．
- 別の代表元をとった時に $\vec{x} - \vec{u} \in W$ をいうのがポイント，これが落ちている答案があるが減点対象だ．

課題 2 分配法則 $(a + b)[\vec{p}] = a[\vec{p}] + b[\vec{p}]$ を示せ．

【解答例】

$$\begin{aligned}
(a + b)[\vec{p}] &= [(a + b)\vec{p}] && \text{（}V/W\text{ でのスカラー倍の定義）} \\
&= [a\vec{p} + b\vec{p}] && \text{（}V\text{ での分配法則）} \\
&= [a\vec{p}] + [b\vec{p}] && \text{（}V/W\text{ での和の定義）} \\
&= a[\vec{p}] + b[\vec{p}] && \text{（}V/W\text{ でのスカラー倍の定義）}
\end{aligned}$$

【コメント】

- 一つ一つの等号についてその成立する理由をコメントするのが望ましい．なお，問題の趣旨はこの和とスカラー倍が線形空間の公理を満たすことの証明だ．等式が成り立つ理由を「和とスカラー倍の定義」にするべきで，これを「線形性」にしたら証明すべきことを使ってしまったように受け止められる．
- 商空間での和とスカラー倍の定義を，定理 1.8 の中に含めたので定義式を「商空間の定理」と記述する人がいる．定理として証明したことはこの定義の正当性（代表元の取り方によらないこと）であって，定理 1.8 の 2 行目の式はあくまで定義式として扱うこと．

線形数学 (11 月 15 日)

本日の講義の要点

1. 線形写像の定義と例

   講義ノート 2.1 節の冒頭に定義が記述してある．まずこの定義は覚えておくこと．次に線形写像の例であるが，講義ノート例 2 の (1) から (3) を解説した．この三つは今後の議論でも使うので確認しておくように．

   なお，線形写像について $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ である．これは線形写像の定義式で $\alpha = \beta = 0$ とすればよい．

2. 線形写像による像と逆像

   数学の多くの分野で使われる基本概念であり，他の講義でも学習することになる．定義は

$$f(V_1) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V_1\}, \quad f^{-1}(W_1) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) \in W_1\}$$

   である．線形写像の像 $\mathrm{Im} f$ は全体集合 V の像 $f(V)$ であり，核 $\mathrm{Ker} f$ は $\{\vec{0}_W\}$ の逆像である．これに関わって W の部分空間 W_1 の逆像が V の部分空間であること（問題 2.1 の前半）を解説をした．講義ノートに証明を記述していないのでここにまとめておく．

   - $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in W_1$ より $\vec{0}_V \in f^{-1}(W_1)$
   - $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(W_1)$ とすれば，逆像の定義より $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in W_1$ である．
   - 線形性より $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$ であるが，右辺は $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in W_1$ と W_1 が部分空間であることからやはり W_1 の要素になる．
   - 逆像の定義から $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in f^{-1}(W_1)$ であり，$f^{-1}(W_1)$ が V の部分空間であることが分かる．

3. 核と線形写像の単射性 (定理 2.1(1))

   線形写像が単射であれば $f(\vec{x}) = \vec{0}_W$ となる $\vec{x}$ は $\vec{0}_V$ 以外に存在しないので $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}_V\}$ となる．逆の証明は講義ノートに記載してあるもので十分だろう．考えておくように．

4. V の n 個のベクトルの組と K^n から V への線形写像

   V のベクトルの組 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ に対して

$$\mathcal{P} : K^n \longrightarrow V, \quad \mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{p}_j$$

   とおく．$\mathcal{P}$ が V を生成することは線形写像 $\mathcal{P}$ が全射であることと同値であり，また一次独立であることは $\mathcal{P}$ の核が $\mathbf{0}$ のみであること，すなわち単射であることと同値である．特に $\mathcal{P}$ が基底であることと線形写像 $\mathcal{P}$ が全単射であることは同値である．n 次元空間は K^n と同型である．

   例で示したように線形写像には多様なものがある．しかし，有限次元の場合は，次元が等しければ基本的に同じ線形構造を持つとして差し支えない．線形代数ではこれらは同じものとして扱う．

5. 問題 2.2(1)

   $f : V \longrightarrow V$ のように定義域と値域が同じ線形空間であるような線形写像を線形変換と呼ぶ．線形変換については $f \circ f$(f と f の合成写像) が定義できる．この問題では $f \circ f = f$ が仮定されている．

   - $\vec{v} \in V$ をとる．$\vec{w} = \vec{v} - f(\vec{v})$ は $f(\vec{w}) = f(\vec{v}) - f \circ f(\vec{v}) = \vec{0}$ より $\mathrm{Ker} f$ に属する．
   - $\vec{v} = \vec{w} + f(\vec{v}) \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ が成り立つ．ゆえに $V = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ である．
   - $\vec{v} \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ とすれば $\vec{v} \in \mathrm{Im} f$ なので $\vec{v} = f(\vec{x})$ と表せる．
   - $\vec{0} = f(\vec{v}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}) = \vec{v}$ より $\vec{v} = \vec{0}$ を得る．ゆえに $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}\}$ であり，この和は直和である．（第 1 回試験問 2）

6. 定理 2.1(2)

$V/\mathrm{Ker}f$ と $\mathrm{Im}f$ が同型なことの証明である．まず，値域を $\mathrm{Im}f$ に制限すれば全射になる．そこで

$$g : V/\mathrm{Ker}f \longrightarrow \mathrm{Im}f, \quad g([\vec{x}]) = f(\vec{x})$$

と定める．示すべきことは以下の 3 つである．

- g が well-defined であること．すなわち代表元の取り方によらないこと
  $[\vec{x}]$ の別の代表元を $\vec{y}$ とすれば $\vec{y} \sim \vec{x}$ である．同値関係の定義から $\vec{x}-\vec{y} \in \mathrm{Ker}f$ であり，$f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ を得る．
- g が線形写像であること
  商空間の和とスカラー倍の定義から $\alpha[\vec{x}] + \beta[\vec{y}] = [\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}]$ である．ゆえに

$$g(\alpha[\vec{x}] + \beta[\vec{y}]) = g([\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}]) = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) = \alpha g([\vec{x}]) + \beta g([\vec{y}])$$

- $\mathrm{Ker}g = \{[\vec{0}]\}$ であること
  $g([\vec{x}]) = f(\vec{x}) = \vec{0}$ より $\vec{x} \in \mathrm{Ker}f$ である．これは $[\vec{x}] = [\vec{0}] \in V/\mathrm{Ker}f$ と同値である（第 1 回試験問 3 を確認すること）．

証明はどれもやさしい．商空間を使った記述なので分からないという人も多いだろうが，直感的に捉えづらさではなく，議論のやさしさに関心を持ってほしい．

7. V が有限次元のとき，同型であれば次元が等しいので次の等式を得る．

$$\dim(V/\mathrm{Kerf}) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}f = \dim \mathrm{Im}f$$

$\dim \mathrm{Im}f$ を f の階数 (ランク) と呼び $\mathrm{rank}f$ と表す．講義では $\dim \mathrm{Ker}f$ と書き間違えたので訂正しておくこと．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 2.1 の後半 (V_1 の像が W の部分空間になること)
  $\vec{0}_W \in f(V_1)$ をまずいうこと．部分空間は $\vec{0}$ を必ず含んでいる．次に和とスカラー倍について閉じていることを言うために $f(V_1)$ の要素を二つとるが，これは $f(\vec{u})$, $\vec{u} \in V_1$ の形に表せることを使う．像の定義を使わなければ証明できるはずがない．
- 問題 2.2(2)
  $f \circ f = 0$ とはすべてのベクトル $\vec{x} \in V$ について $f(f(\vec{x})) = \vec{0}$ が成り立つことである．これから $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}f$ は分かるだろう．あとは必要性と十分性に分けて考えるとよい．記号の意味をきちんと考えれば意外と易しいことに気づくだろう．

線形数学 (11 月 22 日)

前回のレポート課題

課題 1： 問題 2.1 の後半（線形写像による部分空間の像が部分空間になること）

【解答例】V_1 は V の部分空間なので $\vec{0}_V \in V_1$ である．これと $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ から $\vec{0}_W \in f(V_1)$ である．そこで $f(V_1)$ に属する二つのベクトル $\vec{u}, \vec{v} \in f(V_1)$ をとる．像の定義から V_1 に属するベクトル $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ で $f(\vec{x}) = \vec{u}$, $f(\vec{y}) = \vec{v}$ を満たすものが存在する．f の線形性から

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$$

であり，V_1 が部分空間であることから $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V_1$ なので，$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \in f(V_1)$ である．よって $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in f(V_1)$ であり $f(V_1)$ は W の部分空間である．

【コメント】

- f は V から W への写像なので $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ である．$\vec{0}_V$ は V の 0 元の意味で使ったが，意味を分からずに記号を真似したと思われる答案が目につく．意味の分からない記号は使ってはいけない．
- 解答例のようにまず $\vec{u}, \vec{v} \in f(V_1)$ をとることが議論を見やすくするために重要だ．ただし，この後で「$\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ とすると $\vec{u} = f(\vec{x})$, $\vec{v} = f(\vec{y})$ が成り立つ」というような書き方をすると間違いになる．文章の意味をじっくり考えること．
- $f(V_1)$ の要素をいきなり $f(\vec{x}), \vec{x} \in V_1$ と書いても間違いではないし実際によく使われる．ただし，$\vec{u} \in f(V_1)$ について $\vec{u} = f(\vec{x})$ となる $\vec{x} \in V_1$ は一通りとは限らないし，$\vec{u} \in f(V_1)$ と $\vec{u} = f(\vec{x})$ から $\vec{x} \in V_1$ が出てくるわけではない．面倒でも解答例のような記述に慣れてほしい．

課題 2： 問題 2.2(2) $f \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$

【解答例】$f \circ f = 0$ だとする．$\vec{u} \in \mathrm{Im} f$ とすれば $\vec{u} = f(\vec{x})$ を満たす $\vec{x}$ が存在する．

$$f(\vec{u}) = f \circ f(\vec{x}) = 0(\vec{x}) = \vec{0}$$

なので，$\vec{u} \in \mathrm{Ker} f$ となる．ゆえに $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ が成り立つ．

逆に $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ が成り立つとする．$f \circ f(\vec{x})$ について $f(\vec{x}) \in \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ が成り立つので

$$f \circ f(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = \vec{0}$$

となる．ゆえに $f \circ f$ は $\vec{0}$ に値をとる定値写像である．

【コメント】

- $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{\vec{0}\})$ だが，別に逆写像 f^{-1} が存在しているというわけではない．$f^{-1}(\vec{0})$ のような記述は誤りだ．
- 一般に $A \subset B$ を示すには $x \in A \Longrightarrow x \in B$ を示す．解答例の $\Longrightarrow$ の証明ではまさにその手法を使っている．包含関係を示すときの基本事項なので頭の中に入れておくこと．
- $A \subset B$ の否定を $A \supsetneq B$ と思っている人がいるが誤解だ．包含関係は不等号と違って，$\subset$ でも $\supset$ でもないということが起こり得る．また $A \subset B$ が $A = B$ の場合を許すことを理解していない人もいる．基本的な記号なので正確に理解しておくこと．

基本的に，言葉・記号の理解ができていない答案が多すぎる．言葉の意味を正確に理解しないで数学が分かるはずがない．特に解答例を読んでもよくわからないという人はその傾向の人だと思う．まず一つ一つの記

号・言葉の意味を分かっているか考えること．ただし，感覚的に理解する必要はない．イメージがつかむということは現段階では無理であろう．

本日の講義の要点

1. 線形写像の表現行列

   有限次元線形空間の間の線形写像 $f : V \longrightarrow W$ について V と W の基底をとれば f は行列によって表現される．この行列はプリント 10 ページの一番下の式で定義されるが，W のベクトルの組を使った等式（11 ページ 2 行目）を使うと分かりやすい．

   講義では例として問題 2.4 の前半を解説した．この f は微分なので $f(1) = 0$, $f(\cos 2x) = -2\sin 2x$, $f(\sin 2x) = 2\cos 2x$ であり

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   から表現行列は簡単に計算できる．

2. 基底の変換による表現行列の変化

   線形写像は基底を決めれば行列で表現されるが，その行列は基底を変換すれば変わってくる．その変わり方を 11 ページ中ほどの図式によって解説した（なお，この図式では $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ 等が逆になっているので入れ替えてほしい）．

   さて，与えられた線形写像に対して，表現行列をできる限り簡単にする問題を考える．命題 2.2 はその一つの解答である．一方，線形変換 $f : V \longrightarrow V$ では定義域と値域の基底を同じにする必要があるので，問題ははるかに難しくなる．この問題についての一つの解答が対角化だ．

3. 不変部分空間

   線形変換について不変部分空間を定義した．2.3 節の冒頭の部分を確認しておくこと．不変部分空間の典型的な例が固有空間である．講義では固有値を $\dim \mathrm{Ker}(f - \alpha I) \geqq 1$ となる α であって，$V(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I)$ を固有空間と呼ぶ．固有空間は

$$\vec{x} \in V(\alpha) \Longleftrightarrow f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$$

   で定義される．

   講義では，固有空間が不変部分空間であることを解説した．証明を記述しておこう．証明すべきは $f(V(\alpha)) \subset V(\alpha)$ である．そこで $\vec{p} \in f(V(\alpha))$ をとる．像の定義から $\vec{p} = f(\vec{x})$ を満たす $\vec{x} \in V(\alpha)$ が存在する．$\vec{x}$ は固有ベクトルなので

$$\vec{p} = f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$$

   であり，

$$f(\vec{p}) = f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \alpha\vec{p}$$

   が成り立つので $\vec{p} \in V(\alpha)$ である．ゆえに $f(V(\alpha)) \subset V(\alpha)$ が成り立つ．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 2.4

  A については講義で求めた．B についても基本的に同じ考えで求めることができる．講義の解説（本日の講義の要点 1）をじっくり考えてから問題に取り組むこと．$B = P^{-1}AP$ については基底の変換の行

列を求めることにより簡単に示せる．なお，逆行列を使わなくても $PB = AP$ という形で確認できる（P は基底の変換の行列だから正則）．

- 問題 2.6

  (1) については $g(f(W)) \subset f(W)$ が示すべきことだ． $\vec{p} \in g(f(W))$ をとり，像の定義を使って $\vec{p}$ を別の形に書き直し，$\vec{p} \in f(W)$ を示すこと．像の定義を正確に書けばそれほど難しくはない．(2) はヒントはなしとする．

線形数学 (11 月 29 日)

前回のレポート課題

記号の使い分けや像の扱いなどのミスはだいぶ少なくなってきた．理解が深まってきていることを実感している．

課題 1： 問題 2.4（線形写像の表現行列と基底の変換によるその変わり方の具体例）

【解答例】 基底 $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ と基底 $\{\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x \sin x\}$ に関する表現行列は，基底のそれぞれを微分したものを基底で表示すればよい．

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\cos x \sin x & 2\sin x \cos x & -\sin^2 x + \cos^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x & \cos x \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

また基底の変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x & \cos x \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

以上から

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$AP = PB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，基底の変換の行列 P の正則性から $B = P^{-1}AP$ が成り立つ．

【コメント】

- 基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n\}$ に関する線形変換 f の表現行列は $f(\vec{p}_j)$ を基底の一次結合で表すことによって求める．すなわち

  $$f(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} f(\vec{p}_1) & f(\vec{p}_2) & \ldots & f(\vec{p}_n) \end{pmatrix} = \mathcal{P}A = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \ldots & \vec{p}_n \end{pmatrix} A$$

  を満たす A が表現行列である．この問題では基底が二組あるが，$f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}B$ の形で行列を求めるのは間違いである．
- $B = P^{-1}AP$ を示すには $PB = AP$ を示せばよい．P は基底の変換の行列なので正則性は証明されている．
- 基底の変換の行列を

  $$\begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x & \cos x \sin x \end{pmatrix} P$$

  の形でとると当然ながら $B = PAP^{-1}$ となる．この P は解答例の P の逆行列である．なお講義では $\mathcal{P}$ を $\mathcal{Q}$ に変換する行列を $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ で定義している．

課題 2： 問題 2.6（交換可能な二つの線形変換とそれらの不変部分空間）

【解答例】(1)$g(f(W)) \subset f(W)$ を示す．

$\vec{x} \in g(f(W))$ とすれば $\vec{y} \in f(W)$ で $\vec{x} = g(\vec{y})$ となるものが存在する．$\vec{y} \in f(W)$ より $\vec{u} \in W$ で $\vec{y} = f(\vec{u})$ となるものが存在する．ゆえに

$$\vec{x} = g(\vec{y}) = g(f(\vec{u}) = g \circ f(\vec{u}) = f \circ g(\vec{u}) = f(g(\vec{u}))$$

である．ここで W が g 不変なので $g(\vec{u}) \in g(W) \subset W$ が成り立つ．ゆえに $\vec{x} = f(g(\vec{u})) \in f(W)$ であり，$f(W)$ は g 不変である．

(2) 次の式から簡単に証明できる．

$$g(f(\vec{v})) = f(g(\vec{v})) = f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

【コメント】

- $A \subset B$ から $f(A) \subset f(B)$ が成り立つこと，$f \circ g(A) = f(g(A))$ であることはいずれも正しいことだが証明できるだろうか．形式から当たり前だと思ってしまうのは論理の落とし穴にはまることになる．注意が必要だ．この考え方を使うと

$$g(W) \subset W \Longrightarrow f \circ g(W) = f(g(W)) \subset f(W)$$

より $g(f(W)) = g \circ f(W) = f \circ g(W) \subset f(W)$ で証明できる．

- W が f 不変であることを言うには $\vec{v} \in W$ について $f(\vec{v}) \in W$ を言えばよい．このことから次のような形でも証明できる．

$\vec{x} \in f(W)$ をとる．$\vec{v} \in W$ で $\vec{x} = f(\vec{v})$ を満たすものが存在する．W は g 不変なので $g(\vec{v}) \in W$ である．ゆえに

$$g(\vec{x}) = g(f(\vec{v})) = f(g(\vec{v})) \in f(W)$$

であり $f(W)$ も g 不変になる．

本日の講義の要点

1. 不変部分空間による直和分解と表現行列

2.3 節の 4 行目以下に書いていることを解説した．ただし，$V = W_1 \oplus W_2$ で W_1, W_2 がともに f 不変な場合である．V の基底を W_1 の基底と W_2 の基底を並べる形で与えれば f の表現行列が $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ の形になることは，少し考えれば理解できると思う．なお，この A_1 は f を W_1 に制限した写像（線形変換）

$$f_1 = f_{|W_1} : W_1 \longrightarrow W_1$$

の表現行列になっていることに注意せよ．

V が r 個の f 不変部分空間の直和になっている場合（プリントに記載されていること）は，2 個の場合から帰納的に理解できる．例えば 3 個の場合は $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3)$ として，2 個の場合を 2 回繰り返して使えばよい．2 個から一般の場合を導くこのような議論は良く使われるので考えてみてほしい．

2. 固有多項式，固有値，固有空間

f の表現行列の固有多項式は基底の取り方によらないのでこれを f の固有多項式と呼び $p_f(x)$ で表す．基底の取り方によらないことは行列式の性質から簡単にわかる．

$$p_f(x) = |xE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}||xE - A||P| = |xE - A|$$

$p_f(x) = 0$ の解を固有値といい，固有値 α に対して $V(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I)$ を固有空間と呼ぶ．固有空間が f 不変であることはプリントでは証明していないのでここに書いておこう．

$\vec{x} \in V(\alpha)$ について $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$ が成り立つ．ゆえに $f(\vec{x}) \in V(\alpha)$ であり，$V(\alpha)$ は f 不変である．

3. 異なる固有値に対する固有空間の和は直和になること

命題 2.3 について証明は講義ノートに丁寧に書いてある．またこの証明は 1 年次の線形代数のテキストにも記述されている．ここではこの議論を部分空間の直和に結びつけることが重要だ．証明の議論と定理 1.7(2) を対比させること．

4. f が半単純であることと行列が対角化可能であること

固有空間の次元の和が $\dim V$ と一致するとき f を半単純という．固有空間の基底を並べて V の基底が作れる（定理 1.7(4) 参照) ので，表現行列は対角行列になる．f が半単純であることと，その表現行列が対角化可能であることは同じことである（定理 2.4)．

5. Cayley-Hamilton の定理

まず，多項式に行列を代入することについて注意した．なお，$p(A)q(A) = q(A)p(A)$ が成り立つことについては，行列の多項式の計算と多項式の計算がまったく同じであることを確認すればよい．$A^kA^h = A^{k+h} = A^hA^k$ が基本である．

これにより $p(x) = |xE - A|$ について $p(A) = O$ が成り立つ．この証明に開集合で恒等的に 0 になる多項式は，0 多項式のみであることを利用した．講義では証明しなかったのでここに記述しておく．

1 変数の多項式では n 次方程式の解が高々 n 個であることから分かる．$n-1$ 変数多項式についてこの事実が正しいとし，n 変数多項式を

$$p_k(x_2, \dots, x_n)(x_1)^k + p_{k-1}(x_2, \dots, x_n)(x_1)^{k-1} + \cdots + p_1(x_2, \dots, x_n)(x_1) + p_0(x_2, \dots, x_n)$$

と整理し，これが $(a_1, a_2, \dots .a_n)$ の周りで 0 だったとする．これを x_1 の多項式とみれば，$(x_2, \dots, x_n)$ が $(a_2, \dots, a_n)$ に近い時，$x_1 = a_1$ の周りで 0 になる．ゆえに $p_l(x_2, x_3, \dots x_n)$ は $(a_1, a_2 \dots, a_n)$ の周りで 0 である．よって p_l について帰納法の仮定が使え，$p_l = 0$ を得る．ゆえにこの多項式は 0 である．

この証明で「周り」というのは曖昧な用語であり，数学の議論としては失格である．厳密に扱うには ε 近傍という用語を使う．また連続性の理解も必要である．これらは数学を学ぶ際の基本事項だがこの授業の守備範囲ではない．ここでは感覚的な説明で済ませることにする．

6. 代数学の基本定理

複素係数の n 次方程式は複素数の範囲で解を持つ．この事実と因数定理を組み合わせれば複素係数 n 次多項式は n 個の一次式の積として因数分解できる．またこの表し方は一次式の並べ方を除いて一通りである．

7. 拡大固有空間

固有多項式を $p(x) = (x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \dots (x - \alpha_r)^{l_r}$ と因数分解する．ただし α_j たちは互いに異なるとする．この因数分解における l_j を固有値 α_j の重複度という．

有限次元線形空間 V の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について α を f の固有値，l を α の重複度とするとき

$$W(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^l$$

を f の固有値 α に対する拡大固有空間と呼ぶ．

- 重複度が 1 なら $V(\alpha) = W(\alpha)$ である．一般に $V(\alpha) \subset W(\alpha)$ が成り立つ．
- $W(\alpha)$ は f 不変である．

  $\vec{x} \in W(\alpha)$ をとる．$(f - \alpha I)^l \circ f = f \circ (f - \alpha I)^l$ より

$$(f - \alpha I)^l(f(\vec{x})) = f((f - \alpha I)^l(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

  となるので $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^l = W(\alpha)$ であり，$W(\alpha)$ は f 不変である．

実は V は拡大固有空間の直和になる．この証明は次回の講義で与えることにする．

本日のレポート課題とヒント

課題 1： 問題 2.10（ただし，2 個の直和のとき，$r = 2$ のときのみでかまわない）

【ヒント】行列の直和については 12 ページの中ほどに記述されている．実質的に行列の積についての基本事項である．

課題 2： 有限次元線形空間 V の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について V が二つの f 不変部分空間の直和になっているとする．

$$V = W_1 \oplus W_2, \quad f(W_1) \subset W_1, \quad f(W_2) \subset W_2$$

$f_i = f_{|W_i} : W_i \longrightarrow W_i$, $i = 1, 2$ とおくとき，$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} f_1 + \mathrm{rank} f_2$ を示せ．

【ヒント】$\mathrm{rank} f = \dim \mathrm{Im} f$ なので $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f_1 \oplus \mathrm{Im} f_2$ を示せば結論を得る．$\mathrm{Im} f_i = f(W_i)$ に注意せよ．

線形数学 (12 月 6 日)

前回のレポート課題

レポート提出者がだいぶ減ってしまった．このレポートは，受講者の理解度を確認するものなので，基本的に提出するようにしてほしい．なお，評価には使わないので解答が間違ったものでも気にする必要はない．ただし，自分で考えたことをまとめること．友人と相談するのは構わないが，写すのはやめること．

課題 1： 問題 2.10（ただし，2 個の直和のとき，$r = 2$ のときのみでかまわない）

【解答例】(1) $P = P_1 \oplus P_2$ が正則であるとする．P^{-1} を同じように対称分割して $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とおけば

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & BP_2 \\ CP_1 & DP_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

を得る．$AP_1 = E$ より P_1 は正則で $A = {P_1}^{-1}$ が成り立つ．また $DP_2 = E$ より P_2 も正則で $D = {P_2}^{-1}$ が成り立つ．さらに $BP_2 = O, CP_1 = O$ と P_1, P_2 の正則性から $B = O, C = O$ を得る．

逆に P_1, P_2 がともに正則であるとする．このとき $P_1^{-1} \oplus P_2^{-1}$ が P の逆行列になることが直接示せる．ゆえに，P は正則であり $P^{-1} = P_1^{-1} \oplus P_2^{-1}$ を得る．

(2) については分割乗法を使うだけなので省略する．

【コメント】

- この問題は「次を証明せよ」となっているので，(1)(2) に記述された命題を証明することが求められている．P が正則であることと P_1, P_2 が正則であることの同値性の証明が求められているが，これを使って次の等式を証明することだと勘違いした人が多かった．
- 行列式を使って $|P| = |P_1||P_2|$ を使えば同値性の証明は簡単だ．すると後半は単なる計算で証明できる．
- 正方行列を同じように対称分割した時の分割乗法（分割された一つ一つの行列をあたかも一つの数のように行列の積を行う）は基本事項である．この問題はこのことさえ理解していれば簡単なはずだ．レポート提出者が少なかったことは残念だ．

課題 2： 有限次元線形空間 V の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について V が二つの f 不変部分空間の直和になっているとする．

$$V = W_1 \oplus W_2, \quad f(W_1) \subset W_1, \quad f(W_2) \subset W_2$$

$f_i = f_{|W_i} : W_i \longrightarrow W_i$, $i = 1, 2$ とおくとき，$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} f_1 + \mathrm{rank} f_2$ を示せ．

【解答例】(1) $\mathrm{Im} f = f(W_1) + f(W_2)$ であること．

$W_i \subset V$ なので $f(W_i) \subset f(V) = \mathrm{Im} f$ である．$f(W_1) + f(W_2)$ は $f(W_1)$ の要素と $f(W_2)$ の要素の和なので $\mathrm{Im} f$ に含まれる．ゆえに $f(W_1) + f(W_2) \subset \mathrm{Im} f$ が成り立つ．

逆に $f(\vec{v}) \in \mathrm{Im} f$ をとる．$\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \vec{w}_i \in W_i$ とおけば,

$$f(\vec{v}) = f(\vec{w}_1) + f(\vec{w}_2) \in f(W_1) + f(W_2)$$

を得る．ゆえに $\mathrm{Im} f \subset f(W_1) + f(W_2)$ が成り立つ．

(2) $f(W_1) \cap f(W_2) = \{\vec{0}\}$ であること．

$f(W_i) \subset W_i$ と $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ より $f(W_1) \cap f(W_2) \subset \{\vec{0}\}$ である．部分空間は $\vec{0}$ を含むので，この包含関係は等号になる．

(3) $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} f_1 + \mathrm{rank} f_2$ であること

(1)(2) より $\mathrm{Im} f = f(W_1) \oplus f(W_2)$ なので

$$\mathrm{rank} f = \dim f(W_1) + \dim f(W_2)$$

である．f_i は f を W_i に制限した写像なので $\mathrm{Im} f_i = f_i(W_i) = f(W_i)$ が成り立つ．ゆえに求める等式を得る．

【コメント】

- ヒントに書いておいたように直和であることを示すことがポイントだ．(1) で和であること，(2) でそれが直和であることを示している．直和とは何か改めて考えてほしい．
- $f(W_1 \oplus W_2) = f(W_1) \oplus f(W_2)$ というような等式を書く人がいるが，この等式は W_i が不変部分空間でないと成り立たない．解答例 (2) の直和であることの証明に f で不変なことを使っている j ことに注意せよ．なお，$f(W_1 + W_2) = f(W_1) + f(W_2)$ は f で不変でなくても成り立つ．証明は解答例の (1) である．

本日の講義の要点

1. ここまでのストーリー

   レポート提出数が大幅に減っている．何をやっているか分からなくなっている人が多くなっているようなので，これまでの議論の流れをたどることにした．

   - 有限次元線形空間 V の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ は V の基底によって行列で表現される．基底を変換すると表現行列は A から $P^{-1}AP$ に変わる．そこで基底をうまくとることによって表現行列をできる限り簡単な行列にすることを考える．(講義ノート 11 ページ，下から 8 行目)
   - V が f 部分空間の直和であるとき，直和の各部分空間の基底を集めることによって V の基底を作れば表現行列は直和行列になる．(講義ノート 12 ページ，2.3 節の 4 行目)
   - $P^{-1}AP$ を簡単にするという問題は，各直和成分の行列 A_i を簡単にする問題に還元される (講義ノート 13 ページ問題 2.10).

   さて，V は拡大固有空間の直和に分解される (講義ノート 15 ページ 2.7)．しかも f 不変部分空間になる．この事実の証明は来週に回すことにし，これ以降の議論を展開した．

2. 拡大固有空間 $W(\alpha_i)$

   拡大固有空間の定義は 13 ページの定理 2.7 の直前に記述されている．ここで f_i を f の $W(\alpha_i)$ への制限とし

   $$g_i = f_i - \alpha_i I : W(\alpha_i) \longrightarrow W(\alpha_i)$$

   とおく．α_i の重複度を l_i とおけば $g_i^{l_i} = 0$ が成り立つ．[*1] このように冪をとると 0 になるような写像を冪零写像と呼ぶ．

   f_i の表現行列を A_i とすれば g_i の表現行列は $A_i - \alpha_i E$ である．このことから f_i の表現行列を簡単にする問題は冪零写像 g_i を簡単にする問題に帰着される．

3. 冪零写像の表現行列

   命題 2.8（講義ノート 16 ページ 1 行目) を紹介した．この命題の証明は行わない．ただし，次のように考えるとイメージしやすいと思う．

[*1] 授業終了後に g^k の意味を聞かれたがこれは g を k 個合成したものである．行列をかける線形写像では，行列 k 個の積に他ならない．

$g : W \longrightarrow W$ は $g^k \neq 0$ および $g^{k+1} = 0$ を満たすとする．このとき $\mathrm{Im} g^k \ni \vec{v} \neq \vec{0}$ がとれる．そこで $\vec{p} \in W$ を $\vec{v} = g^k(\vec{p})$ となるようにとる．このとき

(1) $\{g^k(\vec{p}),\ g^{k-1}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p}\}$ は一次独立である．

(2) これらの生成する空間を W_0 とすればこれは g で不変である．

(3) $g_{|W_0}$ のこの基底に関する表現行列は

$$J(0, k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k \end{pmatrix}$$

講義では (1) のみ証明し，他はレポート課題にした．(1) の証明の概略を書いておこう．まず，$g^{k+1} = 0$ なので $g^{k+1}(\vec{p}) = \vec{0}$ である．特に $l \geqq k+1$ について $g^l(\vec{p}) = g^{l-k-1} \circ g^{k-1}(\vec{p}) = \vec{0}$ である．さて一次独立であることを示すために

$$c_0 g^k(\vec{p}) + c_1 g^{k-1}(\vec{p}) + \ldots + c_{k-1} g(\vec{p}) + c_k \vec{p} = \vec{0}$$

が成り立っているとする．両辺に写像 g^k を作用させれば，左辺では最後の項を除いてすべて $\vec{0}$ になる．ゆえに

$$c_k g^k(\vec{p}) = \vec{0}$$

となるが，$g^k(\vec{p}) = \vec{v} \neq \vec{0}$ なので $c_k = 0$ を得る．ゆえに

$$c_0 g^k(\vec{p}) + c_1 g^{k-1}(\vec{p}) + \ldots + c_{k-1} g(\vec{p}) = \vec{0}$$

が成り立つ．この両辺に写像 g^{k-1} を作用させれば

$$c_{k-1} g^k(\vec{p}) = \vec{0}$$

である．ゆえに前と同じ議論で $c_{k-1} = 0$ を得る．以下，同様に議論を繰り返せばすべての c_j について 0 になることが示せるので，一次独立である．

4. Jordan の標準形

幂零変換の表現行列が $J(0, k)$ たちの直和行列になることから

$$f_j : W(\alpha_j) \longrightarrow W(\alpha_j)$$

の表現行列はそれに $\alpha_j E$ を加えたもの，すなわち $J(\alpha_j, k) = J(0, k) + \alpha_j E$ の直和行列になる．よって f の表現行列は Jordan 細胞 $J(\alpha, k)$ の直和になる．これを Jordan の標準形と呼ぶ．

5. Jordan の標準形と固有空間，拡大固有空間の次元 (命題 2.10)

固有空間の次元，拡大固有空間の次元（固有値の重複度）から，Jordan の標準形がどのような形になるか，考察することができる．この命題の証明は，核の次元が V の次元から階数を引いたものであること，および問題 2.11 を利用する．問題 2.11 の一部はレポート課題にしたが，この問題も考えておくとよい．

今日の講義では，Jordan の標準形がどのようにあらわれるかを中心に解説した．分かりづらい部分も多々あるが，Jordan の標準形とは何かは理解しておいてほしい．なお，講義でも言ったことだが，どんな線形変換もその表現行列を Jordan の標準形にできる．そのため，表現行列が Jordan の標準形だと仮定してもそれは一般論である．ここに Jordan の標準形の重要さがある．

次回の講義では V が拡大固有空間の直和になることの証明と，Jordan の標準形にするための計算例を解説する．2.6 節（双対空間）は省略し，次回で第 2 章は終わることにする．1 月 17 日に第 2 章の範囲での試験を行う．掲示に注意すること．

本日のレポート課題とヒント

課題 1： $J(0,r)^r = O$ を示せ．

【ヒント】 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_l \end{pmatrix}$ について

$$AJ(0,r) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{l-1} \end{pmatrix}$$

を示せば証明に至れるだろう．なお，問題 2.11 の一部なので，この問題も解いてほしい．

課題 2： 本日の講義の要点 3 の（2）及び (3)

【ヒント】(2) は W_0 の基底が与えられているので，基底を構成するそれぞれのベクトルの g で移った先が再び W_0 に入ることを言えばよい．もちろん $g^{k+1} = 0$ という仮定を使わなければ証明できない．(3) は表現行列の求め方に沿って考えれば簡単だろう．

線形数学 (12 月 13 日)

前回のレポート課題

課題 1： $J(0,r)^r = O$ を示せ．

【解答例】 $J(0,r) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_{r-1} \end{pmatrix}$ と $A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j$ より

$$AJ(0,r) = \begin{pmatrix} A\mathbf{0} & A\boldsymbol{e}_1 & \cdots & A\boldsymbol{e}_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{r-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．すなわち $J(0,r)$ を右からかけることは，最後の列を削除して前に $\mathbf{0}$ を付け加えることになる．これを r 回繰り返せば 0 行列になるので $J(0,r)^r = 0$ である．なお，$J(0,r)$ は階段行列（簡約な行列）であり，その階数は $r-1$ である．また，$EJ(0,r)^{r-1}$ の第 r 列は $\boldsymbol{e}_1$ なので $J(0,r)^{r-1} \neq O$ である．

【コメント】

- 証明の際は，その議論が成立する理由を簡単に述べること．解答例では冒頭の部分がそれにあたる．特にいきなり $AJ(0,r) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{r-1} \end{pmatrix}$ と書かれると何故そうなるのか理由を聞かざるを得ない．

課題 2： 本日の講義の要点 3 の（2）及び (3)

【解答例】(2)$W_0 = \left\langle g^k(\vec{p}), g^{k-1}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p} \right\rangle$ だが，$l < k$ については

$$g\left(g^l\vec{p}\right) = g^{l+1}(\vec{p}) \in W_0$$

である．また $g^{k+1} = 0$ より

$$g\left(g^k(\vec{p})\right) = g^{k+1}(\vec{p}) = \vec{0} \in W_0$$

である．ゆえに $g(W_0) \subset W_0$ となる．

(3) は表現行列の求め方に沿って考えるだけなので省略する．

【コメント】

- 一般に $\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r \rangle$ について

$$g(\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r \rangle) = \langle g(\vec{p}_1), g(\vec{p}_2), \ldots, g(\vec{p}_r) \rangle$$

が成り立つ．これは生成する空間が一次結合の全体であることと g が線形であることを考えれば納得できるだろう．証明を考えてみるとよい．これを使えば

$$\begin{aligned} g(W_0) &= g(\left\langle g^k(\vec{p}), g^{k-1}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p} \right\rangle) = \left\langle g^{k+1}(\vec{p}), g^k(\vec{p}), \ldots, g^2(\vec{p}), g(\vec{p}) \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{0}, g^k(\vec{p}), \ldots, g^2(\vec{p}), g(\vec{p}) \right\rangle \subset W_0 \end{aligned}$$

である．

レポートの提出状況がさらに悪くなった．講義内容が難しくなっていることが原因だと思っている．ただし，上記のレポート課題は難しくない．しかも講義内容を理解するための要点になる事実だ．レポートは評価の対象にはしないが，レポート課題に取り組むことを怠らないようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 命題 2.6 の証明の冒頭の部分について

互いに素な多項式の組 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_r(x)$ について

$$h_1(x)p_1(x) + h_2(x)p_2(x) + \cdots + h_r(x)p_r(x) = 1$$

となるように多項式 $h_j(x), 1 \leqq j \leqq r$ が取れることを示した．証明は

$$\Phi = \{h_1(x)p_1(x) + h_2(x)p_2(x) + \cdots + h_r(x)p_r(x) \mid h_1, h_2, \dots, h_r \text{は多項式}\}$$

とおき，Φ に属する 0 でない要素の中で次数が最小のものを $g(x)$ とおき，$g(x)$ が $p_1, p_2, \dots, p_r$ たちの公約数であることを示すことによって行う．アイデアは奇抜だが証明は分かりやすいと思う．

なお，講義では $p_j(x) = p(x)/(x - \alpha_j)^{l_j}$ で使っている．このとき $h_1p_1 + h_2p_2 + \cdots + h_rp_r = 1$ の両辺を p で割れば

$$\frac{h_1(x)}{(x-\alpha_1)^{l_1}} + \frac{h_2(x)}{(x-\alpha_2)^{l_2}} + \cdots + \frac{h_r(x)}{(x-\alpha_r)^{l_r}} = \frac{1}{p(x)}$$

となるが，これは部分分数展開に他ならない．有理関数の不定積分で利用した部分分数展開が常に可能なこともこの事実から証明できる．

2. 拡大固有空間の和が直和であって V と一致すること (命題 2.6，定理 2.7)

証明はテクニカルであり議論も長い．プリント 14 15 ページに記述してあるので考えてみてほしい．Cayley-Hamilton の定理 $p(A) = 0$ と A の多項式による行列の可換性が何度も使われる．なお，固有値が 1 つのみの場合を解説しなかったので補足しておく．

固有値が 1 つのときは固有多項式は $p(x) = (x - \alpha)^n$ である．ゆえに $p(A) = (A - \alpha E)^n = O$ であり，$W(\alpha) = \mathrm{Ker}(A - \alpha E)^n = \mathbb{C}^n$ である．命題 2.6 は固有値が一つの場合でも成り立つ．

3. $P^{-1}AP$ が Jordan の標準形になるときの P（プリント 17 ページ中ほど)

Jordan 細胞 $J(\alpha, r)$ が $P^{-1}AP$ の第 $k+1$ 列から第 $k+r$ 列に現れたとしよう．このとき P の第 $k+1$ 列から第 $k+r$ 列までは

$$A\boldsymbol{p}_{k+1} = \alpha\boldsymbol{p}_{k+1}, \quad A\boldsymbol{p}_{k+s} = \alpha\boldsymbol{p}_{k+s} + \boldsymbol{p}_{k+s-1}, (s = 2, 3, \dots r)$$

を満たす（この議論は基本的に対角化の議論と同じである)．これから

$$(A - \alpha E)\boldsymbol{p}_{k+s} = \boldsymbol{p}_{k+s-1}$$

となるので $\boldsymbol{p}_{k+r} = \boldsymbol{p}$ とおけば

$$(\boldsymbol{p}_{k+1}, \boldsymbol{p}_{k+2}, \dots, \boldsymbol{p}_{k+r}) = ((A - \alpha E)^{r-1}\boldsymbol{p}, (A - \alpha E)^{r-2}\boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{p})$$

が成り立つ．なお

$$(A - \alpha E)^r\boldsymbol{p} = (A - \alpha E)\boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{0}$$

である．前回のレポート課題 2 と比較してみてほしい．

4. Jordan の標準形の求め方

Jordan の標準形の重要性は，線形変換の表現行列を Jordan の標準形にしてよいという点にある．具体的な計算が重要だというわけではない．ただ，内容を理解するには基本的な計算方法も知っておいたほうが良い．プリントの例 5(18 ページ) に 4 次の例があるが煩雑なので授業では扱わなかった．各自読んでおくこと．講義で扱った例をここに紹介しておく．

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について $|xE - A| = (x-1)^2(x+1)$ である．固有空間については

$$V(1) = \mathrm{Ker}(A - E) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(-1) = \mathrm{Ker}(A + E) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．ここまでは 1 年次の線形代数で学習した事項だ．1 の重複度が 2 なのに固有空間の次元が 1 なので対角化不可能である．そこで拡大固有空間を考える．

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

より

$$W(1) = \mathrm{Ker}(A - E)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．Jordan の標準形 $J(-1,1) \oplus J(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ にする行列を求めるには，$\boldsymbol{p}_1$ は $V(-1)$ の 0 でないベクトル，$\boldsymbol{p}_3$ は $W(1)$ に属すが $V(1)$ には属さないベクトル，$\boldsymbol{p}_2$ は $(A - E)\boldsymbol{p}_3$ ととればよい．具体的には

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (A - E)\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすることにより次が成り立つ．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = J(-1,1) \oplus J(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

本日のレポート課題とヒント

課題 1： 問題 2.12

固有値固有ベクトルの計算までは 1 年次で学習した内容なので特に言うことはない．Jordan の標準形にする行列は，固有値が二つの場合は講義で解説した例を参考に実行してほしい．固有値が一つで固有空間の次元が 2 の場合は次のように考える．

- 拡大固有空間（この場合は固有値が一つなので全空間）から固有空間に属さないベクトルを一つ取り $\boldsymbol{p}_3$ とおく．
- $\boldsymbol{p}_2 = (A - \alpha E)\boldsymbol{p}_3$ とおく．Jordan 細胞を作るにはこの置き方が必須
- $\boldsymbol{p}_2$ は固有ベクトルなので，固有空間（2 次元）のベクトルをもう一つ取り $\boldsymbol{p}_1$ とおく．

線形数学 (12 月 20 日)

前回のレポート課題

前回の課題は問題 2.12 の Jordan の標準形に関する計算問題だ．まず簡単に解答例を記そう．

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について固有多項式は $|xE - A| = (x-3)(x+3)^2$ である．固有値は 3 と -3 であり，それぞれに対する固有空間は

$$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．$\dim V(-3)$ が -3 の重複度 2 よりも小さいので対角化不可能である．ここまでは 1 年次の線形代数のお話．

拡大固有空間の次元は固有値の重複度に等しい（命題 2.10(1)）ので，$\dim W(-3) = 2$ である．そこで $W(-3) = \mathrm{Ker}(A+3E)^2$ を求めるために $(A+3E)^2$ を計算する．

$$(A+3E)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \\ 27 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \qquad W(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

さて，$\dim V(-3) = 1$ より -3 に対応する Jordan 細胞は 1 つなので，Jordan の標準形は $J(3,1) \oplus J(-3,2)$ である（もちろん入れ替わった形でも構わない）．このとき P の第 1 列は $V(3)$ から，P の第 3 列は $W(-3) - V(-3)$ から，P の第 2 列は第 3 列に $A + 3E$ をかけたものとしてとる．たとえば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (A+3E)\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上の計算から A の Jordan の標準形は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

次に $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の Jordan の標準形について考察する．この固有多項式は $|xE - B| = (x-2)^2$ なので固有値は 2 のみである．固有空間は

$$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

なので B は対角化不可能である．拡大固有空間は固有値の重複度が 3 なので 3 次元であり，全空間に一致する．実際

$$(B-2E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = O$$

であり，$W(2) = \mathrm{Ker}(B-2E)^3 = \ker O = \mathbb{R}^3$ となる．ゆえに，2 に対する Jordan 細胞は 2 つであり Jordan の標準形は $J(2,1) \oplus J(2,2)$ である．このとき P の第 3 列は $W(2) - V(2)$ からとる．P の第 2 列は $(B-2E)\boldsymbol{p}_3$ と

し，第 1 列と第 2 列が $V(2)$ の基底になるように $\boldsymbol{p}_1$ を選ぶ．具体的には

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (B - 2E)\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけばよい．よって

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

【コメント】

- Jordan 細胞は講義ノート 18 ページ下から 5 行目のベクトルの組に対応する．解答例では 2 番目の Jordan 細胞の次数を 2 にしているが，それに対応する P の列ベクトルは $(A - \alpha E)\boldsymbol{p}_3$，$\boldsymbol{p}_3$ の形に取っていることを確認せよ．
- 固有空間を求めていない答案があるが，固有値，固有空間を求めるまでは 1 年次の線形代数で学習している事項だ．この計算が Jordan の標準形を考えるための出発点であり，良く理解できていないという人はきちんと復習しておくこと．
- P^{-1} を計算する人がいるが，これは不要である．また $P^{-1}AP$ の計算を行っている人がいるが，これはすべきではない．$P^{-1}AP$ がどのような行列になるかは講義の中で証明されている．
- A の階数が 1 のときに $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解をきちんと記述できない人がいるが，これは 1 年次の線形代数の基本事項だ．
- A が 3 次の場合に $P^{-1}AP = J(\alpha, 1) \oplus J(\beta, 2)$ であれば

  $$A\boldsymbol{p}_1 = \alpha\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \beta\boldsymbol{p}_2, \quad A\boldsymbol{p}_3 = \beta\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2$$

  が成り立つ．また $P^{-1}AP = J(\alpha, 3)$ であれば

  $$A\boldsymbol{p}_1 = \alpha\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \alpha\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_3 = \alpha\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2$$

  が成り立つ．3 次の Jordan の標準形の計算はこれだけ理解できていれば十分だろう．

本日の講義の要点

1. 内積の定義と例

   内積は 3.1 節の (I)～(IV) の性質によって定義される．複素数で考えているので実の場合と少し異なることに注意すること．また

   $$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \overline{(\vec{b} + \vec{c}, \vec{a})} = \overline{(\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{a})} = \overline{(\vec{b}, \vec{a})} + \overline{(\vec{c}, \vec{a})} = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$$
   $$(\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \overline{(\alpha\vec{b}, \vec{a})} = \overline{\alpha(\vec{b}, \vec{a})} = \bar{\alpha}\overline{(\vec{b}, \vec{a})} = \bar{\alpha}(\vec{a}, \vec{b})$$

   という議論で，第 1 変数に関する線形性と (I) の性質から第 2 変数に関する共役線形性（スカラー倍を共役をとって外に出せる）ことが導かれる．要するに内積であることを確かめるには (I)(III)(IV) と (II) のうち第 1 変数に関する線形性のみを示せば良い．

   内積の例については例 6，例 7 を紹介した．他にも多くの例があるがとりあえずこの 2 つだけは意識していてほしい．

2. 内積に関する二つの不等式 (定理 3.1)

  複素数で考えているので若干の工夫が必要だが，そう難しいものではない．じっくり考えること．実は三角不等式から $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の距離として扱えることが分かる．例 7 の関数の集合でも距離が考えられることが興味深い．もちろん，関数の距離のイメージがつかめないと悩む必要はない．距離のイメージは $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ で考えれば良い．次元が高いと分からないというのなら複素平面でも座標空間でも構わない．

3. 内積の表現行列

  有限次元線形空間の内積は，基底をとることにより行列で表現される．21 ページに簡潔にまとめてあるので確認しておくこと．

4. 直交，直交補空間

  2 つのベクトルが直交することと，直交補空間を定義した．$\mathbb{R}^3$ での直交と直交補空間の概念は直感的にイメージしやすい．講義で絵を描きながら説明したので考えて欲しい．

  さて，W が有限次元の時，$V=W\oplus W^{\perp}$ となること（命題 3.2）を紹介した．

   - $W\cap W^{\perp}=\{\vec{0}\}$ であること

     $\vec{x}\in W\cap W^{\perp}$ について $(\vec{x},\vec{x})=0$ を示す．

   - $\vec{x}\in V$ について W のベクトルで $\vec{x}$ に最も近いものを $\vec{w}$ とおく．

     $V=\mathbb{R}^3$ で W が原点を通る平面の時は，$\vec{x}$ から W に降ろした垂線の足にほかならない．一般の場合は W の基底をとり，その座標によって $f(\vec{w})=\|\vec{x}-\vec{w}\|$ を $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数とみなし，その最小値の存在に帰着させた．証明は完全に与えたわけではないが納得できることではないだろうか．

   - $\vec{x}-\vec{w}\in W^{\perp}$ であること

     背理法で証明した．議論は 22 ページに記述してあるので読んでほしい．このことから $\vec{x}=\vec{w}+(\vec{x}-\vec{w})\in W+W^{\perp}$ を得る．最初と合わせて $V=W\oplus W^{\perp}$ である．

  この命題は有限次元部分空間には垂線を下せることを主張している．具体的には $\vec{x}\in V$ は

$$\vec{x}=\vec{w}+\vec{y}\in W\oplus W^{\perp}$$

  と一意的に表せるがこの $\vec{w}$ が垂線の足である．これは $\vec{x}$ に最も近い W のベクトルである．例 7 の関数の集合でも可能なことに注意せよ．

本日のレポート課題とヒント

課題 1： 問題 3.1

  講義の要点の 1 に記述したように (I)(III)(IV) と第 1 変数に関する線形性のみ示せばよい．積分の性質から簡単に示せるはずだ．

課題 2： 問題 3.2

  基底 $\mathcal{A}=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n\}$ に関する表現行列を A，基底 $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\}$ に関する表現行列を B とし，基底の変換を $\mathcal{B}=\mathcal{A}P$ とおけば $B={}^{t}PA\bar{P}$ となる．このことを示せばよい．

線形数学 (1 月 24 日)

前回のレポート課題

問題 3.1　(f, g) の定義に従って (I)(II)(III)(IV) を個別に確かめていく．例えば (I) は

$$\overline{(g, f)} = \overline{\int_0^{2\pi} g(x)\overline{f(x)}dx} = \int_0^{2\pi} \overline{g(x)}f(x)dx = (f, g)$$

のように積分と共役複素数をとることを交換すればよい．(II) も積分の線形性を使うだけだ．

(III)(IV) は

$$(f, f) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

で $|f(x)|^2 \geqq 0$ であることおよび連続関数であることを使えばよい．厳密な証明には $\varepsilon\delta$ による連続関数の定義を用いる．

【コメント】 内積の定義を確認するだけの問題だ．積分の性質を使うだけなので易しい．なお，(IV) の証明には $|f(x)|^2$ の連続性が必要なので「連続だから」と明記するほうが望ましい．

問題 3.2　基底の変換の行列 $P = (p_{ij})$ について $\vec{b}_j = \sum p_{ij}\vec{a}_i$ が成り立つ．このとき基底の表現行列の $(i.j)$ 成分は

$$b_{ij} = (\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \left(\sum_k p_{ki}\vec{a}_k, \sum_l p_{lj}\vec{a}_l\right) = \sum_{k,l} p_{ki}\overline{p_{lj}}(\vec{a}_k, \vec{a}_l) = \sum_{k,l} p_{ki}a_{kl}\overline{p_{lj}}$$

添え字は行番号列番号の順につけられているので右辺は ${}^tPA\overline{P}$ の (i, j) 成分である．よって $B = {}^tPA\overline{P}$ が成り立つ．

これは次のようにしても証明できる．内積の座標による表示は

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{y}}$$

だが，基底の変換による座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{v}$ を代入すれば

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t(P\boldsymbol{u})A\overline{P\boldsymbol{v}} = {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tPA\overline{P}\,\overline{\boldsymbol{v}}$$

となるので，表現行列は $B = {}^tPA\overline{P}$ に変換される．

【コメント】二通りのパターンで解答例を記述した．両方とも理解してほしい．なお，前者の解答例では行番号と列番号に注意すること．

$$\begin{pmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

なので，

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}\vec{a}_i$$

だ．前の添え字は行番号を，後の添え字は列番号を表しているのであり，入れ替えることは転置をとることを意味している．

本日の講義の要点

1. 垂線の足

計量線形空間 V とその有限次元部分空間 W について，$\vec{x} \in V$ から W に垂線を下すことを考える．垂線の足を $\vec{y} \in W$ とすれば，(1)$\vec{x} - \vec{y}$ は W と直交する (2)$\vec{y} \in W$ は $\vec{x}$ に最も近い W の点であることが期待される．このことを次の補題によって証明を与えた．

補題　W の基底 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ が $i \neq j$ について $(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = 0$ を満たすとする．$\vec{x} \in V$ について

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\vec{x}, \vec{b}_k)}{(\vec{b}_k, \vec{b}_k)} \vec{b}_k$$

とおくとき

(1) $\forall \vec{w} \in W$ について $(\vec{x} - \vec{y}, \vec{w}) = 0$ が成り立つ．

(2) $\forall \vec{w} \in W$ について $\|\vec{x} - \vec{w}\| \geqq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ が成り立つ．ここで等号が成立するのは $\vec{w} = \vec{y}$ のときに限られる．

証明は (1) は $(\vec{y}, \vec{b}_j) = (\vec{x}, \vec{b}_j)$ を示せばよい．(2) は $\vec{x} - \vec{y}$ と $\vec{y} - \vec{w}$ が直交することを使って

$$\|\vec{x} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$$

を示す．この等式は実質的に 3 平方の定理である．

この補題の面白さは，垂線を下すという直感的な行為が内積を使った具体的な式で行えることである．これによって関数の集合のような直感的に理解しがたい計量線形空間においても，垂線が明確に定義されることが分かる．

2. グラム・シュミットの直交化

一次独立なベクトルの組 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ について $\vec{b}_j$ を $\vec{a}_j$ から $\left\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1} \right\rangle$ に下ろした垂線ベクトルとおく．これによって互いに直交するベクトルの組 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ が得られる．具体的には前項の補題を使って 22 ページ 14 行目の形で記述できる．

直交するベクトルの組のそれぞれのベクトルを，そのノルムで割れば，大きさが 1 で互いに直交するベクトルの組が得られる．これを正規直交系と呼ぶ．そしてこの手続きで与えられたベクトルの組から正規直交系を作ることをグラム・シュミットの正規直交化法と呼ぶ．

3. 基底が直交系（正規直交系）のときの座標

直交基底の重要性は，座標が簡単に与えられることである．直交基底による表示は実質的にこのプリントの補題で，正規直交基底による表示はプリント 22 ページの問題 3.3 の下に記述されているので確認してほしい．

この事情を例 7 と直交系 $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ によって解説した．例 8 ではノルムで割って正規直交系にして表示しているが，講義ではノルムで割らずに直交系として具体的表示を与えた．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) e^{inx}$$

4. ユニタリ変換とエルミート変換

計量線形空間の線形変換がユニタリ変換であることおよびエルミート変換であることを定義した．これらは実線形空間の場合は直交変換，対称変換と呼ぶ．また有限次元の場合に正規直交基底に関する表現行列を考えれば，それはユニタリ行列，エルミート行列となる．実の場合は直交行列，対称行列である．用語が一度にたくさん登場したので混同しないように．

ユニタリ変換の固有値が絶対値 1 の複素数であることを証明した．固有値の定義とユニタリ変換の定義，内積の性質を使うだけの簡単な証明である．

最後にエルミート変換の例として V を周期 2π の複素数値 C^∞ 級関数全体の集合，内積を例 7 の内積により

$$T : V \longrightarrow V,\ T(f) = if'$$

を紹介した．これがエルミート変換になることは部分積分することで確認できる．T の固有値は

$$T(f) = if' = \alpha f$$

だが，この微分方程式の解は $f(x) = e^{i\alpha x}$ であって，周期が 2π になるのは α が整数の場合に限られる．固有値は整数であって，その固有ベクトルは例 8 で考えた直交系である．

本日のレポート課題とヒント

課題 1： 問題 3.5

(1) は関数の世界でグラム・シュミットの直交化を行うことだ．ただし，正規化（大きさを 1 にすること）は行わなくてもよい．(2) は部分積分を用いる．$m < n$ のとき $((x^2-1)^n)^{(m)}$ は $x = \pm 1$ で 0 になっていること，$m > 2n$ のとき $((x^2-1)^n)^{(m)}$ は $2n$ 次多項式を m 回微分するのだから 0 になることを用いる．代表的な直交関数系の例だ．

課題 2： 命題 3.3(2) の証明

エルミート変換の固有値が実数になることを示すこと．方法はユニタリ変換の場合と同様だ．

線形数学 (1 月 31 日)

前回のレポート課題

問題 3.5　この問題を考える前にまず

$$(x^k, x^h) = \int_{-1}^{1} x^{k+h} dx = \begin{cases} 0 & k+h \text{ は奇数} \\ \dfrac{2}{k+h+1} & k+h \text{ は偶数} \end{cases}$$

を意識しておくこと．これによって内積の計算は簡単になる．$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ を直交化して得られる関数を $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ とおけば，$h_1 = 1$ である．h_2 については，$(x, 1) = 0$ より

$$h_2 = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} 1 = x$$

である．以下グラム・シュミットの直交化法を適用する．

$$h_3 = x^2 - \frac{(x^2, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \frac{(x^2, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 = x^2 - \frac{2/3}{2} 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$h_4 = x^3 - \frac{(x^3, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \frac{(x^3, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 - \frac{(x^3, h_3)}{(h_3, h_3)} h_3 = x^3 - \frac{(x^3, x)}{(x, x)} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$\begin{aligned} h_5 &= x^4 - \frac{(x^4, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \frac{(x^4, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 - \frac{(x^4, h_3)}{(h_3, h_3)} h_3 - \frac{(x^4, h_4)}{(h_4, h_4)} h_4 \\ &= x^4 - \frac{(x^4, 1)}{(1,1)} 1 - \frac{(x^4, x^2 - 1/3)}{(x^2 - 1/3, x^2 - 1/3)} (x^2 - 1/3) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 \frac{3}{35} x^4 \end{aligned}$$

$p_n(x) = \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ は $2n$ 次多項式を n 回微分したものなので n 次多項式である．$n > m$ とする．部分積分

$$\begin{aligned} (p_n, p_m) &= \int_{-1}^{1} p_n(x) p_m(x) dx = \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m)} dx \\ &= \left[\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)} dx \end{aligned}$$

において，$\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ は因数に $(x-1)(x+1)$ を含むので右辺の第 1 項は 0 になる．部分積分を m 回繰り返せば

$$(p_n, p_m) = (-1)^m \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)} \left((x^2-1)^m\right)^{(2m)} dx = (-1)^m (2m)! \left[\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m-1)}\right]_{-1}^{1} = 0$$

なお，$p_n(x) = 2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n + (n-1)$ 次以下の多項式であり，上で求めた h_n の最高次の係数は 1 なので $p_n = 2n(2n-1)\cdots(n+1)h_{n+1}$ の関係がある．

【コメント】

- 直交化についての計算は煩雑だが，難しくはない．奇関数の $[-1, 1]$ 上の積分が 0 であることを使うので，被積分関数の偶奇に注意すること．なお，解答例では一般的な直交化の式を記述してから計算するという方式をとった．もちろん具体的な h_j を入れた形で始めてもよいが，解答例の性質上，何を計算しているかを分かりやすくするためにこのような記述にした．

- 解答例では部分積分を m 回繰り返した．このとき，部分積分の第 1 項は常に 0 になる．$n > m$ より $n \geqq m+1$ なので $m+1$ 回繰り返して

$$(-1)^m \left[\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(2m)}\right]_{-1}^{1} (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-m-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(2m+1)} dx$$

  としてもよい．なお $n = m$ の場合は

$$(p_n, p_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(0)} \left((x^2-1)^n\right)^{(2n)} dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$$

  である．この値を求めることは積分の良い計算問題であろう．

- p_n は Legendre 多項式の定数倍である．直交関数系の基本的例の一つである．

命題 3.3(2)　エルミート変換の固有値が実数であること

T をエルミート変換，α をその固有値，$\vec{p}$ を T の固有値 α に対する固有ベクトルとする．

$$(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\alpha\vec{p}, \vec{p}) = \alpha(\vec{p}, \vec{p})$$
$$(\vec{p}, T(\vec{p})) = (\vec{p}, \alpha\vec{p}) = \bar{\alpha}(\vec{p}, \vec{p})$$

と $(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\vec{p}, T(\vec{p}))$，$\vec{p} \neq \vec{0}$ から $\alpha = \bar{\alpha}$ を得る．ゆえに α は実数である．

【コメント】

定義を組み合わせるだけの基本的証明問題．きちんと理解しておくこと．

本日の講義の要点

1. 正規行列

   正規行列の定義は 3.4 節の初めに書いてある．基本事項として

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (A^*)^* = A$$

   をコメントしたが，複素共役と転置行列なので理解できるだろう．

   ユニタリ行列やエルミート行列が正規行列であることは定義から明らかである．命題 3.6 も上の基本事項を使えば易しいので考えておくこと．

2. 定理 3.6(1) の証明

   一つの固有値と固有ベクトルから出発し，それを第 1 列とするユニタリ行列を作る．考え方は

   - 一つの固有ベクトルから延長して $\mathbb{C}^n$ の基底を作る．
   - それを正規直交化して正規直交基底を作る．第 1 列は初めに取った固有ベクトルになっている．
   - 正規直交基底を並べた行列はユニタリ行列である．

     ${}^tP\bar{P}$ の (i, j) 成分が P の第 i 列と第 j 列の内積になっていること，それゆえ正規直交基底であることは ${}^tO\bar{P} = E$ と同値であることを見ればよい．

   この後の議論は講義ノートの 25 ページを参照してほしい．証明のアイデアは数学的帰納法だが，$n = 2$ の場合の証明と，次数の 1 つ低い行列に帰着させるための議論が同じ議論になっていることが興味深い．味わってほしい．

3. 定理 3.6(1) の証明で使ったユニタリ行列の性質 (問題 3.8)

   $(AB)^* = B^*A^*$ と $(A \oplus B)^* = A^* \oplus B^*$ を使えば簡単だ．直和行列の定義は 2.3 節 (12 ページ) を参照すること．

4. 定理 3.6(2) 対称行列の直交行列による対角化について

　証明は (1) の証明と同じである．対称行列はエルミート行列なので固有値は実数であること（前回のレポート課題），実行列の実固有値に対する固有ベクトルは実ベクトルにとれること，基底の延長やグラム・シュミットの直交化は実の範囲で行えることから，定理 3.6(1) の議論を実数の範囲でやり直すことができる．こうして，実対称行列は直交行列で対角化される．

　実際の対角化は固有値固有空間を求めるのだから，通常の対角化と同じである．対角化の行列を直交行列に取るためには，固有空間の基底を正規直交基底に取ればよい．関連する話題としてエルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを紹介した．重要な事項なので簡単に証明を書いておく．

　T をエルミート変換とし，$T(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$, $T(\vec{q} = \beta\vec{q}$ で $\alpha \neq \beta$ とする．

$$(T(\vec{p}), \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$
$$(\vec{p}, T(\vec{q})) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \bar{\beta}(\vec{p}, \vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

　と $\alpha \neq \beta$ より $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$ である．

5. 対称行列の直交行列により対角化と 2 次形式

　$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の 2 次の項からのみなる多項式を

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j, \quad A : \text{対称行列}$$

と表す．A を対角化する直交行列を P とし $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ とおく．

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} =^t \boldsymbol{X}\,{}^tPAP\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(X_\mathrm{J})^2$$

より，最大固有値 M と最小固有値 m について

$$m\|\boldsymbol{X}\|^2 \leqq^t \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq M\|\boldsymbol{X}\|^2$$

が成り立つ．さらに $\|\boldsymbol{x}\|^2 = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = \|\boldsymbol{X}\|^2$ より，不等式

$$m\|\boldsymbol{x}\|^2 \leqq^t \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq M\|\boldsymbol{x}\|^2$$

を得る．もとの変数 $\boldsymbol{x}$ のみの不等式になったことに注意せよ．

6. 関数空間での例

　V を周期 2π の複素数値 C^∞ 級関数全体のなす線形空間とし，21 ページ例 7 と同様に内積を定める．この時 $T(f) = if'$ はエルミート変換になる．$T(f) = if' = \alpha f$ の解は $f = Ce^{-i\alpha x}$ であるが，これが周期 2π になるためには $e^{-i2\alpha\pi} = 1$ なので α が整数でなくてはならない．エルミート変換の固有値は実数であるという性質が確認できる．さらに固有値 n に対する固有ベクトル（関数なので固有関数と呼ぶことが多い）は $e^{-in\pi x}$ だが，これは例 8(23 ページ) の f_{-n} の定数倍である．異なる固有値に対する固有ベクトルが互いに直交することが $\{e^{inx}\}$ が直交系であることに対応している．

　一般に線形変換は固有ベクトルによって表示すると分かりやすい．この例は $T(f) = if'$ を理解するには e^{inx} たちの一次結合で表すことが有効であることを暗示する．これがフーリエ展開の発想に結びつく．フーリエ展開とは $T(f) = if'$ に関する固有関数展開であり，T を理解するために最も有効な展開である．

今日で線形数学の講義は終了です．2 月 7 日に試験を，2 月 21 日に再試験を行う予定です．

「線形数学」第 1 回試験（11 月 8 日実施）の問題と解答例およびコメント

授業で解説した手法について，その内容を十分理解しないまま真似しようとする人が多い．そのような人は，学習量が得点に結びつかないと思う．理解できないからとにかく形だけ覚えておくという学習法はまったく意味がない．理解しようとする努力を放棄せず，どうしても分からない場合は質問に来てほしい．

問 1 線形空間 V の一次独立なベクトルの組 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ が与えられたする．このとき

$$\vec{q}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{p}_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

で定まるベクトルの組 $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ が一次独立であるための必要十分条件は $A = (a_{ij})$ が正則であることを示せ．

【解答例 1】 ベクトルの組 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ を $\mathcal{P}$ で，$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ を $\mathcal{Q}$ で表す．$\mathcal{P}$ の一次結合は数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を利用して $\mathcal{P}\boldsymbol{b}$ と表す．この記法によって $\mathcal{P}$ が一次独立であることは

$$\mathcal{P}\boldsymbol{b} = \vec{0} \Longrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

である．また問題の行列 $A = (a_{ij})$ は $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ を満たす行列である．（ここまでは解答を分かりやすくするための説明であって，答案では書く必要はない．）

A が正則でないとすれば $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{c}$ が存在する．

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \mathcal{P}A\boldsymbol{c} = \mathcal{P}\boldsymbol{0} = \vec{0}$$

より $\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \vec{0}$ となる $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するので $\mathcal{Q}$ は一次従属である．ゆえに，$\mathcal{Q}$ が一次独立なら A は正則である．

A が正則であるとする．$\mathcal{Q}$ の一次結合 $\mathcal{Q}\boldsymbol{c}$ が $\vec{0}$ になったとすると

$$\vec{0} = \mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \mathcal{P}A\boldsymbol{c}$$

より $\mathcal{P}$ が一次独立なので $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を得る．よって $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であり，$\mathcal{Q}$ も一次独立である．

【解答例 2】$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ が成り立てば $\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \mathcal{P}A\boldsymbol{c} = \vec{0}$ である．逆に $\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \vec{0}$ ならば $\mathcal{P}A\boldsymbol{c} = \vec{0}$ と $\mathcal{P}$ の一次独立性から $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ である．ゆえに $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と $\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \vec{0}$ は同値である．この式が $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のときにのみ成り立つのが，A の正則性と $\mathcal{Q}$ の一次独立性なので二つの条件は同値である．

【コメント】

- 問題 1.7 と基本的に同じ内容である．命題 1.4 の証明の議論も参考になる．証明は易しくはないが，何度も繰り返している議論なので理解しておいてほしい．
- 記号の意味をよく理解しないまま解答している人が多い．正しそうなことを並べても正解にはならない．
- 必要十分であることは必要性と十分性に分けて議論すべきだ．議論の仕方によっては両方同時にいうことが可能になるが，安易にそのような方針をとるべきではない．解答例 2 は必要十分性を一度にいう議論だが理解できるだろうか．
- A が正則でないと仮定して，$\mathcal{Q}$ が一次独立であることに矛盾するとまとめる人が多い．この場合は，まず「$\mathcal{Q}$ が一次独立であるとする」と始めないといけない．

- 十分性の証明において $\mathcal{P}A\boldsymbol{c} = \vec{0}$ からいきなり $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ としてはいけない．解答例にあるように $\mathcal{P}$ の一次独立性から $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を，次に A の正則性から $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ をという形で順を追って示すこと．証明は仮定がどこで使われたのかを明示するのがポイントである．
- $\mathcal{Q}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と書く人が多い．左辺は V における一次結合であって V の要素である．解答例のように $\vec{0}$ としてほしい．ただし，1 年次で使った線形代数の教科書では V の要素をボールド体で書いている．間違いというわけではない．ただ V の要素と数ベクトルはまったく異なる対象なので記号を使い分けたほうが理解しやすい．
- 必要性，すなわち「$\mathcal{Q}$ が一次独立なら A は正則」しか述べていない答案が多い．問題は必要十分条件である．
- 基底の変換の行列の正則性の証明では $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が基底であることが仮定されている．この問題とは設定が異なるので議論を真似しても証明にならない．
- 必要性と十分性が理解できていない人がいる．「$\mathcal{Q}$ が一次独立ならば A は正則」は「A が正則であることは $\mathcal{Q}$ が一次独立であるために必要」と理解できる．
- 必要性に 10 点，十分性に 10 点計 20 点満点とした．平均点は 7.59 点だった．

問 2 線形空間 V の 2 つの有限次元部分空間 W_1，W_2 において $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ であれば，$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ が成り立つことを示せ．（和空間の次元に関する公式は使わないこと）

【解答例】 W_1 の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ と，W_2 の基底 $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ をとる．$W_1 + W_2$ の要素は

$$\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} \in W_1,\ \vec{y} \in W_2$$

とかけるが，$\vec{x} \in W_1$ は $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ の一次結合で，$\vec{y} \in W_2$ は $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ の一次結合で書けるので，$\vec{x}+\vec{y}$ は $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ の一次結合で表せる．ゆえに $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ は $W_1 + W_2$ を生成する．

次に

$$a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + \cdots + a_n\vec{p}_n + b_1\vec{q}_1 + b_2\vec{q}_2 + \cdots + b_m\vec{q}_m = \vec{0}$$

が成り立ったとする．

$$\vec{v} = a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + \cdots + a_n\vec{p}_n = -b_1\vec{q}_1 - b_2\vec{q}_2 - \cdots - b_m\vec{q}_m$$

と整理すれば最初の表示から $\vec{v}$ は W_1 の要素，次の表示から $\vec{v}$ は W_2 の要素である．よってこれは $W_1 \cap W_2$ の要素であり，仮定から $\vec{v} = \vec{0}$ である．$\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ と $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ は一次独立なので，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ および $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ を得る．よって $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$ は一次独立であり，$W_1 + W_2$ の基底である．これから $\dim(W_1 + W_2) = n + m = \dim W_1 + \dim W_2$ を得る．

【コメント】

- 定理 1.3(3) の証明の焼き直し．和空間の定義（自然に覚えられるだろう）と基底であることの示し方についての基本問題だ．きちんと理解してほしい．
- 記号の使い方がおかしい人がいる．$W_1 = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ と書いてしまうと，W_1 は要素 n 個の有限集合だ．記号は形式的なものではなく意味を持った言葉なので無神経に使ってはいけない．
- W_1 の基底を延長して W_2 の基底を作るという表現があるが，これは $W_1 \subset W_2$ のときにしか使えない．この問題では $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ が仮定であり，この議論を行ってしまうと $W_1 = \{\vec{0}\}$ になる．

- 基底であることの証明は生成することと一次独立であることを示すことで行う．基底に共通なものがないからなどの雑な議論が多い．
- 15 点満点で採点した．平均点は 3.26 点だった．

問 3 線形空間 V とその部分空間 W について

$$\vec{p} \sim \vec{q} \iff \vec{p} - \vec{q} \in W$$

と定めるとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．またこの同値関係による $\vec{p}$ の属する同値類 $[\vec{p}]$ について次を示せ．

$$[\vec{p}] = [\vec{0}] \iff \vec{p} \in W$$

【解答例】 $\vec{p} - \vec{p} = \vec{0} \in W$ より $\vec{p} \sim \vec{p}$ であり反射律が成り立つ．$\vec{p} \sim \vec{q}$ のときは $\vec{p} - \vec{q} \in W$ である．

$$\vec{q} - \vec{p} = -(\vec{p} - \vec{q}) \in W$$

なので $\vec{q} \sim \vec{p}$ も成り立つ．よって対称律も成り立つ．$\vec{p} \sim \vec{q}$ かつ $\vec{q} \sim \vec{r}$ とすると，$\vec{p} - \vec{q} \in W$ かつ $\vec{q} - \vec{r} \in W$ である．

$$\vec{p} - \vec{r} = (\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{q} - \vec{r}) \in W$$

なので $\vec{p} \sim \vec{r}$ を得る．ゆえに推移律も成り立ち $\sim$ は同値関係である．

同値類の定義から $[\vec{p}] = [\vec{0}]$ は $\vec{p} \sim \vec{0}$ と同値であり，またこれは $\vec{p} - \vec{0} = \vec{p} \in W$ を意味する．

【コメント】

- 同値関係，同値類についての基本事項を出題した．講義ノートには他の授業で学習していることを前提にあまり詳しく記載しなかったが，講義ではきちんと扱った．また 10 月 25 日の講義メモにも記載している．同値関係，同値類，商集合は第 2 章以降で扱うのでなじんでおくように．
- この同値関係は V の要素 $\vec{p}, \vec{q}$ について定められている．W の要素について議論している人がいるが，誤解である．
- $[\vec{p}] = [\vec{q}]$ が $\vec{p} \sim \vec{q}$ と同値であることは講義でも解説したので使っても構わない．そうすると後半の証明は解答例のように簡単になってしまう．ただし，これに証明をつけようとして失敗している人も多い．この証明も書いておこう．
  同値類の定義から $\vec{x} \in [\vec{p}] \iff \vec{x} \sim \vec{p}$ である．$\vec{p} \sim \vec{q}$ とする．$\vec{x} \sim \vec{p}$ であれば推移律により $\vec{x} \sim \vec{q}$ も成り立つ. 逆も同様で $\vec{x} \sim \vec{p} \iff \vec{x} \sim \vec{q}$ であり $[\vec{p}] = [\vec{q}]$ を得る．逆に $[\vec{p}] = [\vec{q}]$ であるとする．$\vec{p} \sim \vec{p}$ なので $\vec{p} \in [\vec{p}] = [\vec{q}]$ であり $\vec{p} \sim \vec{q}$ が成り立つ．
- 同値関係であることの証明に 10 点，後半の証明に 5 点を配点した．平均点は 5.62 点

全体で 50 点満点，最高点は 47 点，最低点は 0 点 (10 人)，平均点は 16.47 点だった．よくできている人（こういう人の答案は分かりやすい）2 割，努力はうかがえるが見当違いの記述の多い人（この答案の採点は悩みの種だ．何が分かっていて何が分かっていないのか判断しづらい答案が多い）4 割，学習の形跡がほとんど見えない人（この答案も採点しやすい）4 割といったところだろうか．努力はうかがえるが得点に結びつかないという人は，学習の仕方を見直してはどうか．研究室に来てくれたらどんな学習をするべきか相談に乗ります．学習の形跡が見えない人は基本的に授業に対する姿勢を変えてほしい．自ら学習しない人に有意義な授業を提供することはできない．

「線形数学」第 2 回試験（1 月 17 日実施）の問題と解答例およびコメント

固有値・固有ベクトルの計算はできるが他は駄目という答案が多い．これでは 1 年次の線形代数 II での理解にとどまっている．

問 1 A を スカラー行列ではない n 次複素正方行列とする．$A^2 - 3A + 2E = O$ であるとき，A の固有値は 1 と 2 に限ることを示せ．またそれぞれの固有空間の次元の和は n に一致することを示せ．(ヒント: $\mathrm{Im}(A-E) \subset \mathrm{Ker}(A-2E) = V(2)$ を示すこと)

【解答例】 α を A の固有値とすれば $A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ を満たすベクトルが存在する．

$$(A^2 - 3A + 2E)\boldsymbol{p} = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)\boldsymbol{p} = O\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ である．ゆえに α は 1 または 2 である．

一方 $(A-E)(A-2E) = O$ と $A - E \neq O,\ A - 2E \neq O$（$\because A$ はスカラー行列でない）から $A-E, A-2E$ はともに正則ではなく，$1, 2$ は固有値である．ゆえに，A の固有値は 1 と 2 に限る．

$\boldsymbol{p} \in \mathrm{Im}(A-E)$ をとる．$\boldsymbol{p} = (A-E)\boldsymbol{x}$ と表せる．

$$(A-2E)\boldsymbol{p} = (A-2E)(A-E)\boldsymbol{x} = O\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

より $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker}(A-2E)$ である．ゆえに，$\mathrm{Im}(A-E) \subset \mathrm{Ker}(A-2E)$ が成り立つ．$\dim \mathrm{Im}(A-E) = n - \dim \ker(A-E)$ なので

$$n - \dim \mathrm{Ker}(A-E) = n - \dim V(1) \leqq \dim V(2), \qquad \dim V(1) + \dim V(2) \geqq n$$

が成り立つが，固有空間の次元の和は n を超えないので $\dim V(1) + \dim V(2) = n$ が成り立つ．

【コメント】

- 固有値を $|xE - A| = 0$ の解とみなすのは，固有値を求めるときには便利だが，固有値に関する論理的考察をするときには不便だ．固有値の定義は $A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす α であることを理解せよ．数学では，計算しやすい理解の仕方が論理的理解にはあまり有効でないことが多い．このような場合には計算から理解するといった高校までの方法は無力だ．
- Cayley-Hamilton の定理は固有多項式 $p(x)$ について $p(A) = O$ が成り立つことを述べている．しかし，$p(A) = O$ でも $p(x)$ が固有多項式とは限らない．誤解しないように．
- $(A-E)(A-2E) = O$ から $A = E$ または $A = 2E$ とする答案が多すぎる．行列において $AB = O$ でも $A = O$ または $B = O$ とは限らないことは 1 年次の線形代数で注意されたはずだ．特にこの問題では A はスカラー行列ではないと仮定されている．解答のおかしさに気づかないのは理解できない．
- スカラーと行列の区別がされていない答案が目につく．何度も言っているが，このような姿勢で線形代数を理解できるはずはない．記号，用語には意味があるのであり言葉の意味がすべての議論の基本である．
- この問題の前半は線形代数 II の範囲の問題だ．後半はヒントの部分は問題 2.2(2) の類題である．また次元についての議論は定理 2.1(3) を用いる．配点は前半に 10 点，後半に 10 点の計 20 点，最高点は 17 点，平均点は 1.61 点だった．残念である．

問 2 線形空間 V の線形変換 f について，$f^{n-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}, f^n(\vec{p}) = \vec{0}, n \geqq 2$ を満たすベクトル $\vec{p} \in V$ がとれたとする．このとき V のベクトルの組 $\mathcal{P} = \left\{f^{n-1}(\vec{p}),\ f^{n-2}(\vec{p}), \dots, f(\vec{p}), \vec{p}\right\}$ は一次独立であることを示せ．また $\mathcal{P}$ の生成する空間 W に f を制限した写像の $\mathcal{P}$ による表現行列を求めよ．

【解答例】

$$c_1 f^{n-1}(\vec{p}) + c_2\, f^{n-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{n-1} f(\vec{p}) + c_n \vec{p} = \sum_{k=1}^{n} c_k f^{n-k}(\vec{p})\vec{0}$$

とする．ただし，f^k は f を k 回合成した線形変換であり，f^0 は恒等写像とみなす．$f^n(\vec{p}) = \vec{0}$ より n より大きい全ての自然数 m について $f^m(\vec{p}) = \vec{0}$ が成り立つ．そこで両辺を f^{n-1} で移すと

$$f^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f^{n-k}(\vec{p})\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k f^{2n-k-1}(\vec{p}) = c_n f^{n-1}(\vec{p}) = \vec{0}$$

を得る．$f^{n-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ より $c_n = 0$ である．

次に元の式の両辺を f^{n-2} で移すと

$$f^{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f^{n-k}(\vec{p})\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k f^{2n-k-2}(\vec{p}) = c_{n-1} f^{n-1}(\vec{p}) + c_n f^{n-2}(\vec{p}) = c_{n-1} f^{n-1}(\vec{p}) = \vec{0}$$

を得る．よって $c_{n-1} = 0$ も成り立つ．同様に元の式の両辺を f^{n-3} で移せば $c_{n-2} = 0$ を得る．以下同様にすべての係数が 0 であることが分かるので $\mathcal{P}$ は一次独立である．

f の表現行列は $f(f^k(\vec{p})) = f^{k+1}(\vec{p})$ であることから

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}) &= \begin{pmatrix} f^n(\vec{p}) & f^{n-1}(\vec{p}) & \dots & f^2(\vec{p}) & f(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & f^{n-1}(\vec{p}) & \dots & f^2(\vec{p}) & f(\vec{p}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f^{n-1}(\vec{p}) & f^{n-2}(\vec{p}) & \dots & f(\vec{p}) & \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【解答例（帰納法の使い方）】 命題 P_n を

$f^n(\vec{p}) = \vec{0}$ かつ $f^{n-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ であれば $\mathcal{P} = \left\{f^{n-1}(\vec{p}),\ f^{n-2}(\vec{p}), \dots, f(\vec{p}), \vec{p}\right\}$ は一次独立である．

と定める．P_2 の証明は【解答例】のもっとも簡単な場合なので省略する．

P_{n-1} が成立するとする．$f^n(\vec{p}) = \vec{0}$ かつ $f^{n-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ とすれば $f(\vec{p})$ は命題 P_{n-1} の仮定を満たす．ゆえに $\mathcal{P}' = \left\{f^{n-2}(f(\vec{p})),\ f^{n-3}(f(\vec{p})), \dots, f(f(\vec{p})), f(\vec{p})\right\}$ は一次独立である．そこで【解答例】の $c_n = 0$ を得るまでの議論を行えば，他の係数はすべて 0 であることが分かる．

【コメント】

- f^k の意味を誤解していた人がいる．数学では広く使われる基本的な表し方なので覚えておいてほしい．解答例 1 に定義を補足したが，講義でもきちんと説明すべきだった．なお，f^k は $(f(x))^k$ の意味で使われることもあるが，線形空間では積は定義されていないのでこの意味ではないことは明らかだ．また $f^{(k)}$ は f の k 階導関数だが，この場合は (k) と書かなくてはならないことを注意されているはずだ．ここでは k となっているのでこの意味でないことも明らかだ．

- 数学的帰納法を使う答案があった．ただしこの問題では帰納法の仮定をどうとらえるのかが難しい．参考まで帰納法による議論を記述しておいた．分かりづらいかもしれないが考えてみるとよい．
- 前半と後半は切り離して考えることができる．前半は冪零変換に関する議論と同様であり 12 月 6 日の講義メモ 3 に記述している．後半は線形変換の表現行列に関する基本問題だ．配点は前半に 10 点，後半に 5 点の計 15 点，平均点は 4.04 点だった．

問 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を Jordan の標準形にせよ．

【解答例】$|xE - A| = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ であり，固有値は -1 と 2 だ．それぞれの固有空間は

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，-1 に対する Jordan 細胞は 1 つである．ゆえに Jordan の標準形は

$$J(2,1) \oplus J(-1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．$P^{-1}AP = J(2,1) \oplus J(-1,2)$ は P の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ と表すことにより

$$A\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_2, \quad A\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2, \quad (A+E)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$$

と記述されるので，P は次のようにおけばよい．

$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 1 \\ 26 & 14 & 2 \end{pmatrix}$ より -1 に対する拡大固有空間は

$$W(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．そこで

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (A+E)\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix} \in V(-1), \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & -15 & 1 \\ 2 & -12 & -7 \end{pmatrix}$$

とおけばよい．

【コメント】

- 固有値，固有空間までは線形代数 II で学習している．これができない人はもう一度きちんと復習しておくように．なお，計算ミスにより固有空間が $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ になる人がいるが，この空間の次元は 0 であり，固有値であることに矛盾する．これを放置した解答は計算ミスとはみなさない．

- 解答例に記述しているように，この問題では，固有値，固有ベクトルを求めた時点で Jordan の標準形は決定する．対角化も Jordan の標準形の特殊な場合（Jordan 細胞のサイズがすべて 1）であり，この事情は対角化の場合にも体験しているはずだ．P^{-1} を求めて混乱している人がいるが，基本的な認識不足だ．
- P の求め方については $W(-1) - V(-1)$ からベクトル $\boldsymbol{p}_3$ をとって $\boldsymbol{p}_2 = (A+E)\boldsymbol{p}_3$ とおくというやり方を解説した．線形代数の本によっては $\boldsymbol{p}_2 \in V(-1)$ をとってから $\boldsymbol{p}_3$ を $(A+E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2$ の解として定めるというやり方も多い．この方法を取らなかった理由は以下のとおりである．
  - 連立方程式 $(A+E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2$ は $|A+E| = 0$ なのでクラメルの公式は使えない．基本変形で解くことになるが成分に分数が現れることが多いので間違いやすい．
  - 固有値 α に対する固有空間 $V(\alpha)$ の次元が 1 のときは問題ないが，2 以上のときはどの $\boldsymbol{p} \in V(\alpha)$ に対して $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ を解けばいいのか分からない．実際に 12 月 13 日に出題した Jordan の標準形の問題（B のほう）では，$\dim \mathrm{Im}(B - 2E) = 1$ なので $(B-2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ が解を持つような $\boldsymbol{p}$ は 1 次元しかない．$\dim V(2) = 2$ なので，ほとんどの $\boldsymbol{p} \in V(2)$ について解は存在しない．
  - 固有値 α に対する Jordan 細胞の次数が 2 であれば考える連立方程式は一つだが，次数が 3 の場合は $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2$ の解 $\boldsymbol{p}_3$ からさらに $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_3$ を解かなくてはならない．授業で解説した方法では $\boldsymbol{p}_4 \in \mathrm{Ker}(A - \alpha E)^3 - \mathrm{Ker}(A - \alpha E)^2$ をとって $\boldsymbol{p}_3 = (A - \alpha E)\boldsymbol{p}_4$，$\boldsymbol{p_2} = (A - \alpha E)\boldsymbol{p}_3$ とすればよい．
- 固有値，固有空間までに 10 点，Jordan の標準形と P の決定に 10 点の計 20 点を配点した．平均点は 10.3 点だった．

全体で 55 点満点，最高点は 45 点，最低点は 0 点 (8 人)，平均点は 15.6 点だった．平均点だけ見ると前回と変わらないようにも思えるが，線形代数 II の範囲での得点にとどまっている人が多い．この授業の成果としては厳しいものがある．

「線形数学」第3回試験（2月7日実施）の問題と解答例およびコメント

問1 V を複素計量線形空間とし，T をそのエルミート変換とする．T の固有値は実数であることを示せ．また，T の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ．

【解答例】α を T の固有値，$\vec{p}$ を α に対する固有ベクトルとする．$T(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$ および $\vec{p} \neq \vec{0}$ が成り立つ．エルミート変換なので $(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\vec{p}, T(\vec{p}))$ が成り立つが，左辺は $(\alpha\vec{p}, \vec{p}) = \alpha(\vec{p}, \vec{p})$ に，右辺は $(\vec{p}, \alpha\vec{p}) = \bar{\alpha}(\vec{p}, \vec{p})$ に等しい．$\vec{p} \neq \vec{0}$ より $(\vec{p}, \vec{p}) > 0$ なので，$\alpha = \bar{\alpha}$ を得る．ゆえに α は実数である．

次に β を α と異なる固有値，$\vec{q}$ をその固有ベクトルとする．

$$(T(\vec{p}), \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{p}, T(\vec{q})) = (\vec{p}, \beta\vec{q})$$

であるが β も実数なので $(\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$ を得る．$\alpha \neq \beta$ と $\alpha(\vec{p}, \vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$ から $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$ を得る．

【コメント】

- 議論の設定をきちんと書かない人がいる．式の変形の中でいきなり $(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\alpha\vec{p}, \vec{p})$ と書かれても考えていることは予想がつくが好ましくない．実際，採点していると $T(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$ が当然なりたっているかのような議論に出くわす．
- $\alpha = \bar{\alpha}$ を示す際に，$(\vec{p}, \vec{p}) \neq 0$ に言及する必要がある．同様に後半の証明で $(\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$ を示すには β が実数であることに言及しなくてはならない．解答例をよく読んでほしい．
- 講義と異なる記号を使う人がいる．使う場合には記号の意味をきちんと書くべきだ．
- 15点配点した．平均点は 8.65 点だった．

問2 V を複素計量線形空間とする．コーシー・シュワルツの不等式（$|(\vec{p}, \vec{q})| \leqq \|\vec{p}\|\|\vec{q}\|$）を利用して三角不等式 $\|\vec{p} + \vec{q}\| \leqq \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$ を示せ．また，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ が直交するとき，３平方の定理 $\|\vec{p} + \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2$ を示せ．

【解答例】

$$\|\vec{p} + \vec{q}\|^2 = (\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} + \vec{q}) = (\vec{p}, \vec{p}) + (\vec{p}, \vec{q}) + (\vec{q}, \vec{p}) + (\vec{q}, \vec{q}) = \|\vec{p}\|^2 + (\vec{p}, \vec{q}) + \overline{(\vec{p}, \vec{q})} + \|\vec{q}\|^2$$

が成り立つ．この式で $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$ とすれば三平方の定理

$$\|\vec{p} + \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2$$

を得る．

三角不等式については，複素数 z について $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z \leqq 2|z|$ が成り立つので以下のようにすればよい．

$$\|\vec{p} + \vec{q}\|^2 \leqq \|\vec{p}\|^2 + 2|(\vec{p}, \vec{q})| + \|\vec{q}\|^2 \leqq (\|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|)^2$$

【コメント】

- $\|\vec{p} + \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + 2|(\vec{p}, \vec{q})| + \|\vec{q}\|^2$ とする人が何人かいたがこの等式は成立しない．解答例で不等号がついていることに注意せよ．間違った式に基づく証明は評価しようがない．残念だ．
- $(\vec{p}, \vec{q}) + \overline{(\vec{p}, \vec{q})} \leqq |(\vec{p}, \vec{q})| + |(\vec{p}, \vec{q})|$ と書く人がいるが，$(\vec{p}, \vec{q}) \leqq |(\vec{p}, \vec{q})|$ と思っているのだろうか．内積の値は複素数であり，複素数では不等式は意味を持たないので，これは誤りである．

- 15 点配点した．平均点は 6.27 点だった．

問 3 V を実係数の 1 変数多項式全体のなす線形空間とし，$(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ と定める．$(\ ,\ )$ は内積であることを示せ．またこの内積に関して，$\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ を直交化せよ．

【解答例】積分の性質から

$$(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx = (q(x), p(x))$$

$$(\alpha p(x), q(x)) = \int_0^1 \alpha p(x)q(x)dx = \alpha \int_0^1 p(x)q(x)dx = \alpha(p(x), q(x))$$

$$(p(x) + q(x), r(x)) = \int_0^1 (p(x) + q(x))r(x)dx = \int_0^1 p(x)r(x)dx + \int_0^1 q(x)r(x)dx = (p(x), r(x)) + (q(x), r(x))$$

が成り立つ．また $p(x)^2 \geqq 0$ と $p(x)^2$ の $[0, 1]$ 区間上の積分が 0 になるのは $p^2(x) = 0$ の場合に限ることから

$$(p(x), p(x)) \geqq 0, \qquad (p(x), p(x)) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = 0$$

を得る．よって $(\ ,\ )$ は内積である．

直交化についてはまず $h_1(x) = 1$ とする．

$$h_2(x) = x - \frac{(x, h_1)}{(h_1, h_1)}h_1, \qquad (h_1, h_1) = \int_0^1 1dx = 1, \quad (x, h_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

より $h_2(x) = x - \frac{1}{2}$ である．$(h_2, h_2) = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ である．x^2 と h_1, h_2 との内積は

$$(x^2, h_1) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \quad (x^2, h_2) = \int_0^1 x^3 - \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

なので

$$h_3(x) = x^2 - \frac{(x^2, h_1)}{(h_1, h_1)}h_1 - \frac{(x^2, h_2)}{(h_2, h_2)}h_2 = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

である．以下の計算も同様なので結果だけまとめておく．

$$(h_3, h_3) = \frac{1}{180}, \quad (x^3, h_1) = \frac{1}{4}, \quad (x^3, h_2) = \frac{3}{40}, \quad (x^3, h_3) = \frac{1}{120}$$

$$h_4(x) = x^3 - \frac{(x^3, h_1)}{(h_1, h_1)}h_1 - \frac{(x^3, h_2)}{(h_2, h_2)}h_2 - \frac{(x^3, h_3)}{(h_3, h_3)}h_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$$

【コメント】

- 講義で内積を複素計量として定義したが，この問題では実計量である．V でのスカラー倍は実係数多項式であるから当然実数倍を意味する．内積の値も実数である．講義で複素計量として説明したのは，実の場合には共役複素数を外せばよいだけだからだ．解答例のように共役をとる操作は書かずにおくべきだ．

  なお，共役複素数をとっても，実だということを断ったうえでそれをく外した答案は正解にした．

- 内積であることの確認で，$(p, p) = 0 \Longleftrightarrow p = 0$ の証明を欠落した人がいる．なお，$p = 0$ のときに $(p, p) = 0$ であることは線形性から成り立つので示さなくてもよい．$(p, p) = 0$ ならば $0p =$ を示すべきだ．
- 直交化は良く理解できていたようだ．ただやり方を勘違いしている人もいる．これも評価の対象にならない．なお，講義の例（レポート課題）とは積分域が違うので問題の設定に合わせて内積の計算をするように．
- 記号について一言，講義では一般の線形空間の要素を $\vec{p}$ のような形で表した．ただし，ここでは要素は多項式なので $p(x)$ あるいは単に p のような形で書くべきだ．$p(\vec{x})$ というような記号も目にしたが，なぜこういう記号を使ったのか教えてほしい．記号の使い方にはもう少し注意を払ってほしい．
- 内積であることの証明に 10 点，直交化に 10 点を配点した．平均点は 11.4 点だった．

全体で 50 点満点，最高点は 50 点，最低点は 0 点 (6 人)，平均点は 26.3 点だった．試験範囲が狭かったこともあり，比較的取り組みやすかったようだ．