微分積分 I 講義メモ (4 月 13 日)

本日の講義の要点

1. 実数と極限について

   微分積分の理論はニュートンとライプニッツによって 17 世紀に生み出され，自然科学の発展に多大の影響を与えた[*1]．しかし，その背景にある極限の概念を数学的に厳密に理解されたのは 19 世紀以降のことだ．テキストでもまず実数と数列の極限が扱われているが，その扱いは直感に頼っており必ずしも厳密なものではない．より詳細には共通科目の「実数と論理」で扱われる．この講義でも実数や極限については厳密な扱いはせず，直感をベースに解説した．

   - 実数は有限または無限の小数として捉えられる．この場合，整数部は有限なので次が成り立つ．
     - どんな正の実数 α に対してもそれより大きな自然数 n が存在する．
     - どんな正の実数 α に対してもそれより小さな分数 $1/m$ が存在する（アルキメデスの原理）．

     この二つの性質によって無限大や無限小は実数から排除される．
   - （無限）小数は数直線上の点を表す．逆に数直線上の点は（無限）小数を表す．

     これは数直線をいくらでも細かい目盛りのついた物差し（現実にはそんなものは存在しないが）と考えれば分かりやすい．数直線上の点を小数にするには目盛りを読むだけである．逆に無限小数の表す点を求めるには，無限小数を小数点以下第 n 位までで切り捨てたもの（10^{-n} 目盛りの上にある）を考えていけばよい．
   - $0.999\cdots = 1,\ 23.43999\cdots = 23.44$

     異なる無限小数が同じ数直線上の点を表すことがある．この場合，二つの無限小数は同じ実数として扱う．ただし，それは上に述べたような場合に限られる．分かりづらいことだが，事実として認識しておくこと．

2. 和・差・積・商の極限（定理 2.1）

   この事実は高校数学でも常識だろう．しかし，証明（この等式が数学的真実であることを自分が確信するための作業）については意識していない人も多いようだ．この態度は数学を利用する立場の人なら構わないが，数学を学習していこうと思う人は改めなくてはならない．ただ，証明には極限の厳密な定義が必要だ．テキストには定義が書いていないので感覚的な説明に終わっている．

   なお，この定理は $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の両方の収束性が分かっていないと使えない．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ しか分からないときに $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \alpha b_n$ などとしてはいけない．

3. 極限と不等式（定理 2.2）

   (i) については $a_n < b_n$ の場合でも $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ までしか言えないことに注意すること．(ii) は挟み撃ちとして周知の事実である．

4. 単調増加上に有界な数列が収束すること（定理 2.3）

   感覚的には当たり前な事実だが，厳密な証明は実数についての深い理解が必要になる．

5. 無限級数

   無限級数 $\sum a_n$ は部分和の作る数列 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の極限として定義されることを注意した．加えるという操作は有限個の対象についてしか行えず，無限個の場合は極限の概念が必要になる．

[*1] この事情についてはテキスト第 1 章に記述があるので暇なときに読んで欲しい．

なお，2.1 節には具体的な極限の例，級数の例もあるがそれについては扱わなかった．次回以降の講義の中で必要に応じて紹介する．

本日の課題

第 2 章，第 3 章，第 4 章の章末問題から数学 III の範囲で解ける問題をいくつか解いてもらった．ケアレスミスは正解として扱い各 10 点で採点したところ．60 点が 29 人，50 点が 16 人，40 点が 12 人，30 点が 7 人，20 点が 5 人であった．満点が取れて当然の問題であり，できなかった人はきちんとやり直しておくように．

- 第 2 章の 1(2) は一人の計算ミスを除き全員が正解だった．特に言うことはない．
- 第 2 章の 1(10) は分子の有理化が鍵だが，できない人がいる．また有理化してもその後の処理の間違いも多い．なお，計算式を途中で消して答えのみ書く人がいたが，数学の採点は解答に至るプロセスを重視するので，計算は残すこと．
- 第 3 章の 1(2) も数人を除いて正解だった．積の微分法則の定着度は高いと感じた．
- 第 3 章の 1(8) では合成関数の微分法則が正確に使えない人が目に付く．$(x^2+3)^{1/2}$ の微分なので
$$\frac{1}{2}(x^2+3)^{1/2-1}(x^2+3)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$
- 第 4 章の 1(2) は分母の微分が分子の -1 倍になっていることをみれば簡単に不定積分できる．なお，$\tan x$ の不定積分を求める問題なのに，微分計算している答案が多かった．
- 第 4 章の 1(7) は被積分関数を部分分数に展開する．より一般の扱いは大学数学でやることだがこの程度の問題は高校数学の基本問題だろう．なお，見通しのないまま置換積分を行う答案も目に付く．計算量の差が影響しているのではないか．

微分積分 I 講義メモ (4 月 20 日)

本日の講義の要点

1. 逆三角関数

   三角関数の逆関数を導入した．定義及びグラフがテキスト 36，37 ページに書いてあるので覚えておくこと．また $\sin^{-1} x$ を $(\sin x)^{-1}$ と誤解しないこと．そのためにもアークサインと読むこと．なお，$\arcsin x$ のような記述もよく使われる．エクセルなどの表計算ソフトでは ASIN(x) のような記号が使われている．

   $\sin^{-1} x$ の定義を y を使わずに

   $$(1)\,\sin(\sin^{-1} x) = x, \qquad (2)\, -\frac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$$

   としても良い．この場合 各 x に対して $\sin^{-1} x$ という値を定義していることになる．

2. 初等関数

   多項式関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数から加減乗除と合成により一つの式として表される関数を初等関数という．この講義で対象とする関数は基本的に初等関数である．なお，次のように指数を使う関数も初等関数である．

   $$x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \quad x^x = e^{x \log x}$$

   これに対し，一般に関数という場合は初等関数でない関数も含めて考える．単に $y = f(x)$ などと書いた場合は，具体的な式がないので初等関数でない場合も考えていることになる．ただ，これでは理論的な扱いをするだけで計算はやりようがない．この授業の英語名が Calculus になっているのも微分積分計算を中心にした授業であることを示している．また

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

   は 0 のまわりで一つの式として表せないので初等関数ではない．0 以外の点ではもちろん初等関数として表されている．

3. 初等関数の連続性

   初等関数の連続性を示すまでの議論の流れを説明するために 2.2 節，2.3 節の基本事項を解説した．

   (1) 関数の極限について

   $\lim_{x\to a} f(x) = b$ については従来のように感覚的に理解しておけば良い．ただし，厳密な定義は学習していないという自覚は持っておくこと．また，$x \to a$ において $x \neq a$ が含意されていることも注意しておくこと．

   (2) 四則演算と極限

   テキスト p.23 の定理 2.4 にまとめられている．証明するためには極限の定義を厳密に定める必要がありこの授業では扱わない．

   (3) 関数の連続性

   区間 I で定義された関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．ここで $a \in I$ に注意すること．$f(x)$ が定義されていない点では連続性は無意味である．$1/x$ は $x = 0$ で不連続なのではなく，$x = 0$ で定義できないとするのが正確だ．すなわち $1/x$ は定義域で連続である．

(4) 連続関数の加減乗除の連続性

定理 2.4 と連続性の定義を組み合わせると，連続関数の加減乗除は定義域で連続であることが分かる．講義ではこれを連続関数の商で解説した．テキストでは 26 ページに数行書いてあるだけなので補っておく．

区間 I 上連続な関数 $f(x), g(x)$ の商を考える．このとき $g(x)/f(x)$ の定義域は I から $f(x) = 0$ となる点を除いた部分になる．定義域の点を a とする．

a での連続性から $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ が成り立つ．$f(a) \neq 0$ なので定理 2.4 から $\lim_{x\to a} g(x)/f(x) = g(a)/f(a)$ を得る．これは $g(x)/f(x)$ の $x = a$ での連続性を意味している．a は定義域の任意の点なので $g(x)/f(x)$ は定義域で連続である．

(5) 合成関数の連続性

テキストに定義として記述されていないので補っておく．講義では極限の形で記述したが関数の連続性の形でまとめておいたほうが分かりやすいかもしれない．

定理 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続で，かつ関数 $z = g(y)$ が $y = b = f(a)$ で連続であれば $z = g \circ f(x)$ は $x = a$ で連続である．

(6) 初等関数の連続性

初等関数は次の関数から四則演算と合成で作られる．

$$x, \quad e^x, \quad \log x, \quad \sin x, \quad \sin^{-1} x, \quad \tan^{-1} x$$

これらはみな定義域で連続であることはグラフを書いてみれば明らかである．ゆえに初等関数は定義域で連続である．

本日のレポート課題

問 2.4(2) と p.39 の 6 を課題にする．締切は 2 月 24 日 (火) の昼休み，提出場所は全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室前のレポート提出箱とする．多くの授業のレポート提出箱が並んでいるので入れ間違えないようにすること．

ヒント

$\sin^{-1} x$ とは $\sin(\sin^{-1} x) = x$ と $-\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$ の二つの式で特徴付けられる．このことを使えば簡単だろう．

微分積分 I 講義メモ (4 月 27 日)

前回のレポート課題

6(1)(2) は易しかったのでよくできていた．数名，tan の 2 倍角の公式を間違えている人がいた．公式はより基本的なものから暗算で導き出すように覚えて欲しい．

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

問 2.4(2) は左辺が正であることを示すのがポイントだ．解答例を示しておく．

> $\sin(\sin^{-1} x) = x$ より $\cos(\sin^{-1} x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ が成り立つ．ここで $-\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$ なので $\cos(\sin^{-1} x) \geqq 0$ であり，$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ を得る．

証明問題なので少しコメントしておく．

- $A^2 = B^2$ であっても $A = B$ とは言えない．$\sin^2(\cos^{-1} x) = 1 - x^2$ を示すだけでは証明にならない．
- 示すべき等式 $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ から議論を始める人がいるが，結論を仮定したことになってしまう．等式を同値変形していく場合は許される議論であり，実際そのような形での等式の証明を見た人も多いだろうが，同値変形であることを各段階で確認しなくてはならない．
- 仮定をどこで使ったかを明示すべきだ．この等式の証明では $\sin^{-1} x$ の定義である

  $$(1)\ \sin(\sin^{-1} x) = x \quad (2)\ -\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$$

  をどう使ったかを明示すべきだ．理由を書かずに議論を展開するのは論外だが「条件より」「定義より」という理由も好ましくない．
- 式の羅列になっている答案が多い．数式は文であり，文章として展開するためには適切な接続詞を補う必要がある．

本日の講義の要点

1. 微分の定義と定義に基づく導関数の計算

   微分の定義はテキスト 41 ページに記載されている．実際の微分計算に定義を使う場合はないので，定義の重要性を認識できていない学生も多いだろうが，微分の出発点なので確実に理解して欲しい．講義では，定義から x^n, $\sin x$, a^x の三つの関数の導関数を論じた．それぞれ二項定理，加法定理，指数法則といった基本事項が使われているので注意すること．

   なお，指数関数の微分と関連して $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ を導入した．
2. 四則演算と合成の微分（定理 3.2，定理 3.3）

   高校で学習していることなので証明は割愛した．なお，証明が微分の定義に基づいて行われていることに留意して欲しい．基本は定義だ．4 月 13 日の講義の際のレポートを見ると，合成関数の微分についてきちんと行えない学生がいる．いくつか計算例を扱ったが，この程度のものは楽にできるようにして欲しい．

   $$\left(\log\left(1+\sin^2 x\right)\right)' = \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$$
3. 逆関数の微分

逆関数について $e^{\log x} = x$, $\sin(\sin^{-1} x) = x$, $\tan(\tan^{-1} x = x$ 等の式が成り立つが，これと合成関数の微分を結びつけることにより次の公式を得る．

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

テキスト 46〜48 ページを参照すること．

4. 対数微分

対数をとって微分することにより, 計算が簡単になる場合がある．例えば $y = x^\alpha$ のとき $\log y = \alpha \log x$ なので

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

を得る．これから $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ が導かれる．

もう一つの応用は積の微分法則の一般化だ．

$$\log(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)) = \log f_1(x) + \log f_2(x) + \cdots + \log f_n(x)$$

の両辺を微分すれば

$$\frac{(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x))'}{f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

となるが，分母をはらって

$$(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x))' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$$

を得る．この証明では関数が正の場合しか分からない．負になる場合 -1 倍した関数に取り替えることで証明できるが，0 になる場合は使えない．しかし，実際には 0 になる場合も含めてあらゆる場合に成り立つ式である．

5. 初等関数の微分

初等関数の基本の関数（x^n，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，無理関数）の導関数はすべて求めたので，和差積商の微分法則と合成関数の微分法則により初等関数はすべて微分できる．まずこの事実に確信を持って欲しい．

しかし，初等関数でない場合は微分の定義に戻って考察するしかない．これを次の関数で解説した．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$x \neq 0$ では初等関数として表示されているので，導関数は微分計算により求められる．

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

しかし，$x = 0$ のまわりでは一つの式とぢて表されていないので，微分計算は使えない．そこで

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(1/h)$$

を考える必要がある．なお，ここで $h \to 0$ が $h \neq 0$ を含意しているため $f(h) = h^2 \sin(1/h)$ であることに注意せよ．

この極限は $-1 \leqq \sin(1/h) \leqq 1$ より 0 であることが分かる．$f(x)$ は $x = 0$ でも微分可能で $f'(0) = 0$ が成り立つ．なお，この導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である．微分可能であっても導関数が連続になるとは限らない．このような例は初等関数だけを考えていては作れない．

本日のレポート課題

次の授業が再来週なので，少し多めに出題した．締切は 5 月 8 日昼休みなので，じっくり考えてみること．

課題 1　$f(x) = \cos x$ の導関数を微分の定義を直接使うことにより求めよ．
課題 2　連続関数 $f(x)$ が $|f(x)| \leqq x^2$ を満たすとき，$x = 0$ での微分可能性を調べよ．
課題 3　第 3 章章末問題（68 ページ）の 2 番（微分計算 10 題）を解け．

ヒント

課題 1 は講義でやった $(\sin x)' = \cos x)$ の証明を真似ればよい．課題 2 は関数が具体的に与えていないので微分計算は無効である．まず $f(0)$ の値を求めてから $f'(0)$ を定義する極限を考察せよ．課題 3 は計算問題ばかりだ．悩むようなら対数をとって微分するとうまくいくかもしれない．

微分積分 I 講義メモ (5 月 10 日)

前回のレポート課題

課題 1 $f(x) = \cos x$ の導関数を微分の定義を直接使うことにより求めよ．
課題 2 連続関数 $f(x)$ が $|f(x)| \leqq x^2$ を満たすとき，$x = 0$ での微分可能性を調べよ．
課題 3 第 3 章章末問題（68 ページ）の 2 番（微分計算 10 題）を解け．

課題 1 は良くできていた．証明の方法としては加法定理を利用する方法（講義で $\sin x$ の微分を求めたのと同じ方法）と和を積にする公式を利用する方法がある．どちらでも構わない．解答は省略する．

課題 3 は簡単な計算問題だ．逆三角関数の定義とその導関数を理解していない人が 10 名近くいる．前回の基本事項なので間違えた人は復習しておくように．また，合成関数の微分や商の微分が怪しい人がいる．$(2^{-x})' = -x(2^{-x-1})$ といった初歩的ミス (指数関数とべき関数の混同) を犯す人もいる．注意するように．レポート課題なので時間はあるはずであり，テキストやノートをチェックしながら取り組むようにして欲しい．

課題 2 は予想通りの出来だった．前回の講義でもっとも強調したのは，微分の定義と計算法の意味の違いだ．この問題は微分可能とは何かを意識しながら取り組むべき問題で，曖昧に考えていては正解にたどり着かない．正解者は 10 名だった．まず解答例を示す．

条件式に $x = 0$ を代入すれば $|f(0)| \leqq 0$ を得る．ゆえに $f(0) = 0$ である．

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|\frac{f(h))}{h}\right| \leqq \frac{h^2}{|h|} = |h|$$

より

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

が成り立つ．ゆえに，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ が成り立つ．

この問題についてコメントを箇条書きする．

- 解答例では，絶対値を取って議論した．なお $\lim f(x) = a$ と $\lim |f(x) - a| = 0$ は同値である．一般論では絶対値を取ったほうが議論しやすい場合が多く，このことは頭に入れておくと良い．
- $f(x) = x^2$ などと具体的な関数で解答している人がいるが，一般的な問題に対して具体的な関数を使って示すのは無意味である．なお，一つの式で書けるような関数は初等関数であり，基本的に微分可能である．
- 「連続だから微分可能」という解答があるが，連続でも微分可能とは限らないことは $f(x) = |x|$（連続だが $x = 0$ で微分不可能）などの例で知っているはずだ．意味を考えながら解答すること．
- 「はさみうちの原理」という用語が目立つが，本来の意味で使っていない人が多い．$0 \leqq f(0) \leqq 0$ から $f(0) = 0$ を導くのは当たり前なことで「はさみうちの原理」とは言わない．
- $\lim_{x\to 0} f(x)$ が x の式になることはない．$x \to 0$ の極限をとったのだから x は残らない．
- 不等式を x で割るとき，x の正負を考慮する必要がある．この場合 $|x|$ で割るようにすると場合分けがいらなくなる．
- $-x^2 \leqq f(x) \leqq x^2$ から $-2x \leqq f'(x) \leqq 2x$ は導かれない．知らないことは一般に成り立たないと思っていたほうが良い．

本日の講義の要点

1. 平均値の定理にいたる論理の道筋

 平均値の定理は高校でも学習したはずだが，入試に出題されることが少ないため印象に残っていない人も多いだろう．まず, 平均値の定理の証明にいたる論理の流れを解説した．

 (1) 閉区間上の連続関数が最大値及び最小値をとること（p.27 定理 2.7）

  この定理の証明は実数の性質と連続関数の定義に基づく．この講義では扱わない．当たり前のことと納得してくれれば十分である．

 (2) 区間 I 上微分可能な関数が，I の内部の点 c で最大値 $f(c)$ をとるとき，$f'(c) = 0$ になること

 (3) 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能，$f(a) = f(b)$ なる条件を満たすとき，$f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．（Rolle の定理，p.49 補題 3.7）

  両端で値が等しいので，定数関数でないときは両端以外の点（すなわち内部の点）で最大値または最小値をとる．これから (2) を使えばよい．

 (4) 平均値定理（p.48 定理 3.6，証明は p.51）

  $f(x)$ から一次関数を引いて両端での値を 0 にし，Rolle の定理を使う．

2. 平均値定理の意味

 (1) $f'(x) > 0$ なら単調増加であること．

 (2) 平均値定理の b を変数 x で置き換える．$f'(x)$ が連続なら

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)$$

  とみてよい．微分可能性は 1 次近似式の存在を導くことが分かる．これが実際微分可能性と同等であることは p.42 の定義 3.2 であるが分かりづらいので省略する．

 さてより一般に，n 回微分できれば n 次式で近似できる．これを保障するのが Taylor の定理である．

3. n 階導関数の計算例

 (1) $(e^x)^{(n)} = e^x$，$(e^{2x+1})^{(n)} = 2^n e^{2x+1}$

  一般に $(f(2x + 1))^{(n)} = 2^n f^{(n)}(2x + 1)$ である．$(f(2x + 1))^{(n)}$ と $f^{(n)}(2x + 1)$ の意味の違いに気をつけよ．

 (2) $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m + 1) \end{cases}$

 (3) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

4. Talor の定理 (p.52 定理 3.9)

 今日の講義では証明は行わず，$n - 1$ 次近似多項式と誤差の表示に本質があることを解説した．特に $a = 0$ としておくと見やすい．資料を配布したので，e^x に Taylor の定理を適用した式まで眺めておいて欲しい．

本日のレポート課題

課題 1 次の n 階導関数（n 回微分）を求めよ．

$$(1)\ (\log x)^{(n)} \quad (2)\ (\cos(2x))^{(n)}$$

課題 2 区間 I 上で微分可能な関数 $f(x)$ について $f'(x) = 0$ が常に成り立つとする．このとき $f(x)$ は定数関数であることを示せ．

ヒント

課題 1(1) は $(\log x)' = x^{-1}$ を利用すること．(2) は 2 倍角の公式は使わずに cos の n 階導関数を利用すること．課題 2 は講義でやった証明を真似ればよい．考えてみよ．

微分積分 I 講義メモ (5 月 18 日)

前回のレポート課題

課題 1 次の n 階導関数（n 回微分）を求めよ．

$$(1)\ (\log x)^{(n)} \quad (2)\ (\cos(2x))^{(n)}$$

課題 2 区間 I 上で微分可能な関数 $f(x)$ について $f'(x) = 0$ が常に成り立つとする．このとき $f(x)$ は定数関数であることを示せ．

【解答例】課題 1(1) $(\log x)' = 1/x = x^{-1}$ より $(\log x)^{(2)} = (-1)x^{-2}$, $(\log x)^{(3)} = (-1)(-2)x^{-3}$, $(\log x)^{(4)} = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$ となるので

$$(\log x)^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

(2) $(\cos(2x))' = -2\sin(2x)$, $(\cos(2x))^{(2)} = -2^2\cos(2x)$, $(\cos(2x))^{(3)} = 2^3\sin(2x)$, $(\cos(2x))^{(4)} = 2^4\cos(2x)$ より

$$(\cos(2x))^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m 2^{2m-1}\sin(2x) & (n = 2m-1) \\ (-1)^m 2^{2m}\cos(2x) & (n = 2m) \end{cases}$$

課題 2 区間 I 内に a を一つとり $x \in I$ と a の間で平均値定理を使うと

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

となる c が a と x の間に存在する．仮定より $f'(c) = 0$ なので $f(x) = f(a)$ が成り立つ．ゆえに $f(x)$ は常に $f(a)$ と等しく定数関数である．

- n 階導関数を求める際に最初のいくつかを求めて予測を立てるのは構わない．しかしその場合，不要な計算はしないほうが良い．$(\log x)^{(2)} = -1/x^2$, $(\log x)^{(3)} = 2/x^3$, $(\log x)\ (4) = -6/x^4$ としたら根拠のある予測はできない．また (2) の解答例のように記述すれば 2^n が係数に出ることはすぐ分かるだろう．$(-2)^m$ のようなまとめ方をした人がいるが自分の計算と解答例の計算を比較して欲しい．
- $(-1)^m$ 等を利用して一つの式にまとめる工夫は自ら経験して欲しい．一つの式にすることにより楽になる議論もある．なお，次は有名な公式であり，これを使った答案もあった．次回コメントする．

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

- $-1 \cdot -2 \cdot -3$ という書き方をした人がいるが，これは絶対にやってはならない．
- 課題 2 は平均値定理の応用として出題した．積分で答えた人がいるが答えればよいというものではない．レポート課題は講義内容の理解を深めるために取り組むものだ．
- 証明においては仮定されていることのみを使わなければならない．多項式として議論する人，n 回微分できるとして議論する人は間違いである．
- 定数関数であることをどう説明すればよいのか混乱した人もいる．例えば $f(b) = f(a)$ から定数関数とした人がいるが， $f(x)$ が定数関数であることとは同じことではない．解答例のように b を変数 x で置き換えたり，「b は任意なので」のような一文をいれたりすることが必要だ．なお背理法を使うと分かりやすい．

- $\lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ から $f(x) = f(a)$ とする人が見受けられたが，これは誤りだ．$\lim 1/n = 0$ から $1/n = 0$ とするようなものだ．

本日の講義の要点

1. Taylor の定理の意味

   最初に Taylor の定理の意味を復習した．テキスト p.52 の定理 3.9 において (3.18) 式は $f(x)$ を $n-1$ 次近似多項式と誤差 $R_n(x,a)$ の和として表示したに過ぎない．この式は定理の主張というより $n-1$ 次近似多項式と誤差 $R_n(x,a)$ の定義式とみなして欲しい．定理の主張は (3.19) 式であり誤差の表示にある．(3.19) が成り立つような c が a と x の間に存在する．なお，c の具体的な値を考える必要はない．

2. Taylor の定理の証明

   テキスト p.190 に従って Taylor の定理の証明を解説した．$F(t)$ の定め方がテクニカルであり難しく感じるだろうが，数学コースを視野に入れている人は是非証明を味わってみて欲しい．微分計算によって，殆どの項が相殺されていることが分かれば証明を納得できると思う．

3. $f(x) = e^x$ について

   $a = 0$ で $f(x) = e^x$ の場合に Taylor の定理を具体的に書き下した式が資料の (II) に記載している．この式は $f^{(k)}(x) = e^x$ より $f^k(0) = 1$ となることから導かれる．これについて応用を与えた．

   - $x > 0$ のとき $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n > 0$ なので

   $$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} \qquad (x > 0)$$

   - 特に $x > 0$ のとき $e^x > x^{m+1}/(m+1)!$ が成り立つので $e^x/x^m > x/(m+1)!$ であり

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

   - さらに $n = 3$ とし $x = 0.1$ とすれば

   $$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + R_4 = 0.105166\cdots + R_4$$

     である．$e^{0.1\theta} < e^{0.1} < 1.5$ より誤差は

   $$0 < R_4 = \frac{e^0.1\theta}{24}0.0001 < 0.0000007$$

     なので $e^{0.1} \fallingdotseq 0.10517$ である．

4. $f(x) = \cos x$ について

   n 階導関数は

   $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m-1) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m) \end{cases}$$

   なので[*1] $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$，$f^{(2m-1)}(0) = 0$ を得る．これから資料 1 の (III) 式を得る．この関数についても e^x の場合と同様な応用がある．

   - $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$ において $\cos(\theta x) > 0$ なので $n = 2m = 4$ のときは $R_4 > 0$ である．ゆえに

   $$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$$

[*1] 講義では $n = 2m + 1$ としてしまったかもしれません．

- $n = 2m = 6$ として $x = 0.1$ を代入すれば

$$\cos 0.1 = 1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{24} + R_6 = 0.99500416666\cdots + R_4$$

を得る．$0 < \cos 0.1\theta < 1$ より $0 > R_6 > -10^{-7}/720 = -0.0000000013$ なので $\cos 0.1 \fallingdotseq 0.99500417$

5. n 次近似式との誤差（難しい話題，お話）

n 回微分できれば本来 n 次式で近似できる．Taylor の定理は近似多項式の次数を一つ下げることにより誤差の表示を得たと言える．さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続な時*2 は次が成り立つ．

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ここで $o((x-a)^n)$ はランダウの記号と呼び，実用上しばしば使われる記号である．具体的には $(x-a)^n$ で割ったときの極限が 0 に収束することを意味している．数学以外のコースでもよく使われるのでコメントした．一般に誤差の考察は難しいので，誤差を気にせずに議論するときに使われる．例としては

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

より

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/24 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{24}$$

簡単に計算できることに気づいていただけたら幸いだ．これについてはこれ以上の深入りはしない．

本日のレポート課題

$f(x) = \log(1+x)$ として以下の問いに答えよ．

(1) この関数について Taylor の定理を具体的に書き下せ．ただし $a = 0$ としておくこと．

(2) R_{2m} の正負を考察することにより次の不等式を示せ．

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2m-1}}{m} \quad (-1 < x < \infty, x \neq 0)$$

(3) $n = 4$ のときの Taylor の定理をを利用して，$f(0.1) = \log 1.1$ の近似値を求めよ．また誤差の大きさを考察せよ．

ヒント

(1) は $f(x)$ の n 階導関数を計算し，$a = 0$ の場合の Taylor の定理（講義資料 1 の (I)）にあてはめる．結果は講義資料 1 の (V) に記述されている．なお，n 階導関数の計算は先週のレポート課題で考察済みである．この講義メモの冒頭にあるので分からない人は考えて欲しい．

(2)(3) は $e^x, \cos x$ について講義で解説した議論を参考にせよ．

---

*2 C^n 級関数という．重要な概念である．

微分積分 I 講義メモ (5 月 25 日)

前回のレポート課題

$f(x) = \log(1 + x)$ として以下の問いに答えよ．

(1) この関数について Taylor の定理を具体的に書き下せ．ただし $a = 0$ としておくこと．

(2) n を偶数とする．R_n の正負を調べよ．またそれから導かれる不等式を記せ．

(3) $n = 4$ のときの Taylor の定理をを利用して，$f(0.1) = \log 1.1$ の近似値を求めよ．また誤差の大きさを考察せよ．

解答例については別ファイル（今日の講義で配布）に記載している．コメントのみ箇条書きする．

- 提出数が大幅に少なくなった．難しく理解できないという人が多いためだと思うので，解答例を配布してコメントした．重要な事項なので，また何より分かれば面白い事項なのでじっくり考えて欲しい．
- $\log(1+x)$ の問題だということでテキスト 56 ページの記述を参考にした者がいる．テキストでは誤差項の記述という最も重要な部分が欠落しており，収束をまったく考えないまま Taylor 展開式だけ導いている．例えば (3.25) 式の右辺は $x > 1$ の時は収束せず，この等式は成立しない．この式は $-1 < x \leqq 1$ の範囲でのみ成り立つ式だがそれを示すには誤差項を考えなければならない．
- R_n の表示には分母に $(1 + \theta x)^n$（あるいは $(1 + c)^n$）が入るがこの n を落とす人が多い．特に (3) で失敗する人が多い．ケアレスミスだとは思うが．
- 近似多項式の係数に x が残っている人がいる．これでは多項式ではない．
- $R_n < 0$ が分かったのに次の不等式が出てこない人がいるが，一般に一つの式からある負の項を取り去れば全体は大きくなる．当たり前のことだ．
- 近似値を考える場合，通常分数ではなく小数を使う．多項式部分の計算を分数の形でまとめている者がいるが感覚がおかしい．
- $-\frac{0.0001}{4(1.1)^4} > R_4 >= -0.000025$ なる評価式を使うともう一桁精度を上げられる．しかし，苦労が多い割に効果は少ないと思う．

本日の講義の要点

1. Taylor の定理について

   前回のレポート課題を題材に Taylor の定理を解説した．Taylor の定理（$a = 0$ にしているので Maclaurin の定理とも言う）が $n-1$ 次近似多項式と誤差によって関数を表示したとき，誤差の表示を与えるところに本質がある．講義では誤差の表示による応用を二つ与えた．

   - 誤差 $R_n(x)$ の正負から導かれる不等式（これはテキストには触れられていない）
   - 誤差の値の計算によって得られる関数の近似値

     テキスト 59 ページに $\sin 1°$ の近似値が例として載っている．ここでは R_3 の大きさを見積もるという形で誤差を考えている．

2. $f(x) = (1 + x)^\alpha$ に Taylor の定理を適用する．

   $f^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ より，近似多項式の一般項は

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k = \binom{\alpha}{k}x^k$$

ここで係数は列ベクトルではなく一般 2 項係数と呼ばれる数値である．記号が同じだが惑わされないように．これより

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + R_n(x)$$

であり，誤差項については，次が成り立つ $0 < \theta < 1$ が存在する．

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

3. $\alpha = m$（自然数）で $n = m+1$ の場合

　m 次関数を $m+1$ 回微分したら 0 に値を持つ定数関数なるので $R_{m+1}(x) = \dfrac{f^{(m+1)}(\theta x)}{(m+1)!}x^{m+1} = 0$ である．これは一般 2 項係数の定義によって

$$\binom{m}{m+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-m-1+1)}{m!} = 0$$

となるからとしても分かるだろう*1．結局次の 2 項定理が証明できたことになる．

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m$$

4. $\alpha = -1$ の場合

　一般 2 項係数は

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$$

なので，Taylor の定理を適用すれば

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + R_n(x), \quad R_n(x) = (-1)^n(1+\theta x)^{-1-n}x^n$$

である．近似多項式が公比 $-x$ の等比級数であることに着目すれば

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} + R_n(x)$$

となるので

$$R_n(x) = \frac{(-x)^n}{1+x}$$

を得る．Taylor の定理の誤差項の表示と違うので混乱するかもしれないが，誤差項の表し方には様々なものがあることを述べているに過ぎない．

　さて，この場合 $R_n(x)$ が θ を含まない具体的な式で書けたので積分してみよう．

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

これは $\log(1+x)$ に対する n 次近似多項式と誤差という表示なっており

$$R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

という Taylor の定理とは別の誤差の表示を得たことになる．

　講義ではさらに $\tan^{-1} x$ の考察を行った．これは Taylor 展開のところでもう一度扱うことにする．

---

*1 講義ではこの方式で説明したが，ここに書いたように説明したほうが分かりやすい

5. Taylor 展開への導入

無限回微分可能な関数について $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立てば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

が成り立つ．これを Taylor 展開とよぶ．テキストでは $R_n(x)$ の表示がないので条件の $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を考察していない．Taylor 展開式は記述してあるがこの等式がいつ成り立つかは触れていない．テキストの記述の重大な欠落と言えるだろう．

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

だが，p.17 の例 2.1 によって $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ である．ゆえに $f^{(n)}(\theta x)$ の大きさを n によらない数 K で抑えられれば

$$0 \leqq |R_n(x)| = |f^{(n)}(\theta x)| \frac{|x|^n}{n!} \leqq K \frac{|x|^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．これを利用して e^x の Taylor 展開を与えた．

なお，例 2.1 の証明も行ったが，この方法はテキスト 17 ページの方法と同じなので確認して欲しい．

本日のレポート課題

$f(x) = (1+x)^\alpha$ についての Taylor の定理を $\alpha = 1/3,\ n = 3$ の場合に具体的に（2 項係数の記号を使わずに具体的な数値によって）書き下せ．またその式を利用して $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めよ．その際，誤差の大きさを調べること．

1. まず $a=0$ の場合の Taylor の定理を記述しよう．具体的な関数に適用する場合は $a=0$ にしておいたほうが分かりやすい．

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),\quad R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

この式で $f(x)$ は $n-1$ 次多項式と $R_n(x)$ の和として記述されている．$f^{(k)}(0)$ は k 階導関数の 0 での値なので定数になっていることに注意せよ．

　講義ではこの多項式を $n-1$ 次近似多項式とよんだ．もっとも近似多項式とは何か明確な説明を与えたわけではない．ここは「近似」という言葉の従来のイメージで感じてくれれば良い．さて，近似であるから誤差はつきものだ（誤差がなければ近似ではなく正確な値だ）．そこで誤差を $f^{(n)}(x)$ を使って表示するのが Taylor の定理の役割になる．もちろんこの表示には θ という良くわからない数が入っている．これから何を汲み取るべきかを具体例を通じて考えていきたい．

2. さて，レポート課題では $f(x)=\log(1+x)$ だった．このとき

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}\quad(k\geqq 1)$$

なので $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ である．近似多項式の k 次の項は $\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ であり

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x)$$

を得る．この式を見れば右辺の $R_n(x)$ を除いた部分が $n-1$ 次多項式であることを確認できるだろう．さて，誤差 $R_n(x)$ については Taylor の定理により

$$R_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}$$

が成り立つような $0<\theta<1$ が存在することが証明されている．誤差を表示できたことが次の応用につながる．

3. n を偶数とする．このとき 0 でない数の偶数べきは正であり $(-1)^{n-1}=-1$ なので誤差の表示から $x\neq 0$ について $R_n(x)<0$ である．最後の項が負なのでそれを取り除けばより大きくなる．すなわち

$$\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

が $x\neq 0,\ x>-1$ について成り立つ．

4. $n=4$ とする．

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_3(x)$$

である．ここに $x=0.1$ を代入すれば

$$\log 1.1=0.1-\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}+R_4(0.1)=0.095333\cdots+R_4(0.1)$$

を得る．誤差については

$$0>R_4(0.1)=-\frac{1}{4}\frac{0.0001}{(1+\theta 0.1)^4}>-0.000025$$

なので

$$0.095333\cdots>\log 1.1>0.09530833\cdots$$

である．

微分積分 I 講義メモ (6 月 1 日)

前回のレポート課題

$f(x) = (1+x)^\alpha$ についての Taylor の定理を $\alpha = 1/3$, $n = 3$ の場合に具体的に（2 項係数の記号を使わずに具体的な数値によって）書き下せ．またその式を利用して $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めよ．その際，誤差の大きさを調べること．

【解答例】まず講義資料 1 により

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + R_n, \qquad R_n(x) = \binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

である．$\alpha = 1/3$, $n = 3$ よりこの式は

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} + \binom{1/3}{2}x^2 + R_3, \qquad R_3(x) = \binom{1/3}{3}x^3(1+\theta x)^{1/3-3}$$

となる．一般化された 2 項係数は

$$\binom{1/3}{1} = \frac{1}{3}, \quad \binom{1/3}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2} = -\frac{1}{9}, \quad \binom{1/3}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} = \frac{5}{81}$$

なので

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_3(x), \qquad R_3(x) = \frac{5}{81}x^3(1+\theta x)^{-8/3}$$

を得る．この式に $x = 0.1$ を代入すれば

$$\sqrt[3]{1.1} = 1 + 0.0333\cdots - 0.00111\cdots + R_3(0.1) = 1.03222\cdots + R_3(0.1)$$

を得る．誤差については

$$0 < R_3(0.1) < \frac{5}{81}0.001 = 0.0000617\cdots$$

より，この値は小数点以下第 4 位まで信頼出来ることが分かる．

【コメント】誤差の考え方に戸惑っている人が多いようだ．理学科では必須の事項なので慣れておくように．

- 相変わらず近似値を分数で考える人がいる．近似値は特殊な場合を除いて小数で考えること．
- $\sqrt[3]{1.1} = 1.03222\cdots + R_3(0.1)$ という等式は $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値が $1.03222\cdots$ であることを述べている．しかし，これだけでは何桁までが意味を持つのか分からない．意味を持つ桁数（有効数字）は数学だけではなく理科でも重要なのできちんと意識して欲しい．解答例では $R_3(0.1)$ の大きさを調べることにより小数点以下第 4 位までが意味のある数字であることを確認した．もっとも四捨五入した場合，4 桁目の 2 は切り上げられて 3 になってしまうが．
- $R_3(0.1)$ については $0 < \theta < 1$ より

$$\frac{5}{81}0.001(1.1)^{-8/3} < R_3(0.1) < \frac{5}{81}0.001$$

が成り立つ．ただここで電卓を使って $(1.1)^{-8/3}$ を計算するのは感覚がおかしい．この演習課題は電卓を使わずに手計算で $(1.1)^{1/3}$ を求めることに狙いがある．

- 解答例の議論では小数点以下第 5 位で四捨五入した場合，第 4 位は 2 または 3 ということしか言えない．だからといって第 3 位までとするのはもったいない．

$$1.03222\cdots < \sqrt[3]{1.1} < 1.0322839\cdots$$

が分かっているので

$$\sqrt[3]{1.1} = 1.03225 \pm 0.00004$$

と表示しても良い．この等式は左辺が $1.03225 - 0.00004 = 1.03221$ から $1.03225 + 0.00004 = 1.03229$ の間にあることを表している．

- この問題では誤差を $R_3(0.1)$ の表示から見積もることにポイントがある．$\sqrt[3]{1.1}$ の値を電卓で求め，それとの差をとる（もちろんこれが誤差だが）という意味ではない．電卓は使わずに考えて欲しい．

本日の講義の要点

1. e^x, $\cos x$, $\sin x$ の Taylor 展開

いずれの関数でも $f^{(n)}(\theta x)$ の値が有界なので，テキスト p.17 例 2.1 の極限式により $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を得る．これから Taylor 展開の公式（講義資料 2,（II)(III)(IV)）が導かれる（今日配布するつもりでしたが私のミスでできませんでした．お詫びします．ホームページにアップしてあるのでそちらを見てください.）

この応用として $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ という Euler の公式（テキスト p.60）が導かれる．またここで $x = \pi$ として得られる等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ は，一つの式の中に $0, 1, i, e, \pi$ という数学における基本的定数が 5 つ含まれており Euler の等式と呼ばれる．

なお，Euler の公式は変数を複素数で考えれば三角関数と指数関数が同じ種類の関数であることを暗示する．なお指数法則 $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ は Euler の公式を使うと加法定理になる．

2. $\log(1+x)$ の Taylor 展開

$\log(1+x)$ に Taylor の定理を適用した場合の誤差項は

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

なので，$0 \leqq x \leqq 1$ のときは $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right) < 1$ となり $|R_n(x)| < 1/n$ が成り立つ．ゆえに $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となるので

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots, \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

が成り立つ．なお，実際にはこの等式は $-1 < x \leqq 1$ で成り立つ．この等式に $x = 1$ を代入した次の式は興味深い．

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

3. $(1+x)^\alpha$, $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開

上の例で見るように $R_n(x)$ が $n \to \infty$ で 0 に収束するか否かはとても難しい．例えば $(1+x)^\alpha$ について

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, \qquad -1 < x < 1$$

が成り立つが，この証明は省略する．

$\tan^{-1} x$ の場合は等比級数の和を利用することによって簡単に Taylor 展開を求められる．

$$\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k}$$

より両辺を 0 から x まで積分して

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

である．この最後の積分の項が Taylor の定理とは別の形の誤差項 $R_n(x)$ の表示を与える．$0 \leqq \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \leqq t^{2n}$ なので

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leqq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

となる．ゆえに $-1 \leqq x \leqq 1$ において $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ であり

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

を得る．ここで $x = 1$ とすればテキストの p.58(3.32) 式が導かれる．

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

4. もっと楽に Taylor 展開を考えよう

一般に n 階導関数を求めるのは困難なので $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を示すのはさらに困難なことになる．しかし，Taylor 展開式には $R_n(x)$ は現れない．そこで何らかの方法で関数をべき級数（Taylor 展開の表示ある「無限次の多項式」）として表すことを考える．これは結果的に Taylor 展開に他ならないことが証明できる（この講義では扱わない）．

- 既知の Taylor 展開に代入する．

  e^{x^2} の Taylor 展開は e^x の Taylor 展開の x を x^2 に置き換えればよい．

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

  $(2+x)^\alpha$ の Taylor 展開は $2^\alpha(1+(x/2))^\alpha$ として

$$2^\alpha(1+(x/2))^\alpha = 2^\alpha \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} (x/2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} 2^{\alpha-k} x^k$$

  とすれば良い．なお．ここで $2 + x = 1 + (1 + x)$ として $(1 + x)^\alpha$ の Taylor 展開を利用しようとするとうまくいかない．

- 既知の Taylor 展開式から微分積分を行う

  無限等比級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

  は $\dfrac{1}{1-x}$ の Taylor 展開である．これを積分すれば

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdots$$

微分すれば

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

となる．これらの級数は $-1 < x < 1$ で収束することも証明されている（講義では扱わないので結果のみ）．

$\log(1+x)$ や $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開もこのような見方をすると簡単に再発見できる．テキスト p.58 に掲載されている．

上記を組み合わせることにより $(1+x)^{-1/2}$ の Taylor 展開から $\sin^{-1} x$ の Taylor 展開を求めることができる．

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k \qquad -1 < x < 1$$

において x を $-x^2$ に置き換える．

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \qquad -1 < x < 1$$

これを積分すれば

$$\sin^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+}}{2k+1}$$

となる．この等式は $-1 \leqq x \leqq 1$ で成立する．

本日のレポート課題

課題 1　$\sqrt{1+x^2}$ の Taylor 展開式を求めよ．またその 6 次までの項を具体的に書き下せ．
課題 2　$f(x) = \cos x$ の $x = \pi/4$ における Taylor 展開を求めよ．

ヒント 課題 1 は $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ の Taylor 展開を利用すること．この関数の n 階導関数は求めなくても良い．課題 2 は第 3 章章末問題の 3(3)（テキスト p.68）である．$x = u + \pi/4$ とおいて，加法定理を使い，$\cos u, \sin u$ を Taylor 展開する．その後，x の式に戻せばよい．

微分積分 I 講義メモ (6 月 8 日)

前回のレポート課題

課題 1 $\sqrt{1+x^2}$ の Taylor 展開式を求めよ．またその 6 次までの項を具体的に書き下せ．
課題 2 $f(x)=\cos x$ の $x=\pi/4$ における Taylor 展開を求めよ．

【解答例】課題 1 Taylor 展開式は $\sqrt{1+x}$ の Taylor 展開式の x を x^2 に置き直せば良い．

$$\sqrt{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^{2k}$$

6 次までの項については

$$\binom{1/2}{0}=1,\quad \binom{1/2}{1}=\frac{1}{2},\quad \binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}=-\frac{1}{8},\quad \binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}=\frac{1}{16}$$

より

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\cdots$$

課題 2 $x=u+\pi/4$ とおいて

$$\begin{aligned}\cos x=\cos(u+\pi/4)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-\pi/4)^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-\pi/4)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\end{aligned}$$

【コメント】 レポート課題は授業内容の復習のために課してるのであって，授業で何を学習したか振り返りながら取り組む必要がある．授業で扱った内容は君たち自身がとったノートで確認することになるが授業後に掲載される講義メモにも詳細に記している．いわば講義メモ全体がレポート課題を解くためのヒントである．授業を聞かずに（あるいは聞いても何が何だか分からないまま）テキストを頼りに解こうとしても難しく感じるだけだろう．復習もせずに問題を解くことだけ考えていたら意味はない．

- Taylor の定理は誤差項の表示に本質がある．しかし，Taylor 展開では誤差項は現れない．Taylor の定理と Taylor 展開は本質的に異なるものだ．課題 1 の解答で Taylor の定理から出発しているものはその区別がついていない．$(1+x)^{1/2}$ の Taylor 展開はすでに分かっているのであり，誤差項は気にする必要はない．
- Taylor 展開を求める基本的な方法は n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算することだ．しかし，この方法ではごく一部の特殊な関数にしか使えない．課題 1 の $\sqrt{1+x^2}$ の n 階導関数等計算できない．ヒントを見ずに 4 回，5 回と微分を繰り返した人にはご苦労様とはいうが無駄な努力だ．
- Taylor 展開の 6 次までの項を具体的に書き下せという課題の解答は

  $$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+\cdots$$

  だが，ここで最後の $+\cdots$ を落とす人がいる．これでは等しくないものを $=$ で結んだことになる．意味を考えればいかにおかしな式か分かるだろう．

- $x = a$ における Taylor 展開とは，テキスト p.53 に記述されているように
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k 0 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots$$
だ．$x = 0$ での Taylor 展開に $x = a$ を代入することではない．$x = \pi/4$ における Taylor 展開を，Taylor 展開式に $\pi/4$ を代入した式にいている人がいるが，用語の意味についての誤解である．言葉が分からなければ，自分で類推するのではなくテキストやノートを調べること．
- 課題 2 では $f^{(k)}(\pi/4)$ を計算しても良い．しかし，この問題の趣旨は既知の Taylor 展開を使って導き出すことにある．解答例を読んでおいて欲しい．

本日の講義の要点

1. 不定形
   関数の極限の基本は連続関数についての
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
だ．しかし，問題として出題されるのは，この考え方が使えないものだ．それをいくつかのパターンに分けて不定形とよんでいる．今日扱った極限の例では
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2},\ \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}$$
等は 0/0 型不定形であり
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$$
は ∞/∞ 型不定形である．他に 0∞ 型不定形，$\infty - \infty$ 型不定形，0^0 型不定形などがある．これらの極限を調べるには具体的な関数の形を利用した考察が．必要になる
2. l’Hospital の定理
   l’Hospital の定理は極限を求める際の強力な手法を与える．ただし適用には条件が必要でありそれをチェックしないまま使うと間違った結論に導かれてしまう．厳密な定理の記述についてはテキスト p.61 定理 3.11（0/0 型不定形）と p.62 定理 3.13（∞/∞ 型不定形）を確認すること．またそれぞれの証明に続く注意書き（$x \to a$ を $x \to \infty$ 等に置き換えること）も確認しておくこと．
   さて，l’Hospital の定理を使うための条件は
   - $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が 0/0 型または ∞/∞ 型の不定形であること．
   - $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が収束，または無限大に発散すること（テキストの定理の記述には「無限大に発散する」場合が落ちているので補っておくように）

   の二つある．特に第 1 の条件のチェックは忘れがちであり，解答を書く際にはチェックを明示するように．2 つの条件をチェックして初めて
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
が成立する．
3. 極限の計算例
   講義で解説したもののうち，特に理解しておいて欲しいものを二つだけ記しておく．

- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$

　分子分母をそれぞれ微分したものの極限は 0/0 型不定形ではなく，±∞ に発散する．しかしそのチェックを怠ると間違えてしまう．

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{5^x\log 5-3^x\log 3}{2x}=\pm\infty$$

とするのは正しいが

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{5^x\log 5-3^x\log 3}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\log 5)^2 5^x-(\log 3)^2 3^x}{2}=\frac{(\log 5)^2-(\log 3)^2}{2}$$

は誤りである．何故誤りなのか分からない人は l'Hospital の定理を使うべきではない．

- $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^x$

　0^0 型不定形なのでこのままでは l'Hospital の定理は使えない．そこでこの対数をとったものの極限を考える．

$$\lim_{x\to+0}\log(\sin x)^x=\lim_{x\to+0}x\log(\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin a)}{1/x}$$

とすれば，中辺は 0∞ 型不定形，右辺は ∞/∞ 型不定形である．分子分母をそれぞれ微分したものの極限は

$$\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}-\frac{x^2\cos x}{\sin x}=0$$

なので

$$\lim_{x\to+0}\log(\sin x)^x=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin a)}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0$$

である．log をとったものが 0 に収束するので log の中身は 1 に収束する．ゆえに

$$\lim_{x\to+0}(\sin x)^x=1$$

が成り立つ．

　このように 0/0 型あるいは ∞/∞ 型の極限でない場合は，様々な工夫が必要になる．具体的な問題を通じて，技を磨いていくしかない，

4. Taylor 展開（近似多項式）の利用

　近似多項式を利用して極限計算することも強力な手段を与える．この場合は 5 月 18 日の講義で紹介したランダウの記号を使うとより厳密に扱える．ここでは次の例をもとに気分だけ味わってもらう．まず，5 月 25 日のレポート課題（解答は 6 月 1 日講義メモ）で

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\cdots$$

ゆえに x を ax に置き換えれば

$$\sqrt[3]{1+ax}=1+\frac{ax}{3}-\frac{a^2x^2}{9}+\cdots$$

となる．これから

$$\frac{\sqrt[3]{1+ax}-1-\dfrac{ax}{3}}{x^2}=-\frac{a^2}{9}+\cdots$$

であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+ax}-1-\dfrac{ax}{3}}{x^2}=-\frac{a^2}{9}$$

を得る．この極限は l’Hospital の定理を 2 回使う形でも証明できるが，このやり方のほうが見通しが良いとおもう．さらに，何故この問題を考え付いたのかもよく分かる．課題にはしなかったが章末問題の 6（p.69）をやってみると良い．

本日のレポート課題

p.68 の章末問題 5 を課題にする．l’Hospital の定理を使って答える形でよい．

微分積分 I 講義メモ (6 月 15 日)

前回のレポート課題

第 3 章章末問題 5（テキスト p.68）

【解答例】(1) 0/0 型不定形なので分子と分母を微分した関数の極限を考える．

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

から l'Hospita の定理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

(2) 0∞ 型不定形なので分母を $1/\sin x$ とみなし ∞/∞ 型不定形にする．分子・分母を微分した関数の極限は

$$\lim_{x\to +0}\frac{(\log x)'}{(1/\sin x)'}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=0$$

となるので i'Hospital の定理により

$$\lim_{x\to +0}\sin x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{(1/\sin x)}=0$$

(3)(4)(5) (1) と同様に解けばよいので省略.

(6) 0/0 型不定形である．分母と分子を微分した関数の極限は

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-1/(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x}$$

である．ここで $e^x=1+x+x^2/2+x^3/6+\cdots>x^3/6$ より $0<\dfrac{1+x^2}{e^x}<6\dfrac{1+x^2}{x^3}$ となるので挟み撃ちにより

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x}=0$$

となる．ゆえに l'Hospital の定理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}=0$$

(7) 0^0 型不定形なので対数を取る.

$$\lim_{x\to +0}\log x^x=\lim_{x\to +0}x\log x$$

この極限は (2) と同様な手法で 0 である．ゆえに

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\log x^x}=e^0=1$$

(8) 数列の極限であるが，関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$ に置き換えて計算する．これは ∞^0 型不定形であり対数をとって計算する.

$$\lim_{x\to\infty}\log x^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$

これは ∞/∞ 型不定形であり，l'Hospital の定理を使えば極限が 0 であることが分かる．ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=1$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を得る.

【コメント】

- 0/0 型とは不定形のタイプを言っているのであって，数値ではない．$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$ などと書いてはいけない．
- 不定形のチェックはすべての段階で行うこと．
- (2) は $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ を利用すると簡単だ．しかし，解答例のような考え方も理解しておくように．覚えるべき式は少ないほうが良い．
- l'Hospital の定理を微分したものの極限と漠然と理解している人がいる．$\lim_{x\to a} f(x)$ を求める際に $\lim_{x\to a} f'(x)$ を計算しても無意味だ．

本日の講義の要点

テキストでは定積分の定義から不定積分に入ります（これが通常の積分の議論の進め方です）が，この講義ではまず不定積分の計算法（p.82 4.4 節）を扱うことにします．

1. 基本的な関数の原始関数と積分計算

   p.83 表 4.1 にまとめられている．これらは覚えておくこと．

   さて，微分の場合は基本的な関数の微分から，和差積商及び合成の微分法則によって，初等関数の微分が計算できる．煩雑な計算はあるとしても，難しい（考え込まなくてはいけない）微分計算はない．初等関数でない場合の扱いが難しいだけだ．しかし，積分の場合はそれらの計算法則が存在しない．初等関数の原始関数は一般には初等関数として表せないし，初等関数として表されるものでも様々な工夫が必要になる．不定積分の学習においては，そういった様々な工夫の仕方を学ぶ必要がある．

2. 置換積分，部分積分

   高校でも学習している事項なので簡単な解説に止めた．逆三角関数の不定積分については配布したプリントにも記載しているので眺めておくこと．高校のときに $\int \log x dx$ の計算を学習したと思うが，それと同じ工夫であることを見てほしい．

3. 有理関数の積分

   二つの多項式 $f(x), g(x)$ についてその商で表される関数 $g(x)/f(x)$ を有理関数という．ここでは有理関数の不定積分の一般的な計算方法を次の流れで解説した．

   (1) 分子の次数が分母の次数以上である場合は，割り算によって分子の次数を分母の次数よりも小さくする．以下「$g(x)$ の次数 $<$ $f(x)$ の次数」が成り立っているとする．

   (2) 分母 $f(x)$ が 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解されているとする．なお，一般にこのような因数分解が可能[*1] であることが証明できる．

   (3) 分母の因数に応じて，基本的な有理式を用意する（プリント参照，p.85 に結果のみの記載あり）．後は連立一次方程式を解くことにより部分分数展開が行える．この事情を講義で扱った例で解説する．

   $$\frac{2x^3 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)}$$

   について，この部分分数展開の形は

   $$\frac{2x^3 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

[*1] 実際の計算には n 次方程式を解かなくてはいけないので，代数的手法で因数分解ができるとは限らない．ただし解の存在は保障されているので，因数分解できることは証明できる．

である．分母をはらって整理すれば

$$\begin{aligned}2x^3-2x+1 &= A(x-2)^2(x^2+1)+B(x+1)(x-2)(x^2+1)+C(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)(x-2)^2\\ &= (A+B+D)x^4+(-4A-B+C-3D+E)x^3(5A-B+C-3E)x^2\\ &\quad +(-4A-B+C+4D)x+(4A-2B+C+4E)\end{aligned}$$

ゆえに A, B, C, D, E は次の連立方程式を解けばよい[*2]．

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 1 & 0 & -3\\ -4 & -1 & 1 & 4 & 0\\ 4 & -2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$A=1/18,\quad B=109/225,\quad C=13/15,\quad D=-27/50,\quad E=11/50$$

(4) 部分分数展開した一つ一つの項の積分を行う．
$\dfrac{A}{(x-a)^m}$ についてはテキスト p.85 を参照すること．これは易しいだろう．$\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$ については難しいがテキスト p.193 を参照して欲しい．ポイントは分母の 2 次式を平方完成することだ．具体例を通じて理解するのが良いだろう．

4. 有理関数の積分の具体例

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx$$

について，まず分母を因数分解すれば $(x-1)(x^2+x+1)$ である．ゆえに被積分関数は

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

の形に部分分数展開できる．A, B, C を求めるために分母をはらって

$$x=A(x^+x+1)+(Bx+C)(x-1)=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$$

より $A=1/3,\ B=-1/3,\ C=1/3$ を得る．ゆえに

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx$$

である．第 2 項の計算については $x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4$ より $x+1/2=\sqrt{3}/2u$ とおいて置換積分すれば次のようになる[*3]．

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}u+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{4}(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}du=-\int \frac{u}{u^2+1}du+\sqrt{3}\int \frac{1}{u^2+1}du\\ &= -\frac{1}{2}\log(u^2+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}u=-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)\end{aligned}$$

以上をまとめて，

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)+C$$

[*2] すみません．大変になりすぎました．ここでは Mathematica を使って解いています．

[*3] 最後の等号は厳密には等しくない．ただし，$\log(x^2+x+1)$ と $\log(u^2+1)$ の差は定数なので不定積分の計算では問題ない．

本日のレポート課題

　有理関数の不定積分の計算を 2 題出題しましたが，分子をメモするのを忘れてしまいました．黒板に書いたのと異なると思いますが，黒板に書いたほうで答えてください．なお，いずれの問題でも難易度には差はありません．

$$(1)\ \int \frac{2x-1}{x^4-1}dx, \qquad (2)\ \int \frac{3x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

微分積分 I 講義メモ (6 月 22 日)

前回のレポート課題

　次の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \int \frac{2x+1}{x^4-1}dx, \qquad (2)\ \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

【解答例】(1) 分母は $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ と 1 次式と判別式負の 2 次式に因数分解されるので

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

とおく．分母を払って両辺の多項式の係数を比較することにより連立方程式

$$A+B+C=0,\quad A-B+D=0,\quad A+B-C=2,\quad A-B-D=1$$

を得る．これを解けば $A=3/4,\ B=1/4,\ C=-1,\ D=-1/2$ を得る．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^4-1}dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx-\int \frac{x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{3}{4}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x+1|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C\end{aligned}$$

(2) 分母は 1 次式の積なのでそのまま部分分数展開する．

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

より，$A+B+C=0,\ -5A-4B-3C=0,\ 6A+3B+2C=0$ となるので $A=C=1/2,\ B=-1$ である．

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx-\int \frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}dx\\ &= \frac{1}{2}\log|x-1|-\log|x-2|+\frac{1}{2}\log|x-3|+C\end{aligned}$$

【コメント】

- いずれも部分分数展開を利用する問題である．提出された答案での間違いの例をあげよう．

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x^2+1}$$

  2 次式の分子が定数になっているので，これでは A,B,C を求められない．判別式負の 2 次式については分子は 1 次式にすること．

$$\frac{2x+1}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

  x^2-1 は判別式が正なので $(x-1)(x+1)$ と 1 次式の積に因数分解される．部分分数展開を行う際には 1 次式と判別式負の 2 次式に因数分解しておくように．ただし，このおき方なら $A=1,B=-1/2,C=-1,D=-1/2$ と求められる．すなわち

$$\frac{2x+1}{x^4-1}=\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\frac{-2x-1}{x^2+1}$$

  となるが，この第 1 項の積分は，さらに部分分数展開する必要がある．解答例のようにおけば一度で積分計算できる形に直せる．

- $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数は $\tan^{-1} x$ である．これは基本公式であり覚えておくこと．$x = \tan u$ と置換積分する人もいるが，結局 $u = \tan^{-1} x$ と逆三角関数を利用することになる．
- 配布したプリントの (I) の注意書きに相当する誤りがあった．

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx = \frac{1}{4x^3}\log|x^4-1| \qquad \text{これは誤り!!}$$

  というものだが，おかしさに気づいてもらえないだろうか．合成関数の微分のような感覚で積分を行わないように．
- 連立一次方程式を解く際に行列の基本変形を使った答案があった．もちろんそれで構わないが，掃き出しは一回にまとめて行ったほうが効率的だ．解答を見ていて少し気になった．

本日の講義の要点

1. 有理関数の不定積分

   必要事項はテキスト p.84 と少し難しいが p.194 および講義資料 3 を参照すること．それを見ながら次の具体例を考察して欲しい．

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

   - まず，分子の次数が分母の次数より小さくなっていないので割り算をする．

$$x^4 = (x-1)^2(x^2+1) + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1, \quad \frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+1)} = 1 + \frac{2x^3-2x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

   - 分母は 1 次式と判別式負の 2 次式に因数分解されているので，次の形に部分分数展開されることが分かる．(講義資料 3 参照)

$$\frac{2x^3-2x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

   - 分母を払って整理すれば

$$2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)$$

     となるが両辺の係数を比較して

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0$$

     よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx &= \int 1 + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)}dx \\ &= x + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\log(1+x^2) + C\end{aligned}$$

   - 基本的な積分公式を利用すれば

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = x + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \log(x^2+1)$$

2. ある種の不定積分は置換積分により有理関数の不定積分に帰着できる．

- 置換積分の基本

  置換積分が苦手な学生が多いようなので基本を確認しておく．

  不定積分 $\int f(x)dx$ において $x=\varphi(u)$ とおく．このとき

  被積分関数の変換 $f(x)=f(\varphi(u))$ と積分要素の変換 $dx=\varphi'(u)du$

  を行う．結局

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

  不定積分 $\int f(x)dx$ で $\psi(x)=u$ とおくことも良くある．$x=\varphi(u)$ と書きなおすか，$\psi'(x)dx=du$ の形を作り出すかする必要がある．講義資料にも書いたように

$$\int g(\psi(x))\psi'(x)dx=\int g(u)du$$

  のような形が浮かび上がればうまくいく．これは計算を繰り返す中で感覚を身につけるしか無い．

- x と $\sqrt{x^2+1}$ の分数式の不定積分

  $\sqrt{x^2+1}=u-x$ とおくと次の式から u の有理関数の不定積分になることが分かる．

$$x=\frac{u^2-1}{2u},\quad \sqrt{x^2+1}=u-\frac{u^2-1}{2u}=\frac{u^2+1}{2u},\quad dx=\frac{u^2+1}{2u^2}du$$

  より一般の考え方がテキスト p.194 に記述されている．講義では $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を扱った．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{2u}{u^2+1}\frac{u^2+1}{2u^2}du=\int \frac{1}{u}du=\log|u|+c=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$$

  なお最後の対数の中身は正なので絶対値は外した．

- $\sin x$ と $\cos x$ の分数式の不定積分

  $\tan\frac{x}{2}=u$ すなわち $x=2\tan^{-1}u$ とおく．すると

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

  より必ず有理関数の不定積分になる．講義では $\int \frac{1}{2-\cos x}dx$ を例として解説した．

$$\int \frac{1}{2-\cos x}dx=\int \frac{1}{2-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du=\int \frac{2}{3+u^2}du$$

  最後の不定積分は $\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}}$ を微分してみれば分かる．

$$\int \frac{1}{2-\cos x}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

- $\tan x$ の分数式の不定積分

  これは $\tan x=u$ とおけば良い．$x=\tan^{-1}u$ なので $dx=\frac{1}{1+u^2}du$ だからだ．講義では次の例を扱った．

$$\int \frac{1}{a+b\tan x}dx=\int \frac{1}{a+bu}\frac{1}{1+u^2}du$$

右辺の積分は部分分数展開を利用して求められる．

$$\frac{1}{(a+bu)(1+u^2)} = \frac{A}{a+bu} + \frac{Bu+C}{1+u^2}$$

より分母を払って整理すれば

$$1 = (A+bB)u^2 + (aB+bC)u + (A+aC), \quad A = \frac{b^2}{a^2+b^2},\ B = -\frac{b}{a^2+b^2},\ C = \frac{a}{a^2+b^2}$$

よって

$$\int \frac{1}{a+bu}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{b}{a^2+b^2}\log|a+bu| - \frac{b}{2(a^2+b^2)}\log(1+u^2) + \frac{a}{a^2+b^2}\tan^{-1}u + C$$

この式に $u = \tan x$ を代入して整理すれば

$$\int \frac{1}{a+b\tan x}dx = \frac{b}{a^2+b^2}\log|a\cos x + b\sin x| + \frac{a}{a^2+b^2}x + C$$

本日のレポート課題

第 4 章の章末問題の 2 番（不定積分 10 題）をやって来ること．不定積分の計算はやってみないと分からないところがあるので，とにかく計算して提出するようにして欲しい．間違いがあれば返却の際に指摘する．さて，ヒントを与えておく．

- (1)(2)(5) は有理関数の不定積分．(1) は分子の次数が分母の次数より大きいことに注意をすること．(5) は分母の因数分解からはじめる．次を利用せよ．

  $$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1) - (\sqrt{2}x)^2$$

  判別式負の 2 次式の積分には分母を平方完成すると良い．その後の処理はテキスト p.85 例 4.1 を参考に考えること．
- (3) は $(\sin^{-1} ax)'$ を計算してみよ．p.83 の表にある逆三角関数に関する積分公式は大学で新たに学習した積分公式なので覚えておくように．
- (4) は $(x^2+1)' = 2x$ が分子についていることに注意すること．講義で扱った手法を使わなくても簡単に計算できる．
- (7) は講義で扱った手法で計算するとよい．ただ (8) は講義で扱った手法だと難しくなりすぎる．$\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$ に注意して $\sin x = u$ と置いてみよ．
- (9)(10) は e^x の分数式なので $e^x = u$ とおけば有理関数の不定積分に帰着できる．ただし，(9）の方はじっと眺めているとすぐに答えが出るはずだ．

微分積分 I 講義メモ (6 月 29 日)

前回のレポート課題

章末問題の 2 を出題した．主に置換積分の問題なのでやはり自力で解答して欲しい．ここではヒントに止めることにする．これでも分からない人は友人に聞くなり質問に来るなりしておくこと．

(1) $\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$ と変形すれば後は基本公式.

(2) $x-1=u$ で置換積分せよ.

(3) $x=\sqrt{2}\sin u$ と置換積分せよ．また，基本公式 $(\sin^{-1}(ax))' = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ で $a=1/\sqrt{2}$ としてみても良い.

(4) $\sqrt{x^2+1}=u$，$x^2+1=u$ のいずれの置換積分でも簡単に計算できる.

(5) $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ として

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\end{aligned}$$

と部分分数に展開する．第 1 項と第 3 項は分母の微分が分子になっている（そうなるように整理した）ので p.84 定理 4.10 が使える．第 2 項と第 4 項は分母を平方完成して p.86 の (2) と同様の処理を行う.

(6) $\sqrt{2-x}=u$ と置換積分せよ.

(7) $\tan\dfrac{x}{2}=u$ と置換積分せよ．また分子分母に $1-\cos x$ をかけてもよい.

(8) $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$ として $\sin x = u$ とおく．あるいは 3 倍角の公式を利用しても良い（このほうが高校数学の標準だろう）.

(9) 分母の微分が分子になっていることに注意すること．定理 4.10 を使う.

(10) $e^x=u$ と置換積分すれば分母が $u(u+1)^2$ の有理関数の積分になる．これを

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2}$$

と部分分数展開すれば後は簡単だろう.

【コメント】

- 講義で解説した手法は，いろいろな場面で使える手法だが，問題によっては他の方法のほうが楽な場合もある．ただうまい方法が思いつかないときには講義で紹介した一般的なアイデアを使うべきだ．思い付きで計算して重大なミスをおかさないように.
- 置換積分は被積分関数の変換と積分要素の変換に分けて考えたほうが良い．$x=\varphi(u)$ とおいたときは $dx=\varphi'(u)du$，$\psi(x)=u$ とおいたときは $\psi'(x)dx=du$ だ．ただし，u のみの式に書き直さなくてはならない．x が残っている答案がある.
  なお，後者の置き方の際に，未だ $\psi(x)$ を一つの変数とみなして積分し結果を $\psi'(x)$ で割ると計算する人がいる．これは最悪の間違いであり注意すること.

本日の講義の要点

1. 定積分の定義から微分積分学の基本公式まで

テキストに従って定積分の定義から計算方法（原始関数との関係）を解説した．高等学校での導入の仕方と異なることに注意すること．

- Riemann 和と定積分の定義（p.71〜73）

  定積分は Riemann 和の極限（p.73(4.2) 式）で定義する．この極限を直感的に捉えることは困難で，$\varepsilon\delta$ 論法という極限の厳密な定義を利用する必要がある．しかし，Riemann 和が面積を近似するものであることは直感的に理解できるだろう．また分割を細かくしていくときにそれが面積に限りなく近づくことも納得できるだろう．そのような感覚でこの定義を捉えて欲しい．

- 連続関数の積分可能性（p.74 定理 4.1）

  証明はこの講義のレベルを超える．定積分の定義からこのような普遍的な事実が導かれることを知っておいて欲しい．高校のような定義の仕方では絶対に証明できないことである．

- 定積分の性質（p.75 定理 4.2）

  すべて高等学校で学習したことだと思う．ここでは Riemann 和を使って証明を与えた．Riemann 和のレベルでの等式がその極限である定積分の等式を導く．証明が p.75〜p.77 に詳しく書いてあるので読んでおくこと．

- 積分の平均値定理（p.78 定理 4.3）

  定積分を区間の幅で割ることにより，その区間での関数の平均値を定めることができる．連続関数について，平均値を実現する点があるというのが定理の主張だが，当然のことだ．証明では連続関数の中間値定理に帰着している．

- 微分積分学の基本定理（p.80 定理 4.4）

  定積分により原始関数が表示されることを主張する．証明には，微分の定義における極限の中身が平均値の形になっていることを使う．

- 定積分の計算方法

  微分積分学の基本定理から微分積分学の基本公式，すなわち定積分の原始関数による表示が得られる．これが高等学校での定積分の定義だった．

  原始関数と結びついたことにより，部分積分や置換積分が可能になる．これらは高校で学習したはずだ．

2. 置換積分による定積分の計算例

置換積分が苦手な人が多いようなので具体例をもとに解説した．まず $x = \varphi(u)$ という置換では

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

$\psi(x) = u$ という置換では

$$\int_a^b g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int_\alpha^\beta g(u)du$$

である．考えるのは

- 積分範囲の変換：x が a から b まで動くときに u は α から β まで動く．
- 積分要素の変換：$x = \varphi(u)$ とおいたときは $dx = \varphi'(u)du$，$\psi(x) = u$ とおいたときは $\psi'(x)dx = du$ である．後者では $\psi'(x)dx$ を積分要素と捉えることが重要だ．なお，積分要素の意味については解説していない．まずは意味など考えずに形式的なものとして計算を行って欲しい．
- 被積分関数の変換

の 3 つである．これによって x についての定積分を u についての定積分に直す．x と u が混在しないように注意すること．

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$$

について $\sqrt{\cos x} = u$ とおいて置換積分を行う．

- 積分範囲の変換：x が 0 から $\pi/2$ まで動くときに u は 1 から 0 まで動く．
- 積分要素の変換：$\cos x = u^2$ より $-\sin x dx = 2udu$ である．
- 被積分関数の変換：$\sin x dx$ を積分要素とみなし，被積分関数は $\sin^2 x \sqrt{\cos x}$ と考える．$\cos x = u^2$ より $\sin^2 x \sqrt{\cos x} = (1-u^4)u$ である．

以上から

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx = \int_1^0 (1-u^4)u(-2udu) = \int_0^1 2(u^2-u^6)du = \frac{8}{21}$$

講義では他に

$$\int_2^4 (x-2)(x-3)(x-4)dx$$

を $x-3=u$ という置換で計算してもらった．簡単なので解答は省略する．

本日のレポート課題

次の定積分を計算せよ．

$$(1) \int_0^{2\pi} x|\sin x|dx, \quad (2) \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx, \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx, \quad (4) \int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx$$

ヒント

(1) は積分域を $[0,\pi]$ と $[\pi,2\pi]$ に分け，後者に $x-\pi=u$ という置換を行う．(2) は $x^2=u$ とおくと簡単になる．(3) は分母の平方完成 $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ から $x-1/2=(\sqrt{3}/2)\tan u$ とおくと良い．(4) はやはり平方完成 $(x-1)(2-x)=1/4-(x-3/2)^2$ から $x-3/2=(1/2)\sin u$ とおく．

微分積分 I 講義メモ (7 月 6 日)

前回のレポート課題次の定積分を計算せよ.

$$(1)\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx,\quad (2)\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx,\quad (3)\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx,\quad (4)\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx$$

【解答例】(1) $\sin x \geqq 0$ となるのは $0 \leqq x \leqq \pi$ だから

$$\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx$$

ここで第 2 項を $x = 2\pi - u$ と置換すれば

- 積分範囲：$x : \pi \longrightarrow 2\pi$ のとき $u : \pi \longrightarrow 0$
- 積分要素：$dx = -du$
- 被積分関数：$x\sin x = (2\pi - u)\sin(2\pi - u) = -2\pi \sin u + u\sin u$

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = \int_{\pi}^{0} (-2\pi\sin u + u\sin u)(-du) = -\int_0^{\pi} 2\pi\sin u du + \int_0^{\pi} u\sin u du$$

二つの式をあわせれば

$$\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} 2\pi\sin u du = 4\pi$$

もちろん最初の式を部分積分で計算しても良い.

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

より $F(x) = -x\cos x + \sin x$ とおけば

$$\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = F(\pi) - F(0) - F(2\pi) + F(\pi) = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$$

(2) $x^2 = u$ とおくと

- 積分範囲：$x : 0 \longrightarrow 1$ のとき $u : 0 \longrightarrow 1$
- 積分要素：$2xdx = du$ より $xdx = \dfrac{1}{2}du$
- 被積分関数：分子の x は積分要素に取り込んだので $\dfrac{1}{x^4+1} = \dfrac{1}{u^2+1}$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{2} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

(3) 分母の平方完成 $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$ から $x - 1/2 = (\sqrt{3}/2)\tan u$ とおく.

- 積分範囲：$x : 0 \longrightarrow 1$ のとき $u : -\pi/6 \longrightarrow \pi/6$
- 積分要素：$dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1 + \tan^2 u)du$
- 被積分関数：$\dfrac{1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{1 + \tan^2 u}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{4}{3}\frac{1}{1+\tan^2 u}\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 u)du = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} du = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

(4) 根号の中の平方完成 $(x-1)(2-x) = 1/4 - (x-3/2)^2$ から $x - 3/2 = (1/2)\sin u$ とおく.

- 積分範囲：$x : 1 \longrightarrow 2$ のとき $u : -\pi/2 \longrightarrow \pi/2$
- 積分要素：$dx = \dfrac{1}{2}\cos u du$
- 被積分関数：$\sqrt{(x-1)(2-x)} = \dfrac{1}{2}|\cos u| = \dfrac{1}{2}\cos u$

$$\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos u \frac{1}{2}\cos u du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{\pi}{8}$$

【コメント】

- 置換積分が苦手な学生が多そうなので，講義の説明と整合するように積分範囲の変換，積分要素の変換，被積分関数の変換を別々に考察した．慣れてくればここまで丁寧に書く必要はない．
- (1) はまず絶対値の中身の正負を調べ絶対値を外すことが必要だ.
- 置換積分において，積分範囲がどう変換されるかを調べる必要があるがそれを両端の値だけで答えてはならない．例えば (3) の変数変換 $x - 1/2 = (\sqrt{3}/2)\tan u$ で $x = 0$ のときは $u = 5\pi/6$，$x = 1$ のときは $u = \pi/6$ とした答案があったが，これは間違いである．u が $5\pi/6$ から $\pi/6$ に動くとき $\tan u$ は

  $$-\frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow -\infty|\infty \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$$

  の順に動く．ゆえに x も $-1 \longrightarrow -\infty|\infty \longrightarrow 1$ の順に動く．これでは積分の変数変換にはならない.

  (4) の $x - 3/2 = (1/2)\sin u$ でも注意が必要だ．解答例のように $u : -\pi/2 \longrightarrow \pi/2$ とすれば $\cos u \geqq 0$ だが，$u : 3\pi/2 \longrightarrow \pi/2$ とすれば $\cos u \leqq 0$ だ．被積分関数の変換で絶対値を外すときの処理が変わってくる.

  この間違いをなくすには逆三角関数を前面に出すといいかもしれない．(3) では $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$，(4) では $u = \sin^{-1}(2x-3)$ とすれば混乱は生じない.

本日の講義の要点

1. 広義積分とは

   積分範囲で無限大に発散する点を持つ関数は Riemann 和がいくらでも大きくなるので定積分できない．例えば

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

   の Riemann 和

   $$S = \sum \frac{1}{\sqrt{p_i}}(x_i - x_{i-1}), \qquad 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,\ x_{i-1} < p_i < x_i$$

   は，p_1 のとり方によっていくらでも大きくすることができる．ゆえに分割を細かくしていっても Riemann 和が一定の値に収束することはありえない．原因は関数が積分域で有界でないためだ.

しかし，この原始関数は $2\sqrt{x}$ であり $[0,1]$ で連続になっている．そこで定積分と極限を組み合わせ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

と定める．これを広義積分という．積分域が無限区間の場合も同様に定積分と極限を組み合わせて広義積分を定義する．

2. 広義積分の計算は通常の積分計算と何ら変わらない．

定積分以外に極限の概念も利用するので広義積分の理論的扱いは定積分より難しい．しかし，原始関数が連続の場合は，極限をとることと代入することが同じなので微分積分学の基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．ゆえに $F(a), F(b)$ が定義できていない場合は極限に置き換えるという約束の下に，微分積分学の基本公式は広義積分についても成り立つ．従って，部分積分，置換積分も定積分と同様に計算できる．

なお，微分積分学の基本公式を利用する際に原始関数の連続性は常に注意を払う必要がある．内部に不連続な点がある場合などはその点で積分域を分けて考えること．

3. 広義積分の計算例

例 4.4 を解説した．$a \geqq 0$ の場合は通常の積分，$-1 < a < 0$ の場合は広義積分可能, $a \leqq -1$ の場合は広義積分も不可能である．計算は易しい．

広義積分を置換積分により計算する例として

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

を紹介した．$x = \sin u$ として置換積分すると

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \pi$$

である．なおこのとき置換後の積分は広義積分ではなく通常の積分である．このように置換積分部分積分で通常の積分と広義積分が入れ替わることもありえる．

4. 広義積分の収束判定，ガンマ関数

広義積分と通常の積分の最大の違いは，積分可能か否かの判定である．通常の積分は「閉区間上の連続関数は定積分可能」という事実をおさえておけばよい．しかし，広義積分では収束するか否かの判定が必要になる．これを p.94 のガンマ関数について簡単に解説した．ただし難しい課題なのでそれほど気にする必要はない．

本日のレポート課題とヒント

章末問題の 5（(4) は講義で解説したので，レポート課題から外す）と

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

を課題とする．(1) は前回の (3) と基本的に同じ．(2) は部分積分，(3) は置換積分を利用する．追加の問題は部分分数展開を利用すること．

微分積分 I 講義メモ (7 月 13 日)

前回のレポート課題

章末問題 5 の (1) は前回の (3) と同様に $x-1/2=(\sqrt{3}/2)\tan u$ とおく．すなわち $u=\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$ とおく．

- 積分範囲：$x:-\infty\longrightarrow\infty$ のとき $u:-\pi/2\longrightarrow\pi/2$
- 積分要素：$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 u)du$
- 被積分関数：$\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{1+\tan^2 u}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}\frac{1}{1+\tan^2 u}\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 u)du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

(2) は部分積分を行なって

$$\int_0^1\log x dx=[x\log x]_0^1-\int_0^1 dx=-\lim_{x\to+0}x\log x-1=-1$$

(3) は $\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$ に注意して

$$\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=\frac{1}{2}$$

講義で追加した問題については，部分分数展開

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

を利用する．

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\left[\log x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^{\infty}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\log\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\log 2=\frac{1}{2}\log 2$$

【コメント】

- (1) は置換積分すると通常の積分になっている．(2) では原始関数に 0 が代入できないので極限に置き換えている．(3) と追加の問題では ∞ への極限に置き換えている．このように広義積分の計算において，微分積分学の基本公式を使うとき，原始関数の区間の両端での値を必要に応じて極限に置き換えること．なお，極限を書かずに答えを出している答案があるが，代入しているわけではないので好ましくない．広義積分は極限と積分をミックスして考えなくてはならない．
- (1) で解答例のように置換積分したとき u の動く範囲を $-\infty\longrightarrow\infty$ としてしまう人がいる．分からなければ段階をおって考えること．例えば $x:-\infty\longrightarrow\infty$ より $x-1/2$ も $-\infty$ から ∞ まで動く．すなわち $\tan u$ が $-\infty$ から ∞ まで動くので u の動く範囲は $-\pi/2$ から $\pi/2$ までである．$\pi/2$ とすれば良い．
- $x\log x$ は $x\to+0$ のとき 0∞ 型の不定形、極限計算には l'Hospital の定理などを使う必要がある。処理については第 3 章章末問題 5(2) が参考になる。6 月 15 日の講義メモの「前回のレポート課題の解説」をみよ。
- (3) は部分積分では計算できない．e^{-x^2} の原始関数が求められないからだ．しかし，相変わらず $\dfrac{e^{-x^2}}{-2x}$ を原始関数だと思っている人がいる．何度注意したらこういうばかげた計算をしなくなるのだろうか．

- 追加問題の解答例で $\left[\log x - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^\infty$ の $x \to \infty$ の部分は $\infty - \infty$ 型の不定形だ．分けて考えたら極限を求めることはできない．
- 広義積分の計算にも微分積分学の基本公式を使って差し支えない．ただし，広義積分では両端の値を代入するのではなく，極限を取ることと解釈しなくてはならない．原始関数が連続なら極限をとることを代入することに置き換えられる．∞ は数ではないので代入できない．そこで極限に置き換えて理解する．$x\log x$ には 0 は代入できない．だから $x \to +0$ での極限に置き換える．

  この考え方の有効性は置換積分をする際に実感できる．(1) でテキストのように $x : -R' \longrightarrow R$ とすると $-R'$ と R に対応する u の動く範囲を求める必要が出てくる．この値はきれいな値にはならない．

本日の講義の要点

1. 定積分の応用１ 面積

   面積への応用は高校でも学習しているし，定積分の導入方法からも理解できるだろう．講義ではサイクロイドの囲む面積を扱った．$y = f(x)$ の形ではなく，パラメーターを使った曲線だが，面積の表示 $\int_a^b y dx$ と置換積分を使うことによりパラメーター表示のまま計算が行える．この点に注意すること．
2. 定積分の応用２ 極座標による曲線と面積

   p.98 から p.100 にかけて記述されている．考える領域を原点からの放射状の直線で分割し，一つ一つの部分の面積を扇形の面積で近似する．分割を細かくしていけば扇形の面積の和が全体の面積に近づくという考え方を「区分求積法」とよぶ．一方，扇形の面積の和は $\dfrac{1}{2}f^2(\theta)$ の Riemann 和になっている．だから分割を細かくしていったときの極限は定積分で求められる．

   このように，区分求積法の考えと Riemann 和を結びつけることが応用の基本だ．他の応用でも同様なので確認すること．なお，講義では例としてカージオイド

   $$r = a(1+\cos\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

   を扱った．

   $$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} 1 + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{3\pi}{2}a^2$$
3. 定積分の応用３ 曲線の長さ

   $f'(x)$ が連続な時，曲線 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さは，曲線を分割して各部分の長さを線分の長さで近似することにより，区分求積の方法を利用できる．具体的にはテキスト p.101 から p.102 までを参照すること．ここでも区分求積の考えで求めた和が Riemann 和の形になっていることを利用している．

   例としては例 4.8 の懸垂線（カテナリー）を紹介した．なお，講義では触れなかったが曲線がパラメーターで表示されている場合も計算できる．サイクロイドの囲む面積で計算したように，置換積分と組み合わせればよい．
4. 定積分の応用４ 体積

   テキストでは項目としてあげていないが，高校でもやっていたことなのでコメントした．断面積を積分すれば体積が求められるという考えだが，これは立体をスライスして一つ一つの体積を断面積と厚さの積で近似して和をとったことになる．これも Riemann 和である．

   例として錐体の体積が底面積×高さ÷３であることを証明した．

以上の応用では求めたいものに区分求積の考えを適用すると，自然と Riemann 和の形が出てくることを使っている．応用の理解には定積分の定義（Riemann 和の極限）が重要な役割を果たしていることを理解して欲しい．

本日のレポート課題とヒント

章末問題の 7 を課題とする．(4) では θ の積分範囲をどうとるかを考えること．なお，面積は $x > 0$ の部分を求めて 2 倍すればよい．

微分積分 I 講義メモ (7 月 20 日)

前回のレポート課題

テキストの章末問題 7 が課題だった．(1)(2) は高等学校レベルの問題なので解答例は省略する．(3) はグラフの対称性から第 1 象限の部分の面積を求めそれを 4 倍する．面積を $4\int_0^a ydx$ として $x = a\cos^3 t$ により置換積分すれば

- 積分範囲：$x : 0 \to a$ のとき $t : \pi/2 \to 0$
- 積分要素：$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$
- 被積分関数：$y = a\sin^3 t$

$$4\int_0^a ydt = 4\int_{\pi/2}^0 a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt = 12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 tdt$$

ここで

$$\sin^4 t\cos^2 t = \frac{1}{8}\sin^2 2t(\cos 2t + 1) = \frac{1}{48}\left(\sin^3 2t\right)' + \frac{1}{16}(1 - \cos 4t)$$

とすれば

$$4\int_0^a ydt = 12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 tdt = \frac{3}{8}a^2\pi$$

(4) は $x > 0$ の部分の面積を求めて 2 倍する．まず，$r^2 = 2a^2\cos\theta \geqq 0$ より r が定まるためには $-\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ を満たさなければならない．逆にこの条件を満たす θ に対して $r \geqq 0$ が唯一つ決まるので，これが θ の動く範囲である．極座標による面積なので

$$2\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\theta = 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta = a^2[\sin 2\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2a^2$$

【コメント】

- (3) では $\sin^4 t\cos^2 t$ の積分で躓いたようだ．このような関数の積分は三角関数の次数を下げるのが基本だ．$\sin^2 t,\ \cos^2 t,\ \sin t\cos t$ を $\sin 2t,\ \cos 2t$ に置き換えたり，$\sin^3 t,\ \cos^3 t$ に 3 倍角の公式を利用したりすればよい．
  なお，$\sin^4 t\cos^2 t = \sin^4 t - \sin^6 t$ として章末問題 3 の積分の漸化式を利用した人もいた．別に構わないが覚えられる式ではないので，このような問題を解くときには面倒ではないか．
- (4) は極座標による面積なので，授業を復習しながら取り組んで欲しい．θ の動く範囲が若干難しいが適当な練習問題だと思う．
  なお，この問題を $r = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}$ より $x = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\ y = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$ でパラメーター付けられた曲線の囲む面積として求めても良い．計算力が必要だが.

本日の講義の要点

1. サイクロイドの弧長（章末問題 8(2)）
   $y = f(x)$ の形で与えられた曲線の長さは定理 4.13 で与えられている．サイクロイドはパラメーター表示だが $x = a(t - \sin t)$ で置換積分すればよい．その際被積分関数について

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} = \frac{1}{\left|\frac{dx}{dt}\right|}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となることに注意する．

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a$$

2. 微分方程式（テキスト p.65）

　未知関数の微分を含んだ等式を微分方程式とよぶ．この等式がどのような関数について成り立つかを調べることが問題であり，それを微分方程式を解くという．テキストの例より一般化して

$$y'' + ay' + by = 0$$

を解説した．方法はテキストとまったく同じであり $y = e^{\lambda x}$ を代入して

$$y'' + ay' + by = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

を得る．ゆえに二次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を解けば微分方程式の解を見つけることができる．これらですべての解が尽くされていることはここでは証明していない．

$a^2-4b>0$	α,β	$C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$
$a^2-4b=0$	α(重解)	$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$
$a^2-4b<0$	$\alpha+i\beta$(虚数解)	$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

3. ガンマ関数（テキスト p.94)

　定義はすでに扱ったのでここでは $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ の証明を与えた．これを使えば $\Gamma(n+1)=n!$ であることが簡単に分かる．ガンマ関数は既知の関数を使って表すことはできない．初等関数ではないことが分かっている．しかし，様々な応用の場面で現れる重要な関数である．初等関数以外にも重要な関数があることを知っておいて欲しい．

　この講義も今回が最終回である．試験は来週なので，いろいろな計算例にあたっておくようにしておくこと．高校までの知識では解けないような問題を出題するので，新しく学んだ計算法や関数，公式は念入りに学習しておいて欲しい．

微分積分 I 講義資料 1

Taylor の定理（p.52 定理 3.9）に関連する公式をまとめておく．

(I) Taylor の定理 (p.52) の $a=0$ の場合 (この場合は Maclaurin の定理とも言う)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n,\quad R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

ここでテキストの c を θx と表記した．これによって 0 と x の間に c があるということは，$0<\theta<1$ という不等式になる．

以下の等式は n 階導関数が求められる関数について具体的に書き下したものである．

(II) $a=0$ で $f(x)=e^x$ の場合

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n,\qquad R_n=\frac{1}{n!}e^{\theta x}x^n$$

(III) $a=0$ で $f(x)=\cos x,\quad n=2m$ の場合

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-2)!}x^{2m-2}+R_{2m},\qquad R_{2m}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m)!}x^{2m}$$

(IV) $a=0$ で $f(x)=\sin x,\quad n=2m+1$ の場合

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m+1},\qquad R_{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

(V) $a=0$ で $f(x)=\log(1+x)$ の場合

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^{n-1}+R_n,\qquad R_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}$$

(VI) $a=0$ で $f(x)=(1+x)^\alpha$ の場合（一般化された 2 項定理）

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{k}x^k+\cdots+\binom{\alpha}{n-1}x^{n-1}+R_n,\qquad R_n=\binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

ここで

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

であり（テキスト p.57(3.28)）一般化された 2 項係数という．

n 階導関数が求められない関数については n を限定することによって等式が得られる．

(VII) $a=0$ で $f(x)=\tan x,\quad n=6$ の場合

$f'(x)=(\tan x)'=1+\tan^2 x$ を利用すると $f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f^{(3)}(0)=2,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=16$ は比較的簡単に分かる．

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+R_6,\qquad R_6=\frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!}x^6$$

$f^{(6)}(x)$ の計算は大変なので省略する．

微分積分 I 講義資料２

Taylor 展開に関連する公式をまとめておく．級数が収束する場合の考察については講義で解説するが，現段階では厳密な証明を与えられない部分も含まれている．

(I) $f(x)$ の $x=0$ における Taylor 展開（定理 3.10 の $a=0$ の場合），Maclaurin 展開ともいう．
$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つ x について

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(k)!}x^k + \cdots$$

(II) e^x の $x=0$ における Taylor 展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(III) $\cos x$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(IV) $\sin x$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(V) $\log(1+x)$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$$

(VI) $(1+x)^\alpha$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

(VII) $\tan^{-1} x$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

(VIII) $\sin^{-1} x$ の $x=0$ における Taylor 展開

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} \cdots + \binom{-1/2}{k}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

微分積分 I 講義資料３（不定積分）

(I) 基本的関数の不定積分と積分計算の基本

基本的関数の積分と部分積分，置換積分により積分を行う．置換積分は $\psi(x) = u$ とおく場合のほうがより多く使われる．例えば $f(u)$ の原始関数が $F(u)$ のとき

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(\psi(x)) + C$$

$\int f(\psi(x))dx = \dfrac{1}{\psi'(x)}F(\psi(x))$ といった誤解をしばしば見受けるが注意すること．

(II) 逆三角関数の不定積分は $\log x$ の不定積分と同様に部分積分が有効である．

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

(III) 部分分数展開

分数式 $g(x)/f(x)$ が，$f(x)$ の次数が $g(x)$ の次数より大きく，$f(x)$ が一次式と判別式負の二次式の積に因数分解されているとき $g(x)/f(x)$ を以下のような分数式の和として表すことができる．

- 因数 $(x-a)^k$ に対しては次の k 個の分数式の和を用意する．

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

- 因数 $(x^2+bx+c)^h$, $b^2-4c<0$ に対しては次の h 個の分数式を用意する．

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_hx+C_h}{(x^2+bx+c)^h}$$

(IV) 有理関数 (分数式) の不定積分

分数式は多項式と (III) の条件を満たす分数式の和として表せる．部分分数展開を行えば，それぞれの項の積分はテキスト 85 ページおよび 193 ページに記載されている．これから有理関数の積分は常に積分可能で原始関数は有理関数，対数関数と $\tan^{-1}$ で記述できる．

(V) 有理関数の積分に帰着するための置換積分の技法

$f(x,y)$ を 2 変数の分数式とする．

- 被積分関数が $f(x, \sqrt{ax+b})$ または $f(x, \sqrt{(ax+b)/(cx+d)})$ のときは $t = \sqrt{ax+b}$ または $t = \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$ とおく（テキスト 87〜88 ページ）．
- 被積分関数 $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ で $a>0$ のときは，$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおく（テキスト 194 ページ）．
- 被積分関数が $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ で $a<0$ のときは，$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$ の工夫でふたつ前の場合に帰着できる（テキスト 195 ページ）．
- 被積分関数が $f(\cos x, \sin x)$ のときは，$t = \tan(x/2)$ とおく（テキスト 88 ページ）．
- 被積分関数が e^x の分数式のときは $t = e^x$ とおく（テキスト 89 ページ）．同様に $\tan x$ の分数式のときは $t = \tan x$ とおく．

(VI) 初等関数の不定積分は一般には初等関数にならない．積分計算で不定積分を求められるとは限らない．