幾何概論 II(10 月 3 日)

本日の講義の要点

1. 曲線とは

   曲線は図形であるが，微分幾何学の手法を使う際にはパラメーターを導入して，写像として扱う必要がある．これは曲線を考える際に図形ではなく曲線上の運動を考えることに相当する．注意点を箇条書しておく．

   - 曲線は向きを込めて考える．円周でも時計回りと反時計回りでは違う曲線として扱う．
   - パラメーター表示では正則性（$|\boldsymbol{c}'(t)| \neq 0$）を仮定する．これによって曲線の滑らかさが保障される（接線が存在する）．
   - パラメーターを変換すると運動としては変わるが曲線としては変わらない．幾何学で重要なのはパラメーターの変換で変わらないような量である．例えば曲線の長さはパラメーターのとり方によらない．（証明を考えてみよ）

2. 弧長パラメーター

   パラメーターとして，曲線上の一点からの道のり（弧長）を使うことができる．運動としては速度 1 の等速度運動を意味する．命題 1.2 は等速度パラメーターの作り方（存在）を述べている．

   弧長パラメーターは曲線についての一般論を構築する際に表示が単純になるので便利である．しかし，具体的曲線を弧長パラメーターで扱うのは難しい．問題 1.3 はその例を計算してもらうものだが，弧長パラメーターを具体的に求められる曲線は円とこの曲線だけと言って良い．弧長パラメーターを使うと表示は簡単になるが，具体例の計算においては一般のパラメーターによる式を使わなければならない．

3. 双曲線関数

   問題 1.3 の解説の中で双曲線関数を解説した．この講義ではこれからも登場する関数なので慣れておいて欲しい．まず定義は

   $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

   である．次の公式は定義から直接導けるので確認しておくこと．

   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\ \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x,\ \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$
   $$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

   なお Euler の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を利用して $\cosh(ix) = \cos x,\ \sinh(ix) = i \sin x$ を使えば覚えやすい．例えば

   $$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = \cosh^2(ix) - \sinh^2(ix), \quad (\cosh(ix))' = -\sin x = i \sinh(ix)$$

   など．逆双曲線関数も定義できる．これについて講義で使った等式は

   $$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \cosh(\sinh^{-1} x) = \sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} x)} = \sqrt{1 + x^2}$$

4. 平面曲線の曲率の定義

   まず，Frenet 枠を導入した．これは単位接線ベクトルとそれを進行方向左に 90 度回転した単位法線ベクトルの組である．曲率は Frenet 枠を使って定義 1.5 で与えている．なお講義では ω_j^k は導入しな

かった．定義 1.5 の最後の式は一般のパラメーターによる曲率の表示である．具体例の計算ではこの式を利用すること．

弧長パラメーターでは $\kappa = \boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2$ が曲率の定義式である．あるいは $\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$ を曲率の定義と思っても良い．表示が単純になることに注意すること．

5. 曲率の不変性（定理 1.6）

曲率がパラメータのとり方によらないこと，向きを保つ合同変換で変わらないこと，向きを逆にする合同変換（裏返し）で符号を変えることを証明した．この証明の中で，（ユークリッドの）合同変換の基本事項を使った．慣れていないようなのでコメントしておこう．

- 合同変換は回転と平行移動と裏返し及びそれらの合成である．

  この事実は素朴なものであり納得できるであろう．

- 合同変換は直交行列 A と定ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表せる．

  合同変換 $F(\boldsymbol{x})$ をとる．平行移動と合成して $F_1(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{0})$ とすれば F_1 は原点を固定する合同変換である．このとき F_1 は平行四辺形を平行四辺形に移し，長さの比を変えないので線形変換になる．すなわち適当な行列によって $F_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と記述される．さらに内積を変えないことから

$$(A\boldsymbol{u}) \cdot (A\boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})(A\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tAA\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

  であり ${}^tAA = E$ を満たす．すなわち A は直交行列である．

- 直交行列の各列ベクトルは大きさが 1 で互いに直交する．このことから 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$$

  の 2 種類である．前者は回転の行列，後者は原点を通る直線での線対称移動（裏返し）である．

6. C^∞ 級関数の扱い

演習の時間に C^∞ 級関数を自由に扱う際の基本的例を紹介した．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

この関数が C^∞ 級であることは次の事実に基づく．

- $f(x)$ が $x = a$ で連続で $x \neq a$ で微分可能であり，さらに $\lim_{x\to a} f'(x) = b$ が成り立つとする．このとき $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $f'(a) = b$ を満たす．
- $x \to +0$ で $f^{(n)}(x) \to 0$ となる．これは $f^{(n)}(x)$ が $1/x$ の多項式に $e^{-1/x}$ をかけたものになっていることと $\lim_{u\to\infty} \dfrac{p(u)}{e^u} = 0$ を利用する．ここで $p(u)$ は u の多項式である．

この関数を使うと曲線 $\boldsymbol{c}(f(-t))$ は $t \geqq 0$ で定点 $\boldsymbol{c}(0)$ である．曲線上の運動は滑らかに停止することができる．同様に滑らかに出発することもできるので $\boldsymbol{c}(t)$ が C^∞ 級であっても図形としては折れ曲がっていることも起こりえる．こういう状況が起こらないためには正則性（運動が停止することはない）を仮定しなければならない．

この関数を利用する場面はまた出てくるのでそのときにもコメントしたい．

演習の時間では問題 1.4（一般のパラメーターによる曲率の計算の基本問題）と問題 1.9（弧長パラメーターによる表示の利用）を考えてもらった．これに関連して前者に関連しては問題 1.5 問題 1.8，後者については問題 1.10 をレポート課題にしておく．締め切りは 10 月 8 日（月曜日），提出場所は研究室（理 3 号館 D416）である．

幾何概論 II(10 月 10 日)

前回のレポート課題

- 問題 1.5 については，曲線を $\boldsymbol{c}(t) = (t, f(t))$ と表示すれば良い．曲率の定義式から

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$

- 問題 1.8 は双曲線関数の計算に慣れれば簡単である．

$$\kappa(t) = \frac{\sinh^2 t - \cosh^2 t}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{3/2}} = -\frac{1}{\cosh^{3/2}(2t)}$$

- 問題 1.10 は弧長パラメーターについては $\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$ が成り立つことを使えば簡単だ．なお，問題 1.9 の $\theta(s)$ を用いて $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{c}''$ を計算するしても良い．

寄せられた解答例についてコメントしておこう．

- 問題 1.5 の設定で，曲線のパラメーター表示でまごついている人がいるが，困ったものだ．$\boldsymbol{c}(t) = (x(t), f(x(t))$ では間違いではないが具体的な曲率の記述にならない．何でも一般の形で表示するというものではない．
- 内積の記号 $\cdot$ を省略する答案が少なからずある．ベクトル・行列を扱うときは積には 3 種類（行列の積，内積，外積）あるので記号を混乱させてはいけない．ノルムや絶対値，行列式の記号にも注意が必要だ．$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ は一般には成立しない．たえず記号の意味を確認すること．
- $\boldsymbol{c}$ などを表示するときには縦に書くか横に書くかはどちらでも構わない．ただし，行列との積を考えるときには列ベクトルにしなくてはいけない．行ベクトルに左から（列が二つ以上ある）行列をかけることはできない．
- $\boldsymbol{e}_1$ の微分は $\boldsymbol{e}_1$ と直交するが，$\boldsymbol{c}''$ は一般には $\boldsymbol{e}_1$ と直交しない．$\boldsymbol{c}''$ と $\boldsymbol{c}'$ が直交することは説明を要する事項である．

本日の講義の要点

1. 曲率が等しい二つの曲線は向きを込めて合同である．（定理 1.7）

   二つの図形が向きを込めて合同とは，向きを保つ合同変換（すなわち回転と平行移動）で移りあうことを言う．証明では，まず回転と平行移動で，$s = 0$ における位置と速度ベクトルを一致させ，全体が一致することを示す．直交行列と簡単な微分についての議論で証明されているので比較的易しい証明だ．よく読んで理解しておくように．なお，空間曲線についてもほとんど同じ議論を行う．
2. 閉曲線，単純閉曲線，卵形線

   用語の意味はきちんと覚えておくように．なお，位相幾何学での閉曲線は連続性しか仮定しないのでこの講義での定義とは異なる．定義はテキストや分野の習慣で異なる場合があるので注意すること．

   卵形線について 4 頂点定理を紹介した．頂点という概念自体それほど基本的なものではないが，この段階で知ることのできる曲線論の結果なので紹介した．
3. 正則閉曲線の回転数

   定義は弧長パラメーターを使って与えた．これが整数値になることは問題 1.9 と合わせれば簡単に理解できる．また $\boldsymbol{c}'(s)$ の進行方向（偏角）がどう変わるのか追跡すればいいので，値の計算もできる．

なお，一般のパラメーターによる表示も重要である．単に定義式を置換積分すればよい．

4. 正則ホモトピー

   曲線を他の曲線に正則性を保ちながら滑らかに変形できるとき二つの曲線は正則ホモトピックという．変形を与える写像 C を正則ホモトピーとよぶ．定義についてはプリントを確認すること．

   なお，回転数の一般パラメーターによる定義式を見れば，正則ホモトピーにおいて回転数は連続に変化することが分かる．しかし，整数値しかとらないので連続であることは一定であることを意味する．すなわち二つの正則閉曲線が正則ホモトピックであればその回転数は一致する．このことを回転数は「正則ホモトピー不変量」であるという．

   実はこの逆も成立する．実際問題 1.14 の一番目の曲線（回転数 1）が円周と正則ホモトピーであることを開設した．詳しくは次回にお話しする．

5. ユークリッドの合同変換について

   前回の講義で合同変換が $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表されることを紹介した．演習の時間にこの事実を解説した．解説した事項を箇条書きしておく．

   - 直交行列と直交群，$O(n), SO(n)$
   - 直交行列と正規直交基底
   - 直交行列による線形写像が内積を変えないこと
   - 2 次の直交行列
   - 合同変換 $F(\boldsymbol{x})$ について $G(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{0})$ が原点を固定する合同変換であること．
   - 原点を固定する合同変換は線形変換であること．特に内積を変えないので直交行列による線形変換であること．

   一つ一つ難しくはないので一度考えておくように．

本日のレポート課題とヒント

1. 問題 1.12

   回転数の一般パラメーターによる表示を使って計算すること．結果は 1 になる．なお，積分計算は大学 1 年次の微分積分で学習した手法を使う．適当な計算問題だ．

2. 問題 1.13

   向きを変える合同変換なので定理 1.6(3) で曲率は符号を変える．このことを意識すれば前半は簡単だ．レムニスケートは原点を中心に点対称な図形だ．形は原岡先生のテキストの 104 ページに記載されている．これを y 軸で線対称移動したときに向きを含めてどう対応するかを考えること．

幾何概論 II(10 月 17 日)

前回のレポート課題

- 問題 1.12 の解答例

  命題 1.9 の一般のパラメーターによる回転数の表示式を使えば

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

  である．楕円の対称性から曲率の積分はその第 1 象限の部分の積分値を 4 倍すればよい．$\tan t=u$ と置換積分する．

$$\int_0^{\pi/2}\frac{ab}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=\int_0^{\infty}\frac{ab}{a^2\frac{u^2}{1+u^2}+b^2\frac{1}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^{\infty}\frac{ab}{b^2+a^2u^2}du=\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

  4 倍すれば 2π なので回転数は 1 である．

  【コメント】 よくできていた．誤答例は置換積分において t の変化と u の変化の関係を考察していないものだ．これを考えれば，解答例のように一部の積分の定数倍にするか，積分域をいくつか（2 つあるいは 3 つ）に分けるかの工夫が必要だということに気づくだろう．

- 問題 1.13 の解答例

  $\boldsymbol{c}(s)$ の曲率を $\kappa(s)$，$F\circ\boldsymbol{c}(s)$ の曲率を $\bar{\kappa}(s)$ とおく．定理 1.6 より $\bar{\kappa}(s)=-\kappa(s)$ である．よって回転数について $m_{F\circ\boldsymbol{c}}=-m_{\boldsymbol{c}}$ が成り立つ．

  レムニスケートの右半分に θ が増大していく方向（反時計回り）に向きを入れると，左半分は θ が減少する方向（時計回り）に向きが入る．この曲線を弧長パラメーターにしたものを $\boldsymbol{c}(s)$ とおく．y 軸に関する線対称移動を F とすれば $F\circ\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{c}(s+a)$ が成り立つ．ここで a はレムニスケートの長さの半分（周期の半分）である．よって $\bar{\kappa}(s)=\kappa(s+a)$ であり

$$m_{F\circ\boldsymbol{c}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2a}\bar{\kappa}(s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2a}\kappa(s+a)ds=m_{\boldsymbol{c}}$$

  が成り立つ．一方前半の結果で $m_{F\circ\boldsymbol{c}}=-m_{\boldsymbol{c}}$ なので $m_{\boldsymbol{c}}=0$ を得る．

  【コメント】前半の証明は良くできていた．このような事実の証明は弧長パラメーターとして議論をすると分かりやすくなる．どんな曲線も弧長パラメーターにできるので，このようにとっても一般性を失わない．

  後半の部分ではレムニスケートの右半分の回転数を考えるという答案が多かった．しかし，右半分は原点で折れており閉曲線とは言わない．実際曲率の積分も

$$\int_0^a\kappa(s)ds=\theta(a)-\theta(0)=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

  であって 2π で割ると整数にならない．

本日の講義の要点

1. Whitney の定理（定理 1.10）

   二つの閉曲線が正則ホモトピックであれば回転数が等しいことは，回転数の一般パラメーターによる積分表示式と正則ホモトピックの定義を確認すれば納得できるはずだ．ここでは逆に回転数が等しければ正則ホモトピックであることを証明した．証明はおおむね次の 3 つのステップに分かれる．

- 準備

　まず回転数の等しい二つの閉曲線を，拡大・縮小と平行移動・回転によって，長さを 1 に，始点を原点に，始点での接ベクトルを $(1,0)$ になるようにする．これらの変形で得られる閉曲線はもとの閉曲線と正則ホモトピックなのでこのように設定しても差し支えない．

- ホモトピーの構成

　アイデアは $\boldsymbol{c}'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ の $\theta(s)$ を連続に変形していくことだ．ただし，それだけでは閉曲線にならないのでそのための工夫が必要になる．講義ノートを参照すること．

- ホモトピーの正則性

　構成された $C(u,s)$ が C^∞ 級であること，$\boldsymbol{c}_u(s) = C(u,s)$ が周期 1 であることは簡単にわかるが $\boldsymbol{c}_u$ が正則であることは別に示さなくてはならない．証明では大きさ 1 のベクトルを $[0,1]$ 区間上で積分したとき，大きさが 1 以下であること，1 に等しくなるのは定ベクトルの積分になっているときのみであることを使った．講義ではその証明を与えなかったがここで述べておく．

　命題 $f(u)$ を $[0,1]$ 区間上のベクトル値連続関数とする．

$$\left|\int_0^1 f(u)du\right| \leqq \int_0^1 |f(u)|du$$

　が成り立つ．等号は $f(u) = \lambda(u)\boldsymbol{e}$ で $\lambda(u)$ が定符号のときに限る．

　証明 $\int_0^1 f(u)du$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とおく．

$$\left|\int_0^1 f(u)du\right| = \left|\left(\int_0^1 f(u)du\right)\cdot\boldsymbol{e}\right| = \left|\int_0^1 f(u)\cdot\boldsymbol{e}du\right| \leqq \int_0^1 |f(u)\cdot\boldsymbol{e}|du \leqq \int_0^1 |f(u)|du$$

　第 1 の不等号が等号になるのは $f(u)\cdot\boldsymbol{e}$ が定符号の場合である．また第 2 の不等号が等号になるのは, すべての u について $f(u)$ が $\pm\boldsymbol{e}$ と平行になる場合，すなわち $f(u) = \lambda(u)\boldsymbol{e}$ とかける場合である．

　等号が成り立つ可能性を除去するために，$\boldsymbol{c}_1$ を正則ホモトピーで少し変形するという議論を使った．等号成立が $\theta_1(s)$ が $\theta_0(s)$ の定数倍になるという非常にきつい条件でしか成り立たないので，この議論で十分だということを納得してほしい．

2. 全曲率（定理 1.12）

　曲率の絶対値の積分を全曲率という．曲線がどの程度曲がりくねっているかを知る尺度といえる．閉曲線においてこれが 2π より大きいことを証明した．また，ちょうど 2π に等しくなる場合を考察した．

　なお，回転数が m のとき，全曲率は $2\pi|m|$ 以上になるので，等号が成り立つ可能性は $m = 0$ または $m = \pm 1$ の場合に限られる．結果として $m = 0$ では等が成り立たないことが興味深い．

3. 定理 1.12 の証明の補足

　回転数が ± 1 で，曲率の符号が一定である曲線が卵形線であることを証明の中で使ったがこの事実については講義ノートに記述されていない．これに関連して，卵形線でない単純閉曲線の曲率の符号が一定でないことを解説した．ただしこれでもまだ不十分だ．曲率の符号が一定で単純閉曲線でなければ回転数が 2 以上（あるいは -2 以下）であることを示す必要がある．これについては機会があれば解説しよう．

　数学で厳密な証明を与えるのは決してたやすいことではない．ただし，すべての論理をきちんと詰めなければ証明できたといわないのも事実だ．その意味でこの事実の証明は不完全だ．

4. 問題 1.15

複素関数論と曲線論を融合させた問題だ．ただし，複素関数論といっても，微分計算と留数定理をベースにした関数の零点の個数の表示のみ使う．計算方法を詳細に解説したので以下に掲げる式を参考にもう一度自分で考えてみてほしい．

$$\boldsymbol{c}(t) = f(e^{it}) = x(t) + iy(t), \quad \boldsymbol{c}'(t) = if'(e^{it})e^{it}, \quad \boldsymbol{c}''(t) = -f''(e^{it})e^{2it} - f'(e^{it})e^{it}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \boldsymbol{c}'\overline{\boldsymbol{c}'} = f'\overline{f'}, \quad x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \mathrm{Im}\boldsymbol{c}''\overline{\boldsymbol{c}'} = \mathrm{Re}(f''\overline{f'}e^{it}) + f'\overline{f'}$$

さらに $|z| < 1$ での $f'(z)$ の零点の個数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f''(z)}{f'(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f''(e^{it})}{f'(e^{it})}e^{it}dt$$

で与えられることを使う．

本日のレポート課題とヒント

今回はレポート課題は出題しない．講義で扱ったことの復讐をしておいてほしい．

幾何概論 II(10 月 24 日)

本日の講義の要点

1. 空間曲線の Frenet 枠，曲率，捩率

　弧長パラメーターによる表示を与えた．注意すべきは $\boldsymbol{C}''(s) \neq \boldsymbol{0}$ が仮定されていることだ．これは本質的な仮定で加速度が 0 になる曲線を扱うのは難しい．講義ではこの仮定をつけて議論を進めている．$\boldsymbol{C}''(a) = \boldsymbol{0}$ が成り立つときには曲率は $\kappa(a) = 0$ で良いが，$\boldsymbol{e}_2$ は定義できない．よって Frenet 枠や捩率も定義できない．

　この定義に関連して常螺旋の曲率・捩率を考えてもらった（問題 1.17）．弧長パラメーターに変換して定義にしたがって計算したが，定義を確認するための良い例と言える．

2. 曲率，捩率に関する二つの基本的定理（定理 1.13，1.14）

　曲率，捩率が等しい 2 本の曲線は向きを込めて合同であること，与えられた関数を曲率，捩率とする空間曲線が存在することの二つの事実を紹介した．証明は意外に易しい．理解できるまで考えてほしい．なお，定理 1.14 の証明では，$F(s)$ の第 1 列を積分して得られる空間曲線の Frenet 枠が $F(s)$ になることを述べなくてはならない．プリントではその記述はないが講義ではきちんと証明をつけている．

3. 一般のパラメーターによる表示

　空間曲線の Frenet 枠，曲率，捩率を一般のパラメーターで表示するのは難しい．講義では外積ベクトルの性質を活用して，できる限り簡単に計算できるように話を進めた．Frenet 枠の計算についても $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ の順に決定し $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$ を利用した．外積ベクトルの幾何学的意味を考えれば当たり前のことなので，分からない人は外積ベクトルの復習をしておいてほしい．

4. 捩率が常に 0 の曲線（問題 1.20）

　捩率の意味を理解するための問題だ．証明は講義で紹介したがここでも記述しておく．捩率が恒等的に 0 であれば $\boldsymbol{e}_3' = -\tau\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ になる．ゆえに $\boldsymbol{e}_3$ は定ベクトルである．$\boldsymbol{c}(s) \cdot \boldsymbol{e}_3$ の微分は 0 になるので $\boldsymbol{c}(s) \cdot \boldsymbol{e}_3$ は定数であり，この値を a とおけば曲線 $\boldsymbol{c}(s)$ は平面 $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{x} = a$ 上にある．

　逆に曲線が平面 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = a$ 上にあったとする．$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}(s) = a$ なので

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}'(s) = 0, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}''(s) = 0$$

を得る．ゆえに $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ はともに $\boldsymbol{b}$ に直交し，$\boldsymbol{e}_3$ の向きは $\boldsymbol{b}$ と同じか逆向きである．ゆえに $\boldsymbol{e}_3$ は定ベクトルであり，$\tau = 0$ を得る．

5. $\kappa = 0$ となる点がある曲線の例

　$\kappa > 0$ となる点で常に $\tau = 0$ であっても，$\kappa = 0$ となる点があると平面上の曲線にならない．そのような紹介した．

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{cases} (e^{-1/t}, 0, t) & (t > 0) \\ (0, 0, 0) & (t = 0) \\ (0, e^{1/t}, t) & (t < 0) \end{cases}$$

10 月 3 日の講義で紹介したように $\boldsymbol{c}(t)$ の各成分は C^∞ 級である（講義メモ 6）．$t > 0$ の部分は xz 平面上になるので捩率は 0 である．$t < 0$ の部分も同様に捩率 0 である．しかし，曲線全体は平面上にはない．また $\boldsymbol{c}''(0) = \boldsymbol{0}$ であり曲率は $t = 0$ で 0 になる．

本日のレポート課題とヒント

- 問題 1.16

  まず，平行移動で $\bar{\boldsymbol{c}}(0)$ を $\boldsymbol{c}(0)$ に重ねる．次に $\boldsymbol{c}(0)$ を中心とする回転で $\bar{\boldsymbol{c}}'(0)$ を $\boldsymbol{c}'(0)$ に，$\bar{\boldsymbol{c}}''(0)$ を $\boldsymbol{c}''(0)$ に重ねる．これによって二つの曲線の Frenet 枠は $s = 0$ で一致する．

  以後の議論はプリント 3 ページの定理 1.7 の証明と同じである．これを参考に取り組んでみるように．

- 問題 119

  一般パラメーターによる曲率，捩率の表示を用いる．単なる計算問題.

幾何概論 II(10 月 31 日)

前回のレポート課題

- 問題 1.16

【解答例】曲率捩率が等しい 2 つの空間曲線が向きを込めて合同であること

まず，平行移動で $\bar{\boldsymbol{c}}(0)$ を $\boldsymbol{c}(0)$ に重ねる．次に $\boldsymbol{c}(0)$ を中心とする回転で $\bar{\boldsymbol{c}}'(0)$ を $\boldsymbol{c}'(0)$ に， $\bar{\boldsymbol{c}}''(0)$ を $\boldsymbol{c}''(0)$ に重ねる．これは，どちらの曲線も弧長パラメーターで表示しているので，速度ベクトルの大きさは 1，加速度ベクトルは速度ベクトルに直交すること，さらに曲率が等しいので加速度ベクトルの大きいさも等しいことから可能であることが分かる．

このように重ねたとき Frenet 枠の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $s = 0$ で一致する．$\boldsymbol{e}_3$ はこの 2 つの外積なのでやはり一致し

$$F(s) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1(s) & \boldsymbol{e}_2(s) & \boldsymbol{e}_3(s)\end{pmatrix}, \quad \bar{F}(s) = \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1(s) & \bar{\boldsymbol{e}}_2(s) & \bar{\boldsymbol{e}}_3(s)\end{pmatrix}$$

について $F(0) = \bar{F}(0)$ が成り立つ．曲率と捩率が一致することから

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

によって $F'(s) = F(s)K(s)$, $\bar{F}'(s) = \bar{F}(s)K(s)$ が成り立つ．

$$\left(F(s)^t\bar{F}(s)\right)' = F'(s)^t\bar{F}(s) + F(s)^t\bar{F}'(s) = F(s)K(s)^t\bar{F}(s) + F(s)^tK(s)^t\bar{F}(s) = F(s)\left(K(s) +^t K(s)\right)^t\bar{F}(s) = O$$

より $F(s)^t\bar{F}(s) = F(0)^t\bar{F}(0) = E$ を得る．$\bar{F}(s)$ は直交行列なので $F(s) = \bar{F}(s)$ が成り立つ．第 1 列に着目すれば $\boldsymbol{c}'(s) = \bar{\boldsymbol{c}}'(s)$ であり，$s = 0$ で一致することにより $\boldsymbol{c}(s) = \bar{\boldsymbol{c}}(s)$ が成り立つ．ゆえに二つの曲線は完全に一致する．結局，最初の平行移動と回転（向きを保つ合同変換）で二つの曲線は重なり，向きを込めて合同である．

【解答例】 向きを込めて合同な二つの空間曲線の曲率捩率が等しいこと

向きを保つ合同変換を $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ とおく．ここで A は行列式 1 の直交行列である．弧長パラメーター空間曲線 $\boldsymbol{c}(s)$ について

$$\bar{\boldsymbol{c}}(s) = \varphi(\boldsymbol{c}(s)) = A\boldsymbol{c}(s) + \boldsymbol{b}$$

とおき Frenet 枠を求めれば

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{c}'(s) = A\boldsymbol{e}_1, \quad \bar{\boldsymbol{e}}'(s) = A\boldsymbol{c}''(s) = A\boldsymbol{e}_1' = \kappa A\boldsymbol{e}_2$$

より $\bar{\boldsymbol{e}}_2 = A\boldsymbol{e}_2$ と曲率 κ が等しいことが分かる．A が行列式が 1 の直交行列であることから，A は正の向きの正規直交基底をやはり正の向きの正規直交基底に移す．よって

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 \times \bar{\boldsymbol{e}}_2 = (A\boldsymbol{e}_1) \times (A\boldsymbol{e}_2) = A(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)$$

が成り立ち $\bar{\boldsymbol{e}}_3 = A\boldsymbol{e}_3$ を得る．

$$\bar{\boldsymbol{e}}_3' = A\boldsymbol{e}_3' = -\tau A\boldsymbol{e}_2 = -\tau\bar{\boldsymbol{e}}_2$$

であり，捩率 τ も一致する．

【コメント】

- 前半の解答のみが多かったが，それでも本質的な部分は OK だ．後半の証明は読んでおいてほしい．なお，解答例では何故向きを保つ合同変換で重ねられるのか，何故 $F(0) = \bar{F}(0)$ なのかにも言及している．この部分も理解してほしい．
- 議論のポイントは $F(s) = \bar{F}(s)$ を言うことと，そこから $\boldsymbol{c}'(s) = \bar{\boldsymbol{c}}'(s)$ を導くこと，そして $\boldsymbol{c}(0) = \bar{\boldsymbol{c}}(0)$ を合わせて $\boldsymbol{c}(s) = \bar{\boldsymbol{c}}(s)$ を結論付けることだ．不十分な答案にはチェックを入れておいた．なお $\boldsymbol{c}''(s) = \bar{\boldsymbol{c}}''(s)$ は使わないので言及する必要はない．必要のないことは書かないのが基本だ．
- この問題ではベクトル，行列，スカラーを同時に扱う．今，何を扱っているかを確認するためにも記号の使い分けはきちんとしてほしい．$F(s)^t\bar{F}(s)$ は定数と言われると首をかしげざるを得ない．

• 問題 1.19

問題 1.18 の結果を使えば単なる計算問題だ．特にコメントはない．

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ ct \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \\ c \end{pmatrix},\ \ddot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{c}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} bc\sin t \\ -ac\cos t \\ ab \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} a\sin t \\ -b\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\kappa = \frac{|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{c}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{c}}(t)|^3} = \frac{(b^2c^2\sin^2 t + a^2c^2\cos^2 t + a^2b^2)^{1/2}}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + c^2)^{3/2}}$$

$$\tau = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{c}^{(3)})}{|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{c}}(t)|^2} = \frac{abc}{b^2c^2\sin^2 t + a^2c^2\cos^2 t + a^2b^2}$$

本日の講義の要点

1. 曲面の定義

曲面は空間内の図形として周知のものとしてよい．しかし，微分幾何の手法を使うためにはパラメーターを使って表示しなくてはならない．このパラメーターは平面から空間への写像だが曲面の上の（局所的な）座標と思ってよい．例えば地球上の緯度・経度は，二つのパラメーターから地球上の点を定めるという写像だが，地球上の点の座標と思うほうが自然だろう．

- $\{\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\}$ が一次独立であること．これによって曲面の滑らかさが保障される．
- 座標変換 $\boldsymbol{p}(s,t) = \boldsymbol{p}(u(s,t), v(s,t))$ はヤコビアンが 0 でないという条件で理解できる．

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \neq 0$$

ヤコビアンが 0 でないとき，(s,t) は（局所的に）(u,v) の滑らかな関数として記述される．これを逆写像定理という．解析学の基本的定理だ．

2. 接平面

接平面は図形としてとらえるのではなく曲面上の点 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})$ を始点とする曲面に接するベクトルのなす線形空間として理解すること．始点は固定しているので平行なベクトルは同じベクトルという同一視は行わない．

局所座標によって接平面の基底 $\{\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\}$ が決まる．座標変換は基底の変換

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_s & \boldsymbol{p}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

を引き起こす．ここで両辺は 3×2 型の行列である．

3. 第 1 基本形式

空間の内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ を接平面に制限したものを第 1 基本形式と呼ぶ．第 1 基本形式の基底 $\{\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\}$ に関する表現行列は

$$ {}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} $$

で与えられる．座標変換による表現行列の変換は，表現行列の表示と基底の変換を結び付ければよい．問題 2.1 は簡単に確認できる．

第 1 基本形式については

$$ I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 $$

という表示を使う．便利な表示ではあるが意味はあまり考えないように．

4. 第 1 基本形式の定める量

第 1 基本形式は空間の内積の制限なので，そこから定まるベクトルの大きさや角度は空間ベクトルとしての大きさや角度と変わらない．曲線の長さも本質的に第 1 章の定義と同じである．面積要素については曲面の面積を重積分の考えで求めるにはどうしたらよいかを考えれば理解できる．$\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{p}_v$ の作る平行四辺形の面積が $\sqrt{EG - F^2}$ であることが要点だ．

座標変換で面積要素が不変なこと（問題 2.2）も解説した．問題 2.1 と 1 年次の微分積分で学習した積分要素の変換を組み合わせるだけだ．

柱面の第 1 基本形式は平面と同じである．これはシールをしわがよることなく張ることができることに対応する．柱面の中でくらす 2 次元的生物にとって，その世界が柱面か平面かを判断することはできない．第 1 基本形式は曲面の内部の情報を記述するのであり，外部の世界の中でどのように曲がっているのかを記述しない．それは次節で扱う第 2 基本形式の役割である．

5. 2 次形式

第 2 基本形式を導入する準備として 2 次形式についての基本事項を整理しておいた．内積 g に関する 2 次形式 ρ の固有値・固有ベクトルが，対称行列の固有値・固有ベクトルを使って理解できる．基底に関する g, ρ の表現行列を G, A とするとき

- 固有値は $|A - \lambda G| = 0$ の解である．この解はすべて実数である．
- 固有値 α について $(A - \alpha G)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす 0 でない数ベクトル $\boldsymbol{p}$ をとり，これに対応する V のベクトルを $\vec{p}$ とおけば

  $$ \rho(\vec{p}, \vec{p}) = {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} = \alpha\, {}^t\boldsymbol{p}G\boldsymbol{p} = \alpha g(\vec{p}, \vec{p}) $$

  この $\vec{p}$ を 固有値 α に対する固有ベクトルと呼ぶ．
- 最大固有値を M，最小固有値を m とすれば

  $$ mg(\vec{p}, \vec{p}) \leqq \rho(\vec{p}, \vec{p}) \leqq Mg(\vec{p}, \vec{p}) $$

  が成り立つ．等号はそれぞれの固有ベクトルについて成立する．

本日のレポート課題とヒント

次回 11 月 7 日は第 1 章の試験を行うので今回のレポート課題は出題しない．

幾何概論 II(11 月 7 日)

本日の講義の要点

1. 単位法線ベクトル
   曲面 S を $\boldsymbol{p}(u,v)$ で表すとき $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ と表し，単位法線ベクトルと呼ぶ．方向はパラメーターの取り方で変わる．
2. 法曲率
   $\boldsymbol{a} \in S$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{a}}S$ $|\boldsymbol{v}| = 1$ について，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}$ の張る平面を法平面と呼ぶ．法平面と曲面の交わりの作る平面曲線の曲率を法曲率と呼ぶ．ただし，曲率の正負は $\boldsymbol{e}$ の方向に曲がっている時を正とする．
   講義ではプリントにしたがって曲面上の曲線の測地的曲率ベクトルと法曲率ベクトルを導入したがこの段階では無視してもよい．上のような理解が適切だと思う．
3. 第 2 基本形式
   パラメーターを使って法曲率を計算すると，2 次形式になることが分かる．これを第 2 基本形式と呼ぶ．単位ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{a}}S$ について $II(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ が法曲率である．
4. 主曲率と主方向
   第 2 基本形式の第 1 基本形式に関する固有値，固有ベクトル方向を主曲率，主方向と呼ぶ．パラメーターによる表現行列はそれぞれ第 1 基本量，第 2 基本量で与えられるので前回学習した事実によって計算できる．
5. Euler の公式（定理 2.8）
   プリントの証明は本質が見えないので講義で解説した証明のポイントを箇条書きしておく．
   - 主曲率 κ とその主方向のベクトル $\boldsymbol{v}$ について
     $$II(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = \kappa I(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$$
     がすべての $\boldsymbol{w} \in T_{\boldsymbol{a}}S$ について成り立つ．証明はパラメーターによる表示を使って計算することによる．
   - 第 2 基本形式が異なる主曲率を持つとき，2 つの主方向は直交する．
     主曲率を κ_1, κ_2 とし，それぞれの主方向の単位ベクトルを X_1, X_2 とおく．
     $$II(X_1,X_2) = \kappa_2 I(X_1,X_2) = II(X_2,X_1) = \kappa_1 I(X_2,X_1)$$
     と $\kappa_1 \neq \kappa_2$, $I(X_1,X_2) = I(X_2,X_1)$ より $I(X_1,X_2) = 0$ を得る．
   - $X(\theta) = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ とおけば II が 2 次形式であることから Euler の公式を得る．
   - 主曲率が重複するときは $II = \kappa I$ が成り立つ（このことの証明は与えていない）．全ての法曲率は κ であり，形式的に Euler の公式が成立していることが分かる．
6. Gauss 曲率と平均曲率
   主曲率の積を Gauss 曲率，平均を平均曲率と呼ぶ．これは第 1 基本量と第 2 基本量を使って定義 2.9 のように表示される．Euler の公式を使えば，Gauss 曲率の正負と曲面の形状についての理解ができる．

前回と今回で曲面についての基本的量を定義した．次回は具体的例による計算を行うとともに，曲率についての考えを深めていく．

幾何概論 II(11 月 14 日)

本日の講義の要点

1. 答案返却
2. パラメーターの変換と第 2 基本量（問題 2.8）

   座標変換は接平面の基底の変換を引き起こす．その時の第 2 基本量の変換は，基底の変換による 2 次形式の表現行列と同じはずだが，それを第 2 基本量の定義に基づいて直接確認した．

   なお，向きを保つパラメーター変換はヤコビアンが正として定義される．そのとき単位法線ベクトルの向きが変わらないことを外積の性質に基づいて解説した．プリントに記述していないのでここに書いておく．

   $$\boldsymbol{p}_s \times \boldsymbol{p}_t = (\boldsymbol{p}_u u_s + \boldsymbol{p}_v v_s) \times (\boldsymbol{p}_u u_t + \boldsymbol{p}_v v_t) = (u_s v_t - u_t v_s)\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

3. 極小曲面

   平均曲率が 0 である曲面を極小曲面という．ここでは平均曲率が 0 でない点があれば，曲面の微小変形で面積をより小さくできることを解説した．

   - 証明の冒頭の $\lambda(u, v)$ の構成

     10 月 3 日の演習の時間に解説した $C\infty$ 級関数（講義メモ参照）を利用して

     $$\varphi(0) = 1,\ 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1,\ |x| > a \Longrightarrow \varphi(x) = 0$$

     を満たす関数を構成した．具体的にどのような式になるかは書き下す必要はない．このような関数が作れるということだけ理解してほしい．なお，ここで a は任意に取れることも理解しておくこと．この $\varphi(x)$ によって $\lambda(u, v) = \varphi(u)\varphi(v)$ とおけば求める関数が得られる．
   - $\boldsymbol{a}$ の周りでの曲面の微小変形

     $\boldsymbol{p}(u, v), \boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}(0, 0)$ について

     $$\boldsymbol{p}_s = \boldsymbol{p} + s\lambda H\boldsymbol{e}$$

     とおく．λ の定義からこれは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}(0, 0)$ の周りで微小変形したことになる．これを u, v で偏微分すれば

     $$(\boldsymbol{p}_s)_u = \boldsymbol{p}_u + s(\lambda H)_u\boldsymbol{e} + s\lambda H\boldsymbol{e}_u, \quad (\boldsymbol{p}_s)_v = \boldsymbol{p}_v + s(\lambda H)_v\boldsymbol{e} + s\lambda H\boldsymbol{e}_v$$

     よって $\boldsymbol{p}_s$ の第 1 基本量は

     $$E_s = E - 2s\lambda HL + O(s^2), \quad F_s = F - 2s\lambda HM + O(s^2), \quad G_s = G - 2s\lambda HN + O(s^2)$$

     となる．ここで $\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0,\ \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = -L$ 等の式を使っている．また s^2 以上の式はすべて $O(s^2)$ に押し込み，具体的な計算は省略する．なお，この式も含めて以下の式のプリントでの記述には間違いがある．この講義メモ（講義で解説した通り）が正しい計算式だ．

     $$E_sG_s - (F_s)^2 = EG - F^2 - 2s\lambda H(LG + NE - 2FM) + O(s^2) = (EG - F^2)\left(1 - 4s\lambda H^2 + O(s^2)\right)$$

     と $\sqrt{1 + x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + O(x^2)$ を使えば

     $$\sqrt{E_sG_s - (F_s)^2} = \sqrt{EG - F^2}\left(1 - 2s\lambda H^2 + O(s^2)\right)$$

を得るので $\boldsymbol{p}$ の面積と $\boldsymbol{p}_2$ の面積の差は

$$\iint_D 2s\lambda H^2 dudv + O(s^2)$$

で求められる．なお，λ は $(0,0)$ の近傍を除いて 0 なので，第 1 項の s の係数は正である．ゆえに十分小さな正の s について $\boldsymbol{p}_s$ の面積は $\boldsymbol{p}$ の面積より小さくなることが分かる．

4. ガウス写像

曲面 S とその単位法線ベクトル $\boldsymbol{e} \in S^2$ の対応をガウス写像と呼ぶ．球面 S^2 の $\boldsymbol{e}$ における接平面は $\boldsymbol{e}$ に直交する平面なので，接平面 $T_{\boldsymbol{a}}S$ と平行になる．そのため，ガウス写像による二つの接平面の対応は，$T_{\boldsymbol{a}}S$ の線形変換になる．基底に $\{\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\}$ についての対応は

$$\boldsymbol{p}_u \mapsto \boldsymbol{e}_u = a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v, \quad \boldsymbol{p}_v \mapsto \boldsymbol{e}_v = c\boldsymbol{p}_u + d\boldsymbol{p}_v$$

と書けるので（両辺は 3×2 型行列）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

この両辺に ${}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u & \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix}$ をかければ

$$\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

となるのでガウス写像による接平面の変換を表す行列は

$$-\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

この線形変換の -1 倍を型作用素と呼ぶがこれについては次回もう一度解説する．

本日のレポート課題とヒント

問題 2.7 と問題 2.12 を課題にする．問題 2.7 については，1 年次で扱った 2 変数関数のグラフとして定義された曲面積の求め方の再発見である．$\boldsymbol{p}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ と考えて第 1 基本形式を求めればよい．

問題 2.12 については $\boldsymbol{e}$ が定ベクトルになることすなわち $\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{0}$ を示すことが要点である．$K = H = 0$ から第 2 基本形式が 0 になることを言えば，$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = -L$ などから示せるだろう．なお，平面上にあることを示すには，捩率が 0 に曲線が平面上にあることを示した時の方法を参考にしてほしい．

幾何概論 II(11 月 21 日)

前回のレポート課題

問題 2.7　【解答例】　$\boldsymbol{p}(u,v)=(u,v,f(u,v)$ とすれば

$$\boldsymbol{p}_u=\begin{pmatrix}1\\0\\f_u\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_v=\begin{pmatrix}0\\1\\f_v\end{pmatrix}$$

より $E=1+(f_u)^2,\ F=f_uf_v,\ G=1+(f_v)^2$ なので

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}$$

【コメント】

- 簡単な計算問題．なお，この結果からグラフで定義される曲面において面積要素は
$$\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}dudv$$
である．これは 1 年次の微分積分 II で学習したグラフによる曲面の曲面積を求める公式と一致する．

問題 2.12　【解答例】　ガウス曲率と平均曲率がともに 0 であれば主曲率は二つとも 0 である．ゆえに Euler の公式から法曲率は常に 0 であり，$L=M=N=0$ が成り立つ．

$$\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{p}_u=-L=0,\ \boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{p}_v=-M=0$$

である．また $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=1$ より

$$\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}=0$$

である．$\boldsymbol{e}_u$ は基底 $\{\boldsymbol{p}_u,\ \boldsymbol{p}_v,\ \boldsymbol{e}\}$ のすべてのベクトルと直交するので $\boldsymbol{e}_u=\boldsymbol{0}$ が成り立つ．同様な議論で $\boldsymbol{e}_v=\boldsymbol{0}$ も成り立つので $\boldsymbol{e}$ は定ベクトルである．

$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}=0$ を u で偏微分すれば $\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}=0$ となる．同様に v で偏微分しても 0 になるので $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}$ は一定でありこの値を a とおく．曲面は平面 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}=a$ の上にある．

【コメント】

- $f_u=f_v=0$ から f が一定になることは偏微分方程式の基本であるが，証明も簡単だ．自分で証明をつけてみるとよい．
- $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$ のとき
$$\begin{pmatrix}L & M\\M & N\end{pmatrix}-\kappa\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$
が成り立つことを使う解答があるが，この等式は講義では扱っていない．使う場合には証明をつけるべきだ．例えば

  主曲率は第 2 基本形式の第 1 基本形式に関する固有値なので，第 1 基本形式に関する正規直交基底で表現すれば対称行列の固有値になる．ゆえに，対角化可能であり，固有値が一致する場合はスカラー行列になる．この基底に関して，第 2 基本形式の表現行列は第 1 基本形式の表現行列（単位行列）の κ 倍である．

  一般の基底に関してはそれぞれが ${}^tP,\ P$ を左，右からかけた形に変換されるので κ 倍であるという関係は変わらない．ゆえに第 2 基本形式の表現行列は第 1 基本形式の表現行列の κ 倍になる．

- $(\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v) \cdot \boldsymbol{e}_u = 0$ を使う答案があるが何故この式が成り立つか理解しているだろうか．これを $\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = 0$ だからと考えているのなら完全な間違いだ．正しい式だが理由が示されていなければ正解とは扱えない．

  これは $\boldsymbol{e}_u$ が平面に接すること（これは講義で解説した），外積が 2 つのベクトルの生成する平面（この場合は接平面）に直交することから示される．
- 内積であることを認識しているとは思えない答案が目立つ．下に実際見かけた例をあげておくので心当たりのある人は反省するように．記号が何かを考えずに問題が解けるはずがない．なお内積の記号（この講義では $\cdot$）を省略している答案も目立つ．
  - $(\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u)(\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v) = \boldsymbol{p}_u\boldsymbol{p}_v\boldsymbol{e}_u\boldsymbol{e}_v$
  - $\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = 0$ と $\boldsymbol{p}_u \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{e}$ が一定であることから平面の一部であることが証明できるがこれも説明を要する．解答例を参照せよ．

本日の講義の要点

1. 型作用素

   p.14 で型作用素を定義した．これは前回解説したガウス写像の微分の -1 倍なので局所座標によらずに定められる．型作用素と第 2 基本形式には命題 2.1 で記述した関係がある．主曲率や主方向を，第 2 基本形式の第 1 基本形式に関する固有値，固有ベクトルとしてではなく一つの線形写像の固有値，固有ベクトルとして理解できる．
2. 臍点とそれに関連する話題

   二つの主曲率が等しい点を臍点とよぶ．命題 2.13 は臍点で第 2 基本形式が第 1 基本形式の定数倍になることをいう．これは問題 2.12（前回のレポート課題）に対するコメントでも説明している．このとき型作用素はスカラー行列になる．これを出発点に定理 2.14（すべての点が臍点になる曲面は平面・球面に限られること）を証明した．直感では理解できない事実だが，証明はそれほど難しくはない．きちんと考えておくように．
3. 漸近方向

   法曲率が 0 になる方向を漸近方向という．これは Euler の公式を使うと分かりやすい．命題 2.15 も自然に理解できるだろう．漸近方向に関連して，線織面（直線の属で作られる曲面）のガウス曲率が非正であることをコメントした．線織面の直線の方向が漸近方向になるからで，法曲率の意味（法平面との切り口の曲線の曲率）を考えれば簡単に理解できるはずだ．
4. 回転面と定曲率曲面

   問題 2.13 の回転面についてガウス曲率が $-f''/f$ になることは簡単に証明できる．ゆえに定曲率曲面は $f'' = -cf$ の解によって表示できる．この微分方程式は簡単にとけるが $g' = \sqrt{1-(f')^2}$ を解かなくてはいけないので，ごく特殊な形を除いて，曲線を具体的な関数によって表示することはできない．そこで導関数による関数の挙動の分析が必要になる．

   $c = 0$ の場合は $f(u)$ は一次式になる．そのため $g(u)$ も一次式になり，回転面の母線は直線である．結局，円柱か円錐になることが分かる．

   $c = 1$ の場合は必要ならパラメーターのずらしによって $f(u) = k\cos u$ としてよい．$k = 1$ の場合は球

面になる．$k>1$ の場合は,

$$x=f(u)=k\cos u,\qquad z=g(u)=\int_0^u\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

だが u の動く範囲は $|u|\leqq\sin^{-1}(1/k)$ である．母線は z 軸から離れており，回転面には穴が開いている．$k<1$ の場合は母線は z 軸に到達しており，回転面は両端でとがっている．分かりづらい議論なので，すっきりした理解には至らなかったと思うが，正の定曲率の回転面は球面とは限らないことを意識してほしい．

$c=-1$ の場合は一般的な考察はしなかった．具体的解として

$$x=f(u)=e^{-u},\qquad z=g(u)=\int_0^u\sqrt{1-e^{-2t}}dt$$

を紹介し，この曲線の接線の接点から z 軸との交点までの距離が常に 1 であることを証明した．このような曲線を追跡線，これを回転した曲面を擬球面と呼ぶ．

5. 回転面と極小曲面

問題 2.13 と同じ設定で平均曲率 H の分子は

$$EN+LG-2FM=fg'+(f'g''-g'f'')f^2$$

となる．極小曲面はこれが 0 になることによって定義される．この式に g'/f をかけ，$(g')^2=1-(f')^2$ と $g'g''=-f'f''$ を使えば f だけの式になる．極小曲面であるための条件は

$$(1-(f')^2)+f'f(-f'f'')-(1-(f')^2)f''f=1-(f')^2-ff''=0$$

となる．ゆえに $(ff')'=(f')^2+ff''=1$ であり，$ff'=u+c$ を得る．パラメーターをずらしても曲面は変わらないので $ff'=u$ として差し支えない．

次に $(f^2)'=2ff'=2u$ なので $f^2=u^2+c$ を得る．ここで $c=1$ としよう．

$$f(u)=\sqrt{u^2+1},\ g(u)=\int_0^u\sqrt{1-(f'(t))^2}dt=\int_0^u\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=\log(u+\sqrt{1+u^2})$$

の回転面が極小曲面になる．この曲線は問題 1.3 の懸垂線になっている．計算で確かめてみるとよい．

この解説が準備不足で尻切れトンボになってしまった．申し訳ない．

本日のレポート課題とヒント

問題 2.9 と問題 2.18 をレポート課題にする．問題 2.9 については $\boldsymbol{q}(u,v)=c\boldsymbol{p}(u,v)$ と表示すると分かりやすいかもしれない．$\boldsymbol{p}$ の第 1 基本量，第 2 基本量と，$\boldsymbol{q}$ の第 1 基本量，第 2 基本量を比較してみるとよい．

問題 2.18 についてはいろいろな証明法があるが，ここでは型作用素と第 2 基本形式の関係（命題 2.12）と，主方向が型作用素の固有ベクトルであることを利用して証明してほしい．対称行列の固有ベクトルが直交することの証明（線形代数のテキストに書いてある）が参考になるはずだ．

幾何概論 II(11 月 28 日)

前回のレポート課題

問題 2.9 【解答例】 c 倍に拡大した曲面を $\boldsymbol{q}(u,v) = c\boldsymbol{p}(u,v)$ とおけば

$$\boldsymbol{q}_u = c\boldsymbol{p}_u, \quad \boldsymbol{q}_v = c\boldsymbol{p}_v$$

であり，これから第 1 基本量はそれぞれ c^2 倍になることが分かる．一方，$\boldsymbol{q}_u \times \boldsymbol{q}_v = c^2\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ なので単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}$ は変わらない．また $\boldsymbol{q}_{uu} = c\boldsymbol{p}_{uu}$ なので第 2 基本量はそれぞれ c 倍になる．

ガウス曲率 $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$ より分母は c^4 倍，分子は c^2 倍になるので $\boldsymbol{q}$ のガウス曲率は K/c^2 になる．平均曲率 $H = \dfrac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$ より分母は c^4 倍，分子は c^3 倍になるので $\boldsymbol{q}$ の平均曲率は H/c になる．

【コメント】

- 簡単な問題でありよくできていた．ただ，単位法線ベクトルが変わらないことについてもきちんと述べる必要がある．それによってはじめて第 2 基本量の関係が分かる．

問題 2.18 【解答例】 主曲率を κ_1, κ_2 とおき，それぞれの主方向を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とおく．主方向は型作用素の固有ベクトルなので

$$A(\boldsymbol{x}) = \kappa_1\boldsymbol{x}, \quad A(\boldsymbol{y}) = \kappa_2\boldsymbol{y}$$

が成り立つ．命題 2.12(1) を使って

$$\mathrm{II}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{I}(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = \kappa_1\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

を得る．一方，第 2 基本形式は対称なのでこの値は

$$\mathrm{II}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \mathrm{I}(A(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = \kappa_2\mathrm{I}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

とも等しい．第 1 基本形式の対称性を使って

$$\kappa_1\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \kappa_2\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

を得るが，$\kappa_1 \neq \kappa_2$ なので $\mathrm{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である．すなわち主方向は直交する．

【コメント】

- $\mathrm{I}(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = \mathrm{I}(\boldsymbol{x}, A(\boldsymbol{y}))$ が成り立つことは I と II の対称性から簡単に導ける．成分を使った解答も多いが，こういう答え方も理解してほしい．
- II の表現行列は対称行列だが，主曲率・主方向と固有値・固有ベクトルが一致するのは I に関する正規直交基底によって表示した場合だ．その場合に限定せずに対称行列の固有ベクトルは直交するからとするのは間違いだ．
- A は接平面の線形変換であり行列ではない．転置行列 ${}^tA$ は素朴な意味では定義されない．また A の表現行列は対称行列とは限らない．一般に A が対称行列であっても $P^{-1}AP$ は対称行列にならない．

本日の講義の要点

1. 第 2 章の問題のおさらい

   来週が試験のため，やり残した問題をいくつか解説した．また，回転面が極小曲面になる場合を解説した．前回の講義メモも参考にしてほしい．

2. Gauss の公式，Weingarten の公式

具体的内容に入る前に記号の使い方を整理した．添え字の扱いによって複雑な計算過程が見通し良くなるので，記号に早く慣れてほしい．

- $\{\boldsymbol{p}_{/1}, \boldsymbol{p}_{/2}\}$ は接平面の基底であり，$\{\boldsymbol{p}_{/1}, \boldsymbol{p}_{/2}, \boldsymbol{e}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．そこで $\boldsymbol{p}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ と $\boldsymbol{e}_j$ を基底の一次結合で表すのが Gauss の公式と Weingarten の公式である．
- 証明は $\boldsymbol{p}_{/ij}$ と $\boldsymbol{e}_{/i}$ について基底のそれぞれのベクトルとの内積をとることで行う．まず，

$$\boldsymbol{p}_{/ij} \cdot \boldsymbol{e} = h_{ij}, \quad \boldsymbol{e}_{/i} \cdot \boldsymbol{p}_{/j} = -h_{ij}, \quad \boldsymbol{e}_{/j} \cdot \boldsymbol{e} = 0$$

は h_{ij} の定義式及びすでに扱った式である．残された式は

$$g_{ij/k} = \boldsymbol{p}_{/ik} \cdot \boldsymbol{p}_{/j} + \boldsymbol{p}_{/i} \cdot \boldsymbol{p}_{/jk}$$

を使って $g_{jk/i} + g_{ki/j} - g_{ij/k}$ を計算すればよい．
- 基底との内積が求められたので，あとは未定係数法（係数を文字でおいて連立方程式に帰着する方法）で係数を決定すればよい．連立方程式の係数が g_{ij} になるので逆行列 g^{ij} をかけることになる．補題 3.2 も参考にしてほしい．

この証明から Christoffel の記号は自然に登場する．プリントでは天下り式に定義したが，この考え方のほうが理解が深まるだろう．

3. Gauss の方程式，Codazzi-Minardi の方程式

$\boldsymbol{p}_{/ijk}$ を基底 $\{\boldsymbol{p}_{/1}, \boldsymbol{p}_{/2}, \boldsymbol{e}\}$ によって記述すれば

$$\boldsymbol{p}_{/ijk} = \sum_l \left(\Gamma^l_{ij/k} + \sum_m \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - \sum_m h_{ij} g^{lm} h_{mk} \right) \boldsymbol{p}_{/l} + \left(h_{ij/k} + \sum_m \Gamma^m_{ij} h_{mk} \right) \boldsymbol{e}$$

ここで $\boldsymbol{p}_{/ijk} = \boldsymbol{p}_{/ikj}$ を使えば $\boldsymbol{e}$ の係数から Codazzi-Minardi の方程式が得られる．$\boldsymbol{p}_{/l}$ の係数に g_{ml} をかけ，l で和をとれば Gauss の方程式が得られる．

計算は煩雑であるが，計算の方針は明快である．また係数から自然に曲率テンソルが登場するのも面白い．

4. Gauss の驚異の定理

Gauss の方程式から $R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \det h$ となるので，定理は簡単に得られる．しかし，その意味するところはまさに「驚異」に値する．$\mathbb{R}^3$ での曲がり具合を記述するものが第 2 基本形式だったが，ガウス曲率はそれに依存しないことが示されたのだ．

5. 曲面論の基本定理

$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{/1} & \boldsymbol{p}_{/2} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix}$ とおくと，Gauss の公式と Weingarten の公式は

$$X_{/1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{/11} & \boldsymbol{p}_{/21} & \boldsymbol{e}_{/1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{/1} & \boldsymbol{p}_{/2} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{21} & -\sum g^{1k}h_{k1} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{21} & -\sum g^{2k}h_{k1} \\ h_{11} & h_{21} & 0 \end{pmatrix} = XD$$

$$X_{/2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{/12} & \boldsymbol{p}_{/22} & \boldsymbol{e}_{/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{/1} & \boldsymbol{p}_{/2} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -\sum g^{1k}h_{k2} \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -\sum g^{2k}h_{k2} \\ h_{12} & h_{22} & 0 \end{pmatrix} = XE$$

となる．行列 D, E は内積 g と 2 次形式 h で決まるので，与えられた g, h についてこれは X に関する 1 階線形偏微分方程式である．この積分可能条件は $X_{/12} = X_{/21}$ が成り立つための条件

$$ED + D_{/2} = DE + E_{/1}, \qquad DE - ED = D_{/2} - E_{/1}$$

である．これは Gauss の方程式と Coddazi-Minardi の方程式なので，定理 3.6 の曲面論の基本定理が成り立つ．

6. 問題 3.1 と問題 3.2

　第 1 基本形式から Gauss 曲率が決まるがその計算は一般には難しい．第 1 基本形式が簡単な形をしている場合にその計算を行った．問題 3.2 は途中までしかしていないが，自分でやってみてほしい．

本日のレポート課題とヒント

来週が試験なのでレポート課題はありません．

幾何概論 II(12 月 5 日)

本日の講義の要点

1. 共変微分

   曲面上の曲線 $\gamma(t)$ について γ に沿ったベクトル場 X について t による共変微分 $\frac{D}{dt}X$ を定義した．定義は $X(t)$ を $\mathbb{R}^3$ のベクトルと思った時の微分 $\frac{d}{dt}X$ の接成分（接平面への直交射影）であるが，パラメーターに関してガウスの公式を利用すると定義 3.8 のクリストッフェルの記号を利用した定義式を得る．これから共変微分が第 1 基本形式にしかよらないことが分かる．

   共変微分について命題 3.9 が成り立つ．本質的には積の微分法則に過ぎないので理解しやすいだろう．

2. 平行ベクトル場，測地線

   平行ベクトル場と測地線が共変微分によって定義される（定義 3.10）．

   - 単位球面上の曲線 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ について $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -0)$ は γ に沿って平行である．すなわち $\gamma(t)$ は測地線である．このことは $\gamma'(t)$ の微分 $\gamma''(t)$ が球面に直交していること（接成分は 0）であることから簡単にわかる．ここでは共変微分が通常の微分の接成分であることを利用している．
   - 共変微分のパラメーターによる定義式は 1 階線形常微分作用素である．曲線 $\gamma(t)$ が与えられたとき γ に沿って平行なベクトル場は初期値 $\boldsymbol{v} \in T_{\gamma(0)}S$ によってただ一通りに決まる．
   - 測地線の方程式は 2 階常微分方程式である．この方程式は
     $$(u^i)' = p^i, \quad (p^i)' = -\sum_{jk} \Gamma^i_{jk}(u^1, u^2) p^j p^k, \quad (i = 1, 2)$$
     という形で u^1, u^2, p^1, p^2 という 4 つの未知関数についての 1 階常微分方程式に書き直すことができる．これは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}(\alpha, \beta) \in S$ と $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{p}_{/1} + d\boldsymbol{p}_{/2}$ について $\gamma(0) = \boldsymbol{a}, \gamma'(0) = \boldsymbol{v}$ となる測地線（上の方程式の $u^1(0) = \alpha, u^2(0) = \beta, p^1(0) = c, p^2(0) = d$ という初期値のもとに得られる解）が唯一つ存在することを意味する．

3. 平行移動

   曲線 $\gamma(t)$ について $\boldsymbol{v} \in T_{\gamma(0)}S$ を初期値とする平行ベクトル場 X の $t = 1$ での値 $X(1) \in T_{\gamma(1)}S$ を対応させる写像を考える．これを γ に沿った $\gamma(0)$ から $\gamma(1)$ への平行移動と呼ぶ．

   - 平行移動は線形写像である．

     平行ベクトル場の方程式は線形常微分方程式なので，解（平行ベクトル場の集合）は線形空間になる．$\boldsymbol{v}$ を初期値とする平行ベクトル場 X と $\boldsymbol{w}$ を初期値とする平行ベクトル場 Y の和 $X + Y$ は，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ を初期値とする平行ベクトル場になる．すなわち $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ を γ の沿って $\gamma(1)$ まで平行移動したベクトルは $X(1) + Y(1)$ である．
   - 平行移動は内積を保つ．

     X, Y が γ に沿って平行な時 $g(X, Y)$ が一定なことを言えばよい．命題 3.9 を使えば簡単だ．

   平行移動は 2 点を結ぶ曲線の取り方によって変わる．高校までで扱った平行との大きな違いである．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 回転面 $\boldsymbol{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$, $f > 0$ において母線 $\gamma(t) = \boldsymbol{p}(t, b) = (f(t)\cos b, f(t)\sin v, g(t))$ は測地線であることを示せ．

課題 2 線形常微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A(t)\boldsymbol{x}$ の解の集合は部分空間をなすことを示せ．
課題 3 問題 3.2

課題 1 は γ'' が曲面に直交していること，すなわち $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ と直交することを示せばよい．$f(u), g(u)$ の条件を用いること．課題 2 は常微分方程式，抽象線形代数の一般論だ．この講義の基礎知識の確認である．課題 3 については，クリストッフェルの記号の計算から始めること，11 月 28 日の講義で若干解説している．R_{1212} の定義など，3.1 節の記述を確認しながら解答すること．

幾何概論 II(12 月 12 日)

前回のレポート課題

課題 1 回転面 $\boldsymbol{p}(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$, $f > 0$ において母線 $\gamma(t) = \boldsymbol{p}(t,b) = (f(t)\cos b, f(t)\sin b, g(t))$ は測地線であることを示せ.

【解答例】$\gamma''(t) = (f''\cos b, f''\sin b, g'')$ なので

$$\gamma''\cdot\boldsymbol{p}_u = f''f' + g''g' = 0, \quad \gamma''\cdot\boldsymbol{p}_v = 0$$

となり, γ'' の接成分は 0 となる. ゆえに, γ' の共変微分は 0 で γ は測地線である.

【コメント】

- 測地線の理解の仕方は, γ'' が曲面に直交することと, クリストッフェルの記号による測地線の方程式の二通りある. この問題は前者の方法をとることを想定している. 測地線の方程式は 3.2 節以降で中心的な役割を果たす.
- $\gamma(t)$ は $v = b$ で固定しているのでその微分は $\boldsymbol{p}$ の u による偏微分 $\boldsymbol{p}_u$ である.
- 曲線 $\eta(t) = \boldsymbol{p}(a,t) = (f(a)\cos t, f(a)\sin t, g(a))$ が測地線になるための条件も同様に考えることができる. $\eta''(t) = -(f(a)\cos t, f(a)\sin t, 0)$ なのでこれは $\boldsymbol{p}_{\mathrm{v}}$ と直交する. $\boldsymbol{p}_u$ との内積は $-f'(a)f(a)$ なので, 測地線になるための必要十分条件は $f'(a) = 0$ である.

課題 2 線形常微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A(t)\boldsymbol{x}$ の解の集合は部分空間をなすことを示せ.

【コメント】簡単な微分方程式についての問題なのでここでは解答例は載せない. この事実が平行移動が線形写像であることの根拠になっていることを理解してほしい.

課題 3 問題 3.2

【解答例】$g_{11} = g_{22} = e^{2\sigma}$, $g_{12} = g_{21} = 0$ なので $g^{11} = g^{22} = e^{-2\sigma}$, $g^{12} = g^{21} = 0$ である.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11/1} = \sigma_{/1}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11/2} = \sigma_{/2}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(-g_{22/1}) = -\sigma_{/1}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{22}(-g_{11/2}) = -\sigma_{/2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}g_{22/1} = \sigma_{/1}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}(g_{22/2}) = \sigma_{/2}$$

よって

$$\begin{aligned} R_{1212} = g_{11}R^1_{212} &= e^{2\sigma}\left(\Gamma^1_{22/1} - \Gamma^1_{21/2} + \sum_m \Gamma^m_{22}\Gamma^1_{1m} - \sum_m \Gamma^m_{12}\Gamma^1_{2m}\right) \\ &= e^{2\sigma}(-\sigma_{/11} - \sigma_{/22} - \sigma_{/1}\sigma_{/1} + \sigma_{/2}\sigma_{/2} - \sigma_{/2}\sigma_{/2} - \sigma_{/1} + \sigma_{/1}\sigma_{/1}) = e^{2\sigma}(-\triangle\sigma) \end{aligned}$$

となり $K = \dfrac{R_{1212}}{\det g} = -\dfrac{\triangle\sigma}{e^{2\sigma}}$ を得る.

【コメント】

- $\sigma_{/1}$ と σ_{11} の区別が見えない答案がある. 他人の解答を写したためでなければいいのだが.
- R^i_{jkl} の定義式は覚える必要はないが, 正確に使うよう注意すること. 公式の適用ミスはつまらない.

本日の講義の要点

1. 等速度パラメーターによる最短線が測地線になること

曲線の変分の概念を使って証明を与えた．第 1 変分公式（19 ページの最下段の式）を導くまでは単なる微分積分の計算なのでそれほど難しいことではない．この公式を利用して測地線でない曲線（$\dfrac{D}{dt}\gamma \neq \mathbf{0}$ となる点を持つ曲線）について，曲線の長さをより短くできることを証明した．なお，変分ベクトル場が

$$\lambda(t)\frac{D}{dt}\gamma'(t) = \sum_j \xi^i(t)\boldsymbol{p}_{/i}(u^1(t), u^2(t)), \quad \gamma(t) = \boldsymbol{p}(u^1(t), u^2(t))$$

となる変分については

$$C(s,t) = \boldsymbol{p}(u^1(t) + s\xi^1(t), u^2(t) + s\xi^2(t))$$

と定めればよい．講義ではきちんと述べなかったので補足しておく．

2. 正規座標系

$\boldsymbol{a} \in S$ と $T_{\boldsymbol{a}}S$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ について（$\boldsymbol{a}$ を中心とする）正規座標系 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を導入した．正規座標系の存在は常微分方程式論の一般論から導かれるのでこの講義メモでは深入りしない．ここでは正規座標系の基本性質をまとめておこう．

- $\boldsymbol{p}(0,0) = \boldsymbol{a} \in S$
- $\{\boldsymbol{p}_u(0,0),\ \boldsymbol{p}_v(0,0)\}$ は最初に与えた $T_{\boldsymbol{a}*}S$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ に他ならない．
- $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ について $\gamma(t) = \boldsymbol{p}(ta, tb)$ は，$\gamma(0) = \boldsymbol{a},\ \gamma'(t) = a\boldsymbol{p}_1 + b\boldsymbol{p}_2$ を満たす測地線である．

3. 測地線の最短性

正規座標系 $\boldsymbol{p}(u,v)$ が $u^2 + v^2 \leqq \varepsilon^2$ で単射であるとき，$\boldsymbol{a}$ を出発する長さ ε 以下の測地線は最短線であることを示した．長さ ε 以下の測地線は正規座標系の原点を出発する線分の像になっていることと，単射であることを利用する．

4. 測地的極座標

正規座標 $\boldsymbol{p}(u,v)$ についてそれを $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ で変換した座標を測地的極座標という．$\boldsymbol{p}(r,\theta)$ は $r = 0$ の場合も含めて滑らかな関数として定義されるが，座標系になっているのは十分小さな $r > 0$ についてである．

命題 3.14 では測地的極座標の第 1 基本形式について考察している．議論はテクニカルであり分かりづらい点もあるが基本的に l'Hospital の定理を利用した微分積分の議論のみである．考えてみるとよい．

5. 測地円周の長さとガウス曲率（定理 3.15）

ガウス曲率が第 1 基本形式のみで決まることは驚異の定理で示したが，ここではより素朴な測地円周の長さとの関連を調べている．第 1 基本形式から，曲線の長さ，距離が決まるので測地円周とその長さは当然第 1 基本形式のみで決まる．その半径 r に関する Taylor 展開の 3 次の項にガウス曲率が現れることが定理の主張である．

6. 球面における測地円周の長さとガウス曲率（問題 3.7）

講義内容が難しくなってしまったので，球面という良く知っている対象について測地円周の長さを考察してもらった．素朴な問題であり，高校程度の知識があれば当然理解可能な問題なのに，多くの学生が悪戦苦闘しているように感じた．おそらく，問われている問題をそのまま理解しようとするのではなく，講義内容とどう関連付けたらいいのかと考えてしまったためだろう．曲面上の幾何において，曲線の長さや距離が何を意味するか誰でも分かっているはずだ．この講義ではそれを第 1 基本形式という概念を使って理解を深めたに過ぎない．そのことをきちんと意識しておいてほしい．

測地円周は距離で決まるので，素朴に理解できるはずのものだ．それとガウス曲率に関連がつくということが定理 3.15 の主張と言える．球面の考察を通じて，測地円周の長さが決して身近な素朴なものであることを再確認してほしい．

本日のレポート課題

レポート課題はお休みします．家庭学習では講義内容の再確認のみ行ってください．

幾何概論 II(12 月 19 日)

本日の講義の要点

1. 測地的極座標での測地線の方程式 (補題 3.16)

   測地的極座標での第 1 基本形式が問題 3.1 で扱った形をしているのでその Christoffel の記号は簡単に調べられる．それをもとに測地線の方程式 (定理 3.12) を書き直したのが前半の主張だ．後半はやや技巧的だが難しいことはない．

   なお，$\sin\varphi = 0$ になる点があれば測地線は測地的極座標の中心から出る測地線（のパラメーターを変えたもの）になってしまう．これは測地線の方程式が 2 階常微分方程式であることと，常微分方程式の解の一意性を使う．特に $\sin\varphi \neq 0$ の場合は，$\theta' = h^{-1}\sin\varphi$ の符号は一定であり $\theta(t)$ は単調増加または減少である．

2. Gauss の定理の証明 (定理 3.17)

   B と C を結ぶ測地線を $\gamma(t) = \boldsymbol{p}(r(t), \theta(t))$ とおいて議論した．ここで θ は単調増加または減少なので，r を θ の関数とみなせる（このことについて明確なコメントをしなかったので補足する）．この関数を $m(\theta)$ とおいている．以下の計算は明快なので講義ノートをみながらきちんと考えること．

3. 球面三角形の面積

   球面は定曲率なので Gauss 曲率の積分は面積に曲率（$1/R^2$）をかけたものに他ならない．これから球面三角形の面積の公式が導かれる．この事実は高校生にも理解できる素朴な議論だけで示せる．演習課題の一つとして授業時間内に取り組んでもらった．この解説は私のホームページにある数学の世界 C の講義ノートに掲載している．

4. Gauss-Bonnet の定理 (定理 3.18)

   コンパクトな閉曲面について Gauss 曲率の積分が整数の 2π 倍であることを示した．方法は曲面を小さな測地三角形で分割し，定理 3.17 の結果を使うだけだ．特に難しいことはない．

   この定理については回転数についての公式（命題 1.9）と比較すると興味深い．どちらも曲率を積分したものが整数の 2π 倍になることを主張している．その結果，曲率の積分は曲面を微小に変形しても変化しない．すなわち曲面を伸び縮みさせても変化しない．またこの整数値は三角形に分割した時の「面の数 − 辺の数 + 頂点の数」だが，この値は三角形への分割の仕方によらない．こうしてもっとも基本的な閉曲面の位相的不変量であるオイラー数 $\chi(S)$ が登場した．

5. 閉曲面のオイラー数

   球面のオイラー数が 2 であること，トーラスのオイラー数が 0 であることを具体的な三角形分割により示した．種数が 2 以上の閉曲面（多人数が同時に使える浮き袋）については，連結和の概念を使った．講義ノートに書いていないので補足しておく．

   二つの閉曲面 (離れたところにあり交わりは持たないとする) S_1, S_2 を考える．それぞれを三角形で分割してみればオイラー数の定義から

   $$\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$

   が得られる．S_1 と S_2 から三角形を 1 つずつ取り除き，その周囲で 2 つの曲面を貼り合わせる．これを連結和と呼び $S_1 \sharp S_2$ と表す．$S_1 \cup S_2$ と $S_1 \sharp S_2$ の三角形分割を比較すれば，面は 2 つ減る．また辺と頂点は貼り合わせによって 3 つずつ減る．よってオイラー数は 2 減る．

   $$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1 \cup S_2) - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

ここで種数 g の閉曲面（g 人乗り浮き袋）を Σ_g と表せば

$$\Sigma_g = \Sigma_{g-1} \sharp T^2$$

なので，$\chi(T^2) = \chi(\Sigma_1) = 0$ より帰納的に

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

を得る．

6. 閉曲面の定曲率計量

 オイラー数はガウス曲率の積分なので，定曲率な曲面については面積に曲率をかけたものを 2π で割ればオイラー数になる．以上で求めた閉曲面のオイラー数についての結論から，球面，トーラス，Σ_g の中で正の定曲率計量は球面にしか入らないことが分かる．この定曲率計量は標準的な球面として実現される．また 0 の定曲率計量はトーラスにしか入らない．この計量は 3 次元空間の中では実現できないが，4 次元空間の中では

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

として実現される．この曲面の第 1 基本形式は $dudu + dvdv$ であり，第 1 基本形式からガウス曲率，面積要素，測地線が決定するのでこの節の議論はすべて通用する．

 Σ_g, $g \geqq 2$ に定曲率計量が入るとすればそれは負の定曲率計量である．この話は最後の節の双曲幾何と関連する．

本日のレポート課題

 レポート課題はお休みします．家庭学習では講義内容の再確認のみ行ってください．それでは皆さんよいお年を．

幾何概論 II(1 月 16 日)

本日の講義の要点

ここまで第 3 節で学習してきたことに注意すれば，幾何の議論は基本的に第 1 基本形式のみで展開できる．このことを双曲幾何を例に具体的に考察する．

1. 双曲空間の導入

   双曲空間 H の定義は定義 3.19 で与えている（プリントでは双曲平面と書いているが同じ意味）．いささか天下り的ではあるが，平面領域に第 1 基本形式を与えたものの具体例として受けとめること．

   まず，今までの復習の意味で H の Gauss 曲率を計算し，それが $K \equiv -1$ を満たすことを確認した．今までも負定曲率曲面の例として擬球面を紹介したが，それは円柱面と同相な曲面である．H は平面と同相でありより重要な役割を果たす．（この事情は基本群，単連結，普遍被覆などの位相幾何の概念を使って理解する必要がある．これらの概念は 4 年次の幾何学 I）で学習する．

2. $SL(2,\mathbb{R})$ の H への作用

   $A \in SL(2,\mathbb{R})$ について一次分数変換 φ_A を定めた（プリント参照）．これについて

   $$\varphi_A(H) \subset H, \qquad \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$

   を証明した．証明は単なる計算なので簡単だ．このことと φ_E が恒等写像であることを組み合わせれば $(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$ を得る．すなわち $\varphi_A : H \longrightarrow H$ は全単射である．

   なお，位相空間への群の作用は基本的な概念であり多くの分野で使われるが，この講義ではその一般的な解説は行わない．

3. $SL(2,\mathbb{R})$ の H への作用の性質

   定理 3.20 にまとめている．(1) 等長性，(2) 推移性，(3) 等方部分群，(4)φ_A が恒等写像になるための条件の 4 つである．(2)(4) の証明は易しいので理解できるだろう．(1) の等長性については曲線 $z(t)$ について

   $$\|\varphi_A(z(t))'\| = \|z'(t)\|$$

   を示すことによって示している．ここで $\|z'\|$ は H でのベクトルの大きさである．等長写像については，今まで講義で扱ってこなかったので若干補足しておく．

   - 接ベクトルの大きさを変えない写像を等長写像と呼ぶ．すなわち等長写像の定める接平面から接平面への写像は第 1 基本形式（内積）によるノルム（ベクトルの大きさ）を変えない．内積はノルムから決まるので内積も変えず，角度も変えない．
   - 曲線の長さは曲線の接ベクトルの大きさの積分なので等長写像は曲線の長さを変えない．
   - 2 点の距離はそれを結ぶ曲線の長さの下限なので，等長写像は距離を変えない（このことを等長写像と言うこともある）．
   - 測地線は局所的に最短なので測地線を等長写像で写した曲線も局所的に最短である．測地線は等速度パラメーターなので測地線を等長写像で写した曲線も等速度パラメーターを持つ．最短で等速度パラメーターなら測地線なので，等長写像は測地線を測地線に移す．

4. H における測地線

   測地線の方程式を $x = a$（一定）という条件の下で時，実軸に直交する半直線が測地線であることを示した．$x' \neq 0$ のとき，測地線が実軸に直交する半円であることを次の議論で証明した．

- $x'' = 2x'y'/y$ より $x''/x' = 2y'/y$ を得る．これより $x' = cy^2$ であることが導かれる．c は定数であり，一点で $x' \neq 0$ ならすべての点で $x' \neq 0$ であることが分かる．
- 測地線の方程式から $\left(((x')^2 + (y')^2/y^2)\right)' = 0$ が得られる．ゆえに $(x')^2 + (y')^2 = b^2y^2$ と表せる．
- $y'/x' = \frac{dy}{dx}$ より微分方程式

  $$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{c^2y^2} - 1}$$

  この方程式は積分計算で解け，$(x-a)^2 + y^2 = b^2/c^2$ を得る．ゆえに，測地線は実軸に直交する半円である．

5. 一次分数変換の円円対応

   一般に一次分数変換は複素正則行列に対して定義される．これは $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の全単射を定める（議論はこの講義メモの 2 と同じ）．

   - $\mathbb{C}$ の直線には ∞ を付け加えて $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の円とみなす．円の方程式は次のように表示される（$z = x+iy$ 等とおけば簡単）．

     $$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R},\ B\mathbb{C},$$

   - 一次分数変換は円を円に移す．これを円円対応という．

     一次分数変換は正則関数なので Cauchy-Riemann の関係式より角度を変えない．以上から $A \in SL(2,\mathbb{R})$ の定める一次分数変換は実軸に直交する円を実軸に直交する円に移す．直線も円に含めているので，測地線が実軸に直交する半円または半直線が再び確認できる．

次回は非調和比を導入して，距離と等長変換について考察を深める．

幾何概論 II(1 月 23 日)

本日の講義の要点

前回に引き続き双曲幾何の解説を行った．

1. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ について

   $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を理解するための方法として，球面から平面への立体射影（北極から赤道面への射影）による方法と，複素射影空間として理解する方法を解説した．立体射影は直感的にも理解しやすいので，球面から北極を除いた図形が立体射影で平面と同相になることは簡単に分かるだろう．立体射影で平面と球面から北極を除いたものを同一視すれば，平面に無限遠点を付け加えることが，球面に北極を補うこと，すなわち球面全体を考えることに他ならないことが素朴に理解できるだろう．

   複素射影空間として理解する方法は同値関係を利用するので分かりづらいかもしれない．しかし，一般次元の複素射影空間はもっとも基本的な幾何学的対象として様々な分野で利用される．その最初の例として記憶しておいてほしい．

   なお，球面において北極がなんら特別な点でないように，$\overline{\mathbb{C}}$ において ∞ は特別な点ではない．この理解はこの枠組みでものを考えるときに重要である．

2. 一次分数変換

   $A \in GL(2, \mathbb{C})$ について一次分数変換 $\varphi_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ が定められる．定義は前回の解説とまったく同じであり，ただ係数を複素数に取っているだけである．また，$c \neq 0$ のときは

   $$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \varphi(-d/c) = \infty, \quad \varphi(\infty) = a/c$$

   $c = 0$ のときは

   $$\varphi_A(\infty) = \infty$$

   とおく．これについて

   $$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$

   が成り立ち，φ_A は $\overline{\mathbb{C}}$ の全単射を定める．

3. 円円対応

   立体射影により球面上の円（球面と平面の切り口）で北極を通らないものは平面上の円に対応する．このことは証明を要する事実だが，結果のみ紹介した．一方，北極を通る円は直線に対応する．このことから直線に無限遠点を付け加えたものを円の一つとして扱うのは自然である．

   講義では一次分数変換が円を円に移すことを証明した．円の方程式を書き下すだけなので証明は難しくない．なお，一次分数変換は正則関数なので角度を変えない．円を円に移すことと，角度を変えないことは一次分数変換の振る舞いを調べるときに基本的である．

4. 非調和比

   四つの相異なる $\overline{\mathbb{C}}$ の点，z_1, z_2, z_3, z_4 について

   $$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

   を非調和比という．まず一次分数変換が非調和比を変えないことを証明した．証明は単なる計算問題であり易しい．またこの事実の応用として，異なる 3 点の組 z_1, z_2, z_3 を別の異なる 3 点の組 w_1, w_2, w_3 に移す一次分数変換が存在することが

   $$(z, z_1; z_2, z_3) = (w, w_1; w_2, w_3)$$

を $w=\varphi(z)$ の形に書き下すことによって簡単に証明できる．以下，非調和比の性質を箇条書きする．

- $(z,a;b,c)=(w,a;b,c) \Longleftrightarrow z=w$

  証明は簡単だ．なお，この事実から $\varphi(z_j)=w_j$, $j=1,2,3$ を満たす一次分数変換は唯一であることが分かる．なお，ここでは非調和比の最初の成分を変数にしたが，他の成分についても同様の性質がある．

- $(z_1,z_2;z_3,z_4)=(w_1,w_2;w_3,w_4)$ のとき $\varphi(z_j)=w_j$, $j=1,2,3,4$ を満たす一次分数変換が唯一存在する．

  $\varphi(z_j)=w_j$, $j=1,2,3$ を満たす一次分数変換 φ をとる．一次分数変換は非調和比を変えないので

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=(\varphi(z_1),\varphi(z_2);\varphi(z_3),\varphi(z_4))=(w_1,w_2;w_3,\varphi(z_4))$$

  を得る．仮定と前項の結果から $\varphi(z_4)=w_4$ を得る．

5. 双曲平面における i と ia の距離

   i と ia を結ぶ曲線を $c(t)=x(t)+iy(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ とおけばこの長さは

$$L(c)=\int_0^1 \frac{1}{y}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt \geqq \int_0^1 \frac{1}{y}|y'|dt \geqq \left|\int_0^1 \frac{y'}{y}dt\right| = |\log a|$$

を満たす．実際に i と ia を結ぶ線分の長さは $|\log a|$ になるので i と ia の距離は $|\log a|$ である．

6. 双曲平面での 2 点 z_1,z_2 の距離

   z_1,z_2 に対して a を

$$(z_1,\overline{z_1};z_2,\overline{z_2})=(i,-i;ia,-ia)$$

となるようにとる（具体的な取り方は講義ノート参照）．このとき，4 点 $z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2}$ を $i,-i,ia,-ia$ に移す一次分数変換 $w=\varphi(z)$ が存在する．これが $SL(2,\mathbb{R}$ の行列で実現されることを言えば，講義ノートの方針で距離が求められる．講義ではこの部分の証明を省略してしまったのでここに記述しておく．

$w=\varphi(z)$ は

$$(z_1,\overline{z_1};z_2,z)=(i,-i;ia,w)$$

により決定する．両辺の共役複素数を取れば

$$(\overline{z_1},z_1;\overline{z_2},\overline{z})=(-i,i;-ia,\overline{w})$$

となる．非調和比は前半の二つの成分を入れ替えると逆数になる．また後半の二つの成分を入れ替えても逆数になる．すなわち同時に入れ替えれば変わらない．このことから

$$(z_1,\overline{z_1};\overline{z},\overline{z_2})=(i,-i;\overline{w},-ia)$$

を得るが，この式は $z_1,\overline{z_1},\overline{z_2}$ を $i,-i,-ia$ に移す一次分数変換（すなわち φ）が $\overline{z}$ を $\overline{w}$ に移すことを意味している．すなわち

$$\varphi(\overline{z})=\overline{\varphi(z)}$$

であり，

$$\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}=\overline{\frac{az+b}{cz+d}}$$

が成り立つことを意味する．ゆえに対応する複素行列は $\overline{A}=cA$ を満たすので

$$A+\overline{A}=(1+c)A \in GL(2,\mathbb{R})$$

必要ならさらにスカラー倍して $\varphi = \varphi_B$, $B \in SL(2, \mathbb{R})$ に取れる．ゆえに，φ は H の等長写像であり，距離を変えない．

7. 非ユークリッド幾何

前項での結果は，H においては距離の等しい 2 点の組は等長変換で移すことができることを意味する．これは著しい性質で，2 次元では球面，平面とこの H でしか成り立たない．ユークリッドは 2 辺とその挟む角による合同定理を証明する際に，この事実を利用したが，同じ議論は H においても行える．

球面では 2 点を結ぶ直線（測地線）が複数ある場合があり，ユークリッド幾何とまったく異なる幾何が展開される．しかし，双曲幾何 (H での幾何）は，平行線の公理以外のすべてのユークリッド幾何の性質を満たす．しかし，平行線の公理は成り立たない．結果として，平行線の公理が他の公理から証明できないことが分かる．それゆえ双曲幾何を非ユークリッド幾何と呼ぶ．非ユークリッド幾何の発見は 19 世紀前半の成果であり，数学史上の重要な出来事である．

「幾何概論 II」第 1 回試験（11 月 7 日実施・試験時間 60 分）の解答例とコメント

問 1 滑らかな関数 $\kappa(s)$ について，関数を成分とする 2 次行列 $F(s)$ は

$$\frac{d}{ds}F(s) = F(s)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $F(s)$ は行列式 1 の直交行列であることを示せ．

(2) $F(s)$ の第 1 列を積分して得られる曲線 $\boldsymbol{c}(s)$ の曲率は $\kappa(s)$ であることを示せ．

【解答例】 (1)

$$(F(s){}^tF(s))' = F'(s){}^tF(s) + F(s){}^t(F'(s)) = F(s)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}{}^tF(s) + F(s)\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}{}^tF(s) = O$$

より $F(s){}^tF(s)$ は定行列で $F(s){}^tF(s) = F(0){}^tF(0) = E$ を得る．ゆえに $F(s)$ は直交行列である．$1 = |F(s){}^tF(s)| = |F(s)|^2$ より $|F(s)| = \pm 1$ であるが，$|F(0)| = |E| = 1$ なので $|F(s)| = 1$ を得る．

(2) $F(s) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ とおくと $F(s)$ は行列式 1 の直交行列なので，$|\boldsymbol{e}_1| = 1$ でありかつ $\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{e}_1$ を正の向きに 90 度回転したベクトルである．ゆえに

$$\boldsymbol{c}(s) = \int_0^s \boldsymbol{e}_1(u)du$$

は $\boldsymbol{c}'(s) = \boldsymbol{e}_1$ であり，この大きさは 1 なので弧長パラメーターの曲線になる．また Frenet 枠は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ である．$F(s)$ の満たす微分方程式から $\boldsymbol{e}_1' = \kappa\boldsymbol{e}_2$ であり，$\boldsymbol{c}(s)$ の曲率は κ となる．

【コメント】

- (1) の前半は空間曲線についての定理 1.14 の証明と同じである．定理 1.7 の証明も参考になろう．できてほしかった問題である．行列式が 1 であることは，直交行列の行列式が ± 1 であることと $|F(0)| = |E| = 1$ を使えばよい．(2) は直交行列の列ベクトルが大きさ 1 であることに言及する必要がある．それによって，積分して得られる曲線が弧長パラメーターであることが分かる．また，行列式が 1 なので $F(s)$ は回転の行列であり，Frenet 枠のベクトルを並べたものであることが分かる．いずれにしても直交行列についての正確な理解が必要である．
- 行列式が 1 であることにまったく言及していないものが多い．直交行列ということだけでは $|F| = \pm 1$ しか出てこない．$|F(s)|$ が連続なので $|F(s)| = \pm 1$ から定数になることが要点だ．
- (2) は一人しかできていなかった．$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{e}_1$ は積分したので当然だがこれが弧長パラメーターになることは $|\boldsymbol{e}_1| = 1$ を使わなくてはならない．さらに $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が $\boldsymbol{c}(s)$ の Frenet 枠になることを言わないと，$\boldsymbol{e}_1' = \kappa\boldsymbol{e}_2$ の式から曲率が κ であることは導けない．
- (1) の直交行列であることの証明に 10 点，行列式が 1 であることの証明に 5 点，(2) に 5 点の計 20 点とした．平均点は 5.68 点だった．

問 2 楕円 $\boldsymbol{c}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ の曲率を求めよ．またその頂点を求めよ．

【解答例】 曲率は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

である．頂点は $\kappa' = 0$ を満たす点なので

$$\kappa'(t) = -\frac{3ab}{2}\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-5/2}(2a^2\sin t\cos t - 2b^2\sin t\cos t)$$

より，$t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ のときである．これは楕円の点 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ に対応する．なお，$a = b$ のときは $\kappa(t) = 1/a$ で定数でありすべての点が頂点である．

【コメント】

- 曲線の曲率の計算なので，今回の試験範囲の基礎問題と言えるだろう．前半は計算ミスを除いて全員ができてほしい．なお，分子の符号をミスした場合は曲率が負になってしまうので間違いに気づくはずだ．このパラメーターでは楕円上を反時計回りに回るので曲率は正だ．

  頂点については定義を知っているかがカギになる．重要な概念というわけではないが前半に付随する問題として出題した．
- $\kappa'(t) = 0$ を満たす t を求めるだけでは頂点を求めたことにならない．それに対応する $\boldsymbol{c}(t)$ が頂点である．
- 曲率の計算に 5 点，頂点の議論に 5 点の 10 点を配点した．平均点は 8.09 点だった．

問 3 弧長パラメーターによる空間曲線 $\boldsymbol{c}(s)$ について $\boldsymbol{c}''(s) \neq \boldsymbol{0}$ が常に成り立つとする．このとき捩率 $\tau(s)$ の定義を述べよ．また $\tau(s) = 0$ がすべての s で成り立つことと $\boldsymbol{c}(s)$ がある平面に含まれることとは同値であることを示せ．

【解答例】 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{c}'' = \kappa\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ により Frenet 枠を定める．これによって

$$\tau = \boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3'$$

を捩率という．

$\tau = 0$ が常に成り立つとき，$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3' = 0$ である．また $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1$ より $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3' = 0$ である．さらに $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$ より

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_3 = \kappa\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

となるので，$\boldsymbol{e}_3'$ は Frenet 枠のすべてのベクトルと直交し，$\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{0}$ が得られる．ゆえに $\boldsymbol{e}_3$ は定ベクトルである．

$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}_3)' = \boldsymbol{c}' \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

より $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}_3$ は一定でこの値を b とおけば曲線 $\boldsymbol{c}$ は平面 $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{x} = b$ 上に存在する．

逆に $\boldsymbol{c}(s)$ が平面 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b$ 上にあったとする．$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}(s) = b$ なので

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}' = 0, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}'' = 0$$

を得る．これから Frenet 枠の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ はともに $\boldsymbol{a}$ と直交し，$\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{a}$ の定数倍になる．ゆえに $\boldsymbol{e}_3$ は定ベクトルであり，捩率は 0 になる．

【コメント】

- 捩率の定義は Frenet 枠との関係で理解すること．基本事項である．後半は問題 1.20 であるが講義でも解説したし 10 月 24 日の講義メモにも記述している．証明の技法としては決して煩雑なものではなく理解できてしかるべき内容だ．

- 捩率は Frenet 枠を使って定義されるが，Frenet 枠とは何かは問題にしなかった．答案の中には Frenet 枠をきちんと理解しているかはっきりしないものもあったが，一応正解として扱った．
- 一般のパラメーターによる捩率の定義式を使った人もいるが，幾何学的な意味を理解するには弧長パラメーターによる表示のほうが分かりやすい．解答例の定義式も覚えておくこと．
- $\boldsymbol{e}_3$ が定ベクトルになるだけで，平面上にあることがただちにわかるわけではない．解答例のような議論は必要だ．
- 捩率の定義に 4 点，証明の双方向にそれぞれ 8 点を配点した．計 20 点で平均点は 8.47 点だった．

50 点満点で最高点は 43 点，最低点は 5 点，平均点は 22.24 点だった．

「幾何概論 II」第 2 回試験（12 月 5 日実施・試験時間 60 分）の問題と解説

試験範囲が狭かったこともあり，良くできていた．配点は問 1 が各 10 点，問 2 が 10 点，問 3 は全体で 20 点の 50 点満点とした．満点が 1 人，最低は 3 点，平均点は 29.3 点だった．

問 1 問 1(1) 曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の第 1 基本量について $E=G$ および $F=0$ が全ての点で成り立っているとする．このときこの曲面が極小曲面になることと，$\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}$ が曲面に接することとは同値であることを示せ．
(2) 曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)=(3u+3uv^2-u^3, v^3-3v-3u^2v, 3u^2-3v^2)$ は極小曲面であることを示せ．

【解答例】(1) 平均曲率は $H=\dfrac{LG+NE-2FM}{2(EG-F^2)}$ なので

$$\boldsymbol{p}\text{が極小曲面} \iff H=0 \iff L+N=0$$

である．

$$L+N=\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv})\cdot\boldsymbol{e}$$

なので，これは $\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}$ が $\boldsymbol{e}$ と直交すること，すなわち曲面に接することと同値である．
(2)

$$\boldsymbol{p}_u=\begin{pmatrix}3+3v^2-3u^2\\-6uv\\6u\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_v=\begin{pmatrix}6uv\\3v^2-3-3u^2\\-6v\end{pmatrix}$$

より第 1 基本量について

$$E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u=9(1+u^2+v^2)^2,\quad F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v=0,\quad G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v=9(1+u^2+v^2)^2$$

を得る．よって (1) が使えるが

$$\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}=\begin{pmatrix}-6u\\-6v\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6u\\6v\\-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

なので $H=0$ を得る．
【コメント】

- (1) は易しい問題で良くできていた．気になる間違いとしては $(\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv})\cdot\boldsymbol{e}=0$ から $\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}=\boldsymbol{0}$ としてしまうものだ．内積だということを意識していないのであれば重大なミスだ．
- (2) は (1) の結果を使う．解答例のように第 1 基本量と $\boldsymbol{p}_{uu}+\boldsymbol{p}_{vv}$ を計算すれば十分だ．なお，$E=G$ が分かるまで式の変形を行うこと．これを言うのが解答のポイントなので，きちんと変形せずに $E=G$ と書かれても理解できているかどうか判断できない．

問 2 回転面 $\boldsymbol{p}(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$，$(f'(u))^2+(g'(u))^2=1$，$f(u)>0$ について，ガウス曲率が $-\dfrac{f''}{f}$ であることを示せ．

【解答例】まず，2 階までの偏導関数を計算しておく．

$$\boldsymbol{p}_u=\begin{pmatrix}f'(u)\cos v\\f'(u)\sin v\\g'(u)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_v=\begin{pmatrix}-f(u)\sin v\\f(u)\cos v\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_{uu}=\begin{pmatrix}f''(u)\cos v\\f''(u)\sin v\\g''(u)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_{uv}=\begin{pmatrix}-f'(u)\sin v\\f'(u)\cos v\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_{vv}=\begin{pmatrix}-f(u)\cos v\\-f(u)\sin v\\0\end{pmatrix}$$

これから第 1 基本量は

$$E=(f')^2+(g')^2=1,\quad F=0,\quad G=f^2$$

を得る．単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v=\begin{pmatrix}-fg'\cos v\\-fg'\sin v\\ff'\end{pmatrix},\quad \text{より}\,\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}-g'\cos v\\-g'\sin v\\f'\end{pmatrix}$$

なので，第 2 基本量は

$$L=\boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{e}=-g'f''+g''f',\quad M=\boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{e}=0,\quad N=\boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{e}=fg'$$

である．よってガウス曲率は

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-fg'g'f''+fg'g''f'}{f^2}=\frac{-(g')^2f''-(f')^2f''}{f}=-\frac{f''}{f}$$

ここで $\left((f')^2+(g')^2\right)'=2f'f''+2g'g''=0$ を利用している．

【コメント】

- 授業でも何度かやってみせた計算なので特にいうことはない．なお，$|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|=f$ では $f>0$ の条件を使っている，

問 3 すべての点が臍点である曲面について，$\boldsymbol{e}_u=-\kappa\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{e}_v=-\kappa\boldsymbol{p}_v$ を満たす関数 κ が存在する．次の問いに答えよ．

(1) κ は定数であることを示せ．ことを示せ．

(2) $\kappa\neq 0$ のとき，曲面は球面の一部になることを示せ．

【解答例】(1)$\boldsymbol{e}_u=-\kappa\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{e}_v=-\kappa\boldsymbol{p}_v$ よりそれぞれ v, u で偏微分すれば

$$\boldsymbol{e}_{uv}=-\kappa_v\boldsymbol{p}_u-\kappa\boldsymbol{p}_{uv},\quad \boldsymbol{e}_{vu}=-\kappa_u\boldsymbol{p}_v-\kappa\boldsymbol{p}_{vu}$$

を得る．$\boldsymbol{e}_{uv}=\boldsymbol{e}_{vu}$, $\boldsymbol{p}_{uv}=\boldsymbol{p}_{vu}$ より

$$\kappa_v\boldsymbol{p}_u-\kappa_u\boldsymbol{p}_v=\boldsymbol{0}$$

を得るが，$\{\boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_v\}$ は一次独立なので $\kappa_u=\kappa_v=0$ を得る．ゆえに κ は定数である．

(2)$\kappa=0$ のときは $\boldsymbol{e}_u=\boldsymbol{e}_v=\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{e}$ は定ベクトルである．

$$(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_u=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}_u=0,\quad (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_v=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}_v=0$$

より $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}$ は定数になるのでその値を a とおく．曲面 $\boldsymbol{p}$ は平面 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}=a$ 上に存在する．

(3) 条件式と κ が定数であることから

$$\left(\boldsymbol{p}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}\right)_u=\boldsymbol{0},\quad \left(\boldsymbol{p}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}\right)_v=\boldsymbol{0}$$

を得る．よって $\boldsymbol{p}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}$ は定ベクトルであり，このベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおく．

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}|=\left|\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}\right|=\frac{1}{|\kappa|}$$

であり，曲面は $\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 $1/|\kappa|$ の球面上にある．

【コメント】

- 講義ではすべての点が臍点という仮定から $\boldsymbol{e}_u = -\kappa \boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{e}_v = -\kappa \boldsymbol{p}_v$ を満たす関数 κ が存在することを証明した．しかし，この問題ではこの事実は使ってよい事実として明示している．この証明は記述するべきではない．何が仮定されていて何が証明すべきことなのか，きちんと読み取れていないように感じる．とにかく，関連しそうなことは何でも書いておくという態度は改めるべきだ．
- u, v による偏微分が消えていることから定数（あるいは定ベクトル）であることが分かる．基本事項なので証明できるようにしておくこと．

「幾何概論 II」第 3 回試験（1 月 30 日実施・試験時間 60 分）の問題と解説

問 1 第 1 基本形式が $dxdx + h^2(x)dydy,\ h > 0$ である曲面を考える．この曲面上の曲線 $(x(t), y(t))$ が測地線であるための条件（測地線の方程式）を記述せよ．また $y(t)$ が一定の場合，および $x(t)$ が一定の場合に測地線を決定せよ．

【解答例】 $g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = h^2$ より定義に従って Γ^i_{jk} を求めれば

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0$$
$$\Gamma^1_{22} = -hh', \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = h^{-1}h'$$

である．ゆえに測地線の方程式は

$$\ddot{x} - hh'(\dot{y})^2 = 0, \quad \ddot{y} + 2h^{-1}h'\dot{x}\dot{y} = 0$$

である．$y(t) = c$ のとき第 2 式は常に成り立ち，第 1 式は $\ddot{x} = 0$ になる．ゆえにこの場合の測地線は $(x, y) = (a + bt, c)$ に限られる．$x(t) = a$ のときは第 1 式は $-h(a)h'(a)(\dot{y})^2 = 0$，第 2 式は $\ddot{y} = 0$ になる．y が一定のときは定点になるので測地線とは呼ばない．ゆえに $\dot{y} \neq 0$ であり，第 1 式の成り立つ条件は $h'(a) = 0$ である．第 2 式より y は一次式なので測地線 $(x, y) = (a, b + ct)$ を得る．ただし $h'(a) = 0$ のときに限る．

【コメント】

- 曲線のパラメーター t による微分と，座標 x, y による微分を区別すること．$h(x)$ と h が x のみの関数であることが仮定されているので，解答例では h の x による微分を h' と書いている．h を y によらない 2 変数関数とみなせば h_x と書くことになる．この問題ではどちらでも構わない．
- 測地線の方程式で $h_{/2}$（あるいは h_y）を残す答案が目につくが問題の設定からこれは 0 だ．ただし，測地線の方程式を求める段階では減点しなかった．
- y が一定のときに $x'' = 0$ と述べて終わる答案があるが，これでは微分方程式を書き直しただけで解いたとは言えない．測地線を決定せよという設問に答えていない．
- x が一定の場合に第 1 式 $-hh'(\dot{y})^2 = 0$ をどう使うべきかきちんと答えられた人はいなかった．$\dot{y} = 0$ として y は定数とする答案が多かったが，x, y の両方が定数では曲線にならない．測地線ではない．$h' = 0$ から h 一定の場合という答案もあるが，h は最初に与えられているのでこれも間違いである．解答例を良く考えておくこと．
- 測地線の方程式の記述に 10 点，それぞれの場合の測地線の決定に 5 点ずつ，合わせて 20 点を配点した．最高点は 18 点，平均点は 9.48 点だった．

問 2 $D : x^2 + y^2 < 1$ 上で第 1 基本形式 $e^{2\sigma}(dxdx + dydy) = \dfrac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dxdx + dydy)$ とおくとき，そのガウス曲率を求めよ．

【解答例】 問 1 と同様に σ を使った表示で Γ^i_{jk} を求めれば

$$\Gamma^1_{11} = \sigma_{/1}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \sigma_{/2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\sigma_{/1}$$
$$\Gamma^2_{11} = -\sigma_{/2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \sigma_{/1}, \quad \Gamma^2_{22} = \sigma_{/2}$$

ゆえに

$$R^1_{212} = -\sigma_{/11} - \sigma_{/22} + (-\sigma_{/1})\sigma_{/1} + \sigma_{/2}\sigma_{/2} - \sigma_{/2}\sigma_{/2} - \sigma_{/1}(-\sigma_{/1}) = -\sigma_{/11} - \sigma_{/22}$$

$R_{1212} = g_{11}R^1_{212} = -e^{2\sigma}(\sigma_{/11} + \sigma_{/22})$ よりガウス曲率は

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g} = -\frac{\sigma_{/11} + \sigma_{/22}}{e^{2\sigma}}$$

である．求める曲面は $\sigma = \log 2 - \log(1 - x^2 - y^2)$ とすればよいので

$$\sigma_{/11} + \sigma_{/22} = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} = e^{2\sigma}$$

であり，$K = -1$ を得る．

【コメント】

- σ を使わずに議論すると，K の計算が煩雑になる．一般的な式のほうが具体的な式より簡単になる場合が多い．比較してみるとよい．
- $R_{1212} = \sum_m g_{1m}R^m_{212}$ の g_{1m} を g^{1m} と勘違いした答案があるが，添え字のつけ方のバランスを見てほしい．上付き下付き添え字の活用は式を覚えるのに役立つ．
- σ を使ってガウス曲率を求めた後，σ を x, y の関数で表す．σ と x, y の式が混在する答案が目につくが，これは好ましくない．なお，この程度の条件で σ を x, y の式として表すことはできるはずだ．面倒だと思ってしまったのだろうか．なお，

  $$(e^{2\sigma})_x = 2e^{2\sigma}\sigma_x, \quad e^{2\sigma} = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

  より

  $$\sigma_x = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}$$

  を導いてもよい．
- 15 点配点し，σ によるガウス曲率の表示まででで 10 点とした．平均点は 9.48 点だった．

問 3 上半平面 H に $\dfrac{dxdx + dydy}{y^2}$ という第 1 基本形式を考える．$z = x + iy$ で上半平面を複素平面の部分集合としてとらえ，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2\mathbb{R})$ に対して $\varphi_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ と定めるとき以下に答えよ．
(1) φ_A は H から H への全単射を定めることを示せ．
(2) H 内の長さ有限の曲線 $\gamma(t)$ に対して γ と $\varphi_A \circ \gamma$ は同じ長さを持つことを示せ．
(3) φ_A は測地線を測地線に移すことを示せ．

【解答例】(1) a, b, c, d はすべて実数なので

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d}{(cz + d)(c\bar{z} + d} = \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

よりこの虚部は

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}\mathrm{Im}z$$

となる．ゆえに Im$z > 0$ なら $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{z}) > 0$ であり，φ_A は H から H への写像を定める．さらに，φ_A は逆写像として

$$\varphi_{A^{-1}}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

を持つので全単射である．

(2)φ_A は正則関数でありその微分は $\dfrac{1}{(cz + d)^2}$ である．ゆえに合成関数の微分により

$$(\varphi_A \circ \gamma)'(t) = \frac{1}{(c\gamma(t) + d)^2}\gamma'(t)$$

よって $(\varphi_A \circ \gamma)'(t)$ の大きさは

$$\frac{1}{|\mathrm{Im}(\varphi_A(\gamma(t)))|}\frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2}|\gamma'(t)|$$

である．ここで (1) の結果から

$$\mathrm{Im}\varphi_A(\gamma(t)) = \frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2}\mathrm{Im}\gamma(t)$$

なので，

$$\|(\varphi_A \circ \gamma)'(t)\|_H = \|\gamma'(t)\|_2$$

を得る．対応する速度ベクトルの大きさが変わらないので，γ と $\varphi_A \circ \gamma$ は同じ長さを持つ．

(3)γ を測地線とする．γ の速度ベクトルの大きさは一定であり，φ_A は速度ベクトルの大きさを変えないので，$\varphi_A \circ \gamma$ の速度ベクトルの大きさも一定である．

また測地線は局所的には最短線であり，(2) から φ_A は最短線を最短線に移すので $\varphi_A \circ \gamma$ も近い 2 点間では最短である．速度ベクトルの大きさが一定で等速度であるため γ は近い 2 点の間で測地線となる．すなわち各点で測地線の微分方程式を満たすので測地線である．

【コメント】

- (1) は $\varphi_A(H) \subset H$ を言う必要がある．ここに $A \in SL(2\mathbb{R})$ の仮定を使う．逆写像の存在だけでは H から $\varphi_A(H)$ への全単射ということしか言えない．
- $\gamma'(t)$ と $(\varphi_A \circ \gamma)'(t)$ の大きさが等しいことを言えばよいが，大きさは第 1 基本形式についてとる．すなわち通常のベクトルの大きさを虚部（H の点なので正）で割らなければならない．
- (3) で測地線は円または直線であるとして議論をしている答案は評価しなかった．測地線は微分方程式の解であるが，幾何学的には最短線を等速度パラメーターにしたものという意味がある (定理 3.13)．この事実は測地線を理解するために最も基本的であり，きちんと確認しておいてほしい．ベクトルの大きさを変えないことが測地線を測地線に移すことにつながる．
- それぞれに 5 点，計 15 点を配点した．平均点は 1.87 点だった．