

幾何概論 II 講義ノート (2012 年度, 井上尚夫)

幾何概論 II では平面内の曲線及び空間内の曲面についての微分幾何を扱う. さらに内面的幾何の立場から曲面の理解を深め, Gauss-Bonnet の定理と双曲幾何を紹介する. 各小節の最後に演習問題をまとめているが, これは幾何概論 II 演習の題材である.

目次

1	曲線	1
1.1	曲線についての準備	1
1.2	平面曲線の曲率	2
1.3	平面曲線に関するいくつかの定理	3
1.4	空間内の曲線	7
2	曲面	8
2.1	二次形式	8
2.2	第 1 基本形式	9
2.3	第 2 基本形式	11
2.4	曲率に関連するいくつかの概念	14
3	曲面の内面的幾何	16
3.1	驚異の定理 (Theorema egregium)	16
3.2	共変微分と測地線	18
3.3	Gauss-Bonnet の定理	22
3.4	双曲幾何	24

1 曲線

1.1 曲線についての準備

以後断らない限り扱う写像・関数はすべて C^∞ 級である.

定義 1.1. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ について $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ を曲線とよぶ. $k = 2$ のときは平面曲線, $k = 3$ のときは空間曲線とよぶ. 曲線 \mathbf{c} について $|\mathbf{c}'(t)| \neq 0$ が常に成り立つとき, **正則曲線**とよぶ.

曲線 $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ について $\int_a^b |\mathbf{c}'(t)| dt$ を \mathbf{c} の長さとしてよぶ.

区間 J から区間 I への単調増加関数 $t = t(u)$ によって曲線 $\mathbf{d} : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ が $\mathbf{d}(u) = \mathbf{c}(t(u))$ によって定義される. これをパラメーターの変換とよぶ.

注意. (1) 正則性を仮定しないと曲線 $\mathbf{c}(I)$ が図形として滑らかとはいえない. この講義では微分幾何の立場で曲線を扱うので, 断らない限り正則な曲線のみを扱う.

(2) パラメーターのとり方を変えただけの曲線は同じ曲線として扱う. このことから定義での記述のように $\mathbf{d}(u) = \mathbf{c}(t(u))$ と表すのではなく, 同じ \mathbf{c} を用いて $\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(t(u))$ と表すことが多い.

(3) 曲線の性質として扱うのはパラメーターのとり方によらないもののみである. 例えば長さはパラメーターのとり方によらない. (問題 1.1)

(4) パラメーターの変換を単調増加関数に限定しているのは, 曲線を向きをこめて考えているためだ.

(5) $\mathbf{c}(t)$ が正則で $\frac{dt}{du} > 0$ のとき $\mathbf{c}(u)$ も正則である. (問題 1.2)

正則曲線において最も標準的なパラメーターを定めておくことは今後の計算の上で重要である.

命題 1.2. 正則曲線 $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ と $\alpha \in I$, $\mathbf{c}(\alpha) = a \in \mathbb{R}^k$ について

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\mathbf{c}'(t)| dt$$

とおくとき t を s の関数とみなして $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ とおけばこれも正則曲線で $|\mathbf{c}'(s)| = 1$ を満たす. この s を (a を基点とする) 弧長パラメーターと呼ぶ.

証明. 正則パラメーターなので $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{c}'(t)| > 0$ であり, $\mathbf{c}(s)$ も正則曲線である. さらに

$$\left| \frac{d\mathbf{c}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1.$$

□

以後, $\mathbf{c}(t)$ と書けば一般のパラメーターによる正則曲線を, $\mathbf{c}(s)$ と書けば同じ曲線の弧長パラメーターによる表示を表すものとする. また t による微分を $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ で, s による微分を $\mathbf{c}', \mathbf{c}''$ で表す.

問題 1.1. 正則曲線の長さはパラメーターの取り方によらないことを示せ.

問題 1.2. $\mathbf{c}(t)$ が正則で $\frac{dt}{du} > 0$ のとき $\mathbf{c}(u)$ も正則になることを示せ.

問題 1.3. 曲線 $\mathbf{c}(t) = (t, a \cosh(t/a))$ (懸垂線) を弧長パラメーターによって表示せよ.

1.2 平面曲線の曲率

定義 1.3. 正則平面曲線 $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ について $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{|\dot{\mathbf{c}}|} \dot{\mathbf{c}}$ を単位接線ベクトル, これを正の向きに 90 度回転したベクトル $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1$ を単位法線ベクトル, 基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ を平面曲線 $\mathbf{c}(t)$ の **Frenet 枠** と呼ぶ.

注意. (1) 曲線は正則性を仮定しているので $|\dot{\mathbf{c}}| \neq 0$ である.

(2) 法線ベクトルの定義には平面曲線であることを利用している.

命題 1.4. $\dot{\mathbf{e}}_j = \sum_k \omega_j^k \mathbf{e}_k$ とおくとき $\omega_1^2 = -\omega_2^1$, $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$ が成り立つ.

証明. ω_j^k の定め方から $\omega_j^k = \dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k$ である. これと $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ を微分した式を組み合わせれば良い. □

定義 1.5. 正則平面曲線 $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ について

$$\kappa(t) = \frac{\omega_1^2}{|\dot{\mathbf{c}}(t)} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_1(t) \cdot \mathbf{e}_2(t)}{|\dot{\mathbf{c}}(t)} = \frac{\dot{x}j - \ddot{x}j}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^{3/2}}$$

を \mathbf{c} の $\mathbf{c}(t)$ における曲率という.

弧長パラメーターについては $\omega_1^2 = \kappa(s)$ であり次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.6. 正則曲線 $\mathbf{c}(t)$ についてその曲率を $\kappa(t)$ とする.

(1) 曲率はパラメーターのとりかたで不変である. すなわちパラメーターの変換 $\varphi : J \rightarrow I$, $t = \varphi(u)$ が $\frac{dt}{du} > 0$ を満たすとき $\mathbf{c}(\varphi(u))$ の曲率 $\tilde{\kappa}(u)$ について $\tilde{\kappa}(u) = \kappa(\varphi(u))$ が成り立つ.

(2) 曲率は向きを保つ合同変換で不変である. すなわち $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が回転と平行移動の合成で得られる写像のとき, $F \circ \mathbf{c}(t)$ の曲率 $\tilde{\kappa}(t)$ について $\tilde{\kappa}(t) = \kappa(t)$ が成り立つ.

(3) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が平面の裏返しであるとき, $F \circ \mathbf{c}(t)$ の曲率 $\tilde{\kappa}(t)$ について $\tilde{\kappa}(t) = -\kappa(t)$ が成り立つ.

証明. (1) Frenet 枠 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ はパラメーターによらないので $\mathbf{e}_j(t) = \mathbf{e}_j(u)$ である.

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{du} = \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \frac{dt}{du}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{du} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} \frac{dt}{du}$$

より曲率はパラメーターの取り方によらない.

(2)(3) 合同変換 F は 2 次直交行列 A と定ベクトル \mathbf{b} によって, $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ と表せる. $|A| = 1$ のときが回転の行列で, $|A| = -1$ のときが裏返しに対応する. $F \circ \mathbf{c}(t)$ の Frenet 枠が $\{A\mathbf{e}_1, |A|\mathbf{e}_2\}$ であり速度ベクトルの大きさは変わらないことから (2)(3) の結論を得る. \square

例. 半径 R の円周に反時計回りに向きを与えたものの曲率は $\frac{1}{R}$ であり, 時計回りに向きを与えた場合は $-\frac{1}{R}$ である.*1

問題 1.4. 楕円 $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ について Frenet 枠及び曲率を求めよ.

問題 1.5. $y = f(x)$ のグラフによる曲線の曲率を求めよ. ただし曲線の向きは x 座標が増大する方向にとる.

問題 1.6. $y = f(x)$ のグラフによる曲線が原点において x 軸に接しているとする. さらに, 原点での曲率を $\alpha > 0$ とする. 原点で x 軸に接する円 $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ は $r < 1/\alpha$ の時は原点の周りで曲線の上に, $r > 1/\alpha$ の時は原点の周りで曲線の下にあることを示せ.

問題 1.7. 極座標による曲線 $r = f(\theta)$ の曲率を求めよ. ただし曲線の向きは θ が増大する方向にとる.

問題 1.8. 双曲線 $\mathbf{c}(t) = (\cosh t, \sinh t)$ の曲率を求めよ.

問題 1.9. 弧長パラメーターによる正則曲線 $\mathbf{c}(s)$ について $\mathbf{c}'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ とおくと, $\theta'(s) = \kappa(s)$ が成り立つことを示せ.

問題 1.10. 弧長パラメーターによる正則曲線 $\mathbf{c}(s)$ について $|\mathbf{c}''(s)| = |\kappa(s)|$ が成り立つことを示せ.*2

1.3 平面曲線に関するいくつかの定理

向きを保つ合同変換で曲線に移しても曲率は変わらない. 実はこの逆も成立する.

定理 1.7. 弧長パラメーターによる二つの正則曲線 $\mathbf{c}_1(s), \mathbf{c}_2(s)$ について $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ が成り立つとき, 向きを保つ合同変換 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \circ F$ を満たすものが存在する.

証明. 必要なら向きを保つ合同変換によって, $\mathbf{c}_1(0) = \mathbf{c}_2(0), \mathbf{c}'_1(0) = \mathbf{c}'_2(0)$ と仮定して差し支えない. それぞれの Frenet 枠を 2 次直交行列とみなして $F_1(s), F_2(s)$ とおく. 曲率の定義から

$$F'_j(s) = F_j(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

また直交行列であることから ${}^t F_j F_j = F_j {}^t F_j = E$ (単位行列) である.

$$\frac{d}{ds} (F_1 {}^t F_2) = (F_1)' {}^t F_2 + F_1 {}^t (F_2)' = F_1 \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} {}^t F_2 + F_1 \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} {}^t F_2 = 0$$

*1 この事実から $\frac{1}{|\kappa(t)|}$ を曲線 \mathbf{c} の曲率半径という. 高速道路の周り具合を表すには曲率半径が用いられる.

*2 速度 1 で等速運動している物体の加速度の大きさが曲率の大きさであることを表している.

なので $F_1'F_2$ は一定だが $F_1(0) = F_2(0)$ より $F_1'F_2 = E$ を得る. よって $F_1(s) = F_2(s)$ が成り立つ. その第 1 列から $\mathbf{c}'_1(s) = \mathbf{c}'_2(s)$ であり, $\mathbf{c}_1(0) = \mathbf{c}_2(0)$ と合わせて $\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}_2(s)$ を得る. \square

正則平面曲線 $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ が閉曲線とは \mathbf{c} が \mathbb{R} 上の周期 $b - a$ の滑らかな写像に拡張できることを言う. 単純閉曲線とは, 閉曲線であって $[a, b]$ 上単射であることを言う. 卵形線 (凸閉曲線) とは, 単純閉曲線であって \mathbf{c} の像と直線との交わりが高々 2 点であることを言う.

定理 1.8 (Mukhopadhyaya). 卵形線 \mathbf{c} 上には少なくとも 4 つの頂点 ($\kappa'(s) = 0$ を満たす点) が存在する.

証明. 閉曲線の曲率は連続な周期関数なので最大値及び最小値をとる. これは頂点なのでこれ以外に頂点が存在しなかったとして議論する.

まずパラメーター $\mathbf{c} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を弧長パラメーターで, かつ $s = 0$ で曲率最小, $s = a$ で曲率最大となるようにとる. $(0, a)$ 上 $\kappa'(s) > 0$, (a, l) 上 $\kappa'(s) < 0$ となる. また向きを保つ合同変換によって $\mathbf{c}(0)$ 及び $\mathbf{c}(a)$ を x 軸上におく. 卵形線なので他に x 軸と交わる点はないので $(0, a)$ 上では $y > 0$ の部分に (a, l) 上では $y < 0$ の部分にあるとして差し支えない. $\mathbf{c}(s) = (x(s), y(s))$ とすれば

$$(\mathbf{e}_1)' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \kappa \mathbf{e}_2 = \kappa \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

である. 以上から

$$0 < \int_0^l \kappa'(s)y(s)ds = - \int_0^l \kappa(s)y'(s)ds = \int_0^l x''(s)ds = [x'(s)]_0^l$$

であるが, これは閉曲線であることから 0 であり矛盾である.

頂点が 3 つの場合は, κ の極大と極小は 1 つずつなので, それを $\mathbf{c}(0)$, $\mathbf{c}(a)$ として同様に議論すれば矛盾が生じる. ゆえに頂点は少なくとも 4 つある. \square

次に正則閉曲線の回転数を定義する.

命題 1.9. 正則閉曲線 \mathbf{c} について

$$m_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s)ds, \quad l = \mathbf{c} \text{ の長さ}$$

は整数でありこれを \mathbf{c} の回転数という. 回転数は一般のパラメーターでは

$$m_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) |\dot{\mathbf{c}}| dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt$$

で与えられる.

証明. 正則閉曲線を弧長パラメーターでとり

$$\mathbf{c}'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

と表す. θ は \mathbf{c}' の偏角であり, $\theta(0)$ を決めてやることによって $[0, l]$ 上の関数として定めることができる. ただし周期関数にはならず整数 m によって $\theta(l) = \theta(0) + 2\pi m$ となる.

$$\int_0^l \kappa(s)ds = \int_0^l \theta'(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi m$$

により結論を得る. 後半は演習問題とする. \square

この証明からわかるように, 回転数は $\mathbf{c}'(s)$ の偏角を追跡することによって求めることができる. また曲線を少し変形しても回転数は変わらないことが予想される. これを定理として記述するために次の概念を用意する. 二つの正則閉曲線 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ について, C^2 級写像

$$C : [0, 1] \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad C(0, t) = \mathbf{c}_0(t), \quad C(1, t) = \mathbf{c}_1(t)$$

でありかつ $\mathbf{c}_u(t) = C(u, t)$ が正則閉曲線であるものが存在するとき、 \mathbf{c}_0 と \mathbf{c}_1 は正則ホモトピックであるという。

一般のパラメーターによる回転数の定義式を見れば、 $\mathbf{c}_u(t)$ の回転数は u に関して連続である。取る値は整数なので $\mathbf{c}_u(t)$ の回転数は一定である。ゆえに \mathbf{c}_0 と \mathbf{c}_1 が正則ホモトピックなら回転数は一致する。実はこの逆も成立する。

定理 1.10 (Whitney). 二つの正則閉曲線 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ について正則ホモトピックであることと回転数が等しいことは同値である。

証明. 回転数が等しいとし m とおく。また正則ホモトピーで相似変形し \mathbf{c}_0 と \mathbf{c}_1 の長さを両方とも 1 にしておく。さらに向きを保つ合同変換によって

$$\mathbf{c}_0(0) = \mathbf{c}_1(0) = (0, 0), \quad \mathbf{c}'_0(0) = \mathbf{c}'_1(0) = (1, 0)$$

としておく。 $\mathbf{c}'_j(s) = (\cos \theta_j(s), \sin \theta_j(s))$ を $\theta_j(0) = 0$ となるように取る。回転数が m なので $\theta_j(1) = 2\pi m$ である。

$$\Theta(u, s) = (1-u)\theta_0(s) + u\theta_1(s) \quad D(u, s) = \int_0^s (\cos \Theta(u, t), \sin \Theta(u, t)) dt$$

とすれば、 $\Theta(0, s) = \theta_0(s)$, $\Theta(1, s) = \theta_1(s)$ であり、 $D(0, s) = \mathbf{c}_0(s)$, $D(1, s) = \mathbf{c}_1(s)$ を得る。さらに

$$C(u, s) = D(u, s) - sD(u, 1)$$

とおけば、

$$C(u, s+1) - C(u, s) = D(u, s+1) - D(u, s) - D(u, 1) = \int_s^{s+1} - \int_0^1$$

であるが、被積分関数 $(\cos \Theta(u, t), \sin \Theta(u, t))$ は t に関して周期 1 なので $C(u, s+1) = C(u, s)$ を得る。ゆえに $\mathbf{c}_u(s) = C(u, s)$ は周期 1 の閉曲線である。また、 $D(0, 1) = D(1, 1) = (0, 0)$ なので、 $C(0, s) = \mathbf{c}_0(s)$, $C(1, s) = \mathbf{c}_1(s)$ も成立する。

次に $\mathbf{c}_u(s)$ が正則閉曲線であることを示す。

$$\mathbf{c}'_u = \frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial D}{\partial s} - D(u, 1) = (\cos \Theta(u, s), \sin \Theta(u, s)) - \int_0^1 (\cos \Theta(u, t), \sin \Theta(u, t)) dt$$

であるが、第 1 項のベクトルの大きさは 1 である。第 2 項は単位ベクトルの $[0, 1]$ 区間での積分なので、大きさは 1 以下であり 1 になるのは、被積分関数が定ベクトルの場合に限られる。ここで $m \neq 0$ の場合は、定ベクトルではありえないので $|\mathbf{c}'_u| \neq 0$ であり、正則閉曲線であることがわかる。問題が残るのは $m = 0$ で $\Theta(u, t) \equiv 0$ となる u が存在する場合に限られる。しかしそれは $\theta_1(s)$ が $\theta_0(s)$ の定数倍になる場合なので、予め \mathbf{c}_1 を変形しておけばそのようなことは起こらない。ゆえにすべての場合に正則ホモトピックであることがわかる。□

一方、以下のように自己交点に符号をつけるというアイデアでも計算できる。

正則閉曲線 $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ について $a \leq t_1 < t_2 < b$ で $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ となる点を自己交点とよぶ。自己交点がすべて 2 本の曲線が接することなく交わっているとき、ジェネリック (生成的) ^{*3} という。ジェネリックな閉曲線について、基点 P を一つ定めてやれば各自己交点 Q に符号 $\text{sgn}_P Q$ を

$$\text{sgn}_P Q = \begin{cases} +1 & Q \text{ において最初に通るときの方向に関して後からの進行が左から右に横切るとき} \\ -1 & Q \text{ において最初に通るときの方向に関して後からの進行が右から左に横切るとき} \end{cases}$$

によって定めることができる^{*4}。

^{*3} 数学の様々な分野でよく使われる用語である。ジェネリックな場合に証明できれば連続性の概念で一般の場合の証明になる。

^{*4} 証明は山田-梅原「曲線と曲面」裳華房にある。

定理 1.11 (Whitney の公式). ジェネリックな閉曲線において, 基点 P を自己交点ではなく, かつ (必要なら向きを変えて) 進行方向右側に無限遠が見えるように取れば, 回転数は各自己交点の符号の和に 1 を加えたものに等しい. 特に単純閉曲線の回転数は ± 1 である.

正則閉曲線 c について

$$\mu = \int_0^l |\kappa(s)| ds, \quad l = c \text{ の長さ}$$

を c の全曲率という.

定理 1.12. 正則閉曲線について $\mu \geq 2\pi$ が成り立つ. 等号は卵形線の場合に限る.

証明. (1) 弧長パラメーターをとれば $c'(s) = (x'(s), y'(s))$ は単位円周の上を動くが, これが半円を含むことを示す.

半円に含まれているとき, 回転によって $y'(s) \geq 0$ が成り立つとして差し支えない. 周長を l とすると

$$0 = y(l) - y(0) = \int_0^l y'(s) ds \geq 0$$

が成り立つので, $y'(s) \equiv 0$ を得る. 曲線は x 軸に平行になり正則閉曲線になりえない. ゆえに $c'(s) = (x'(s), y'(s))$ は半円を含む.

(2) $c'(0) = -c'(a) = c'(l) = (1, 0)$ とする. $c'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ とおけば

$$\mu = \int_0^a |\kappa(s)| ds + \int_a^l |\kappa(s)| ds \geq \left| \int_0^a \theta'(s) ds \right| + \left| \int_a^l \theta'(s) ds \right| = |\theta(a) - \theta(0)| + |\theta(l) - \theta(a)| \geq 2\pi$$

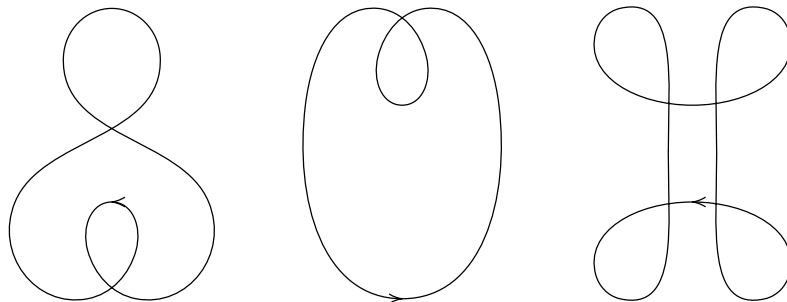
(3) 全曲率は回転数の絶対値より大きいので等号が成り立つのは回転数が ± 1 または 0 である. 回転数が ± 1 のときは $\kappa(s)$ の符号が一定になるので卵形線になる. 回転数が 0 の場合は (2) と同じ設定によって $(0, a)$ 及び (a, l) 上で $\theta'(s)$ は定符号になる. $\theta(s)$ は 0 から単調に $\pm\pi$ に変化したあと, また単調に 0 に戻ってくる. ゆえに $c'(s)$ は半円に含まれるが (1) より正則閉曲線になりえない. よって回転数が 0 の場合は等号は成立しない. \square

問題 1.11. 楕円 $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$ の頂点を求めよ. ただし $0 < a < b$ とする.

問題 1.12. 楕円 $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$ の回転数を曲率の積分によって求めよ.

問題 1.13. 正則閉曲線 c とそれをある直線で線対称移動 (この写像を F とする) して得られる正則閉曲線 $F \circ c$ について $m_{F \circ c} = -m_c$ が成り立つことを示せ. またこの事実を用いてレムニスケート $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の回転数が 0 であることを示せ.

問題 1.14. 次の曲線の回転数を求めよ. また, 回転数が 1 のものがあればその曲線と円周との正則ホモトピーを作れ.



問題 1.15. $f(z)$ を閉円板 $|z| \leq 1$ を含む領域で定義された正則関数で $|z| = 1$ の上で $f'(z) \neq 0$ を満たすとする.

(1) $\mathbf{c}(t) = f(e^{it})$ は正則閉曲線であることを示せ.

(2) $\mathbf{c}(t)$ の曲率は次に等しいことを示せ. なお, $(x + iy)(u - iv) = (xu + yv) - i(xv - yu)$ に注意せよ.

$$\kappa(t) = \frac{-\operatorname{Re}(f'' \bar{f}' e^{it}) + f' \bar{f}'}{(f' \bar{f}')^3/2}$$

(3) \mathbf{c} の回転数は $|z| < 1$ にある $f'(z)$ のゼロ点の個数の和 (重複度を考慮する) に 1 を加えたものに等しいことを示せ.

1.4 空間内の曲線

弧長パラメーターによる正則空間曲線 $\mathbf{c}(s)$ について加速度ベクトル $\mathbf{c}''(s)$ の大きさ $\kappa(s) = |\mathbf{c}''(s)|$ を曲率と呼ぶ. 空間曲線では進行方向を向いて右左という概念が無いので, 曲率は 0 または正数として定める.

正則空間曲線 $\mathbf{c}(s)$ の曲率が常に正であるとき, $\mathbf{c}''(s)$ は $\mathbf{0}$ ではないのでその方向に単位ベクトル \mathbf{e}_2 をとる,

$$\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{c}'(s), \quad \mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{e}_1'(s), \quad \mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$$

は正規直交基底になる. これを **Frenet 枠** という. Frenet 枠について

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'(s) & \mathbf{e}_2'(s) & \mathbf{e}_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) & \mathbf{e}_2(s) & \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. \mathbf{e}_2 を主法線ベクトル, \mathbf{e}_3 を従法線ベクトルとよぶ. $\tau(s)$ を $\mathbf{c}(s)$ の捩率という.

定理 1.13. 二つの正則空間曲線 $\mathbf{c}(s)$ と $\bar{\mathbf{c}}(s)$ について, $\kappa(s) = \bar{\kappa}(s)$ および $\tau(s) = \bar{\tau}(s)$ が常に成り立つことと, 向きを保つ合同変換で移りあうこととは同値である.

証明. 定理 1.7 の証明と同様に議論できる. 演習問題にする. □

定理 1.14. 二つの関数 $\kappa(s) > 0$ および $\tau(s)$ が与えられたとき, 弧長パラメーターによる空間曲線 $\mathbf{c}(s)$ で曲率が $\kappa(s)$, 捩率が $\tau(s)$ になるものが存在する.

証明. 3 次正方行列に関する微分方程式

$$\frac{dF}{ds} = F \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} = FK \quad F(0) = E$$

を考える. これは線形常微分方程式なので解を持つ. ${}^tK = -K$ より

$$\frac{d}{ds}(F^t(F)) = F^t F + F^t F' = FK^t F + F^t(FK) = FK^t F - FK^t F = O$$

より $F^t F = F(0)^t F(0) = E$ であり $F(s)$ は直交行列である. $F(s)$ の第 1 列を積分すれば求める空間曲線を得る. □

問題 1.16. 定理 1.13 を証明せよ.

問題 1.17. 常螺旋 (helix) $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ を弧長パラメーターによって表示し, その Frenet 枠, 曲率, 捩率を求めよ.

問題 1.18. 正則曲線 \mathbf{c} を一般のパラメーターによって表わすとき Frenet 枠は

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}}|}, \mathbf{e}_2 = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times (\ddot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{c}})}{|\dot{\mathbf{c}} \times (\ddot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{c}})|}, \mathbf{e}_3 = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}$$

と表わせることを示せ. またこの表示を利用して次を示せ.

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}, \tau(t) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \mathbf{c}^{(3)})}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} \quad \mathbf{c}^{(3)} = \frac{d^3 \mathbf{c}}{dt^3}$$

ただし外積ベクトルに関する以下の等式は使ってよい.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

問題 1.19. 楕円の螺旋 $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$ の曲率及び捩率を求めよ.

問題 1.20. 空間曲線 $\mathbf{c}(t)$ について, \mathbf{c} の像がある 2 次元平面に含まれることと, 捩率が恒等的に 0 であることは同値であることを示せ.

2 曲面

2.1 二次形式

V を n 次元実線形空間とする. 対称双線形写像

$$\rho: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

を V 上の二次形式とよぶ. 二次形式は基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ に関して対称行列

$$A = \begin{pmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & & & \\ \cdots & & & \rho(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) & & \cdots \\ & & & & & \\ & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

によって表現される.

二次形式による V 上の関数 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ が $\mathbf{0}$ 以外のすべてのベクトルについて正であるとき, ρ を正定値であるという. 正定値二次形式を内積という.

二次形式の表現行列は基底の変換によって tPAP に変わるので, 二次形式の固有値は意味をなさない. しかし, 内積 g を一つ固定したとき, g に関する ρ の固有値・固有ベクトルを定めることができる. 具体的には, 基底を g に関する正規直交基底に限定し, その表現行列の固有値・固有ベクトルを利用する. 正規直交基底の変換行列は直交行列なので ${}^tPAP = P^{-1}AP$ であり, 固有値・固有ベクトルが意味を持つ.

内積 g の表現行列を G , 二次形式 ρ の表現行列を A とする. 基底を g に関する正規直交基底に変換すれば, 表現行列はそれぞれ tPGP , tPAP に変換される. さらに正規直交基底なので ${}^tPGP = E$ である. よって g に関する ρ の固有値は

$$|{}^tPAP - \lambda E| = |{}^tPAP - \lambda {}^tPGP| = |P|^2 |A - \lambda G| = 0$$

の解である. なお tPAP の固有ベクトル \mathbf{p} は, $(A - \lambda G)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ を満たすが, 正規直交基底に関し \mathbf{p} を座標とするベクトルと, もとの基底に関し $P\mathbf{p}$ を座標とするベクトルは同じなので, これを ρ の g に関する固有ベクトルとよぶ.

さて, 1 年次の線形代数で次のことを学んだ.

- 対称行列 A の固有値は全て実数である.

- A の固有値の最大を M , 最小を m とするとき, 次が成り立つ.

$$m\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \leq M\|\mathbf{x}\|^2$$

- この式において等号は \mathbf{x} が m, M の固有ベクトルの時に成り立つ.

これは一般の二次形式についても成立する.

定理 2.1. 内積 g に関する二次形式 ρ の固有値の最大を M 最小を m とおく. 次が成り立つ.

$$mg(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq Mg(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

等号は \mathbf{x} が内積 g に関する二次形式 ρ の固有ベクトルの時に成り立つ.

証明. g に関する正規直交基底をとって示せば良い. □

2.2 第 1 基本形式

定義 2.2. \mathbb{R}^3 内の曲面 S とは uv 平面の領域 D からの滑らかな写像

$$\mathbf{p}: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

であって \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v は一次独立なものをいう.

注意. (1) $S = \mathbf{p}(D) \subset \mathbb{R}^3$ とみなして差し支えない. $(u, v) \in D$ は S の点 $\mathbf{p}(u, v)$ の座標とみなし D は座標の取りうる値の範囲だと考えるべきだ. 以下では $\mathbf{u} = (u, v) \in S$ のような書き方をすることが注意すること.

(2) 一次独立の仮定から S は実際に滑らかな曲面である. しかし \mathbf{p} の単射性は仮定しないので自己交差を持つことを許容している. 空間内の曲面の自己交差は一般には曲線である.

定義 2.3. $\mathbf{u} \in S$ において $\mathbf{p}_u(\mathbf{u})$ と $\mathbf{p}_v(\mathbf{u})$ の生成する 2 次元部分空間

$$T_{\mathbf{u}}S = \{\xi\mathbf{p}_u(\mathbf{u}) + \zeta\mathbf{p}_v(\mathbf{u}) \mid \xi, \zeta \in \mathbb{R}\}$$

を S の \mathbf{u} における接平面と呼ぶ.

注意. 滑らかな曲面の接平面は幾何学的にもイメージしやすいだろう. 重要なのは曲面が二つのパラメーターを使って与えられているので接平面の自然な基底が与えられていることだ. 接ベクトルはこの基底によって二つの座標 (ξ, ζ) で表わされる.

変数変換 $(u(s, t), v(s, t))$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$ が正則であるとき $\mathbf{p}(s, t) = \mathbf{p}(u(s, t), v(s, t))$ も曲面を定める. これはパラメーターが違うだけで同じ曲面 S である. $\mathbf{p} \in S$ について $T_{\mathbf{p}}S$ の基底は座標に関して取るので

$$(\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_t) = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v) \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

と変換される. 基底の変換の行列は変数変換のヤコビ行列である.

定義 2.4. $T_{\mathbf{u}}S$ の内積

$$(\xi_1\mathbf{p}_u + \zeta_1\mathbf{p}_v) \cdot (\xi_2\mathbf{p}_u + \zeta_2\mathbf{p}_v) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \zeta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u, F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v$$

を S の第 1 基本形式とよぶ. また E, F, G を第 1 基本量という. 第 1 基本形式は $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv$ という理解の下に

$$I = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = Edu + 2Fdudv + Gdv^2$$

と表記される.

内積は \mathbb{R}^3 の標準的な内積を利用しているのでパラメーターのとり方にはよらない. ただし基底がパラメーターのとり方によって変わるので E, F, G はパラメーターのとり方に依存する. 以下は第 1 基本形式から決まる幾何学的量である. \mathbb{R}^3 の内積を利用しているのでパラメーターのとり方には依存しない.

- $\mathbf{v} = \xi \mathbf{p}_u(\mathbf{u}) + \zeta \mathbf{p}_v(\mathbf{u}) \in T_u S$ について, その大きさは

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{E(\xi)^2 + 2F\xi\zeta + G(\zeta)^2} = \sqrt{\mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_u S$ についてそのなす角 θ は

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

- S 上の曲線 $c(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$ について $\dot{c}(t) = \dot{u}(t)\mathbf{p}_u + \dot{v}(t)\mathbf{p}_v$ より, その長さは

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2} dt$$

- コンパクト集合 $U \subset D$ について $\mathbf{p}(U) \subset S$ の面積は

$$\iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv$$

で与えられる. $d\mu = \sqrt{EG - F^2} du dv$ を曲面 S の面積要素とよぶ.

以下いくつかの曲面の例とそのパラメーター表示を与える.

例 (楕円面). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \mathbf{p}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$

例 (一葉双曲面). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \mathbf{p}(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$

例 (二葉双曲面). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \mathbf{p}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$

例 (楕円放物面). $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \mathbf{p}(u, v) = (u, v, u^2/a^2 + v^2/b^2), \quad \mathbf{p}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$

例 (双曲放物面). $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \mathbf{p}(u, v) = (u, v, u^2/a^2 - v^2/b^2), \quad \mathbf{p}(u, v) = (a(u+v), b(u-v), 4uv)$

例 (輪環面, トーラス). xz 平面上の曲線 $(x-R)^2 + z^2 = r^2, R > r > 0$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面,
 $\mathbf{p}(u, v) = ((R+r \cos u) \cos v, (R+r \cos u) \sin v, r \sin u)$

例 (回転面). xz 平面の $x > 0$ の部分にある曲線 $x = f(u) > 0, z = g(u)$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面
 $\mathbf{p}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$

例 (柱面). xy 平面上の曲線 $x = f(u), y = g(u)$ を z 軸方向に平行移動して得られる曲面
 $\mathbf{p}(u, v) = (f(u), g(u), v)$

例. C^2 級関数 $z = f(x, y)$ のグラフ, $\mathbf{p}(u, v) = (u, v, f(u, v))$

問題 2.1. $u = u(s, t), v = v(s, t)$ をパラメーターの変換 (ヤコビ行列が正則) とするとき, (s, t) による第 1 基本量を $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ と表わすとき次が成り立つことを示せ.

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

問題 2.2. パラメーターの変換 $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ によって面積要素は不変なことを示せ. すなわち次を示せ.

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} ds dt = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

問題 2.3. 例にあげた曲面とパラメーターについて, 第 1 基本形式を求めよ.

問題 2.4. 輪環面の面積を求めよ.

問題 2.5. 回転面の面積を u に関する積分の形で与えよ.

問題 2.6. 柱面 $\mathbf{p}(u, v) = (f(u), g(u), v)$, $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$ の面積は曲線 $(f(u), g(u))$ の長さに $d - c$ をかけたものに等しいことを示せ.

問題 2.7. $z = f(x, y)$ のグラフを $\mathbf{p}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ で表わすとき

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}$$

であることを示せ.*5

2.3 第 2 基本形式

S 内の曲線 $\gamma(s) = \mathbf{p}(u(s), v(s))$ を弧長パラメーターによる正則空間曲線とする. $\gamma(s)$ の加速度ベクトル $\gamma''(s)$ を S に接する方向と法線方向に分け

$$\gamma''(s) = \kappa_g + \kappa_n$$

と表わす. $\kappa_g \in T_{\gamma(s)}S$ を測地的曲率ベクトル, κ_n を法曲率ベクトルとよぶ. S の単位法線ベクトル

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} \quad *6$$

について, 法曲率ベクトルとの内積をとれば

$$\kappa_n = \kappa_n \cdot \mathbf{e} = \gamma''(s) \cdot \mathbf{e} = \frac{d}{ds} (\mathbf{p}_u u' + \mathbf{p}_v v') \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{p}_{uu} (u')^2 + 2\mathbf{p}_{uv} u' v' + \mathbf{p}_{vv} (v')^2) \cdot \mathbf{e}$$

これを γ の法曲率という. この式から法曲率は曲率とはいっても γ の接ベクトルに対して決まる量であり, 加速度ベクトルには依存しない. これを $\mathbf{v} = \gamma' \in T_u S$ 方向の法曲率という. \mathbf{v} 方向の法曲率は, \mathbf{v} と \mathbf{e} の張る平面と S との切り口の作る曲線の曲率である.

定義 2.5. $T_u S$ 上の 2 次形式

$$\mathbb{I} = L du du + 2M du dv + N dv dv, \quad L = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e}, \quad M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e}, \quad N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e}$$

を第 2 基本形式とよぶ. L, M, N を第 2 基本量とよぶ. $\mathbb{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ は \mathbf{v} 方向の法曲率である.

定義 2.6. 内積 \mathbb{I} に関する \mathbb{I} の固有値を主曲率と呼ぶ. またその固有ベクトルの方向を主方向と呼ぶ. 主方向の法曲率は主曲率である.

命題 2.7. 主曲率は

$$\left| \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right| = (EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + (LN - F^2) = 0$$

*5 1 年次の微分積分で学習したグラフの曲面積の公式を復習せよ.

*6 単位法線ベクトルは向きを変えると -1 倍になる.

の解である。この解 κ について主方向は

$$\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} - \kappa \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の $\mathbf{0}$ でない解に対応する接ベクトルの方向である。

証明. 定理 2.1 を使えば良い. □

主曲率と主方向によって各方向の法曲率は決定する。

定理 2.8 (Euler の公式). $\mathbf{u} \in S$ での主曲率を κ_1, κ_2 とし $\kappa_1 \neq \kappa_2$ とする。このときそれぞれの主方向は直交する。 κ_1 に対する主方向と単位ベクトル \mathbf{v} のなす角を φ とするとき、 \mathbf{v} 方向の法曲率は

$$\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$

である。この公式は $\kappa_1 = \kappa_2$ の場合も成立しているとみなしてよい。

証明. 座標軸の平行移動を行って、 \mathbf{u} を原点に移す。また回転移動を行って原点における単位法線ベクトルが $(0, 0, 1)$ になるようにする。このとき曲面は $z = f(x, y)$ のグラフとして実現され、 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ となる。曲面を $\mathbf{p}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ でパラメーター表示すれば $\mathbf{p}_u = (1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_v = (0, 1, 0)$ なので第 1 基本形式についての正規直交基底になる。このとき、第 2 基本形式は対称行列で表示され、主曲率はその固有値に、主方向はその固有ベクトルの方向になる。対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するので、主方向は直交する。

さらに z 軸を中心とする座標軸の回転によって κ_1 に対する主方向を x 軸方向に、 κ_2 に対する主方向を y 軸方向に取る。このとき第 2 基本形式 Π は対角化され、

$$\Pi = \kappa_1 du du + \kappa_2 dv dv$$

となる。ゆえに $\mathbf{v} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ 方向の法曲率は次で与えられる。

$$\kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$

$\kappa_1 = \kappa_2$ の場合は主方向とのなす角 φ は意味を持たないが、

$$\Pi = \kappa_1 du du + \kappa_1 dv dv$$

が成り立つので全ての方向の法曲率が κ_1 になる。ゆえに、この等式が成り立つとして差し支えない。 □

定義 2.9. 主曲率の積 K を **Gauss 曲率**、主曲率の相加平均 H を **平均曲率** と呼ぶ。

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

注意. 主曲率、ガウス曲率と平均曲率は曲面 S 上の関数である。

例. 少し大変な計算になるが楕円面 (例 2.1) のガウス曲率と平均曲率を計算しよう。 $\mathbf{p}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$ について

$$\mathbf{p}_u = (-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u)$$

$$\mathbf{p}_v = (-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{p}_{uu} = (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -c \sin u)$$

$$\mathbf{p}_{uv} = (a \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{p}_{vv} = (-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, 0)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\Delta} (-bc \cos u \cos v, -ca \cos u \sin v, -ab \sin u)$$

なお $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ なので $\cos u \geq 0$ である. $\Delta^2 = b^2 c^2 \cos^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \sin^2 u = a^2 b^2 c^2 (x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)$ であり \mathbf{e} の大きさを 1 にするための係数である.

$$\begin{aligned} E &= a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u \\ F &= (a^2 - b^2) \cos u \sin u \cos v \sin v \\ G &= a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v \\ L &= \frac{abc}{\Delta}, \quad M = 0, \quad N = \frac{abc \cos^2 u}{\Delta} \end{aligned}$$

以上から $EG - F^2 = \Delta^2 \cos^2 u$, $LN - M^2 = a^2 b^2 c^2 \cos^2 u / \Delta^2$ を得る.

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 (x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4)^2} \\ H &= \frac{abc(a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}{2\Delta^3} \end{aligned}$$

曲面上の点 $\mathbf{a} = \mathbf{p}(\alpha, \beta) \in S$ をとり \mathbf{p} での単位法線ベクトルを \mathbf{n} とおく. $f(u, v) = \mathbf{p}(u, v) \cdot \mathbf{n}^{*7}$ とおけば,

$$f_u(\alpha, \beta) = f_v(\alpha, \beta) = 0, \quad f_{uu}(\alpha, \beta) = L, \quad f_{uv}(\alpha, \beta) = M, \quad f_{vv}(\alpha, \beta) = N$$

が成り立つ. このことと 1 年次の微分積分で学習した極値問題を使えば

定理 2.10. $\mathbf{a} \in S$ において $K > 0$ のとき S は \mathbf{a} の周りで \mathbf{a} での接平面の一方の側にある. $K < 0$ のときは両側にあり曲面は鞍状である. $K > 0$ の点を楕円点, $K < 0$ の点を双曲点, $K = 0$ の点を放物点という.

証明. 向きを保つ合同変換によって $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ としておく. このとき S は 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフであり, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ を満たしている. また $LN - M^2 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2$ である. \mathbf{p} が楕円点ならば f は $(0, 0)$ で極値をとるのでグラフは xy 平面の上部 (または下部) にある. また \mathbf{p} が双曲点ならば f は極値を取らないのでグラフは xy 平面の両側にまたがる. \square

問題 2.8. 向きを保つパラメーターの変換 $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ によって第 2 基本形式が不変なことを計算によって証明せよ. すなわち (u, v) による第 2 基本量を L, M, N , (s, t) による第 2 基本量を $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ とするとき

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

問題 2.9. 曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ のガウス曲率と平均曲率をそれぞれ K, H とする. 曲面を c 倍に拡大 (縮小) した曲面 $c\mathbf{p}(u, v)$ のガウス曲率と平均曲率は $K/c^2, H/c$ であることを示せ.

問題 2.10. 柱面 (例 2.8) の第 1 基本形式と第 2 基本形式を求めよ. ただし $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ とせよ.

問題 2.11. 回転面 (例 2.7) のガウス曲率及び平均曲率を求めよ. ただし $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ とせよ.

問題 2.12. ガウス曲率と平均曲率がともに 0 である曲面では法曲率は常に 0 になることを示せ. またそのような曲面はある平面の一部になることを示せ.

*7 これは \mathbf{a} から \mathbf{n} 方向の数直線に垂線を下ろしたときの座標である.

2.4 曲率に関連するいくつかの概念

平均曲率がいたるところ 0 になるような曲面を**極小曲面**と呼ぶ。この用語は次の定理に基づく。

定理 2.11. 曲面 S の点 $a \in S$ で $H(a) \neq 0$ であるとき、曲面を a の周りで微小に変形して面積をより小さくすることができる。

証明. $p: U \rightarrow S$ を $p(0,0) = a$ を満たす a のまわりでの S のパラメーター表示とする。 $\lambda(u,v)$ を以下を満たす C^∞ 級関数とする。

- $0 \leq \lambda(u,v) \leq 1, \lambda(0,0) = 1$
- $(0,0) \in V \subset \bar{V} \subset U$ で $U - V$ 上 $\lambda \equiv 0$

また,

$$p_s(u,v) = p(u,v) + s\lambda(u,v)H(u,v)e(u,v)$$

と定める。 p_s は p を a のまわりで微小に変形したものである。 p_s の第 1 基本量を E_s, F_s, G_s とおけば

$$E_s = E + s\lambda HL + O(s^2), \quad F_s = F + s\lambda HM + O(s^2), \quad G_s = G + s\lambda HN + O(s^2)$$

ゆえに

$$E_s G_s - (F_s)^2 = EG - F^2 + s\lambda(HGL + EN - 2FM) + O(s^2) = (EG - F^2)(1 + 2s\lambda H^2 + O(s^2))$$

であり,

$$\sqrt{E_s G_s - (F_s)^2} = \sqrt{EG - F^2}(1 + s\lambda H^2 + O(s^2))$$

を得る。 p_s の面積を $A(s)$ とおけば

$$A'(0) = \iint_S \lambda H^2 d\mu$$

であり、定め方からこれは正である。ゆえに $A(0)$ は極小値ではなく面積をより小さくすることができる。 □

針金の枠に石鹸膜を張るとき、表面張力によって面積は（重力の影響を無視すれば）最小になる。この定理は石鹸膜が極小曲面であることを導く。

単位法線ベクトル e を S 上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ に沿って微分する。 $e \cdot e = 1$ より

$$\frac{d}{dt}(e(\gamma(t)) \cdot e(\gamma(t))) = 0$$

なので

$$\frac{d}{dt}(e(\gamma(t))) = e_u u' + e_v v' \in T_{\gamma(t)} S$$

である。これから

$$A: T_p S \rightarrow T_p S \quad A(\xi p_u + \zeta p_v) = -e_u \xi - e_v \zeta$$

と定め型作用素とよぶ。 A は

$$g: S \rightarrow S^2 \quad g(p) = e$$

の写像の微分の -1 倍である。この写像 g を**ガウス写像**（ガウスの球面表示）とよぶ。

命題 2.12. (1) $\Pi(u, v) = I(A(u), v)$

(2) A の固有値は主曲率、固有ベクトルは主方向である。

証明. (1) $\mathbf{u} = \xi_1 \mathbf{p}_u + \zeta_1 \mathbf{p}_v$, $\mathbf{v} = \xi_2 \mathbf{p}_u + \zeta_2 \mathbf{p}_v$ とおく.

$$\begin{aligned} I(A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) &= (-\mathbf{e}_u \xi_1 - \mathbf{e}_v \zeta_1) \cdot \xi_2 \mathbf{p}_u + \zeta_2 \mathbf{p}_v = -\xi_1 \xi_2 \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{p}_u - \xi_1 \zeta_2 \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{p}_v - \zeta_1 \xi_2 \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{p}_u - \zeta_1 \zeta_2 \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{p}_v \\ &= \xi_1 \xi_2 L + \xi_1 \zeta_2 M + \zeta_1 \xi_2 M + \zeta_1 \zeta_2 N = \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

(2) $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ が正規直交基底のとき Π の表現行列と A の表現行列が同一になることを見れば良い. \square

$\kappa_1 = \kappa_2$ のとき A はスカラー行列であり主方向は意味を持たない. このような点を^{せい}臍点という.

命題 2.13. p が臍点であることと p において $\Pi = \kappa I$ が成り立つことは同値である.

証明. 型作用素は第 1 基本形式に関する正規直交基底について対称行列で表現されるので対角化可能であり, 固有値が重複していればスカラー行列になる. ゆえに臍点においては $A = \lambda E$ であり

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = I(A(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \lambda I(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

\square

定理 2.14. 曲面 S のすべての点が臍点であるとき, S は平面または球面 (の一部) である.

証明. 曲面 S を $\mathbf{p}(u, v)$ で表しておく. 全ての点が臍点なので型作用素はスカラー倍になり $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ と表せる. これは $A(\xi \mathbf{p}_u + \zeta \mathbf{p}_v) = -\mathbf{e}_u \xi - \mathbf{e}_v \zeta$ より

$$\mathbf{e}_u = -\lambda \mathbf{p}_u, \quad \mathbf{e}_v = -\lambda \mathbf{p}_v$$

を意味する. $\mathbf{e}_{uv} = \mathbf{e}_{vu}$ より

$$\lambda_v \mathbf{p}_u + \lambda \mathbf{p}_{uv} = \lambda_u \mathbf{p}_v + \lambda \mathbf{p}_{vu}$$

なので, $\lambda_u = \lambda_v = 0$ を得る. すなわち, λ は定数である. $\lambda = 0$ の場合は, 第 2 基本形式が恒等的に 0 になるので, 曲面は平面 (の一部) になる. $\lambda \neq 0$ の場合には

$$\mathbf{p} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{e}$$

が定ベクトルになることから, その点を \mathbf{a} とおけば \mathbf{a} を中心とする半径 $1/|\lambda|$ の球面 (の一部) になる. \square

法曲率が 0 である方向を漸近方向と呼ぶ.

命題 2.15. 漸近方向と K の符号について以下が成り立つ.

- (1) 楕円点では漸近方向は存在しない.
- (2) 放物点で臍点でないとき, 漸近方向は一方向のみ存在する. 臍点の時は全ての方向が漸近方向なる.
- (3) 双曲点では漸近方向は二つ存在する.

さらに双曲点での接平面と S の交わりは漸近方向を接線を持つ 2 本の曲線になる.

証明. 定理 2.8 より漸近方向は

$$\kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi = 0$$

を満たす φ の方向なので (1)(3) は明らかである. 放物点で臍点でない場合は $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$ としてよいので, 漸近方向は κ_1 に関する主方向であり, $\varphi = 0$ の方向である. 放物点で臍点の場合は $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ なので, あらゆる方向が漸近方向である.

双曲点において定理 2.8 の証明と同じように S を $z = f(x, y)$, $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ のグラフとして表す. 接平面は xy 平面であり, 曲面と接平面の切り口は陰関数 $f(x, y) = 0$ のグラフになる. $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ であることから, 陰関数のグラフは $(0, 0)$ で交わる 2 本の滑らかな曲線になる. その一方を $\gamma(t)$, $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ とすればこれは xy 平面に含まれているので γ'' も xy 平面に接している. ゆえに $(0, 0)$ での法曲率は 0 であり, $\gamma'(0)$ は漸近方向と一致する. \square

問題 2.13. 回転面 $\mathbf{p}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ でガウス曲率が一定 a になるとき $f''(u) = -af(u)$ が成り立つことを示せ. 回転面で正定曲率であるもの, 負定曲率であるもの, 0 定曲率であるものの例を作れ.

問題 2.14. 輪環面 (例 2.6) のガウス曲率及び平均曲率を求めよ. また輪環面上でガウス曲率の積分が 0 になることを示せ.

問題 2.15. 回転面 $\mathbf{p}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ で極小曲面になるものを求めよ.

問題 2.16. 曲面 $x = 3u + 3uw^2 - u^3$, $y = v^3 - 3v - 3u^2v$, $z = 3(u^2 - v^2)$ は極小曲面であることを示せ. この曲面は Enneper の曲面と呼ばれ極小曲面の重要な例の一つである.

問題 2.17. 楕円面 (例 2.1) の臍点を求めよ.

問題 2.18. 曲面上の臍点でない点における主方向は直交することを示せ.

3 曲面の内在的幾何

第 1 基本形式は曲面自体の歪みを記述する. それによって 2.2 節で解説したように曲線の長さ, 角度, 面積などの量が決定する. このような量を内在的な量と呼ぶ. 例えば柱面は第 1 基本形式が平面と同じなので, 内在的量は平面と一致する. これは柱面が伸び縮みすることなく平面に重ね合わせることができることから自明である. この章では曲面の内在的幾何を扱う.

3.1 驚異の定理 (Theorema egregium)

第 2 基本形式は \mathbb{R}^3 内での曲面の曲がり具合 (主曲率, 法曲率) を定めた. これらは内在的量ではない. しかし主曲率の積として定義される Gauss 曲率は, 第 1 基本形式のみにしか依存しないことが分かる. この事実を発見した Gauss はこれを驚異の定理 (Theorema egregium) とよんだ. この節ではその証明を与える.

まず, 曲面のパラメーターは (u, v) ではなく (u^1, u^2) を用いる*8. また偏微分は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \varphi_{/j} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} = \varphi_{/21}$$

のように表す. 第 1 基本形式は

$$g_{11} = \mathbf{p}_{/1} \cdot \mathbf{p}_{/1} = E \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{p}_{/1} \cdot \mathbf{p}_{/2} = F \quad g_{22} = \mathbf{p}_{/2} \cdot \mathbf{p}_{/2} = G$$

によって

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

と表す. 同様に第 2 基本形式は

$$h_{11} = \mathbf{p}_{/11} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{p}_{/1} \cdot \mathbf{e}_{/1} = L, \quad h_{12} = h_{21} = \mathbf{p}_{/12} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{p}_{/1} \cdot \mathbf{e}_{/2} = M, \quad h_{22} = \mathbf{p}_{/22} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{p}_{/2} \cdot \mathbf{e}_{/2} = N,$$

によって

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} du^i du^j \quad \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

*8 座標の添え字を上付きで書くことに戸惑う人がいるかもしれない. しかし, これによって以下の \sum 記号における和の取り方が, 上付きと下付きの共通の添え字について足し合わせるという形で理解できる.

と表わす. また (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と表わす.

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad \sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

定義 3.1. 次で定まる関数を Γ_{ij}^k を **Christoffel の記号** とよぶ.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_h g^{kh} (g_{ih/j} + g_{jh/i} - g_{ij/h})$$

注意. (1) 第 1 基本形式の対称性から $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ である. Christoffel の記号は 6 つの関数からなる.

(2) Christoffel の記号は第 1 基本形式からのみ定まり, 第 2 基本形式には依存しない.

補題 3.2. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ について次が成り立つ.

$$\mathbf{u} = (g^{11}\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{/1} + g^{12}\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{/2})\mathbf{p}_{/1} + (g^{21}\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{/1} + g^{22}\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{/2})\mathbf{p}_{/2} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$$

証明. \mathbf{u} を基底 $\{\mathbf{p}_{/1}, \mathbf{p}_{/2}, \mathbf{e}\}$ によって表し, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{/j}$ などの計算を行えば良い. □

定理 3.3. (1) $\mathbf{p}_{/ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{p}_{/k} + h_{ij}\mathbf{e}$ (Gauss の公式)

(2) $\mathbf{e}_{/i} = -\sum_{k,j} g^{jk} h_{ki} \mathbf{p}_{/j}$ (Weingarten の公式)

証明. $g_{ij/k} = (\mathbf{p}_{/i} \cdot \mathbf{p}_{/j})_{/k} = \mathbf{p}_{/ik} \cdot \mathbf{p}_{/j} + \mathbf{p}_{/i} \cdot \mathbf{p}_{/jk}$ より

$$2\mathbf{p}_{/ij} \cdot \mathbf{p}_{/k} = g_{ik/j} + g_{jk/i} - g_{ij/k}$$

を得る. これと第 2 基本形式の定義 $h_{ij} = \mathbf{p}_{/ij} \cdot \mathbf{e}$ を合わせて補題を使えば (1) を得る. (2) も補題を使えば簡単に導ける. □

定義 3.4. 次で定まる関数の組を曲率テンソルという.

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jl/k}^i - \Gamma_{jk/l}^i + \sum_m \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mk}^i - \sum_m \Gamma_{kj}^m \Gamma_{ml}^i \quad R_{ijkl} = \sum_m g_{im} R_{ijkl}^m$$

定理 3.5. (1) $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ (Gauss 方程式)

(2) $h_{ij/k} + \sum_l h_{lj} \Gamma_{ki}^l = h_{ik/j} + \sum_l h_{lk} \Gamma_{ji}^l$ (Codazzi-Mainardi 方程式)

証明. Gauss の公式の両辺を \mathbf{u}^k で偏微分すれば

$$\mathbf{p}_{/ijk} = \sum_l \Gamma_{ij/lk}^l \mathbf{p}_{/l} + \sum_l \Gamma_{ij}^l \mathbf{p}_{/lk} + h_{ij/k} \mathbf{e} + h_{ij} \mathbf{e}_{/k}$$

である. これに Gauss の公式と Weingarten の公式を使い基底 $\{\mathbf{p}_{/1}, \mathbf{p}_{/2}, \mathbf{e}\}$ の一次結合として表せば

$$\mathbf{p}_{/ijk} = \sum_l \left(\Gamma_{ij/lk}^l + \sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - h_{ij} \sum_m g^{ml} h_{mk} \right) \mathbf{p}_{/l} + \left(h_{ij/k} + \sum_m \Gamma_{ij}^m h_{mk} \right) \mathbf{e}$$

を得る. $\mathbf{p}_{/ijk} - \mathbf{p}_{/ikj} = \mathbf{0}$ に上の式を代入すれば, $\mathbf{p}_{/l}$ の係数から Gauss 方程式を, \mathbf{e} の係数から Codazzi-Mainardi 方程式を得る. □

注意. (1) 曲率テンソルは第 1 基本形式からのみ定まる. また定義から R_{jkl}^i, R_{ijkl} は添え字 k, l について対称的 (入れ替えたら符合が変わる) である.

(2) Gauss 方程式から R_{ijkl} は i, j についても対称的である. ゆえに R_{ijkl} において i, j, k, l の中に同じものが三つ以上あると 0 になる. ゆえに R_{ijkl} のうち 0 にならないものは i, j, k, l が二つの 1 と二つの 2 からなる場合に限られる. $R_{1212} = \det h$ に注意すれば R_{ijkl} は 0 または $\pm \det h$ に限られる.

次がこの節のタイトルである Gauss の驚異の定理 (Theorema egregium) である。Gauss 曲率が第 1 基本形式と第 2 基本形式の行列式の比 $\frac{\det h}{\det g}$ であることから簡単にわかる。

定理 3.6 (Gauss). Gauss 曲率について $K = \frac{R_{1212}}{\det g}$ が成り立つ。 K は第 1 基本形式のみから決定される。

$u^1 u^2$ 平面上の単連結領域 D において、各点における 2 次形式 $g = \sum g_{ij} du^i du^j$ と $h = \sum h_{ij} du^i du^j$ が与えられ、さらに g が正定値であるとする。このとき $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって、その第 1 基本形式が g 、第 2 基本形式が h になるものが存在するかという問題は、三つの 2 変数関数 p についての偏微分方程式となる。これについて次が知られている。

定理 3.7 (曲面論の基本定理 (Bonnet)). g, h が Gauss 方程式と Codazzi-Mainardi 方程式を満たせば、 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって、その第 1 基本形式が g 、第 2 基本形式が h になるものが存在する。さらにこのような p は \mathbb{R}^3 の向きを保つ合同変換を除いて唯一である。

問題 3.1. 第 1 基本形式が $g = \sum g_{ij} du^i du^j = du^1 du^1 + h^2 du^2 du^2$ のとき Christoffel の記号 Γ_{jk}^i を求めよ。また Gauss 曲率について $K = -\frac{h_{/11}}{h}$ が成り立つことを示せ。

問題 3.2. 第 1 基本形式が $g = \sum g_{ij} du^i du^j = e^{2\sigma}(du^1 du^1 + du^2 du^2)$ のとき Christoffel の記号 Γ_{jk}^i を求めよ。また Gauss 曲率について $K = -\frac{\Delta\sigma}{e^{2\sigma}}$ が成り立つことを示せ。ただし、 $\Delta\sigma = u_{/11} + u_{/22}$ である。

3.2 共変微分と測地線

$\gamma(t) = p(u^1(t), u^2(t))$ を曲面 S 上の滑らかな曲線とする。 $X(t)$ が γ に沿ったベクトル場であるとは $X(t) \in T_{\gamma(t)}S$ であることを言う。

$$X(t) = \xi^1(t)p_{/1}(\gamma(t)) + \xi^2(t)p_{/2}(\gamma(t)) = \sum_j \xi^j(t)p_{/j}(\gamma(t))$$

例えば、 $\gamma'(t)$ は γ に沿ったベクトル場である。

さて $X(t)$ の微分を Gauss の公式を利用して基底 $\{p_{/1}, p_{/2}, e\}$ の一次結合で表せば

$$\frac{d}{dt}X(t) = \sum_j (\xi^j)' p_{/j} + \sum_{j,k} \xi^j p_{/jk}(u^k)' = \sum_h \left((\xi^h)' + \sum_{j,k} \xi^j \Gamma_{jk}^h(u^k)' \right) p_{/h} + \sum_{j,k} \xi^j h_{jk}(u^k)' e$$

となる。この第 1 項は S の接ベクトル、第 2 項は S の法線ベクトルである。第 2 項は第 2 基本形式により $h(X(t), \gamma'(t))e$ と表示される。

定義 3.8. $\frac{d}{dt}X(t)$ の接成分を

$$\frac{D}{dt}X(t) = \sum_h \left((\xi^h)' + \sum_{j,k} \xi^j \Gamma_{jk}^h(u^k)' \right) p_{/h}$$

と表し $X(t)$ の γ による共変微分とよぶ。

注意. 共変微分は第 1 基本形式にしかよらない。また定義から明らかなように曲面のパラメーターの取り方にもよらない。

第 1 基本形式は \mathbb{R}^3 の内積を接平面に制限したものである。元々の内積と区別するために $g(v, w)$ という記号を用いる。

命題 3.9. 曲面 S 上の滑らかな曲線 γ について、二つの γ に沿ったベクトル場 X, Y を取る。

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right)$$

証明. \mathbb{R}^3 の内積を微分すれば $(X(t) \cdot Y(t))' = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t)$ である. $X(t)$ と $Y(t)$ は曲面に接している
ので法線ベクトル e との内積は 0 である. このことと共変微分の定義を使えば簡単に分かる. \square

定義 3.10. 曲面 S 上の滑らかな曲線 γ と γ に沿ったベクトル場 X について $\frac{D}{dt}X \equiv 0$ が成り立つとき平行ベクトル場という. γ 自身が平行ベクトル場になるとき γ を測地線という.

命題 3.11. 曲面 S 上の曲線 $\gamma(t)$ が測地線であることと、加速度ベクトル $\gamma''(t)$ が $T_{\gamma(t)}S$ に直交することは同値である.

証明. $\gamma''(t)$ の接成分が $\frac{D}{dt}\gamma'$ であることから明らかである. \square

定理 3.12. $\gamma(t) = p(u^1(t), u^2(t))$ が与えられたとき $X(t)$ が平行ベクトル場であるための条件

$$(\xi^h)' + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^h (u^k)' \xi^j = 0 \quad h = 1, 2$$

は 1 階線形微分方程式系である. 初期値 $X(0)$ によって解は唯一存在する.

$\gamma(t) = p(u^1(t), u^2(t))$ が測地線であるための条件

$$(u^h)'' + \sum_{jk} \Gamma_{jk}^h (u^j)' (u^k)' = 0 \quad h = 1, 2$$

は 2 階常微分方程式系である. 初期値 $\gamma(0), \gamma'(0)$ によって解は唯一存在する.

証明. 平行ベクトル場の方程式は、曲面のパラメーター表示による共変微分の定義式から導かれる. 測地線の方程式は

$$\gamma'(t) = (u^1)' p_{j1} + (u^2)' p_{j2}$$

に平行ベクトル場の方程式適用したものである. 解の存在と一意性については常微分方程式の一般論による. \square

さて、 $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ を S 上の曲線で等速度パラメーターをもつものとしよう.

$$C : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

を $C(s, a) = \gamma(a)$, $C(s, b) = \gamma(b)$, $C(0, t) = \gamma(t)$ を満たす写像とする. $C(s, t) = \gamma_s(t)$ とおけば, γ_s は $\gamma_0 = \gamma$ の
両端を固定して変形したものとみなせる. このような C を γ の変分とよぶ. γ_s の長さを $L(s)$ とおけば

$$L(s) = \int_a^b \sqrt{\frac{\partial C}{\partial t} \cdot \frac{\partial C}{\partial t}} dt$$

である. $s=0$ では $\frac{\partial C}{\partial t} = \gamma'(t)$ なので, $|\gamma'(t)| = c$ とおけば

$$L'(0) = \frac{1}{c} \int_a^b \frac{\partial^2 C}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

を得る. $Y(t) = \frac{\partial C}{\partial s}(0, t)$ とおけば, これは γ に沿ったベクトル場であり, $Y(a) = Y(b) = 0$ を満たす. これを γ の変分 C に対する変分ベクトル場と呼ぶ. これにより

$$L'(0) = \frac{1}{c} \int_a^b \frac{d}{dt} (Y(t) \cdot \gamma'(t)) - Y(t) \cdot \gamma''(t) dt = -\frac{1}{c} \int_a^b Y(t) \cdot \frac{D}{dt} \gamma'(t) dt$$

を得る. もし $\frac{D}{dt}\gamma'(\alpha) \neq 0$ となる点 $\alpha \in (a, b)$ があれば

$$Y(t) = \lambda(t) \frac{D}{dt}\gamma'(t), \quad 0 \leq \lambda(t) \leq 1, \quad \lambda(a) = \lambda(b) = 0, \quad \lambda(\alpha) = 1$$

を変分ベクトル場とするような変分について $L'(0) < 0$ となり, γ は最短線でないことがわかる. この議論から次の定理を得る.

定理 3.13. 曲面上の 2 点を結ぶ最短線は弧長パラメーターにすれば測地線である. 逆に測地線は十分近い 2 点の間では最短線である.

証明. 前半はすでに示している. 曲面 S とその一点 \mathbf{a} をとる. さらに座標系の回転と平行移動を行って $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ かつ $T_{\mathbf{a}}S$ が xy 平面にする.

$$\gamma(0) = (0, 0, 0), \quad \gamma'(0) = (u^1, u^2, 0)$$

を初期値とする測地線 γ を $\gamma(u^1, u^2; t)$ と表す. 測地線の方程式は $|t|$ が小さい場合しか保証されていないが, $(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1$ の条件をつければ, $\varepsilon > 0$ を

$$|t| < \varepsilon \implies \gamma(u^1, u^2; t) \text{ が存在する.}$$

となるように取れる. 測地線はパラメーターを定数倍で取り替えても測地線なので

$$\gamma(tu^1, tu^2; 1) = \gamma(u^1, u^2; t)$$

が成り立つ. そこで $\mathbf{p}(u^1, u^2) = \gamma(u^1, u^2; 1)$ は $(u^1)^2 + (u^2)^2 \leq \varepsilon^2$ の上で定義できる. 常微分方程式の解の初期値に関する微分可能性から, \mathbf{p} は微分可能である. さらに

$$\mathbf{p}_{/1}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t, 0) - \mathbf{p}(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t, 0; 1) - (0, 0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(1, 0; t) - (0, 0, 0)}{t} = (1, 0, 0)$$

であり, 同様に $\mathbf{p}_{/2}(0, 0) = (0, 1, 0)$ となるので, $(0, 0)$ の近傍を $\mathbf{p}(u^1, u^2)$ は単射であり, かつ $\{\mathbf{p}_{/1}, \mathbf{p}_{/2}\}$ が一次独立になるように取れる. これは曲面の正則パラメーターであり, \mathbf{a} を中心とする正規座標とよぶ.

さて, 正規座標が $(u^1)^2 + (u^2)^2 \leq c^2$ で定義されているとする. このとき \mathbf{a} を始点とする長さ c 未満の測地線は最短線である. もし最短線でなければさらに短い測地線で結べることになるが, それは正規座標の定義される範囲に含まれ, 単射との仮定に矛盾するからである. \square

正規座標を $u^1 = r \cos \theta$, $u^2 = r \sin \theta$ で変換した $\mathbf{p}(r, \theta)$ を \mathbf{a} を中心とする測地的極座標とよぶ. θ を固定したとき, $\gamma(r) = \mathbf{p}(r, \theta) = \mathbf{p}(r \cos \theta, r \sin \theta; 1) = \mathbf{p}(\cos \theta, \sin \theta; r)$ は速度 1 の測地線である. ゆえに $\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{p}_r = 1$ が成り立つ. また

$$\mathbf{p}_r = \cos \theta \mathbf{p}_{/1} + \sin \theta \mathbf{p}_{/2}, \quad \mathbf{p}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{p}_{/1} + r \cos \theta \mathbf{p}_{/2}$$

を用いれば測地的極座標に関する第 1 基本量は次を満たす.

命題 3.14. $\mathbf{p}(r, \theta)$ を測地的極座標とすると, 第 1 基本量は

$$g = drdr + h^2(r, \theta)d\theta d\theta$$

と表せる. ここで $\lim_{r \rightarrow +0} h_r(r, \theta) = 1$ である.

証明. $E = \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{p}_r = 1$ は既に示した. これを θ で偏微分して

$$0 = 2\mathbf{p}_{r\theta} \cdot \mathbf{p}_r = 2(\mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_r)_r - 2\mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_{rr}$$

を得るが、 $\mathbf{p}(r, \theta)$ は r に関して測地線なので \mathbf{p}_{rr} は曲面に直交する。ゆえに右辺の第 2 項は 0 であり

$$(\mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_r)_r = 0$$

となり、 $\mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_r$ は r に関して一定である。さらに $\mathbf{p}_\theta(0, \theta) = 0$ より

$$F = \mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_r = 0$$

を得る。さて $G = \mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_\theta$ を r に関して 2 回偏微分すれば、

$$G_r = 2\mathbf{p}_{r\theta} \cdot \mathbf{p}_\theta, \quad G_{rr} = 2\mathbf{p}_{rr\theta} \cdot \mathbf{p}_\theta + 2\mathbf{p}_{r\theta} \cdot \mathbf{p}_{r\theta}$$

である。また $\mathbf{p}_{r\theta} = -\sin\theta\mathbf{p}_{j1} + \cos\theta\mathbf{p}_{j2} + r\mathbf{v}$ と表せるので

$$\lim_{r \rightarrow 0} G_r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} G_{rr} = 2$$

であり、ロピタルの定理を使って

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{G}{r^2} = 1$$

を得る。 $h(r, \theta) = \sqrt{G}$ とおけば $\lim_{r \rightarrow +0} h(r, \theta)/r = 1$ なので、 $\lim_{r \rightarrow +0} h_r(r, \theta) = 1$ を得る。□

測地的極座標を利用することによりガウス曲率を曲面の内在的な幾何の情報から理解することができる。

定理 3.15. \mathbf{a} から長さ r の最短線で結ばれる点の軌跡を \mathbf{a} を中心とする半径 r の測地円周と呼ぶ。またその内分を測地円とよぶ。測地円周の長さを $L(r)$ 、測地円の面積を $A(r)$ と表せば次が成り立つ。

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(\mathbf{a})r^3 + o(r^3), \quad A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12}K(\mathbf{a})r^4 + o(r^4)$$

証明. $\mathbf{p}(r, \theta)$ を \mathbf{a} を中心とする測地的極座標とすると、十分小なる $r > 0$ について $\mathbf{p}(r, \theta)$. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ は半径 r の測地円周である。ゆえに測地円周の長さ及び測地円の面積は

$$L(r) = \int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta, \quad A(r) = \int_0^r ds \int_0^{2\pi} h(s, \theta) d\theta = \int_0^r L(s) ds$$

で与えられる。ゆえに $L(r)$ について示せば十分である。第 1 基本形式の形から問 3.1 によりガウス曲率は

$$K = -\frac{h_{rr}}{h}$$

である。ゆえに $\lim_{r \rightarrow +0} h_{rr}/h = -K(\mathbf{a})$ なので、 $\lim_{r \rightarrow +0} h_{rr} = 0$ を得る。さらに

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{h_{rr}}{r} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{h_{rr}}{h} \frac{h}{r} = -K(\mathbf{a})$$

から $\lim_{r \rightarrow +0} h_{rrr} = -K(\mathbf{a})$ が従う。Taylor の定理より

$$h(r, \theta) = r - \frac{1}{3!}K(\mathbf{a})r^3 + o(r^3)$$

が従うので、 $L(r)$ に関する等式が導かれる。□

ガウス曲率は測地円周の長さによって次のように表せる。

$$K(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{6\pi r - 3L(r)}{\pi r^3}$$

問題 3.3. 二つの γ に沿った平行ベクトル場 $X(t)$, $Y(t)$ について $g(X(t), Y(t))$ は一定なことを示せ。

問題 3.4. γ が測地線であれば $g(\gamma', \gamma')$ は一定であることを示せ。このことから最短線であっても等速度でなければ測地線ではない。

問題 3.5. 球面上において、大円を等速度パラメーターで進む曲線は測地線であることを示せ。またそれ以外に測地線は存在しないことを示せ。

問題 3.6. 回転面 $\mathbf{p}(u^1, u^2) = (f(u^1) \cos u^2, f(u^1) \sin u^2, g(u^1))$, $(f')^2 + (g')^2 = 1$ において母線 $\gamma(t) = (f(t) \cos \alpha, f(t) \sin \alpha, g(t))$ は測地線であることを示せ。また、 $\delta(t) = (f(a) \cos t, f(a) \sin t, g(a))$ が測地線になるための条件を求めよ。

問題 3.7. 半径 R の球面上の測地円周の長さを求めることにより、ガウス曲率が $1/R^2$ であることを示せ。

3.3 Gauss-Bonnet の定理

三つの測地線で囲まれた図形で、平面上の三角形と同相なものを測地三角形とよぶ。この節では測地三角形 $\triangle ABC$ 全体で A を中心とする測地的極座標 $\mathbf{p}(r, \theta)$ が定義されているとして議論する。命題 3.14 により

$$I = drdr + h(r, \theta)^2 d\theta d\theta, \quad \mathbf{p}_\theta \cdot \mathbf{p}_\theta = h^2$$

である。このとき以下が成り立つ。

補題 3.16. $\gamma(t) = \mathbf{p}(r(t), \theta(t))$ が測地線であるとき

$$r'' - hh_r(\theta')^2 = 0, \quad \theta'' + 2\frac{h_r}{h}r'\theta' + \frac{h_\theta}{h}(\theta')^2 = 0$$

が成り立つ。さらに $\gamma'(t)$ と $\mathbf{p}_r(\gamma(t))$ のなす角を $\varphi(t)$ とするとき、

$$\varphi'(t) = -\theta'(t)h_r$$

証明。測地的極座標によるクリストッフエルの記号の計算は問題 3.1 にしているので結果のみ記しておく。

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -hh_r, \quad \Gamma_{12}^1 = h^{-1}h_r, \quad \Gamma_{22}^2 = h^{-1}h_\theta$$

添字は $u^1 = r$, $u^2 = \theta$ としてつけたものである。測地線の方程式は

$$r'' + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^1 (u^j)' (u^k)' = r'' - hh_r(\theta')^2 = 0$$

$$\theta'' + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^2 (u^j)' (u^k)' = \theta'' + 2h^{-1}h_r r' \theta' + h^{-1}h_\theta (\theta')^2 = 0$$

である。

$\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ を速度 1 の測地線とする。 $\gamma(t)$ における正規直交基底 $\left\{ \mathbf{p}_r(\gamma(t)), \frac{1}{h} \mathbf{p}_\theta(\gamma(t)) \right\}$ により速度ベクトルは

$$\gamma'(t) = r' \mathbf{p}_r(\gamma(t)) + \theta' \mathbf{p}_\theta(\gamma(t)) = \cos \varphi(t) \mathbf{p}_r(\gamma(t)) + \sin \varphi(t) \frac{1}{h} \mathbf{p}_\theta(\gamma(t))$$

と表せなので、

$$r' = \cos \varphi(t), \quad \theta' = h^{-1} \sin \varphi(t)$$

である。

$$r'' = -(\sin \varphi) \varphi' = hh_r(\theta')^2 = h_r(\sin \varphi) \theta'$$

より $\sin \varphi \neq 0$ の場合は $\varphi' = -h_r \theta'$ を得る。 $\sin \varphi = 0$ の場合は γ' は A から放射状に出る測地線の接ベクトル $\pm \mathbf{p}_r$ と一致するので、測地線の方程式の解の一意性から $\gamma(t)$ は $\mathbf{p}(\pm t + c, \theta)$ と表せる。ゆえに φ は 0 または π であり、 θ は一定なので $\varphi' = -h_r \theta' = 0$ が成り立つ。 \square

定理 3.17 (Gauss). 測地三角形において次が成り立つ.

$$\iint_{\Delta ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

ただし, K はガウス曲率, dA は曲面の面積要素である.

証明. A を中心とする測地的極座標 $\mathbf{p}(r, \theta)$ をとれば積分域は

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad 0 \leq r \leq m(\theta)$$

としてよい. ただし, B は測地線 $\mathbf{p}(r, \alpha)$ 上に, C は測地線 $\mathbf{p}(r, \beta)$ 上にあるものとし $\gamma(\theta) = \mathbf{p}(m(\theta), \theta)$ が BC を結ぶ測地線上にあるものとする. $\gamma(\theta)$ は BC を結ぶ測地線のパラメーターを取り替えたものだが, 一般には等速度パラメーターではないので測地線ではない.

$$\iint_{\Delta ABC} K dA = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{m(\theta)} -\frac{h_{rr}}{h} h dr = \int_{\alpha}^{\beta} h_r(0, \theta) - h_r(m(\theta), \theta) d\theta$$

第 1 項の積分は $h_r(0, \theta) = 1$ より $\beta - \alpha$ でありこれは $\angle A$ に等しい. 第 2 項は補題より $-h_r = \frac{d\varphi}{d\theta}$ なので,

$$\int_{\alpha}^{\beta} -h_r(m(\theta), \theta) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

となるが, φ は測地線 γ と A から放射状に出る測地線のなす角を表しているので

$$\varphi(\alpha) = \pi - \angle B, \quad \varphi(\beta) = \angle C$$

であり, 定理の等式が導かれる. □

注意. ガウス曲率, 面積要素及び測地線は曲面を表示するパラメーターによらないので, この公式は十分小さな任意の測地三角形で成立する. より一般に三角形の内部が通常の内角と同相であれば成立する.

例. 半径 R の球面上において測地三角形の面積は (内角の和 $-\pi$) R^2 で与えられる.

曲面 S を隣り合う三角形の集合で近似することを三角形分割という. 三角形分割が与えられたとき

$$\chi(S) = \text{頂点の個数} - \text{辺の個数} + \text{面の個数}$$

をオイラー数とよぶ. オイラー数は三角形分割の仕方によらず, 同相な曲面では同じ値になることが知られている*9.

定理 3.18 (Gauss-Bonnet の定理). コンパクトな閉じた曲面 S において, 次が成り立つ.

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

証明. S を十分小さな隣り合う測地三角形 T_j , $1 \leq j \leq N$ によって分割する.

$$\int_S K dA = \sum_{j=1}^N \int_{T_j} K dA = \sum_{j=1}^N (T_j \text{ の内角の和} - \pi)$$

T_j の内角の和をすべての三角形について加え合わせることは, 各頂点に集まるすべての角の和を求めることに他ならない. ゆえに頂点の個数を L とすれば $2\pi L$ になる. よって

$$\int_S K dA = 2\pi L - \pi N$$

*9 この話題についてはより一般化した形で 4 年次の幾何学 I で学習する.

である。辺の総数を M とすれば一つの三角形には三つの辺、一つの辺には二つの三角形という対応関係から $3N = 2M$ が成り立つ。ゆえに $N = 2M - 2N$ であり、

$$\int_S K dA = 2\pi L - \pi N = 2\pi(L - M + N) = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ。 □

3.4 双曲幾何

曲線の長さ、角度、面積要素、ガウス曲率、共変微分、測地線などの概念は第 1 基本形式のみで決定する。そこで \mathbb{R}^2 の領域 D において第 1 基本形式

$$g = g_{11}du^1 du^1 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}du^2 du^2$$

を考えれば、 \mathbb{R}^3 内でどのような曲面として実現されるかを考えることなしに幾何学を展開することができる。この場合第 1 基本形式をリーマン計量と呼ぶ。この考え方は多様体の概念と合わせてリーマン幾何に発展するが、ここでは双曲幾何のみを紹介する。

定義 3.19. 上半平面 $H = \{(x, y) \mid y > 0\}$ にリーマン計量 $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ を与えたものを双曲平面とよぶ。これは $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ として扱うこともある。

H はガウス曲率は -1 で一定であるが、 \mathbb{R}^3 内の曲面としてはその一部しか実現できないことが知られている。さて行列式 1 の実 2 次行列全体の集合 $SL(2, \mathbb{R})$ の H への作用を一次分数変換によって定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

A の成分が実数であり、 $ad - bc = 1$ なので、

$$\text{Im}(\varphi_A(z)) = \frac{\text{Im}z}{|cz + d|^2}$$

が成り立つ。ゆえに φ_A は H から H への写像を定める。 $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ 及び単位行列 E について φ_E が恒等写像であることから、 φ_A は H から H への全単射である。

定理 3.20. (1) φ_A は H の等長変換を定める。

(2) 任意の 2 点 $z_1, z_2 \in H$ について、 $\varphi_A(z_1) = z_2$ を満たす $A \in SL(2, \mathbb{R})$ が存在する。

(3) $z_0 \in H$ について、 $\varphi_A(z_0) = z_0$ を満たす $A \in SL(2, \mathbb{R})$ 全体の集合を F_{z_0} とおく。 F_{z_0} は回転群 $SO(2)$ と共役な部分群である。

(4) すべての点について $\varphi_A(z) = z$ を満たすのは $A = \pm E$ の場合である。

証明. (1) $z(t)$ を H 内の曲線とする。 H のノルムは通常のノルムによって

$$\|v\|_H = \frac{1}{\text{Im}z} |v|$$

と表されるので $\varphi_A(z)' = \frac{z'}{(cz + d)^2}$ より

$$\|\varphi_A(z)'(t)\|_H = \frac{1}{\text{Im}(\varphi_A(z))} |\varphi_A(z)'| = \frac{1}{\text{Im}(\varphi_A(z))|cz + d|^2} |z'(t)| = \frac{1}{\text{Im}z} |z'(t)| = \|z'(t)\|_H$$

が成り立つので、 φ_A は接ベクトルの大きさ、したがって曲線の長さを保つ。距離は 2 点を結ぶ曲線の長さの下限なので φ_A は等長変換である。

(2) a, b についての方程式 $z_2 = az_1 + b$ を考える. z_j の虚部は正なので $a = \text{Im}(z_2)/\text{Im}(z_1) > 0$ とおく. また $b = z_2 - az_1$ は虚部が 0 なので実数である.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & b/\sqrt{a} \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

とおけば, $\varphi_A(z) = az + b$ であり, $\varphi_A(z_1) = z_2$ が成り立つ.

(3) $z_0 = i$ とすれば $\varphi_A(i) = i$ を満たす $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $a = d$ と $b = -c$ を満たす. $ad - bc = 1$ と合わせれば $F_i = SO(2)$ を得る.

一般の z_0 については, $\varphi_P(i) = z_0$ を満たす $P \in SL(2, \mathbb{R})$ をとる. $A \in F_{z_0}$ であれば

$$\varphi_{P^{-1}AP}(i) = (\varphi_P)^{-1} \circ \varphi_A \circ \varphi_P(i) = i$$

なので, $P^{-1}AP \in SO(2)$ である. ゆえに $F_{z_0} = P(SO(2))P^{-1}$ であり, F_{z_0} は $SO(2)$ と共役である.

(4) $\varphi_A(z) = z$ は z の 2 次方程式になるので, 常に成り立つためにはその係数がすべて 0 でなくてはならない. これより $b = c = 0$ と $a = d$ となるので, $ad - bc = a^2 = 1$ より $A = \pm E$ を得る. \square

双曲平面における測地線の方程式は

$$x'' - \frac{2x'y'}{y} = 0, \quad y'' + \frac{(x')^2}{y} - \frac{(y')^2}{y} = 0$$

となる. x が一定の場合は $y''/y' - y'/y = 0$ となるので, 積分して $\log y' = \log y + A$ を得る. $y' = By$ なので,

$$y = Ce^{By}$$

である. これは実軸に垂直な直線に H での等速度パラメーターをいれたものに他ならない.

一般の測地線については一次分数変換の以下の性質を利用する. 円と直線を合わせて広義の円と呼ぶことにする.

命題 3.21. (1) 一次分数変換は広義の円を広義の円に移す.

(2) 一次分数変換は二つの曲線のなす角を保つ.

証明. 広義の円の方程式は複素数によって

$$Az\bar{z} + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} + D = 0, \quad |\lambda|^2 - AD > 0$$

と表せる. (1) は一次分数変換がこの式の形を変えないことを見れば良い. (2) については正則関数についての一般論による. Cauchy-Riemann の関係式は, 写像の微分 (ヤコビの行列) が角度を保つことを述べている. \square

さて, φ_A は等長変換なので, 測地線を測地線に移す. 実軸は実軸に移されるので, 実軸に直交する広義の円はやはり実軸に直交する広義の円に移る. このことから次の定理を得る.

定理 3.22. 双曲平面における測地線は実軸に直交する半円周または実軸に直交する直線を等速度パラメーターで進む曲線である.

証明. 実軸に直交する直線が測地線であることは既に示した. $\gamma(t)$ を実軸に直交する円を速度 1 で動く曲線とする. $A \in SL(2, \mathbb{R})$ を $\varphi_A(\gamma(0)) = i$ となるようにとる. $P \in SO(2)$ を $\varphi_{PA}(\gamma'(0))$ が虚軸の上方向に向くように取る. このとき $\varphi_{PA}(\gamma(t))$ は実軸に直交する広義の円であつ, i での接ベクトルが上方向に向くので, 虚軸に一致する. 等速度パラメーターをとっているのだからこれは測地線である. $\gamma(t)$ はこの測地線を $\varphi_{(PA)^{-1}}$ で移したものである. \square

任意の点 $w \in H$ と任意のベクトル $v \in T_w H$ について, w をとおおり v に接する広義の円が存在する. またこれは等速度パラメーターで測地線である. 測地線の方程式の解は唯一なのでこれ以外に測地線は存在しない. \square

この結果から双曲平面においては2点を結ぶ測地線は一本に限られることがわかる。また一本の測地線 L とその上にない点 P が与えられたとき、 P をとおる L と交わらない測地線が無数に存在することも分かる。双曲平面での幾何を双曲幾何と呼ぶが、ここではユークリッド幾何の平行線の公理以外の公理をすべて満たしながら、平行線の公理は満たさない。すなわち平行線の公理はユークリッド幾何の他の公理からは導かれない。19世紀初めにロバチェフスキーとボヤイによって示された事実である。

最後に双曲平面での2点間の距離を求めよう。まず4つの異なる複素数について

$$(a, b, c, d) = \frac{a-c}{b-c} \frac{b-d}{a-d}$$

を非調和比と呼ぶ。複素正則行列による一次分数変換が非調和比を変えないことは計算で簡単に確かめられる。また、非調和比が等しい二つの4点の組について、一方の4点を他方の4点に移す一次分数変換が存在することが知られている。

H の2点 z_1, z_2 について

$$(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (i, -i, ai, -ai)$$

なる等式を考える。左辺は

$$\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \bar{z}_2|^2} < 1$$

なので、右辺は $\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$ である。 $a > 1$ の場合のみ考え

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|}, \quad a = \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

を得る。

このとき $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ を $i, -i, ai, -ai$ に移す一次分数変換が存在するが、簡単な計算で $SL(2, \mathbb{R})$ の行列による一次分数変換になることが確かめられる。 z_1, z_2 を i, ai に移す等長変換になるので、 z_1 と z_2 の距離は i と ai の距離に等しい。最短線は $\{iy \mid 1 \leq y \leq a\}$ でのよいので、

$$\int_1^a \frac{1}{y} dy = \log a$$

がその距離になる。

定理 3.23. H の2点 z_1, z_2 についてその距離は

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$