数学の世界 C 講義メモ（4 月 11 日）

今日の講義はガイダンスのみなので特に記すことはない．今後も講義が終わった後に講義メモの形で講義で扱った内容を整理するので復習（これが次の回の予習につながる）のために活用してほしい．アンケートと，昨年行われた日本数学会の「大学生数学基本調査」の問題に取り組んでもらったがこれについてコメントしておこう．

まず「自然数と自然数の和が何故自然数になることはどうやって証明するのか」との質問があった．これは自然数の定義に関わる疑問だ．自然数の厳密な定義はペアノによって与えられているが決して易しいものではない．自然数を定義し，その演算（和）を定義して初めて証明できる．ただし，この議論を教養科目で紹介するつもりはない．この講義では自然数は周知のものとして扱うことにする．関心のある人は高木貞治「数の概念」などを読んでみると良い．お手軽には Wikipedia の「自然数」の項も参考になる．

次に「大学生数学基本調査」の問題についてコメントしておこう．

問 1 ある中学校の三年生の生徒 100 人の身長を測り、その平均を計算すると 163.5cm になりました。この結果から確実に正しいといえることには○を、そうでないものには×を記入してください。

(1)____ 身長が 163.5cm よりも高い生徒と低い生徒は、それぞれ 50 人ずついる。

(2)____ 100 人の生徒全員の身長をたすと、163.5cm × 100 = 16350cm になる。

(3)____ 身長を 10cm ごとに「130cm 以上で 140cm 未満の生徒」「140cm 以上で 150cm 未満の生徒」・・・というように区分けすると、「160cm 以上で 170cm 未満の生徒」が最も多い。

【コメント】確実に正しいと言えるのは (2) のみだ．なお，(2) を有効数字の観点から確実に言えないと考えた人がいる．身長の和は 16348cm かもしれないと思ったのではないか．しかし，(2) の記述は有効数字は 4 桁と考えるべきで，1 の位は四捨五入されているとみるべきだ．(3) を正しいと思った人は，「確実に」のニュアンスを誤解しているのかもしれない．数学では例外が存在し得る事項は正しいとはいわない．このあたりの言葉の使い方は数学の特徴である．ただし，「確実に正しい」と強調しているので誤解は無いと思うのだが．正答率は 86.4 %だった．

問 2 次の報告から確実に正しいといえることには○を、そうでないものには×を記入してください。

公園に子供たちが集まっています。男の子も女の子もいます。よく観察すると、帽子をかぶっていない子供は、みんな女の子です。そして、スニーカーを履いている男の子は一人もいません。

(1)____ 男の子はみんな帽子をかぶっている。

(2)____ 帽子をかぶっている女の子はいない。

(3)____ 帽子をかぶっていて、しかもスニーカーを履いている子供は、一人もいない。

【コメント】確実に正しいと言えるのは (1) のみだ．これは初等的な論理力をみる問題なので，わかるまで考えてほしい．正答率は 72.82 %で少し心配な結果だ．

問 3 偶数と奇数をたすと、答えはどうなるでしょうか。次の選択肢のうち正しいものに○を記入し、そうなる理由を下の空欄で説明してください。

(1)____ いつも必ず偶数になる。

(2)____ いつも必ず奇数になる。

(3)____ 奇数になることも偶数になることもある。

【コメント】(2) が正しいことは 94.06 %の学生が分かっている．しかし，その理由付けは 59.41 %しかできていない．最も多い間違いは偶数を $2n$，奇数を $2n+1$ と同じ n を使って記述するものだ．これでは，奇数が偶数より 1 多い場合しか考えていないことになる．理由付け（証明）はあらゆる場合を考慮して展開しなくてはならない．

問 4 2 次関数 $y=-x^2+6x-8$ のグラフは、どのような放物線でしょうか。重要な特徴を、文章で 3 つ答えてください。

【コメント】上に凸の放物線であること，$x=3$ が軸であること，x 軸，y 軸との交点，頂点の座標などがあげられよう．よくできていた．なお，単に「放物線である」というのは問題に書かれている事項なので不適切だ．また言葉の使い方がおかしい人もいる．注意してほしい．

数学の世界 C 講義メモ（4 月 18 日）

今日から本格的に授業を始めた．最初は用語の定義の確認だったのでつまらなく感じた人もいるだろう．ただし，数学では定義をおろそかにするとすぐに分からなくなってしまう．すでに知っている用語ばかりのはずだが，もう一度定義を確認してほしい．

1. 割り算

   整数の議論の出発点は割り算 $a \div b = p \cdots r$ にある．ただし負の数も含めて考えているので若干注意が必要である．余りを $0 \leqq r \leqq |b|-1$ の範囲で考えているので

   $$(-8) \div (-3) = 3 \cdots 1$$

   である．また 0 で割ることは定義できないので $b \neq 0$ としておく．

2. 約数，倍数，公約数，最大公約数，素数，素因数分解

   どれも周知の用語である．ただし負の数も含めて考えているので少し注意は必要だ．なお，素数については 2 以上の自然数に限定する形で定義した．従来の理解と同じ定義になっている．

3. 集合の利用

   a と b の公約数の集合を $D(a,b)$ で表した．集合に戸惑う人もいるだろうが，現代数学の基本概念なのであえて使用した．

   $$D(9,32) = \{\pm 1\}, \qquad D(24,36) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

4. ユークリッドの互除法

   $a \div b = p \cdots r$ のとき $a = bp + r$ が成り立つことから $D(a,b) = D(b,r)$ が成り立つ．講義でこの証明を解説したが，ここでも書いておこう．

   > n を a と b の公約数とする．$r = a - bp$ なので $r/n = a/n - pb/n$ であり，r/n は整数になる．ゆえに n は r の約数である．n は a, b, r のすべての約数になるので特に b と r の公約数である．
   >
   > 逆に n が b と r の公約数だとする．$a = bp + r$ なので，n は a の約数になる．よって n は a と b の公約数になる．
   >
   > 以上の考察から a と b の公約数であることと b と r の公約数であることは同値であり $D(a,b) = D(b,r)$ が成り立つ．

   この事実を利用して二つの数の最大公約数を求めることができる．これをユークリッドの互除法と呼ぶ．

   - この最大公約数の求め方については素因数分解は利用していない．割り算と約数・公約数の定義のみを使って議論している．
   - a と b の公約数の集合 $D(a,b)$ は，最大公約数 d の約数全体の集合と一致する．互除法による最大公約数の求め方の帰結である．

5. 定理 1

   整数 a と b について $Ma + Nb$ を最大公約数になるように整数 M, N をとることができる．プリントの例によって実際にその計算を行ったが，一般論は次週に持ち越そう．講義では定理 1 の内容を少し変えて解説した．

   (1) $Ma + Nb$ は a と b の最大公約数 m の倍数である．

   (2) 整数 M, N をうまくとって $Ma + Nb = m$ が成り立つようにできる．

(3) a と b が互いに素であることと $Ma+Nb=1$ が成り立つような整数 M,N が存在することとは同値である．

今日の講義で解説したことは (1) が成り立つ理由と (1)(2) から (3) が示せることである．後半は理解できなかった人も多いだろうが，次回の講義でも解説するのであまり心配しないように．

本日の課題

1. 1537 と 1073 の最大公約数を求めよ．

   $1537 \div 1073 = 1 \cdots 464$,　$1073 \div 464 = 2 \cdots 145$,　$464 \div 145 = 3 \cdots 29$,　$145 \div 29 = 5$ より最大公約数は 29 である．これは次の事実による．

   $$D(1537,1073) = D(1073,464) = D(464,145) = D(145,29) = D(29,0) = D(29) = \{\pm 1, \pm 29\}$$

   【コメント】最後の商が 5 なので最大公約数を 5 と誤解した人がいる．互除法の計算において，商は大きな意味を持たない．

2. b が a の約数であり，かつ c が b の約数である時，c は a の約数であることを示せ．

   b は a の約数であるので $a=bm$ が成り立つような整数 m が存在する．同様に c が b の約数であることから $b=cn$ が成り立つような整数 n が存在する．ゆえに $a=bm=cnm$ であり，c は a の約数である．

   【コメント】式の羅列になっている答案があるがきちんと文章になるように言葉を補うようにしてほしい．論理は日本語で行われるのであり，数学の論理といえども正しい日本語で記述されなければ理解できない．上の文章を味わってほしい．

   答案の中に a は b の倍数で b は c の倍数だから a は c の倍数だとするものがあったが，これは約数を倍数の言葉で言い換えただけなので証明とはいえない．

本日の課題の 2 はプリントの問 1 と関連がある．まず問 1 の解答を与えよう．

a を 2 以上の整数とする．a 自身は a の約数なので a は 2 以上の約数を持つ．そのような約数のうち最も小さいものを p とする．このとき背理法によって p が素数であることを示そう．

p が素数でなかったとする．p の自明でない約数（$\pm 1, \pm p$ 以外の約数）のうち正のものを q とする．$2 \leqq q < p$ であり，かつ q は p の約数である．p は a の約数なので q も a の約数である．q は p より小さな 2 以上の a の約数であり．これは p のとり方に矛盾する．ゆえに p は素数である．

この結論から 2 以上の自然数は必ず素数の約数（素因数）を持つ．この事実から素因数分解の可能性が示される．これについては次回コメントしよう．

質問への回答

- マイナスがついた素因数分解について議論しないのは素因数分解が一通りでなくなるからしないのかと疑問に思いました．

  【回答】講義では素数は自然数に限定したが，その立場をとらず -3 を素数とみなしても構わない．ただし，3 と -3 は本質的に同じ素数ととらえ，$15 = 3 \times 5 = (-3) \times (-5)$ は同じ素因数分解とみなす．別に一通りでなくなるとは考えない．素因数分解の一意性とはもっと深い意味だ．

- ユークリッドの互除法でなぜ余りを使って割っていくのか分かりません．

  【回答】事実として示したのは $a \div b = p \cdots r$ のとき $D(a,b) = D(b,r)$ が成り立つことだ．r は余り

なので余りを使わないとこの事実は利用できない．

- ユークリッドの互除法で何故割り切れた時の割る数が最大公約数になるのか分からない．

  【回答】$D(a,b)$ が a と b の公約数全体の集合であることが理解できてないのではないか．このことに注意して具体例を考察してみてほしい．

- ユークリッド互除法で余りの数で割っていったら絶対に割り切れるのか分からない．

  【回答】余りは割る数よりも小さいので，割る数はだんだん小さくなる．$|b|$ より小さい自然数は有限個しかないので，有限回で必ず割り切れる．例えば a と b が互いに素な場合でも余りが 1 になれば次は 1 で割ることになるので割り切れる．

- 最大公約数 m は a, b より小さいのに何故 $Ma + Nb = m$ になるのか分からない．

  【回答】M, N は整数の範囲で考えていることをお忘れなく．実際，講義で扱った例では一方が正，他方が負になっている．

- 定理 1 の証明で (2) から (3) が導かれることが分からない．

  【回答】来週も繰り返すので心配しないように．講義でも述べたが以下に記述しておく．

  $Ma + Nb = 1$ が成り立つような整数 M, N が存在したとする．(1) より $Ma + Nb$ は最大公約数の倍数なので 1 は最大公約数 m の倍数になる．すなわち m は 1 の約数である．1 の約数は ± 1 のみなので，最大公約数は正であることから $m = 1$ である．

  逆に最大公約数が 1 であるとする．(2) より $Ma + Nb = 1$ となる整数 M, N が存在する．よって $Ma + Nb = 1$ が成り立つような整数の組 M, N が存在することと，a と b が互いに素であることとは同値である．

数学の世界 C 講義メモ（4 月 25 日）

今日の講義では証明が多かったので難しく感じた人も多いだろう．数学の真髄は証明にあるので頑張ってください．

1. ユークリッド互除法を逆にたどると

   プリント 2 ページに記述しているのでじっくり読んでほしい．大事なことは逆に辿る（最後の割り算から順に使っていく）という感覚だ．具体例と合わせて考察するように．

2. 定理 1 の証明

   前回の質問に $Ma+Nb=1$ から a と b が互いに素であることをどう導くのか分からないというものがあった．今回改めて証明をしたが理解していただけただろうか.

   d を a と b の公約数とする．$a/d=k,\ b/d=l$ とおけば $a=kd,\ b=ld$ が成り立つ．ゆえに

   $$1=Ma+Nb=Mkd+Nld=(Mk+Nl)d$$

   となるので d は 1 の約数である．すなわち $d=\pm1$ であり，a と b の公約数は ±1 しかないことになる．すなわち a と b は互いに素である．

3. 定理 2 の証明

   p が素数で a が p の倍数でない時 a と p は互いに素になることから議論を始めた．p の約数は $\pm1,\pm p$ のみなので a が p を約数に持たなければ公約数は ±1 のみになる．すなわち互いに素である．あとはプリントの証明を読んでほしい.

4. 定理 3 の証明

   数学的帰納法を使った証明だが今日扱った証明の中で最も難しかったと思う．以下に講義の時に解説した形での証明を詳述する．最後の回答も参考にもう一度考えてほしい.

   まず $n=2$ の場合に示した．素数は 2 以上の自然数なので 2 が 2 つ以上の素数の積になることはない．2 は素数なので 2 は一つの素数の積（積ではないが）として表されることになる．またこれ以外に方法はない.

   次に $n-1$ 以下のすべての 2 以上の自然数についてただ一通りの方法で素因数分解できたとする．n が素数の場合は n の正の約数は 1 と n のみなので n は一つの素数の積として表す以外に素因数分解の方法はない．そこで n が素数でないとして議論を進める.

   n の 2 以上の約数で最も小さいものを p とする． n は $1,p$ 以外にも正の約数を持つので $2\leqq p\leqq n-1$ である．また， p は最小のものをとったので素数である．また $2\leqq n/p\leqq n-1$ なので，帰納法の仮定により n/p はただ一通りに素因数分解できる．ゆえに $n/p=p_1p_2\cdots p_r$ と素数の積で表されるので n の素因数分解 $n=pp_1p_2\cdots p_r$ を得る．すなわち n は素因数分解できる.

   次に n が別の方法で素因数分解できたとしそれを $n=q_1p_2\cdots q_s$ と表す．$n=q_1q_2\cdots q_s$ は p の倍数なので $q_1,q_2,\dots,q_s$ のどれか一つは p の倍数である．必要なら q_j たちの添字を付け変えて q_1 が p の倍数であるとして差し支えない．ここで q_1 も素数なので $q_1=p$ である.

   $n/p=p_1p_2\cdots p_r=q_2q_3\cdots q_s$ であるが n/p の素因数分解の方法は一通りなので $q_2,q_3,\dots q_s$ は $p_1,p_2,\dots p_r$ を並べかえたものになる．ゆえに $q_1,q_2,q_3,\dots q_s$ は $p,p_1,p_2,\dots p_r$ を並べかえたものであり，2 つの素因数分解は同一である．ゆえに n の素因数分解の仕方は一通りしかない.

本日の課題

1. 412 と 357 の最大公約数を求めよ．また $M412 + N357$ が最大公約数になるように整数 M, N を定めよ．

　ユークリッド互除法により

$$412 = 357 + 55, \quad 357 = 6 \times 55 + 27, \quad 55 = 2 \times 27 + 1, \quad 27 = 27 \times 1$$

なので最大公約数は 1 である．すなわち互いに素である．

　後半は

$$\begin{aligned} 1 &= 55 - 2 \times 27 = 55 - 2 \times (357 - 6 \times 55) = 13 \times 55 - 2 \times 357 \\ &= 13 \times (412 - 357) - 2 \times 357 = 13 \times 412 - 15 \times 357 \end{aligned}$$

とすれば良い．

　なお，$357 \times 412 - 412 \times 357 = 0$ なので $370 \times 412 - 427 \times 357 = 1$ も成り立つ．このような (M, N) の組は無数にあるのであり，講義で述べた方法はその中で最も小さな場合を与えている．

証明の疑問への回答

- n/p が素因数分解できるというのが何故か分からない．

  【回答】証明は数学的帰納法を使っており，2 以上 $n-1$ 以下の自然数はただ一通りに素因数分解できると仮定して議論している．p は 2 以上の $n-1$ 以下の n の約数なので n/p はやはり 2 以上 $n-1$ 以下になる．だから帰納法の仮定が使えてただ一通りに素因数分解されることになる．

- ユークリッドの互除法はどういった時に使うのか．

  【回答】最大公約数を求めることに使える．重要な点はどんな場合にも（2 つの 100 桁の数の場合でも）使えるということだ．また，ユークリッドの互除法を逆にたどって定理 1 を証明した．単なる最大公約数の求め方ではないことに気づいてもらいたい．

- $n = q_1 q_2 \cdots q_s$ から $p = q_1$ としたのが分からない．

  【回答】$n = q_1 q_2 \cdots q_s$ が p の倍数であり，かつ p が素数であることから定理 2 により $q_1, q_2, \ldots q_s$ のどれか一つは p の倍数になる．そこで q_1 が p の倍数になっているとして議論を続けた．q_1 は素数なので $q_1 = p$ となる．

  　もちろん p の倍数になっているのは q_3 かも知れない．しかし，$n/p = q_1 q_2 q_4 q_5 \cdots q_r$ となるので以後の議論は変わらない．このようなときに，「必要なら q_j たちの番号の付け方を変更して $q_1 = p$ として差し支えない」という形で記述することも多い．

- 何故 $n = q_1 q_2 \cdots q_s$ といった別の素因数分解を考えるのか分からない．

  【回答】ここで証明したいのは素因数分解がただ一通りであること（一意性）だ．一通りであることを示すための一般的な方法は，他のやり方を与えた時に結局同じになってしまうことを示すのが普通だ．そこで，他の素因数分解の仕方があったとしてこのような置き方をした．広い意味での背理法といえる．

- 中学校で習った素因数分解の方法を使ってはいけないのか．

  【回答】最大公約数を求める際に中学校依頼の素因数分解を利用しても問題はない．ただし，それは求め方に過ぎず，整数についての一般論の構築には役に立たない．またこの方法で本当に最大公約数が求められるのかといった疑問にも答えられない．論理的なレベルが違うことを理解してほしい．

- ユークリッドの互除法において $|b|$ 回以内で必ず割り切れることが分からない．

  【回答】割り算 $a \div b = p \cdots r$ において $0 \leqq r <\leqq |b| - 1$ が成り立つ．ユークリッドの互除法において，その前の割り算の余りで割っていくので，各段階で余りは必ず小さくなる．最初の余りは $|b| - 1$ 以下なので，$|b|$ 回繰り返すうちには必ず余りは 0 になる．すなわち割り切れる．

- 負の数の素因数分解について

  【回答】講義では素数を 2 以上の数として扱ったが，± 1 と $\pm a$ 以外に約数を持たない数という観点からは -3 なども素数と考えられる．このとき 3 と -3 は本質的に同じ素数とみなし，素因数分解の一意性を考える場合には区別しない．$15 = 3 \cdot 5 = (-3)(-5)$ は同じ素因数分解とみなす．-30 の素因数分解も $-30 = (-2) \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot (-3) \cdot 5$ などいろいろあるがこれらはすべて同じ素因数分解である．なお，素数を正に限った場合は $-30 = -2 \cdot 3 \cdot 5$ であるが，素数の積に $\pm$ をつけたものとして一通りに表せる．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 2 日）

1. 有理数と既約分数について

   有理数とは分数で表される数であること，分数は既約分数の表示を持つことは既知であろう．しかし，どんな分数も（約分により）既約分数として表示できることの証明は高校までの数学では扱っていないはずだ．与えられた分数を既約分数にする計算を何回繰り返しても証明にはならない．そこで今日の講義ではまずこのことに証明を与えた．要点だけ箇条書きしておく．

   - 有理数 b/a をとり，a と b の最大公約数を m とおく．
   - プリント 2 ページ定理 1 により $Ma + Nb = 1$ となるように整数 M, N をとることができる．
   - 両辺を m で割れば $M(a/m) + N(b/m) = 1$ である．
   - m は公約数なので a/m と b/m はともに整数であり，定理 1 の後半から a/m と b/m は互いに素になる．
   - b/a を m で約分すれば $b/a = \dfrac{b/m}{a/m}$ となるが，これは既約分数である．

2. 最高次の係数が 1 である，整数係数 n 次方程式の実数解は整数でなければ無理数になること

   整数でない有理数は，既約分数として $q/p,\ p \geqq 2$ と表せる．そこで方程式に代入して両辺に p^n をかけることにより

$$q^n + a_{n-1}q^{n-1}p + a_{n-2}q^{n-2}p^2 + \cdots + a_1 q p^{n-1} + a_0 p^n = 0$$

   を得る．この式を

$$q^n = -\left(a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2}p + \cdots + a_1 q p^{n-2} + a_0 p^{n-1}\right) p$$

   と整理する．ここで括弧内は整数であることに注意すること．さて，p の素因数 k を考えれば左辺の素因数分解には k が含まれる．しかし，p と q は互いに素なので k は q の素因数分解には現れない．従って q^n の素因数分解にも現れない．これは素因数分解の一意性に矛盾する．よって整数でない有理数が解になることはありえない．

3. $\log_a b$ が有理数になるのは

   簡単なことではあるが，論理は煩雑だ．まず $a = c^p,\ b = c^q$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log c^q}{\log c^p} = \frac{q \log c}{p \log c} = \frac{q}{p}$$

   であることに注意しておこう．講義で紹介したのは有理数になるのがこのような場合にかぎることだ．

   $\log_a b = q/p$ が対数の定義により $a^q = b^p$ となることに注意しよう．a の素因数分解から左辺の素因数分解が，b の素因数分解から右辺の素因数分解が作れるが，素因数分解の一意性からそれらは同じ素因数分解になる．このことから a と b の素因数分解には同じ素因数しか現れない．そこで

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}, \quad b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r}$$

   とおくと，$a^q = b^p$ と素因数分解の一意性から

$$q k_j = p l_j, \quad 1 \leqq j \leqq r$$

   を得る．ここで qk_j が p の倍数で p と q が互いに素なことから $pM + qN = 1$ の両辺に k_j をかけて

$$k_j = pk_jM + qk_jN = pk_jM + pl_jN = p(k_jM + l_jN) = pm_j$$

とおける．また $pl_j = qk_j = qpm_j$ より $l_j = qm_j$ である．$c = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$ と定めれば $a = c^p$，$b = c^q$ が成り立つ．

少し難しかったですね．特に定理 2 の証明と同じ内容が途中に入っているので煩雑です．味わってみてください．

4. 部分分数展開

分母が ab（a と b は互いに素）の分数を，分母が a の分数と b の分数との和（差）で表すことを部分分数に展開するという．一般的なやり方には $Ma + Nb = 1$ となる整数を見つけることを応用する．これについてはプリント 4 ページの説明で十分だろう．講義では具体例で解説したが如何だろうか．

5. 発展話題（多項式の因数分解）

実係数多項式全体の集合においても，和と積そして（余りのある）割り算が行える．この集合の上でも整数の場合とまったく同じ議論が可能である．以下，多項式は $a(x)$ のように変数 x を伴った形で表そう．

- $a(x) = b(x)p(x)$ によって約数，倍数を整数の場合とまったく同じに定義する．
- 0 でない定数 α と $a(x)$ の α 倍 $\alpha a(x)$ は $a(x)$ の約数である．これを自明な約数という．1 次以上の多項式でこれら以外の約数を持たない多項式を素数という．$a(x)$ が素数の時，その α 倍も素数であるがこれらは同じ素数とみなす．
- $a(x)$ と $b(x)$ の共通の約数を公約数という．公約数で次数が最大のものを最大公約数という．
- **最大公約数はユークリッド互除法で求められる**．
- 整数の場合の定理 1,2,3 は多項式でも成り立つ．
- 多項式は実数解を持てば 1 次式の約数（通常因数という）を，虚数解を持てば判別式負の 2 次式の約数を持つ．ゆえに 3 次以上の多項式は素数ではない．
- 講義では述べなかったが，多項式の次数 $\deg a(x)$ を使うと便利だ．なお，0 でない定数を（x は表れていないが）0 次多項式という．定数 0 の次数は $-\infty$ と思うと，$\deg(a(x)b(x)) = \deg a(x) + \deg b(x)$ が成り立つ．$a(x)$ の自明な約数は 0 次多項式（0 でない定数）と $a(x)$ と次数の等しい多項式（$a(x)$ の 0 でない定数倍）なので素数か否かは $1 \leqq \deg b(x) < \deg a(x)$ なる約数 $b(x)$ を持つか否かで決まる．ちなみに 1 次式は素数である．
- 判別式負の 2 次式は実係数の 2 つの一次式の積になることはない（実数解を持たないから）のでこれも素数である．判別式が 0 以上の 2 次式，及び 3 次以上の多項式は素数ではない．ゆえに実係数多項式の集合において，素数は 1 次式および判別式負の 2 次式である．

以上の理解のもとに実係数多項式における素因数分解の一意性定理は次のように記述できる．

定理　実係数多項式は 1 次式と判別式負の 2 次式の積としてただ一通りに表せる．

最後の話は高度で，学問としての代数学に繋がる話です．数学の面白さは「分かった時の面白さ」と「知った時の面白さ」があると思います．これはあらゆる学問で共通のことだと思います．研究で追求するのは「分かった時の面白さ」です．本当に理解していなければ人には伝えられません．しかし教養は「知の楽しみ」を追求するものであり「知った時の面白さ」にも十分意味があります．難しいのは当然ですが，整数と多項式というまったく異なるものについて，同じような議論ができるというのは驚くべきことです．この驚きを感じていただけたら，この話をする意義はあると考えています．

本日の課題

1. 方程式 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$，$a_k$ は整数，$a_0 \neq 0$ の有理数解は a_0 の約数であることを示せ．

   有理数解は整数に限ることは講義で示したので，「整数解は a_0 の約数であることを示せ」としたほうが良かったかもしれない．高校で因数定理を利用して因数分解するとき，定数項の約数から解を見つけたはずだが，それ以外に有理数解は無いこと（最高次の係数が 1 の場合）を示している．この事実は高校数学で利用されているのだ．

   さて，解答例を与えよう．p を整数解とする．

$$a_0 = -(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p) = \left(-(p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1)\right) p$$

   が成り立つ．括弧内は整数なのでこれは p が a_0 の約数であることを示している．

   この解答を読んで，簡単なことを理解していただけるだろうか．思いつかないのは式の細部の形ばかりにとらわれて全体が見えないためではないか．括弧内は単に整数であるということに注意すればよく，複雑に見る必要はない．提出された解答にコメントしておく．

   - 解が整数であることに言及していない答案が多いが，有理数では約数倍数などの議論は行えない．解答例のように p が整数であることを明示すべきである．
   - $(x-p)$ で割った商 $Q(x)$ を使って $Q(x)$ の定数項と $-p$ の積が a_0 になるからという答案があったが，$Q(x)$ が整数係数多項式になることは明らかではない．割り算の過程を考えれば正しいことは示せるが，問題よりもより難しい話になる．

2. $4/35$ を部分分数に展開せよ．

   $35 = 5 \times 7$ であり，$3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ が成り立つ．この両辺を 35 で割って $3/7 - 2/5 = 1/35$ を得る．

$$\frac{4}{35} = \frac{12}{7} - \frac{8}{5} = 1 + \frac{5}{7} - 1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{7} - \frac{3}{5}$$

   である．なお，表示の仕方はいろいろある．これはその一例にすぎない．またこの程度の大きさの数なら適当に数を当てはめていって解を発見することも可能だ．しかし，そのようなやり方では一般論に結びつかない．$Ma + Nb = 1$ となる M, N の求め方を与えているのでそれを利用した解き方も理解してほしい．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 9 日）

今日は整数の範囲で試験を行った．各問 10 点とし 40 点満点で採点した．結果は非常によく平均点は 34.8 点だった．受験者 93 人中満点は 34 人，最低点は 14 点だった．答案については 5 月 16 日の講義で返却する．

試験問題のコメント

1. **問 1**(1) ユークリッドの互除法により 2012 と 1994 の最大公約数を求めよ． (2) (1) の計算を利用して $2012M+1994N$ が最大公約数になるような整数 M, N の例を求めよ．（各 10 点）

   ユークリッドの互除法を使う問題だ．(1) は計算ミスをした人が若干いるだけで，考え方が分からないという人はいなかった．(2) についても良くできていたが，思い付きで式を変形している人が見受けられた．うまく正解にたどり着いたとしても，どんな場合にもこのような操作ができるという確信は得られないのではないか，明確な方針に基づいた式の操作は，そこから一般論をくみ取ることができるので重要だ．

   【解答例】計算のみ示す．

   $$2012 = 1994+18, \quad 1994 = 110\times 18+14, \quad 18 = 14+4, \quad 14 = 3\times 4+2, \quad 4 = 2\times 2$$

   より最大公約数は 2 である．

   $$\begin{aligned} 2 &= 14-3\times 4 = 14-3\times(18-14) = 4\times 14-3\times 18 = 4\times(1994-110\times 18)-3\times 18 \\ &= 4\times 1994-443\times 18 = 4\times 1994-443\times(2012-1994) = 447\times 1994-443\times 2012 \end{aligned}$$

   より $M=-443,\ N=447$ とすれば $2012M+1994N=2$ が成り立つ．

   この計算において，ユークリッドの互除法の計算を逆に辿っていることに注意してほしい．どのような数に対してもこのような計算が実行できることを理解してほしい．

2. **問 2** 三つの自然数 $a,\ b,\ c$ について a は b の倍数であり，また b は c の倍数であるとする．このとき a は c の倍数であることを示せ．（10 点）

   【解答例】a は b の倍数なので $a=bn$ となる整数 n が存在する．b は c の倍数なので $b=cm$ となる整数 m が存在する．$a=bn=cmn$ であり mn は整数なので a は c の倍数である．

   - n, m が整数（この問題では自然数に限定しているので自然数になる）であることが倍数の定義でありきちんと明示すること．「実数」とした答案もあったが間違いである．
   - 日本語としてつながりのおかしい答案が多いが，減点はしなかった．上の解答例と自分の解答を比較してみてほしい．特に「n を整数とする．$a=bn$ が成り立つ」という文章は数学的には誤りである．

3. **問 3** n 次方程式 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ において，各係数 a_j はすべて整数であり，$a_0\neq 0$ を満たすとする．このときこの方程式の有理数解は整数になることを講義で示した．この結果を使って有理数解は定数項 a_0 の約数であることを示せ．すなわち a_0 の約数が解になっていなければこの方程式は有理数解を持たないことを示せ．(10 店)

   【解答例】p を有理数解とすると講義で扱った定理により p は整数になる．

   $$a_0 = -(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p) = -(p^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+\cdots+a_1)p$$

   において右辺の括弧内は整数なので p は a_0 の約数である．有理数解は整数で a_0 の約数になるので，a_0 の約数が解になっていなければこの方程式は有理数解を持たない．特に実数解はすべて無理数である．

- 約数，倍数は整数の世界での概念である．有理数のように四則演算が自由に行える集合では $a = bn$ は特別な条件にならないからだ．p が整数だということに言及していない答案は，減点した．
- p が整数解の時，因数定理により $x - p$ で因数分解できる．しかしその商が整数係数になることは自明ではない．少なくともこの問題で聞かれていることよりも難しい．そのため因数分解を用いた答案は正解とはみなさなかった．
- すべての解が有理数だとした答案は問題の意味を理解していない．また a_0 の約数であることの否定を a_0 と互いに素ととらえている答案もあった．意味をきちんと考えるように．

終了後の講義では球面上の幾何学への導入として，球面上の「直線」が大円であることを紹介した．この考えに基づく議論は次回紹介する．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 16 日）

球面上の幾何を考える場合，直線は大円（中心を通る平面と球面の切り口）とみなす．また線分は 2 点を結ぶ最短線，すなわち半周を超えない大円弧とみなす．これにより平面上の幾何と球面上の幾何とは様々な類似点，相違点がある．なお，以下において球面の半径は R としている．

1. 2 点を結ぶ線分

   球面上の 2 点 P, Q について，OPQ が一直線上にない場合は，平面 OPQ の定める大円の ∠POQ を見込む側が P と Q を結ぶ最短線（線分）になる．すなわち線分はただ一本存在する．OPQ が一直線上になる場合，すなわち P と Q が対蹠点の場合は P と Q を通る大円は無数にある．これは北極と南極を結ぶ経線がすべて大円であることを見れば良い．なお，この時の線分の長さは $R\pi$ である．

   P と Q が対蹠点でない時，P と Q を結ぶ線分は唯一つである．そのとき線分の長さは πR より短い．

2. 合同変換

   球面上の合同変換は回転と大円に関する裏返しである．

3. 2 辺とその挟む角による合同定理

   2 つの 3 角形が合同とは，合同変換によって重ね合わせることができることを言う．この観点から 2 辺とその挟む角による合同定理をユークリッド原論の方法によって証明した．このアイデアは球面 3 角形の合同についても使える．

   △ABC と △DEF について，AB=DE，AC=DF，∠BAC= ∠EDF が成り立つとき，BC< πR であれば △ABC≡ △DEF が成り立つ．

4. 球面 2 角形の面積

   まず対蹠点を結ぶ 2 つの線分（大円の半分）の囲む図形を 2 角形と呼ぶ．頂点は 2 つであり，そこでの角は等しい．角の大きさを α とおけば 2 角形の面積は $2\alpha R^2$ である．

5. 球面 3 角形の面積

   △ABC について，3 つの内角を α, β, γ とおく．A，B，C の対蹠点を A′，B′，C′ とおく．球面を AB，BC，CA を通る 3 つの大円で 8 つの部分に分けると，それらはすべて 3 角形で

   $$\triangle \mathrm{ABC},\quad \triangle \mathrm{A'BC},\quad \triangle \mathrm{AB'C},\quad \triangle \mathrm{ABC'},\quad \triangle \mathrm{AB'C'},\quad \triangle \mathrm{A'BC'},\quad \triangle \mathrm{A'B'C},\quad \triangle \mathrm{A'B'C'}$$

   である．△ABC と △A′B′C′ が合同であること，△ABC と △A′BC を合わせたものが角 α の 2 角形であることなどから，球面を 6 枚の 2 角形で覆えば △ABC と △A′B′C′ の部分はそれぞれ 3 重に覆われる．また他の部分は 1 回しか覆われない．このことから

   $$\triangle \mathrm{ABC}\ の面積 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

   を得る．このことから次が分かる．

   - 3 角形の内角の和は π（180 度）より大きい．
   - 球面 3 角形では相似という概念はない．実は球面 3 角形では 3 つの角が等しければ，辺の長さも等しくなり合同になる．

   講義では具体例として 3 つの角がすべて 90 度の 3 角形を考察した．この 3 角形は，赤道と本初子午線，それから東経 90 度の子午線の囲む図形として考えれば分かりやすい．まず，この 3 角形 8 枚で球面を重複なく覆えることが分かる．ゆえに 3 角形の面積は $4\pi R^2/8 = \pi R^2/2$ である．一方内角の和は 270 度 $= 3\pi/2$ ラジアンなので，これは公式から求めた値と一致する．

本日の課題

課題 1　凸球面 4 角形の面積を求めよ．また凸球面 n 角形の面積を求めよ．

【解答例】球面 4 角形 ABCD は対角線により 2 つの球面 3 角形 △ABC と △ACD に分けることができる．4 角形の内角の和は 2 つの 3 角形の内角の和の合計に等しく，4 角形の面積は 2 つの 3 角形の面積の和に等しい．

$$\begin{aligned}
4\text{ 角形 ABCD の面積} &= \triangle\text{ABC の面積} + \triangle\text{ACD の面積} \\
&= (\triangle\text{ABC の内角の和} - \pi)R^2 + (\triangle\text{ACD の内角の和} - \pi)R^2 \\
&= (4\text{ 角形 ABCD の内角の和} - 2\pi)R^2
\end{aligned}$$

凸球面 n 角形の場合は一つの頂点から $n-3$ 本の対角線を引くことにより，$n-2$ 個の 3 角形に分けることができる．上と同じ考え方により

$$n\text{ 角形 ABCD の面積} = (n\text{ 角形の内角の和} - (n-2)\pi)\,R^2$$

【コメント】空間図形なのでなかなか理解できない人もいるようだ．まず寄せられた解答についてコメントする．

- 平面において n 角形の内角の和が $180(n-2)°$ であることは知っているだろう．そのときに n 角形を対角線により $n-2$ 個の 3 角形に分けたはずだ．解答例はその方法を踏襲している．なお，凸にしたのは対角線による分割を考えやすくするためだ．凸でないと対角線は多角形の外部に出てしまう可能性がある．

  授業中も凸とはどういうことかとの質問を受けた．2 点を結ぶ線分は対蹠点どうしの場合を除いて一本なので平面図形の場合と同様に「図形上の 2 点を結ぶ線分が図形の内部に含まれる」ということで定義する．なお，対蹠点の対が一つの図形に含まれてしまう場合は，凸ではない．
- 2 つの 3 角形に分けた人で，内角をどちらも α, β, γ にしてしまった人がいる．内角は異なるので共通の文字を使ってはいけない．文字を変えたり，添字をつけて区別したりなどの方法を取ること．
- 4 角形の面積を求めるときに，各頂点での 8 枚の 2 角形で覆うという考えをした人がいる．この場合，球面全体は 2 重に覆われ，4 角形とその対蹠点の作る合同な四角形はそれぞれ 4 重に覆われる．このことから面積を求められる．ただしこの考えを n 角形に拡張するのは難しい．やはり 3 角形に分けるという考え方の方が優れていると思う．
- 4 角形の内角の和を 360 度，n 角形の内角の和を $180(n-2)$ 度としている答案がある．これは平面幾何での事実であり，球面上では成立しない．
- 図形の問題だから作図するのは基本だと思うのだが，作図のない答案が多い．幾何では図形的直感は重要であり，それを確認するためにも作図（ラフなもので良い）する習慣が欲しい．

次に感想として寄せられたことにコメントしておこう．

- 難しいという感想が多数寄せられた．空間図形なのでなかなかイメージできなことが理由だと思う．講義メモを参考に考えてみてほしい．なお，大学の講義なのだから難しくて当たり前，難しいからこそ分かった時の喜びも大きいと思っている．
- 球面上の面積や角度の定義についての疑問があった．まず，地球は球面だから定義については日常の感覚で理解できるはずだ．この講義では，球の表面積が $4\pi R^2$ であることから面積を理解していった．3

角形の面積までは分かって欲しかったのだが.

角度も日常的な概念だ．曲線と曲線のなす角が分からないという人は接線のなす角と理解すれば良い.

- 球面で平行移動が無いというのが良くわからないとの疑問を受けました．では，赤道上で東に 1km 移動することを考えてみよう．これは東に 1km の平行移動だろうか．赤道の 1 周は 40000km なので，1km は経度にして 0.009 度に相当する．この移動は地軸の周りの 0.009 度回転に他ならない．結局平行移動ではなく回転移動である.
- n 角形の内角の和はどうやって求めるのかとの疑問を受けた．課題 1 の事実は内角の和を求めることと面積を求めることが同等であることを述べている．これは面積を求めるにはどうしたら良いかとの疑問と同じだ.
  ただ，平面上の図形では面積を求めるのに角度と辺の長さを利用するが，球面上では角度だけで求められるのが面白い.

来週以降も球面上の幾何を展開する．幾何学的イメージを大切に数学を楽しんでほしい.

数学の世界 C 講義メモ（5 月 23 日）

今回の課題は球面上の 2 点間の距離をそれぞれの緯度経度から求めることだ．空間のイメージと数式の扱いをリンクさせて考察して欲しい．

1. 緯度・経度と空間座標

   地球上の点の位置を示すには緯度と経度が使われる．一方，地球の中心に原点をとり，z 軸が地軸に，本初子午線が xz 平面上にくるような空間座標を考えることができる．緯度・経度と空間座標の関係を与えた．プリント 7 ページの図を見ながら考察して欲しい．

$$(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$$

2. 球面上の 2 点間の距離

   球面上の 2 点 A，B をとりそれぞれの緯度・経度を (θ_1, φ_1)，(θ_2, φ_2) とおく．球面の中心を O とし，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を二通りの方法で考える．一つは幾何的な方法で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2\cos\angle\mathrm{AOB}$$

   である．ここで球面の半径が R であることから $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさはともに半径 R になることを利用している．さて，A と B を通る大円を考えると，その半径は R であり A と B を結ぶ大円弧の長さは $R\angle\mathrm{AOB}$ である．球面上では大円弧が最短線であることから，これは A と B の距離 AB に他ならない．ゆえに $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{R}$ が成り立つ．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2\cos\frac{\mathrm{AB}}{R}$$

   もう一つは空間座標を利用する方法で，内積は各成分の積の和になることを利用する．なお，空間座標については上の結果を利用する．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (R\cos\theta_1\cos\varphi_1)(R\cos\theta_2\cos\varphi_2) + (R\cos\theta_1\sin\varphi_1)(R\cos\theta_2\sin\varphi_2) + (R\sin\theta_1)(R\sin\theta_2)\\ &= R^2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)\end{aligned}$$

   2 つの表示を結びつければ 2 点の緯度・経度と距離を結びつける等式を得る．

$$\cos\frac{\mathrm{AB}}{R} = \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \sin\theta_1\sin\theta_2$$

3. 表計算ソフトを用いて距離を求める

   上に示した等式は複雑であり手計算で扱うのは大変である．しかし，エクセルなどの表計算ソフトを使うと簡単に求められる．計算用のエクセルファイルをホームページにアップしているので使ってみて欲しい．なお，講義で配布した資料の E12 セルの内容の最後の SIN(C9) は SIN(C10) の誤りだった．訂正しておく．

4. 球面上の余弦定理

   余弦定理は OA と OB の長さと角 ∠AOB から A と B の距離を求める定理といえる．平面上ならこれはまさに高校で学習した余弦定理である．しかし，地球は球面なので地球規模では平面上の余弦定理は成り立たない．プリントの 2.5 節ではこの問題を考察した．

   アイデアは O を北極に A を本初子午線上にとって A と B の緯度と経度を求めることである．北極からの距離から緯度が決まる．また ∠AOB は B の経度である．これから前の結果を使えば距離 AB を求められる．

本日の課題

点 A を北緯 30° 東経 135° ，点 B を北緯 45° 東経 0° の地点とする．

(1) A と B の空間座標を求めよ．ただし球面の半径を R とする．

(2) 空間座標を使って内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

(3) $\cos \frac{\mathrm{AB}}{R}$ を求めよ．

【解答例】(1) A の座標は

$$(R\cos 30 \cos 135, R\cos 30 \sin 135, R\sin 30) = \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), R\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}, R\frac{1}{2}\right)$$

B の座標は

$$(R\cos 45 \cos 0, R\cos 45 \sin 0, R\sin 45) = \left(R\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, R\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) A の座標と B の座標から各成分の積の和として

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}R^2$$

を得る．

(3) この値が $R^2 \cos \frac{\mathrm{AB}}{R}$ に等しいことから

$$\cos\frac{\mathrm{AB}}{R} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$$

一方，講義で紹介した距離の公式を使っても

$$\cos\frac{\mathrm{AB}}{R} = \cos 30 \cos 45 \cos 135 + \sin 30 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$$

と同じになる．これは公式の導き方から当然である．

【コメント】 まず，解答についてコメントしておこう．

- 緯度・経度による空間座標の表示式を利用するだけの問題．問題のような特別な角度については三角形の形状と合わせてきちんと理解しておいて欲しい．数人， z 座標から座標を書いている人がいたが座標は x, y, z の順に表示すること．順序は重要である．
- $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} \fallingdotseq -0.07946$ より $\frac{\mathrm{AB}}{R} \fallingdotseq 1.6503$ を得る．ゆえに距離 AB はおよそ $1.6503R$ である．$R = 20000/\pi$km とすればこれはおよそ 10506km に相当する．
- 三角関数があやふやという人もいるようだ．課題で出した角にたいする値は，単位円（座標平面上の半径 1 の円）上の点の x 座標と y 座標となるので，もう一度確認してみて欲しい．暗記する必要はない．

次に寄せられた感想等について

- $\cos\dfrac{\mathrm{AB}}{R}$ の式は難しかったようだ．講義メモに補足しておいたので考えてみて欲しい．
- 西経の場合にも使えるのかとの指摘を受けた．球面極座標では緯度は $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで，経度は $-\pi$ から π までとる．南緯と西経は負の角になっていることに注意せよ．要するに負の角とみなせば同じ公式が使える．

- 角度の表示で分・秒という単位を使うことに戸惑った人がいたようだ．分，秒といえば時間の単位と思い込んでいる．しかし，「北緯 30 度 28 分 50 秒」というような表現を聞いた人は多いだろう．この分・秒は時間の単位ではなく角度の単位だ．基準になるもの（時間，角度）の 60 分の 1 が分，そのさらに 60 分の 1 が秒だ．
- 地球はとても大きいので少しの誤差でもだいぶ位置はずれてしまうのではないかとの疑問があった．誤差は考えている量の大きさとの比較で考える．1m のものを考えるとき，10cm は大きな誤差だが，1km のものを考えるときの 10cm は小さな誤差だ．熊本大学とエッフェル塔の距離は 10000km に近いので，1km 程度は小さな誤差と言ってよい．
- 高校までの知識の組み合わせで球面上の 2 点の距離を求められる．このことに驚いた人も多いようだ．数学は受験のためではなく科学的思考のためのものと思うと，数学の輝きはさらに増すと思う．難しいとは思うが，じっくり考えて欲しい．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 30 日）

1. 球面上の余弦定理

   余弦定理とは P 地点から見た 2 点 A，B までの距離 a, b と，P から A と B を見込む角 $\gamma = \angle\mathrm{APB}$ によって A と B の距離 c を導き出す公式である．球の半径を R とするとき

$$\cos\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma + \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}$$

   となる．証明は P を北極点に，A を本初子午線上にとって，A と B の緯度経度を求め，前回学習した 2 点の緯度経度からその距離を求める公式を使う．緯度経度を求めるとき，空間図形の認識が必要になるが，地球儀を見ながら考えて欲しい．

2. A 地点から見た B 地点の方向を求める。

   N を北極とし，A から N と B を見込む形で余弦定理を適用する．$\angle\mathrm{NAB}$ は真北（N のある方向）から西（または東）に何度ずれているかを表している．このアイデアを使って B のある方角を求めたがかなり難しい課題だ．具体的な式による計算はプリント 8 ページから 9 ページに記載してある．参考にして欲しい．

   この値についても実際の計算には表計算ソフトを使った．なお西か東かを調べるには，経度の差（A の経度 $-$B の経度）が 180 度より大きいか否かを調べれば良い．A を通る子午線を含む大円で球面を 2 つに分けることが A の西側にある点と東側にある点を分けたことになるからだ．

3. ユークリッド幾何

   ユークリッド原論（BC300 頃）の内容について，その特徴をコメントした．

   - 少数の定義と公理から論理的推論によって主張を導いていく．現代数学にも通じる姿勢である．ここで定義とは用語に意味を定めていくこと，公理とは証明するまでもない自明な事実を言う．これから純粋な論理によって導き出された結論は絶対的な真実であると受け止められた．
   - 全 13 巻のうち第 1 巻で初等幾何を扱う．第 1 巻の第 1 命題は与えられた線分の上に正三角形を作ること，第 1 巻の第 47 命題が三平方の定理，その次の第 48 命題が三平方の定理の逆，すなわち「三辺の長さに $a^2 + b^2 = c^2$ なる関係があれば直角三角形」である．主張とその逆を明確に区別していることに注意して欲しい．
   - ユークリッドの議論には現代数学の立場からは問題が含まれている．例えば第 1 命題で線分 AB の上に正三角形を作るとき，A を中心とする半径 AB の円と B を中心とする半径 AB の円の交点を利用するが，それが何故交わるかについては何の説明もしていない．当たり前だと思ったためだろうが，証明するまでもない自明な事実を公理としていたのだから公理として明示しておく必要がある．
   - 他にも二辺とその挟む角による合同定理（第 4 命題）の証明で，図形を形を変えないまま移動するという議論を使う．移動できることについての公理はない．
   - さらにユークリッドは「平行線の公理」を導入する．しかし，多くの数学者が「平行線の公理」を「証明するまでもない自明な事実」と受け止めるのに疑問を感じ，何とか証明できないものかと考えた．おそらく，ユークリッド自身もそのような努力を行ったのではないか．何故なら原論 1 巻で平行線の公理を使うのは第 29 命題からであり，それまでは平行線の公理を使わないで証明できるもののみを扱っていた．その後は平行線の公理を使わないで証明できるものは殆ど無く，「平行線の公理はできる限り使いたくない」とする明確な意図があると思われる．

さて，この問題の解決は 19 世紀初めにロバチェフスキーとボヤイ（そしておそらくガウス）によってもたらされる．このへんの事情からは次回の講義で話すことにしよう．

この講義の第 2 部 「球面幾何-幾何的直感と数学」は次回で終えることになる．この範囲での試験は 6 月 13 日（水）に行う．

本日の課題

球面幾何において，3 つの角がそれぞれ等しく，3 つの辺がそれぞれ等しい三角形を球面正三角形と呼ぶことにする．角度が 120 度と 90 度の場合に，

(1) それぞれの球面正三角形の面積を求めよ．

(2) それぞれの球面正三角形の辺の長さを求めよ．ただし $R = 20000/\pi\mathrm{km}$（地球の半径）とする．

【解答例】(1) 球面三角形の面積の公式から角 α の正三角形の面積は

$$(3\alpha - \pi)R^2$$

である．120 度の時すなわち $\alpha = (2/3)\pi$ のときは $\pi R^2 = 400000000/\pi\mathrm{km}^2$，90 度の時すなわち $\alpha = \pi/2$ の時は $\pi R^2/2 = 200000000/\pi\mathrm{km}^2$ である．

(2) 余弦定理で $a = b = c$ とすれば

$$\cos\frac{a}{R} = \sin^2\frac{a}{R}\cos\alpha + \cos^2\frac{a}{R}$$

である．ゆえに $x = \cos\dfrac{a}{R}$ とおけば 2 次方程式 $x = (1 - x^2)\cos\alpha + x^2$ を得る．120 度の時は $\cos(2/3)\pi = -1/2$ より

$$x = -(1 - x^2)/2 + x^2, \qquad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

となるので $x = 1$ または $x = -1/3$ である．$\cos(a/R) = 1$ のときは $a = 0$ となってしまうので三角形にならない．故に $\cos(a/R) = -1/3$ を得る．ここから先は関数電卓などが必要になるのでレポート課題の解答としてはこれで十分だ．なお，関数電卓を使えば $a/R \fallingdotseq 1.9106$ であり a はおよそ 12163km になることが計算できる．

90 度の時は $\cos(\pi/2) = 0$ なので $x = x^2$ となる．やはり $x = 1$ は解として不適切なので $\cos(a/R) = 0$ を得る．$a/R = \pi/2$ であり $a = 10000\mathrm{km}$ である．

【コメント】

- 球面に正 4 面体を内接させて，中心から球の表面に投影すれば，球面を 4 つの正三角形に分割できる．各頂点には 3 つの正三角形が集まるので内角は 120 度でありこの問題で調べたものになる．一方正 8 面体を内接させて，中心から球の表面に投影すれば球面を 8 つの正三角形で分割できる．この内角は 90 度である．正 20 面体で同じように考えれば内角が 72 度の正三角形 20 枚に球面を分割できる．
- 応用問題において方程式を使うときには方程式の解が応用問題の趣旨に合っているかを考えなくてはならない．今は半径 $20000/\pi\mathrm{km}$ の球面での正三角形の辺の長さを a としているのだから a は地球の半周（20000km：北極と南極の距離）を越えることはない．

  $$0 < a < 20000$$

  だ．$a = 0\mathrm{km}$ や $a = 40000\mathrm{km}$ は誤りだ．$a = (2n+1)10000\mathrm{km}$ のような表示は，この問題の解答としておかしいことに気づいて欲しい．

- $\cos\theta = -1/3$ となる θ はおよそ 1.91 ラジアンだがこれを $\theta = 1.91\pi$ としてしまう人がいる．30 度や 45 度のような高校でよく使う角度をラジアンにするといつも π がつくので，ラジアンには π をつけるという錯覚をしてしまったようだ．
- $\sin^2$ を $1-\cos^2$ に直さない人がいる．忘れてしまいましたか．
- 何故か $\cos(a/R) > 0$ という条件を付ける人がいるが，これでは $a/R < \pi/2$ すなわち a は 10000km 以下ということになる．$\cos(a/R)$ を長さと混同しているのかもしれない．
- 余弦定理を導き出すために三角形の一つの頂点を北極にもう一つの頂点を本初子午線上にとった．そこからプリント 8 ページの余弦定理の公式を示したが，この公式を使うときにはそのような三角形の位置の指定は不要である．正三角形の頂点の緯度経度を考えている答案は，余弦定理が一般の三角形について成り立つ定理であることを忘れている．
- 90 度の時の方程式 $\cos(a/R) = \cos^2(a/R)$ から $\cos(a/R) = 1$ としてしまう人が目立つ．文字を含む式で割ると，その式が 0 の場合が除かれてしまうことに注意せよ．
- $\cos(a/R) = -1/3$ について「分からない」というコメントが付された答案が目立つが，「分からない」という表現は適切ではないと思う．そもそも高校の時に

$$\cos x = 1/2 \text{ の解は } x = \pm\pi/3 + 2n\pi$$

ということを学んできた．このようなことを求められていると勘違いして「分からない」と言っているのではないか．高校ではこのような形で解けるもののみ扱うが，実際の応用の際には解けないことが普通だ．もちろんそれは解がないという意味ではない．解を表す術を持っていないということだ．ただし理学部・工学部等で逆三角関数を学習した人は $\cos^{-1}(-1/3)$ あるいは $\arccos(-1/3)$ と記述できるはずだ．

さて，方程式には解が存在したとしても解くすべはないということが良くある．この講義の目的が方程式の解き方を扱うものなら，そのような方程式は最初から除外される．しかし，応用問題では必然的に解けない方程式になってしまうことは多々あり，その解を利用しないと次の段階に進めない．その場合は次のように説明すれば良い．これが逆三角関数を知らない人の最善の解答であろう．

> 座標平面での円 $x^2 + y^2 = 1$ と x 軸に垂直な直線 $x = -1/3$ との上側の交点 P において OP と x 軸の正方向とのなす角を α とおく．$\cos\alpha = -1/3$ であり，$\cos(a/R) = -1/3$ から $a = R\alpha = 20000\alpha/\pi\text{km}$ である．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 6 日）

1. 球面の正三角形による分割と正多面体

前回の課題では角度が 90 度と 120 度の正三角形の面積と辺の長さについて考察した．この問題と正四面体と正八面体の関係についてコメントした．正四面体では各頂点に三つの正三角形が集まっている．正四面体を球に内接させ，中心から球面に投影すれば，全ての辺は大円の一部（すなわち線分）であり，その長さはすべて等しい．すなわち正三角形である．各頂点で三枚の正三角形が集まるということは，角度が $360/3 = 120$ 度であることを意味する．また 4 枚の合同な正三角形で覆われるので，面積は全体の 4 分の 1 である．

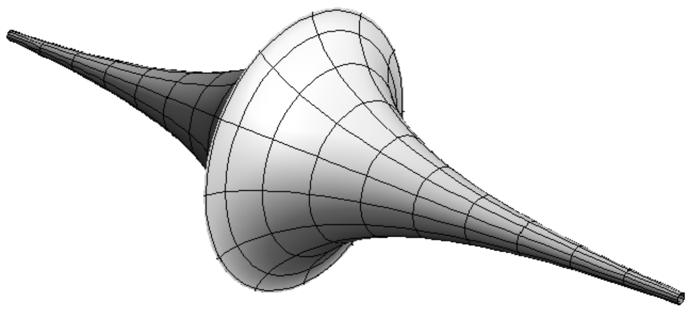
正八面体は 8 つの正三角形からなり，各頂点には 4 枚の正三角形が集まる．中心から外接球面に投影してできる正三角形の内角は $360/4 = 90$ 度であり，面積は全体の 8 分の 1 である．課題では扱わなかったが，正二十面体でもまったく同様の議論が可能だ．各頂点には 5 枚の正三角形が集まるので，球面上では内角 $360/5 = 72$ 度の正三角形になる．

2. 平行線の公理と三角形の内角の和

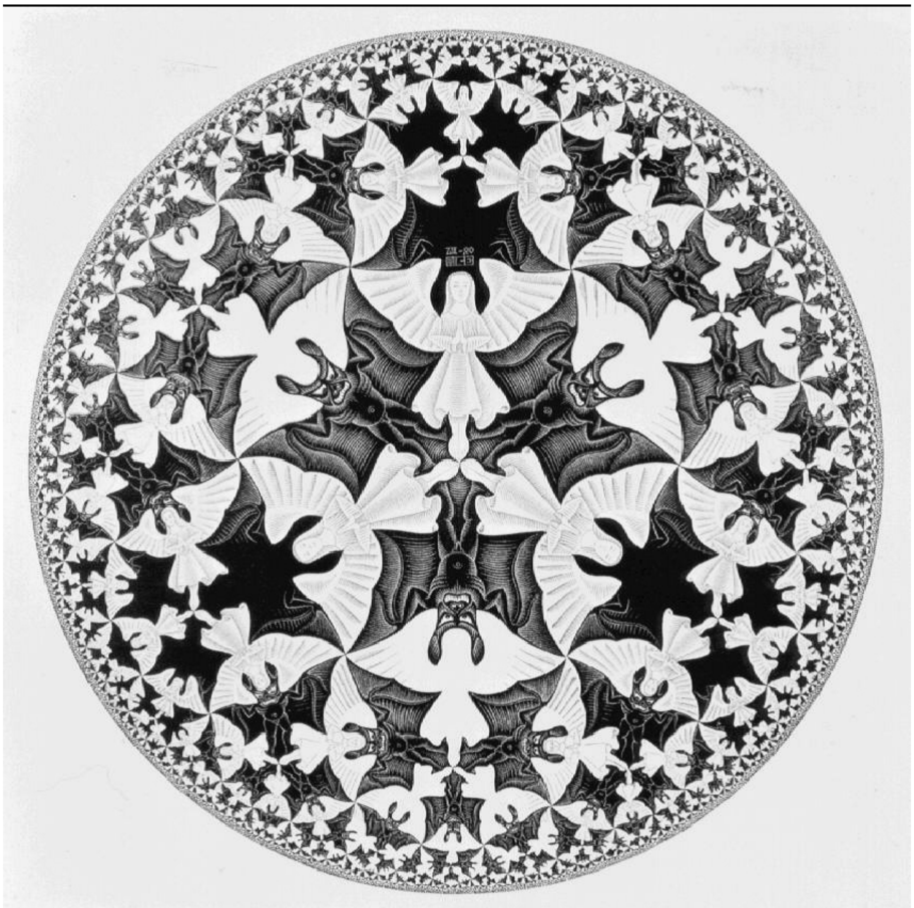
ユークリッドは同側内角の和が二直角であれば平行になることは証明できたが，その逆は証明できなかった．そこでそれを第 5 公準（平行線の公理）として仮定した．そこから，平行線では錯角が等しいことが分かり，三角形の内角の和が 180 度であることも証明された．そして三平方の定理の証明へと議論を進める．

3. 非ユークリッド幾何

ユークリッドは二辺とその挟む角による合同定理の証明で図形の移動を利用した．実はこれにより図形のある世界が曲がり具合が一定であることを仮定したことになる．球面も曲がり具合一定だから図形を自由に移動できる．さて，平面と球面以外にも曲がり具合が一定の曲面が存在する．それを擬球面と呼ぶ．



しかし，これは筒状であって非ユークリッド幾何のモデルにはならない．実は非ユークリッド幾何の世界は空間内の曲面上の幾何としては実現できないことが知られている．だが，不思議なことに地図はかける．そのイメージはエッシャーの版画を見ると良い．天使と悪魔が 45 度，45 度，60 度の合同な三角形にそって配置されている．内角の和は 180 度より小さくなっている．



4. リーマン幾何から一般相対性理論へ

 非ユークリッド幾何の発見によって，平行線の公理は空間が平坦だということを表していることが明らかになった．平坦でない幾何もあるのだから，平行線の公理は証明できるはずはない．このことから公理は「証明するまでもない自明な事実」から「理論の前提として仮定する事実」に変わった．

 さらに，リーマンは様々に曲がった空間の幾何（リーマン幾何）を提唱した．そしてその幾何はアインシュタインによって一般相対性理論の記述に使われた．アインシュタインは，時間と空間を統一的に考えるとともに，それが物質によって様々に曲がっていると考えた．まさにリーマンの様々に曲がった空間という概念と一致したのだ．

5. 第 2 部の終わりに

 机の上で展開する定規やコンパスによる幾何はユークリッド幾何だ．しかし，考える図形を地球規模にすると球面幾何が必要になる．さらに宇宙を記述する幾何はリーマン幾何だ．幾何の認識が人間の知的活動とともにどのように変化してきたのか，感じていただけたら幸いである．

次回は第 2 部の試験を行い，その後，第 3 部の微分の話に入る．微分の定義，指数関数や対数関数など出てくるが，数学 II までに学習した事項を思い出しておいてくれるとありがたい．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 13 日）

今日は幾何の範囲で試験を行った．各問 10 点とし 40 点満点で採点した．平均点は 34.16 点，最高点は 40 点 (3 人)，最低点は 5 点だった．

試験問題のコメント

問 1(1)　球面三角形の三つの角を α, β, γ とするとき，その面積は $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$ になることを説明せよ．ただし R は球の半径であり，球の表面積は $4\pi R^2$ である．（10 点）

面白い証明法なので印象に残った人も多かったと思う．これをどう記述するかが課題だ．

【解答例】球面三角形の頂点を A，B，C，それぞれの内角を α, β, γ とする・球面を A を頂点とする内角 α の二つの 2 角形，B を頂点とする頂点とする内角 β の二つの 2 角形，C を頂点とする内角 γ の二つの 2 角形の合わせて 6 枚の 2 角形で覆う．このとき，△ABC とその対蹠点の作る三角形の内部は 3 重に覆われ，他の部分は 1 重に覆われる．そこで，6 つの 2 角形の面積の合計から球面の表面積をひけば，二つの三角形の面積の 2 倍が残る．二つの三角形は合同なので △ABC の面積の 4 倍が残る．2 角形の面積は内角の $2\pi R^2$ 倍なので

$$4S = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4\pi R^2 = 4(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$$

であり，求める結果が得られる．

【コメント】

- 講義メモに図を載せるのは面倒なので，文章だけにしたが，答案では作図をして説明するように．幾何では基本だ（以下の問題でも同様）．
- 6 枚の 2 角形の面積から，球面の面積をひいたものが，求める三角形の面積の 4 倍になることが説明すべき事項だ．これがなくては正解とはいえない．
- 半球で議論している人がいるが，3 枚の 2 角形を合わせたものの面積が，半球の面積になることをいう必要がある．
- 式のみを書いている人がいるが，何故その式が出てくるのかは言葉で説明すべきだ．

問 1(2)　上の結果を利用して球面五角形（凸としてよい）の面積と内角の和の関係を求めよ．（結果のみではなく，説明をつけること）（10 点）

【解答例】五角形を一つの頂点から出発する二本の対角線によって三つに分ける．それぞれの三角形の面積は，(1) の結果から $(\text{内角の和} - \pi)R^2$ である．また，三つの三角形の内角の和の総計は考えている五角形の内角の和である．五角形の面積は三角形の面積の総和なので

$$\text{五角形の面積} = (\text{五角形の内角の和} - 3\pi)R^2$$

が成り立つ．

【コメント】

- ここも答案では作図をして頂点や角に記号をつけて議論すべきだ．解答例はそれをしていないので分かりづらい．
- n 角形の面積の式を使って $n=5$ を代入する人がいたが，この問題では「上の結果を利用して」がつけられている．三角形の面積の式を利用するべきであり，このような解答は題意に反する．
- $(\text{三角形の内角の和} - \pi)R^2 \times 3$ という解答があったが，三角形の内角の和は一つずつ異なるので $\times 3$ というまとめ方はできない．これは間違いだ．

問 2　地球上において，北緯 45 度東経 0 度の地点と北緯 60 度東経 120 度の点の距離を c とする．$\cos(c/R)$ の値を求めよ．ただし R は地球の半径である．(10 点)

$$\cos(c/R) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

【解答例】問題文に明示されている式を使って

$$\cos(c/R) = \cos 45 \cos 60 \cos 120 + \sin 45 \sin 60 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

【コメント】

- 単なる計算問題．三角関数の値を間違えた人は，どう間違えたのか確認しておくこと．
- 緯度経度から座標を求めている人がいるが，上のような解答の仕方で十分だ．

問 3　球面三角形 △ABC において，線分 AB の長さを c，線分 BC の長さを a，線分 AC の長さを b ，さらに ∠ACB= γ とするとき余弦定理

$$\cos\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma + \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}$$

が成り立つ．$a = b = c$ のとき $\cos\dfrac{c}{R}$ を $\cos\gamma$ の式で表せ．(10 点)

【解答例】$a = b = c$ より

$$\cos\frac{c}{R} = \sin^2\frac{c}{R}\cos\gamma + \cos^2\frac{c}{R}$$

ゆえに $x = \cos(c/R)$ とおけば

$$x = (1 - x^2)\cos\gamma + x^2$$

これは

$$(1 - \cos\gamma)x^2 - x + \cos\gamma = (x - 1)((1 - \cos\gamma)x - \cos\gamma) = 0$$

と整理できる．ここで $x = 1$ のときは $c = 0$ となるので三角形にならない．また三角形の面積は正なので $3\gamma - \pi > 0$ より $\cos\gamma \neq 1$ である．ゆえに

$$\cos\frac{c}{R} = \frac{\cos\gamma}{1 - \cos\gamma}$$

【コメント】

- $\cos(c/R) = 1$ を除外するのが一つのポイントだ．解答例のように除外していない人，除外したが理由が書いていない人は減点した．
- 解の公式を使うと式が若干複雑になる．きちんと整理しないと正しい解は得られない．なお，解の公式を正しく使えない人も目に付く．残念だ．
- 文字式で割るときにはそれが 0 になるかチェックしないといけない．0 になり得る場合は別に扱わないと正しい議論にはならない．

試験の後は微分の解説を行った．この講義では計算方法よりも微分の考え方に重点を置いて解説する予定である．数学 III を学習していない人には分からないことも出てくるだろうが，一つずつ事実として確認して言って欲しい．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 20 日）

第 3 部に入ったが何をどのように扱うのかまだ十分な整理がついていない．試行錯誤になるので分かりづらいことも多く迷惑をかけるかもしれないが，付き合って欲しい．

1. 指数関数とその微分

   指数関数を素朴に定義するの難しい．無理数ベキの定義には極限を考慮する必要があるからだ．しかし，指数関数は応用上最も重要な関数であり，避けて通れない．ここではグラフの概形と指数法則

   $$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

   を出発点にする．なお，指数関数の導関数についてはプリント 10 ページを参照すること．

   指数関数の微分と関連してネイピアの数 e を導入した (授業ではネピアと言ったがネイピアのほうが正確だ)．$(e^t)' = e^t$ は微分の基本公式である．

2. 対数関数とその微分

   $x = a^y$ の関係は $y = \log_a x$ とも記述できることは高校で学習したはずだ．指数法則から公式

   $$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(x^y) = y \log_a x$$

   を得る．対数関数の微分も微分の定義から計算できる．プリント 11 ページを参照せよ．

   なお，$a = 10$ の時の対数 $\log_{10} x$ を常用対数，$a = e$ の時の対数 $\log_e x$ を自然対数と呼ぶ．この講義では $\log x$ とは自然対数を表す．なお，関数電卓では常用対数を $\log x$ で，自然対数を $\ln x$ で表すものが多い．

3. 単位時間あたり変化量と単位時間あたり変化率

   時刻とともに変化する量を $x(t)$ で表す．時刻が t から $t+h$ に変化した時の変化量は $x(t+h) - x(t)$ である．これを経過時間 h で割ったものが単位時間あたりの変化量である．

   $$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \longrightarrow x'(t)$$

   変化率は変化量と全量との比なので，これを $x(t)$ で割れば良い．

   $$\frac{x(t+h) - x(t)}{hx(t)} \longrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)}$$

   最も基本となるものは，変化量あるいは変化率が一定のものである．この条件を満たす関数はそれぞれ一次関数と指数関数である．またそれを一定の時間間隔で取り出した時に出てくる数列が等差数列と等比数列である．プリント 11 ページに表にまとめたが，この表を通じて指数関数の重要性を認識して欲しい．

4. 変化率一定の現象：放射性元素の崩壊

   放射性元素は単位時間に一定の割合で崩壊していくことが知られている．すなわち時刻 t での元素の個数を $x(t)$ とおけば

   $$x'(t) = -\alpha x(t)$$

   が成り立つ．単位時間に崩壊する割合が α である．これを満たす関数は

   $$x(t) = De^{-\alpha t}$$

と記述できることが知られている．この式が出てきたことによって半減期の数学的理解が可能になる．

$x(t)$ が崩壊によって半分になるのに要する時間を T とおく．

$$x(t+T)=\frac{1}{2}x(t), \qquad De^{-\alpha(t+T)}=De^{-\alpha t}e^{-\alpha T}=\frac{1}{2}De^{-\alpha t}$$

これから $e^{-\alpha T}=1/2$ であり，$\alpha T=\log 2$ を得る．

このことから半分になるのに要する時間は，放射性元素の量などにはよらず一定であることが分かる．これが半減期である．

5. 放射性元素の崩壊の年代決定への応用

炭素 14 は 6 個の陽子と 8 個の陽子からなり，半減期 5730 年で β 崩壊して窒素 14 に変わる．大気中では宇宙線の影響で窒素 14 から炭素 14 が作られており，天然で炭素の 0.00000000012 %が炭素 14 である．

さて，木材は生きている間は外部から炭素を取り入れるので，一定の炭素 14 を含む．しかし，死ぬとそのような交換は行われないので炭素 14 の量は減少していく．しかし，炭素 14 の量を直接測定することはできないので，一定の量と時間で崩壊が起こる回数を比較する．その比が炭素 14 の量の比に他ならない．生きている木の崩壊数を R_0，資料の崩壊数を R_1 とすれば，資料の死んでからの経過時間 S は

$$\frac{De^{-\alpha(t+S)}}{De-\alpha t}=e^{-\alpha S}=\frac{R_1}{R_0}$$

を満たす．$\alpha=(\log 2)/T$ と合わせて

$$S=-\frac{1}{\alpha}\log\frac{R_1}{R_0}=\frac{T}{\log 2}\log\frac{R_0}{R_1}$$

を得る．

6. 核分裂と崩壊

核分裂と放射性元素の崩壊とはまったく異なる現象だ．ウラン 235 に中性子が衝突するとかなり高い確率で核分裂を引き起こす．その際に複数の中性子が飛び出し，さらにウラン 235 に衝突するというプロセスを繰り返す．核分裂の際に質量がエネルギーに転換され，膨大なエネルギーが生じる．これを利用するのが原子力発電などで悪用するのが原子爆弾だ．

さて，ウランの核分裂で生じる元素は殆どが放射性元素である．原発ではその内部に大量の放射性元素が閉じ込められている．その中には半減期の長いものも短いものも存在する．半減期は放射性元素に固有なものなので，崩壊しないようにさせるなどという手段はない．化学薬品による汚染のように中和剤などによって無害化を図るという訳にはいかない．

原発は安定に運転している状態でも内部に大量の放射性元素が溜まっている．しかし，今回の福島の事故では，大量の放射性元素が外部に放出されてしまった．現時点で最も影響の大きいセシウム 137 は半減期が 30.17 年であり，30 年かけてようやく半分になる．これを処理するには放射性元素を集めて再び隔離するしか無い（除染）．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 27 日）

やはり混乱している学生が多いようだ．こちらの説明不足も感じる．ただ，この講義で解説したいのは微分の計算法ではなく，微分の考え方及びどのように応用されるのかについてだ．細かい点にはこだわらずに，大きな考え方の流れをつかむようにして欲しい．さて，今回は微分方程式による生態系（といっても現実のものではなくあくまで単純化したものです）を解説した．生態系といっても生物ではなくあくまで数学の話だ．

1. 増加率一定の場合，マルサスモデル

　単一な種の生態系を考え，時刻 t での個体数を $x(t)$ とおく[*1]．まず，$x(t)$ の変化率について解説しておこう．

　時間が Δt だけ経過する間の変化量は $x(t+\Delta t)-x(t)$ だ．これを経過時間で割れば単位時間当たりの変化量が出てくる．

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\text{変化量}}{\text{経過時間}}$$

単位時間当たりの変化量は単位のとり方で変わる．人口などのデータは単位を年で，シャーレの中の細菌の培養では単位は日または時で考えることになるだろう．

　変化量は $x(t)$ が大きければ当然大きくなる．中国と日本の人口変動を変化量だけで比較することはできない．そこで $x(t)$ で割って変化量の割合を考える．これが変化率だ．

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\Delta t}=\frac{\text{変化量}}{\text{全量}\times\text{経過時間}}$$

微分を利用するために，$\Delta t \longrightarrow 0$ として

$$\frac{x'(t)}{x(t)}$$

を時刻 t での変化率とみなす．まず，ここまでの議論を理解して欲しい．これが今回の講義の出発点である．

　単位時間あたりの変化率を一定とした場合のモデルをマルサスモデルと呼ぶ．基本的には前回の講義で解説した放射性元素の崩壊の話と同等である．

2. $x(t)$ の増加によって増加率が低減する場合，ロジスティク方程式

　$x(t)$ の増加によって，増加率が減少していくと考えよう．ただし，最も単純と思われる増加率が x の一次式になっているとして考察する[*2]．

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=\alpha(\beta-x(t)),\qquad x'(t)=\alpha(\beta-x)x$$

講義ではこの微分方程式の解き方は解説していない．ただ，解の形とそのグラフを与えた．

3. 捕食，被食の関係にある２つの種の作る生態系，ロトカ・ヴォルテラの方程式

　２つの生物種 X, Y が存在し，X が Y を捕食する関係にあるとしよう．すなわち X の増加率は Y の個体数 $y(t)$ の増加によって増大し（餌が増えるから），Y の増加率は X の個体数 $x(t)$ の増加によっ

[*1] もちろん $x(t)$ は自然数値なので微分可能ではない．しかし，急に半分になるといった極端な変動はしないと考え，微分可能関数とみなす．抵抗のある人もいるかもしれないが，認めて欲しい．

[*2] 何故，一次式なのかと考える必要はない．あくまで数学的に単純なモデルにするための工夫にすぎない．最も簡単な減少関数は傾き負の一次関数だ．

て減少する（敵が増えるから）と考える．ここでも，単純にするために増加率は一次関数になっているとする．

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -A + By(t), \qquad \frac{x'(t)}{x(t)} = C - Dy(t)$$

この微分方程式の解も数式処理ソフトを使えば描くことができる（無論，正数 A, B, C, D は具体的な値に決めてやらなければならないが）．それをみるとこのモデルの解が増減を繰り返すことが見て取れる．結論として興味深いがどこまで現実を反映しているかは，観測データで検証する必要がある．ただし，そのような作業は数学の領域ではない．

4. 一つの餌を取り合う２つの種の作る生態系

　X と Y の増加率は，個体数 $x(t)$，$y(t)$ の増大によって減少していくとしよう．ここでも考えるのは一次式だ．

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = A - Bx(t) - Cy(t), \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = D - Ex(t) - Fy(t)$$

　この解の振る舞いは日本の直線 $Bx + Cy = A$ と $Ex + Fy = D$ の位置関係によって変わってくるがここではプリントのグラフについて簡単なコメントをした．解は x 軸上または y 軸上の点に近づいていくが，これは一方の種が絶滅することを暗示する．

　上記２つの例の考察において，$(x(t), y(t))$ を座標平面上の点と捉え，微分方程式から解がどの方向に動いていくのか考察した．しかし，説明不足で理解は困難だったと思う．次回の講義で少し補足したい．

5. まとめ

　考えるべき現象が，幾つかの時間によって変化する量で記述されていたとしよう．まず，それがどのような規則に従って変化するのか考察する．これには現象に対する深い理解が必要であり，数学の守備範囲ではない．しかし，一度規則が分かると，とりわけそれが微分方程式で記述されると，数学が強力な役割を果たす．またコンピューターなどを利用して現象がどのように変化していくか推論することが可能になる．今回の講義では，その最も素朴な例を扱った．

本日の課題

問題　次の現象はどのような関数で記述されるか．

(1) 身長が毎月 5mm 伸びる．

(2) 出生率と死亡率がそれぞれ一定な町の人口（転入・転出は無いとする）

【解答例】　(1) 単位時間あたりの変化量が一定なので一次関数で記述される．

(2) 人口の増加率は出生率から死亡率を引いたものなのでやはり一定である．単位時間あたりの増加率が一定なので指数関数で記述される．

【コメント】 増加量が一定な場合は一次関数（等差数列），増加率が一定な場合は指数関数（等比数列）である．これを確認するのがこの問題の趣旨だ．別に具体的な式で書いてもらうことは想定していない．なお，出生率（死亡率）は通常１年間あたり人口 1000 人当りの出生数（死亡数）で記述される．単位時間を１年とし，割合を千分率で表示していることに他ならない．

問題 指数関数に従う量 $x(t) = a^t$ について，$x(t)$ の変化率が一定であることを示せ．

【解答例】 単位時間あたりの変化率は

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\Delta t}=\frac{a^{t+\Delta t}-a^t}{a^t\Delta t}=\frac{a^t a^{\Delta t}-a^t}{a^t\Delta t}=\frac{a^{\Delta t}-1}{\Delta t}$$

となる．これは時刻が t から $t+\Delta t$ に変わる間の変化量を元に求めた単位時間あたりの変化率が，時刻 t によらないこと，すなわち変化率が一定であることを表している．

【コメント】導関数を求めて x'/x が定数になることを示しても良いが，ここでは微分計算ではなく変化率の定義に従って議論した．このほうがより本質的な理解ができると思う．微分計算で答えた人もそれで良しとせず解答例を考えて欲しい．

なお，Δt とは t を微小に変化させた時の時間を表現する記号であり，時刻 t とは別の量である．微分の定義でよく使われる記号だ．分かりづらいと感じる人は Δt の代わりに h と書いても良い．なお，$(a^t)'=ta^{t-1}$ とする人が目に付くがこれは誤り．$(a^t)'=a^t\log a$ が正しい．また $(a^t)'a^t$ という答案もあったがこれが成り立つのは $a=e=2.71828\cdots$ の場合だけだ．公式のうろ覚えは無意味だ．

数学の世界 C 講義メモ（7 月 4 日）

1. ケプラーの法則

   ケプラーの法則を解説した．第 1 法則（楕円軌道の法則）と第 2 法則（面積速度一定の法則）は 1609 年に，第 3 法則（公転周期と長半径の関係）は 1619 年に発表されている．観測結果を元に，惑星の軌道が円ではなく楕円だと見ぬいたのが優れている．

2. ニュートンの万有引力の法則

   2 つの物体は質量（M と m）に比例し距離（r）の 2 乗に逆比例する力（$G\dfrac{Mm}{r^2}$）で引きあう．これは天体だけではなくあらゆる物体の間に働く力であり，重力と呼ばれる．G を万有引力定数と呼ぶ．

3. ニュートンの運動方程式

   質量 m の物体の運動について
   $$m\,\text{加速度} = \text{力}$$
   を運動方程式と呼ぶ．ニュートンの業績は，太陽と一つの惑星のみを考えた時（二体問題），万有引力による惑星の運動がケプラーの法則を満たすことを，運動方程式を解くことによって導いたことだ．

4. 極座標による運動方程式の計算

   太陽を原点に，惑星の軌道が xy 平面上にあるように座標を入れる．さらに極座標を利用して
   $$x(t) = r(t)\cos\theta(t), \qquad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$
   と表示する．加速度ベクトルはこの 2 回微分だが，計算には積の微分法則と合成関数の微分法則の知識を必要とする．数学 III を学習していない学生は結果をそのまま受け止めて欲しい．なお，結果はプリントに書いてあるのでここでは省略する．

   惑星の位置から見て，太陽のある方向のベクトルは $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ である．これに直交するベクトルは $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である．プリント 13 ページの最後の行の式は加速度ベクトルをこの 2 つの方向のベクトルに分けた形になっている．一方，万有引力は太陽の方向に向いているので大きさを考慮して
   $$-\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
   である．ニュートンの運動方程式はそれぞれのベクトルの方向について成り立つので
   $$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{GM}{r^2}, \qquad 2r'\theta' + r\theta'' = 0$$
   となる．

5. 面積速度一定の法則

   $2r'\theta' + r\theta'' = 0$ より $r^2\theta'$ が一定であることが分かる．時刻が t から $t + \mathit{\Delta} t$ まで変わるとき，太陽の距離はほぼ $r(t)$ であるとみなす．また角度は $\theta(t)$ から $\theta(t + \mathit{\Delta} t)$ まで変わるので，この間に通る軌道と太陽との間で作る扇型の面積は $r^2(\theta(t + \mathit{\Delta} t) - \theta(t))/2$ である．単位時間あたりで考えれば $\mathit{\Delta} t$ で割ればよいので
   $$\frac{1}{2}\frac{r^2(\theta(t + \mathit{\Delta} t) - \theta(t))}{\mathit{\Delta}} \doteqdot \frac{1}{2}r^2\theta'$$
   であり，$r^2\theta'$ が一定であることが面積速度一定にほかならないことが分かる．

6. 楕円の方程式

太陽を原点に，もう一つの焦点 B を $(-k, 0)$，$k \geqq 0$ にとる．極座標を使えば，太陽との距離は r であり，もう一つの焦点 B との距離は余弦定理により $\sqrt{r^2+k^2+2rk\cos\theta}$ である．楕円は 2 つの焦点からの距離の和が一定な図形なので

$$r+\sqrt{r^2+k^2+2rk\cos\theta}=c$$

と記述される．r を右辺に移項して両辺を 2 乗し整理すれば

$$r=\frac{c^2-k^2}{2c+2k\cos\theta}=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

である．この表示において e は離心率である．

本日の課題

問題 1　金環日食とスーパームーン（大きな満月）が続けて起きた．このことは月の軌道と太陽の方向について何を意味するか．

【解答例】金環日食が起こるのは月が地球から離れている時の新月である．月は地球を焦点とする楕円軌道をおよそ 30 日の周期で回るので，2 週間後（前）には地球に最も近づく．新月の 2 週間後（前）は満月なので，地球に近づいているため通常より大きく見える．これがスーパームーンである．この期間太陽は月が最も地球から離れる方向にある．

【コメント】

- 実際には太陽の方向は半月で 15 度（360/24 度）ずれていくのでそう単純ではない．スーパームーンは 2012 年 5 月 6 日に，金環日食は 2012 年 5 月 21 日に観測されているので，金環日食は遠地点（月が地球から最も離れる点）を通り過ぎた後に起きているのが分かる．なお，月の軌道は地球に最も近づくときは約 36 万 km，最も離れる時で約 41 万 km である．
- 日食の時は月が地球と太陽の間にあること，満月の時は月は太陽の反対側にあることは知っているだろう．解答はこの事実と楕円軌道による近地点，遠地点の知識を組み合わせることによって得られる．近地点，遠地点は絵を描くと分かりやすいのだが，絵を描く技術を持っていないのでここでは言葉で説明した．分かりづらいかもしれないが考えてみて欲しい．
- 地球と太陽の距離を考慮していた解答があったが，2 週間では 15 度しか動かないのでその影響はあまり大きくはないだろう．なお，地球軌道の離心率は小さいので太陽の大きさは最も近づくときと最も離れるときとで 3 %ぐらいしか変わらない．2 週間では見かけの大きさは殆ど変わらないと思ってよい．
- 月は地球を焦点とする楕円軌道を動く．最も近くなる点（近地点*1）と最も遠くなる点（遠地点）は楕円の長径上にある．これを地球が楕円の中心にあり長軸方向が遠地点，単軸方向が最も近地点と考えている人がいるが間違いだ．ケプラーの法則は地球とその衛星の間にも成立する．
- 今年の天文イベントとして金環日食とスーパームーンが続いたが，これが偶然ではないことに気がついてほしい．一方，金星食（金星の太陽面通過）は無関係で，近い時期に起こったのは偶然に過ぎない．

問題 2 ハレー彗星は 76 年周期で太陽の周りを回る．ハレー彗星の軌道の長半径はどの程度か．ただし地球軌道の長半径を 1 AU（天文単位）とせよ．

【解答例】 公転周期（T）の 2 乗と軌道の長半径（R）の 3 乗が比例するので，T^2/R^3 は惑星によらず一定で

*1 太陽のときは近日点と遠日点だが，地球からの距離なのでこの言葉を使う．ニュアンスは同じ．

ある．公転周期の単位を年で，長半径の単位を AU でとれば，地球では両方とも 1 なので $T^2/R^3 = 1$ である．ゆえに $R = T^{2/3}$ よりハレー彗星の軌道の長半径は

$$76^{2/3} \fallingdotseq 17.94$$

よりおよそ 18AU である．

【コメント】

- ケプラーの第 3 法則の意味を確認するための問題．実際のハレー彗星の軌道では近日点での太陽との距離は 0.59AU，遠日点での太陽との距離は 35.08AU，軌道長半径は 17.83AU であることが知られている．このようにハレー彗星のような細長い楕円軌道を描く天体でも第 3 法則に従っていることが確認できる．なお，楕円の形状から太陽から遠日点までの距離と近日点までの距離の和は長半径の 2 倍になる．ハレー彗星は太陽のごく近くを通るので離れるときは長半径の 2 倍近い距離になる．
- 距離（長半径）と時間（公転周期）という質的に異なるものが比例しているとき，単位のとり方で比例定数は変わる．天文単位（AU）と年を単位にしたら比例定数は 1 になる．

出題した二つの問題に関連して，静止衛星の軌道の高さを求めてみよう．まず，月は長半径 38 万 km の楕円軌道をおよそ 29 日で一周すると考えよう．静止衛星は 1 日で 1 周する円軌道を動くので，半径を x 万 km とすれば

$$38^3 : 29^2 = x^3 : 1^2$$

が成り立つ．x はおよそ 4 万 km である．なお，これは中心からの距離なので，地表からの高度は 3 万 5 千 km 程度だろう．太陽と惑星の関係，地球と衛星の関係は万有引力の法則という同じ力学法則で記述されるので，ケプラーの法則も同様に成立する．

数学の世界 C 講義メモ（7 月 18 日）

1. ケプラーの第 1 法則（楕円軌道）について

   前回の講義で，万有引力の法則，運動方程式，極座標による表示を解説した．また面積速度一定の法則（$r^2\theta' = c$ 一定，ケプラーの第 2 法則）を示した．今回の授業では楕円軌道になることの解説を行った．$1/r$ の θ に関する微分を考察するのがポイントだが，合成関数の微分法則を自在に扱う必要がある．また 2 階の微分方程式に帰着されるが，この程度の議論は理工の学生は理解できるようにして欲しい．

2. ケプラーの第 3 法則（公転周期の 2 乗と軌道の長半径の 3 乗が比例すること）について

   この法則は楕円軌道でも成立するが，証明が難しいので円軌道の場合に限定して証明した．θ' が一定になること，周期は θ が 2π 増えるのに要する時間であることを使って議論した．プリントにも書いてあるが

   $$\theta' = \sqrt{GM}r^{-3/2}, \qquad T = \frac{2\pi}{\theta'} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}r^{3/2}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

   だ．なお，比例定数の中の G は万有引力定数ですべての天体に共通のものだ．M は太陽の質量であり太陽系の惑星については共通だ．だから太陽系の惑星について公転周期の 2 乗と軌道半径の 3 乗が比例することが示される．地球を回る衛星についても同様に議論すると M は地球の質量になり，やはり同様な比例関係が成り立つ．例えば月はおよそ 28 日で地球を一周りするが，静止衛星は 1 日で地球を一周りする．静止衛星までの距離と月までの距離がどういう関係にあるかも簡単に計算できる．

以上でこの講義を終える．残りの時間で簡単な課題を与えたが，少しコメントしておこう．

数学の世界 C 最終課題

問 1　次の現象は一次関数と指数関数のどちらで表示するのが適当か．

(1) 出生率と死亡率が一定で，転出入のない国の人口

(2) 10 年につき 0.15 度上昇する地球の平均気温

(3) 経済成長率年 8 %の国の GDP

(4) 100 万円を年 2 %の複利で預けた時の残高

(5) 月 1000 台の自動車を生産する工場の累積生産台数

【コメント】一定なのは変化量か変化率か判断すること．変化量なら一次関数，変化率なら指数関数だ．(2)(5) は単位時間で増える量が決まっている．これらは一次関数で表示される．他は変化量が母数によって増えていく．すなわち一定なのは全体に対する割合であって変化率だ．これらは指数関数で表示される．

問 2　指数関数 $x(t) = Ca^t$ に従う現象について（微分公式は使わないこと）

(1) 時刻が t から $t + \Delta t$ までの間の単位時間あたり変化率を記述せよ．

(2) 上の $\Delta t \to 0$ とした時の極限（瞬間の単位時間あたり変化率）が一定であることを示せ．

【コメント】7 月 4 日の講義メモを参照して欲しい．なお，(1) は指数法則によって

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} = \frac{Ca^{t+\Delta t} - Ca^t}{Ca^t\Delta t} = \frac{Ca^t a^{\Delta t} - Ca^t}{Ca^t\Delta t} = \frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

まで整理して欲しい．最後の式の $\Delta t \to 0$ での極限が t によらないことも理解できるはずだ．

問 3　木星の公転周期は約 12 年である．木星と太陽の距離は地球と太陽の距離の何倍か．軌道は円と考え

て差し支えない.

【コメント】距離の単位を天文単位 (AU) , 時間の単位を年にとれば, 地球は太陽との距離が 1AU, 公転周期が 1 年である．ゆえに比例定数は 1 で木星の距離 rAU は $r^3 = 12^2$ を満たす．$r = 12^{2/3} = 5.24$AU であり，木星と太陽の距離は地球と太陽の距離の 5.24 倍である.