理系基礎科目「微分積分 I」期末試験（7 月 27 日実施・試験時間 90 分）の問題と解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ とするとき $f'(x)$ を求めよ.

【解答例】

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2-1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(2) $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ とするとき $f'(x)$ を求めよ.

【解答例】

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

【コメント】

- 上記 2 つの問題は基本的な微分計算の問題，合成関数の微分法則がきちんと使えないものがいるが，基本的な例の計算を確認していく中で間違いをなくしていくこと．どんな関数でも微分できるということが実感できるまで計算練習するように.
- $\tan^{-1}x, \sin^{-1}x$ の微分を間違えているものがいるが，計算不足としか言いようがない.
- （2）で x^2 を根号の外に出すときそのまま x にしている人が大多数だった． $\sqrt{x^2} = |x|$ は基本事項だ.

(3) $\cos\left(3\cos^{-1}x\right)$ を x の多項式として表せ.

【解答例】$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ と $\cos(\cos^{-1}x) = x$ より

$$\cos\left(3\cos^{-1}x\right) = 4x^3 - 3x$$

【コメント】

- 3 倍角の公式を利用すれば良い．ただしこの式は覚えるのではなく（私も覚えていない）加法定理から導くようにして欲しい．3 回ぐらいそのプロセスをやればいつでもできるという実感が持てるはずだ.

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

- 多項式ということで Taylor の定理に関する問題と思った人がいたが，うまくいかない． $\cos\left(3\cos^{-1}x\right)$ の微分の複雑さを考えれば，3 回微分することがどれだけ大変になるか想像つくだろう．一方，$\cos(\cos^{-1}x) = x$ は基本公式だし，3 倍角の公式も $\cos x$ の式になることぐらいは知っているはずだ．解答例は決して難しいものではない.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\sin x}$ を求めよ.

【解答例】これは 0/0 型不定形なので分子と分母をそれぞれ微分した極限を考える.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x\log 3 - 2^x\log 2}{\cos x} = \log 3 - \log 2$$

よって l’Hospital の定理により $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\sin x} = \log\frac{3}{2}$

【コメント】

- l’Hospital の定理を使う．不定形であることを確認して議論を進めること.

- 3^x, 2^x の微分計算は基本事項．覚えられない人は対数微分をして導けば良い．一般に曖昧にしか覚えていない公式は確認してから使うようにして欲しい．覚え違いは計算ミスより質が悪い．（数学は理解が重要なのであって覚えることが重要なのではない．数学が暗記科目だと思っている人は数学の面白さを理解することができない．）

$$(\log 3^x)' = \frac{(3^x)'}{3^x} = (x\log 3)' = \log 3, \qquad (3^x)' = 3^x \log 3$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の積分（不定積分，定積分，広義積分）を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+1}}\,dx$

【解答例】 $\sqrt{x+1} = u$ すなわち $x = u^2 - 1$ と置換する．

$$\int_0^8 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{(u^2+3)u} 2udu = \int_1^3 \frac{2}{u^2+3}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

【コメント】

- 置換積分を行うが $dx = 2udu$ の変換を忘れる人がいる．だいぶ減っているとは思うが．
- $\dfrac{2}{u^2+3}$ の原始関数は，$\tan^{-1}$ を使うことは気がついて欲しいが覚える必要はない．$\tan^{-1}(u/\sqrt{3})$ の微分を計算して比較するのが有効だ．なお，$u = \sqrt{3}t$ または $u = \sqrt{3}\tan t$ と置換する方法も有効である．ここでは後者の解答例を示しておく．

$$\int_1^3 \frac{2}{u^2+3}du = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{3\tan^2 t + 3}\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{\sqrt{3}}dt$$

  こうして解けば高校数学の知識で解けることになる．

(2) $\displaystyle\int \frac{\tan\frac{x}{2}}{2+\sin x+\cos x}\,dx$

【解答例】$\tan\frac{x}{2} = u$ すなわち $x = 2\tan^{-1}u$ とおく．$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\frac{x}{2}}{2+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{2u}{2(1+u^2)+2u+(1-u^2)}du = \int \frac{2(u+1)-2}{(u+1)^2+2}du \\ &= \log(u^2+2u+3) - \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{u+1}{\sqrt{2}} + C \\ &= \log\left(\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 3\right) - \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C\end{aligned}$$

【コメント】

- 大学で新たに学習した置換積分の方法だ．$\sin x = u$ と置く人もいるが，見通しなしに闇雲に計算することは学力につながらない．なお，$\cos x$. $\sin x$, dx を u の式に直す時の間違いが多い．覚えるのではなく導き方も含めて学習しておくこと．できれば頭の中で計算できると良い．

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = (2\tan^{-1}u)'du = \frac{2}{1+u^2}du$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x(\log x)^2\,dx$

【解答例】 x を積分し $(\log x)^2$ を微分するという形で部分積分を行う．

$$\int_0^1 x(\log x)^2\ dx = \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 x\log x dx$$

この第 1 項で $\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めなくてはならないが，これを $\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ と書きなおして ∞/∞ 型不定形にして l'Hospital の定理に持ち込む．

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} -x = 0$$

ゆえに右辺の第 1 項は 0 である．第 2 項をさらに部分積分して

$$\int_0^1 x(\log x)^2\ dx = -\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{2}dx$$

この第 1 項も上で求めた極限により 0 になる．よって

$$\int_0^1 x(\log x)^2\ dx = \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}$$

【コメント】

- 部分積分と広義積分の問題．部分積分は置換積分より理解できているが，何人か混乱している人がいる．部分積分の 2 回繰り返しは高校では扱わないことになっているが 1 回ずつの繰り返しなので難しいこととは思えない．
- $\log x$ は $x\to+0$ で $-\infty$ に発散するので微分積分の基本公式を利用する際に $x=0$ は代入できない．極限を考えなくてはならないが，その議論を欠いた答案は減点している．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\sqrt[4]{1+x}$ の $x=0$ における Taylor 展開を 2 次の項まで求めよ．

【解答例】$f(x)$ の k 次導関数は

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{4}\frac{-3}{4}\cdots\frac{1-(k-1)4}{4}(1+x)^{(1-4k)/4}$$

より $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{4}$，$f''(0)=\frac{1}{4}\frac{-3}{4}=-\frac{3}{16}$ である．ゆえに

$$f(x) = 1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\cdots$$

【コメント】

- Taylor 展開の 2 次の項までということは関数の 2 次近似多項式に他ならない．いろいろな例を授業でも紹介したし講義メモにも記載した．その割には見当はずれな解答が多い．残念だ．
- 一般化された 2 項係数を使って表示しても良い．ただし，2 項係数が具体的に何かを知らなければ話にならない．要点だけまとめておく．
  - $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ より $f(x)=\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{1/4}$ を一回ずつ微分していけば

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{4}-k}$$

– Taylor 展開の一般項は $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ なので

$$\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}x^k = \binom{\frac{1}{4}}{k}x^k$$

(2) $\sqrt[4]{1.04}$ の値について次が成り立つことを示せ,

$$1.009850 < \sqrt[4]{1.04} < 1.0098535$$

【解答例】$n = 3$ の場合の Taylor の定理は

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + R_3(x)$$
$$R_3(x) = \frac{f^3(c)}{3!}x^3 = \frac{1}{4}\frac{(-3)}{4}\frac{(-7)}{4}\frac{x^3}{6}c^{-11/4} = \frac{7}{2^7}x^3c^{-11/4}$$

である．ただし c は 1 と x の間の数である．ここに $x = 0.04$ を代入すれば

$$f(0.04) = \sqrt[4]{1.04} = 1 + 0.01 - \frac{3}{2}0.0001 + R_3(0.04) = 1.00985 + R_3(0.04)$$
$$R_3(0.04) = \frac{7}{2}c^{-11/4}0.000001$$

ここで $1 < c < 1.04$ より $0 < c^{-11/4} < 1$ なので

$$0 < R_3(0.04) < 0.0000035$$

となるので $1.00985 < \sqrt[4]{1.04} < 1.0098535$ を得る．

【コメント】

- 近似値を求めるので，誤差項の大きさを考える必要がある．これと類似の問題は 5 月 25 日に扱っており，その日のレポート課題にもしている．ここでは $0.04 = 4 \times 0.01$ なので計算はさらに簡単になっている．きちんと勉強していればできたはずだ．
- $R_3(0.04) > 0$ はすぐに分かるので $\sqrt[4]{1.04} > 1.00985$ はすぐに分かる．同様に $R_4(0.04) < 0$ から 3 次近似式を利用して $\sqrt[4]{1.04} < 1.0098535$ を示せる．この解答が一つだけあったが優れた解答といえる．
- 式が間違えているのに「よって $1.00985 < \sqrt[4]{1.04} < 1.0098535$ が成り立つ」とする答案がある．こういうのを品性のない答案という．

4 極方程式 $r = e^\theta$ と $r = e^{-\theta}$ による 2 本の曲線が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で囲む図形の面積を求めよ．

【解答例】$0 < e^{-\theta} \leqq e^\theta$ なので，$r = e^\theta$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ で囲む部分の面積から $r = e^{-\theta}$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ で囲む部分の面積を引けばよい．極座標による面積の公式

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\theta$$

を利用すればこの面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} e^{2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\left[e^{2\theta}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\left(e^{\pi/2}-1\right)$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} e^{-2\theta}d\theta = -\frac{1}{4}\left[-e^{2\theta}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\left(1-e^{-\pi/2}\right)$$

よって求める面積は

$$\frac{1}{4}\left(e^{\pi/2}-2+e^{-\pi/2}\right)$$

【コメント】

- 極座標の面積が $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ になることを利用する．直交座標の場合と形が異なるので注意すること．
- $r=e^{\theta}$ と $r=e^{-\theta}$ に囲まれた図形の面積なので，外側の面積から内側の面積を引くことにより求める．$(e^{\theta}-e^{-\theta})^2$ の積分にした人がいるが，これも直交座標の場合の混同である．
- $e^{2\theta}-e^{-2\theta}$ の不定積分は基本事項だ．置換積分で計算しようとしている人も見かけるが，このまま積分すること．