線形数学講義メモ (10 月 3 日)

線形数学では，1 年次の線形代数を踏まえ，その抽象化と論理化を行う．今日の講義ではまず線形数学の講義の進め方について簡単に解説した．配布資料をホームページに掲載しておくので，今日の授業を欠席した者は目を通しておいてほしい．

本日の講義の要点

1. 線形空間の公理と例

   辞書によれば公理とは「証明するまでもない自明な真理」とあるが，現代の数学では論理の出発点として仮定しておくことという意味合いで使う．線形空間の公理とは線形空間を考える際の議論の基礎をまとめたものである．線形空間の例はいくつか与えたが，もちろんこれに限るわけではない．ただし，線形空間のイメージを持つためにはこの程度の例で充分である．

2. 命題 1.1 と命題 1.2

   イメージはこの程度の例で充分としたが，論証においてはイメージを使ってはならず，公理に基づいて議論しなくてはならない．イメージは証明の方針を立てる際に有効になることはあるが，証明には使えない．この二つの命題の証明は，公理が論証に以下に使われているかを確認する題材として有効である．

   なお，公理は必要最低限のもので記述する．他の公理から導かれる事実は公理には含めない．$1\vec{x} = \vec{x}$ が公理なら，命題 1.2 の等式も公理にしてもいいのではないかと思う人がいるかもしれないが，これは証明できるので公理には含めない．ただし，線形空間一般に成り立つ事実なので，一度証明してしまえば当然の事実として使って構わない．一度証明した事実は次の事実を導く際に自由に使ってよい．

3. 1 次結合

   1 次結合の定義は基本的に 1 年次の定義と同じである．ただし，無限次元の線形空間も含めて考察しているので「無限個のベクトルの 1 次結合」も考慮する必要がある．ここで係数は有限個を除いてすべて 0 としているので実際には有限和に過ぎないことを注意しておくこと．無限個の 1 次結合の例としては $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の 1 次結合が多項式になることを見ればよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   で $c_n \neq 0$ となる n が有限個なら $c_n = neq0$ となる n の最大が存在する．それを N とおけばこの 1 次結合は N 次多項式になる．

4. 1 次独立と 1 次従属

   定義は 1 年のときの定義（「教養の線形代数」p.82）と変わらない．比較しておくこと．なお，$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の場合には，1 次独立性の考察は同次連立 1 次方程式の考察に帰着される（「教養の線形代数」p.82）．1 年次では基本変形で階段行列に変形することを利用して議論したが，複素行列を対象にした場合でも，基本変形はまったく同じようにできることに注意すること（「教養の線形代数」p. 31）．

5. 命題 1.3

   1 次独立性を特徴づける条件を与えた．「教養の線形代数」p.84 定理 4.1 と見比べてみてもよい．なお，この証明で，ベクトルの等式での移項を行っているが，移項は両辺に逆元を加えることによって行うので，一般の線形空間でも自由に行える．

   命題 1.3 の表現で講義では $k = 1$ の場合と $k \geqq 2$ の場合に分けた．$\vec{v}_1 \notin \{\vec{0}\}$ は $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と同じ意味であ

ることに注意せよ．なお，プリントの証明は簡略化されているので，ここに詳しく書いておこう．じっくり考えてみてほしい．

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ が 1 次独立と仮定し，結論が成り立たなかったとする．すなわち $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と $\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle, 2 \leqq k \leqq n$ の n 個の主張のどれかが成り立たなかったとする．$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ が成り立たない場合は $\vec{v}_1 = \vec{0}$ なので

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{v}_1 = \vec{0}$$

である．これは 1 次独立性に矛盾する．$\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ が成り立たない場合には $\vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ なので

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$

と表せる．左辺を右辺に移項すれば

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + (-1)\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

となるがこれも 1 次独立性に矛盾する．いずれにしても $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ の 1 次独立性に矛盾するので，結論が成り立たなかったという仮定は誤りである．すなわち $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と $\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle, 2 \leqq k \leqq n$ はすべて成り立つ．

逆の証明についてはプリントを見てほしい．

本日の提出課題とヒント

問題 1.1 $(-\alpha)\vec{x}$ が $\alpha\vec{x}$ の逆元であることを示す．逆元の定義に基づいて議論すること．命題 1.2 の後半の証明が参考になろう．

問題 1.3 スカラー倍を有理数の範囲で考えているので，$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ の 1 次結合は $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ である．これが 0 になるときに $a = b = c = 0$ が成り立つことを言えばよい．1 次独立の言葉を使っているが，実質的な内容は無理数と有理数の扱いに過ぎない．

問題 1.4 与えられた関数の組の 1 次結合が 0 になるとき，係数がすべて 0 になれば 1 次独立である．ここで 1 次独立性を定義するための等式

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \vec{x}_\lambda = \vec{0}$$

の両辺は線形空間 V の要素であることに注意せよ．等号は V における等号である．であれば右辺の $\vec{0}$ は当然 V の 0 元である．さて，関数の世界における 0 元とは何を意味するのだろうか．それをきちんと考えれば，結果はおのずと見えてくるであろう．

今日の課題はいずれも証明問題である．苦手意識を持っている人の多いだろうが，証明のポイントは，何が仮定されているのか，言うべきことは何かを用語の定義に基づいて一つずつ確認していくことだ．分からなくなったらまず用語の定義を言葉で確認してほしい．

線形数学講義メモ (10 月 10 日)

前回のレポート課題の解答例とコメント

問題 1.1　$\alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = (\alpha + (-\alpha))\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$ より $(-\alpha)\vec{x}$ は $\alpha\vec{x}$ の逆元である．すなわち $-(\alpha\vec{x}) = (-\alpha)\vec{x}$ が成り立つ．

【コメント】

- 逆元とは加えると $\vec{0}$ になるという性質で定義されているので，$\alpha\vec{x}$ と $(-\alpha)\vec{x}$ の和が $\vec{0}$ になることを言えばよい．このように何を示すべきかは定義が何かを考えることから理解できる．
- $-\alpha\vec{x}$ と記述する答案があるが，この問題で証明すべきことは，$\vec{x}$ の $-\alpha$ 倍，$(-\alpha)\vec{x}$ が $\alpha\vec{x}$ の逆元 $-(\alpha\vec{x})$ に等しいことだ．$-\alpha\vec{x}$ ではどちらの意味か不明なので，この問題を証明してからでないと使えない．
- $\alpha\vec{x}$ の逆元を $\vec{y}$ とおく人がいるが，これは $-(\alpha\vec{x})$ とおくべきだ．この議論は逆元の一意性を示すときに使ったが，この問題では逆元の一意性を理解したうえで，それが $(-\alpha)\vec{x}$ に等しいことを示せという趣旨だ．「命題 1.2 の後半の証明が参考になろう」というヒントを読んだのだろうか．
- この問題の難しさは，常識的な和とスカラー倍の性質ではなく，公理およびそれから導き出された命題 1.1 および命題 1.2 のみしか使えないということだ．$-\alpha\vec{x}$ という記法を何故使ってはいけないかはすでに述べた．他にも次に注意すべきだ．
  - ベクトルの引き算は定義されていない．これを定義するのなら逆元を加えることとして $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$ とすべきだ．
  - $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ は公理になく命題としても証明していない．使うなら証明する必要がある．例えば命題 1.2 とスカラー倍の結合法則を使って次のようにする．
  $$\alpha\vec{0} = \alpha(0\vec{x}) = (\alpha 0)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$$

  ただし，このような事実が証明された後は，それを公理と同等に線形空間において当然なりたっていることとして使ってよい．次回以降の講義では従来の和とスカラー倍の扱い方と同様に議論を展開する．引き算も $-\alpha\vec{x}$ という書き方も，等式における移項（両辺に逆元を加えること）もどんどん使うことになる．

問題 1.3　a, b, c を有理数とし $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ が成り立つとする．$b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a$ の両辺を 2 乗すれば $2b^2 + 2bc\sqrt{6} + 3c^2 = a^2$ を得る．ここで $bc \neq 0$ であれば $\sqrt{6} = \dfrac{a^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc}$ となり，右辺は有理数なので $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する．ゆえに $bc = 0$ である．$b = 0$ の場合は $a + c\sqrt{3} = 0$ だが，$\sqrt{3}$ は無理数なので $c = 0$ でなくてはならない．ゆえに $a = b = c = 0$ である．$c = 0$ の場合は $a + b\sqrt{2} = 0$ となり $\sqrt{2}$ は無理数なので $b = 0$ でなくてはならない．この場合もやはり $a = b = c = 0$ になる．結局 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ となるのは $a = b = c = 0$ に限るので 1 次独立である．

【コメント】

- 1 次独立であることを示す問題だが，これも 1 次独立の定義が出発点になる．ただし，係数を有理数の範囲で考えているので a, b, c は有理数にする必要がある．
- 無理数の有理数倍は無理数だが，無理数の和は無理数とは限らない．だから $b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ が無理数であることの理由に「無理数の和だから」としたら間違いである．解答例のように 2 乗して $\sqrt{6}$ の無理数性に帰着させるなどの議論が必要になる．なお，$\sqrt{n}$ が有理数になるのは n が平方数の場合のみである．すなわち平方数でない自然数 n について $\sqrt{n}$ は無理数である．

- 係数を有理数にしていることが重要で，証明ではこれをどのように使ったのかを述べる必要がある．解答例の程度の議論はできてほしい．
- 「$a = 0$ のときは・・・」「$b = 0$ のときは・・・」「$c = 0$ のときは・・・」という議論をしている人がいるが，これではすべての場合を尽くしたことにならない．

問題 1.4　$1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$ より，$\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ の 1 次結合が 0 になるのは係数がすべて 0 のときとは限らない．ゆえに $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ は 1 次従属である．

$\{1, \sin x, \cos x\}$ の 1 次結合が 0 になるとする．すなわち $a1 + b\sin x + c\cos x = 0$ とする．この等式は連続関数の集合における等式なので右辺は 0 に値をとる定数関数を意味する．ここで $x = 0$ を代入すれば $a + c = 0$，$x = \pi/2$ を代入すれば $a + b = 0$，$x = \pi$ を代入すれば $a - c = 0$ を得る．ゆえに $a = b = c = 0$ であり，$\{1, \sin x, \cos x\}$ は 1 次独立である．

【コメント】

- 1 次独立とは 1 次結合が $\vec{0}$ になるのが，係数がすべて 0 の場合に限るということだ．1 次従属を示すには，係数がすべて 0 でない 1 次結合で $\vec{0}$ になるものの例を作ればよい．一つでもそのような例があれば 1 次従属であることが分かる．一方，1 次独立であることは，1 次結合が 0 であるときに係数がすべて 0 であることを示さなくてはならない．
- 「a, b, c について $a1 + b\sin x + c\cos x$ となる」というような記述をする人がいるが，これでは何故「$a + b\sin x + c\cos x = 0$」なのか聞きたくなる．「となる」というのは論理の帰結を意味する言葉だ．解答例のように「とする」あるいはより正確に「と仮定する」としなくてはならない．これは論理の出発点を意味する言葉だ．意識して使い分けるようにすること．
- 単振動の合成を使って $a1 + b\sin x + c\cos x = a + \sqrt{b^2 + c^2}\sin(x + \alpha) = 0$ としても良い．右辺が定数関数 0 であることから $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 0$ はすぐに分かる．
- 1 次結合における係数はスカラーだ．$\{1, \sin x, \cos x\}$ は関数の組なのでこの 1 は 1 に値をとる定数関数を意味している．解答例では $a1$ と書いたがこれは単に a と書くほうが普通だろう．定数関数 1 の a 倍だから a に値をとる定数関数になる．なお，係数に関数を入れた人がいるが，これは 1 次結合の概念の誤解だ．
- 1 次結合が 0 になるという式は線形空間（この場合は連続関数の集合）での等式だ．$a + b\sin x + c\cos x = 0$ で $x = 0$ のときは $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ でも成立するという主張は，$f(0) = g(0)$ だから $f = g$ だと主張していることになる．議論のおかしさに気づいてほしい．

本日の講義の要点

1. 基底

   基底の定義は 1 年次の講義で扱ったものと基本的には変わらない．「1 次独立で V を生成するベクトルの組」のことである．ただし，一般の線形空間を扱っていること，無限個のベクトルからなる基底もありえることの 2 点で 1 年次とは異なっている．ただし，無限個のベクトルからなる基底については，多項式全体の集合における $\{x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ を紹介するにとどめる．実際扱う基底は有限個のベクトルからなるもののみである．

2. 次元

   有限個のベクトルからなる基底を持つ線形空間において，基底を構成するベクトルの個数は不変であること（命題 1.4）を証明した．証明は (1) n 個のベクトルからなる基底をもつ線形空間において $n + 1$ 個以上のベクトルの組が 1 次独立にならないこと，そして (2) $n - 1$ 個以下のベクトルで基底ができた

とすると矛盾が生じることの 2 つを示すことによって行っている．すっきりした証明なのでよく考えてほしい．

問題 1.6 は授業の中で考察し解答を与えた．複素数は $a+bi,\ a,b \in \mathbb{R}$ と表せるが，これは複素数が 1 と i の実数を係数とする 1 次結合であることを表している．$\{1,i\}$ は $\mathbb{C}$ を生成する．一方 $a+bi=0$ が $a=b=0$ を意味することは $\{1,i\}$ が 1 次独立であることに他ならない．係数を実数として考えるとき $\mathbb{C}$ は 2 次元空間である．

3. 基底と座標

これも 1 年次のテキストに記載してある事項だ．これを述べるためにまず命題 1.5 を紹介した．なお，全射，単射の意味が分からないという人が多かったので講義ではその部分から解説した．全射，単射は今後数学を学ぶ際に知っておかなければならない必須事項なのできちんと理解しておいてほしい．

- 写像 $f : A \longrightarrow B$

  A の要素 $a \in A$ に対して b の要素 $f(a) \in B$ が一つ定まるという意味だ．A, B が数の集合のときは関数というが，一般には写像という．
- 写像 f が全射であるとは次を言う．

  すべての $b \in B$ について，$a \in A$ で $f(a) = b$ を満たすものが存在する．すなわち $f(a)$ は B のすべての点をとる．
- 写像 f が単射であるとは次を言う．

  $f(a) = f(a')$ は $a = a'$ のときに限り成り立つ．すなわち異なる点は異なる B の点に移される．
- 写像 f が全単射であるとは，全射かつ単射であることを言う．全射なので $b \in B$ に対し $f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が存在するが単射なので，そのような a は唯一つしか存在しない．$b \in B$ に対し $f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が唯一つ存在するのであり，この対応を f の逆写像という．

例えば $y = \sin x$ において，定義域を $[-\pi/2, \pi/2]$，値域を $[-1, 1]$ に制限すれば全単射になる．この逆写像が逆三角関数 $x = \sin^{-1} y$ である．

命題 1.5 は $\mathcal{P}$ の 1 次独立性が $\Phi_{\mathcal{P}}$ の単射性と同値なこと，$\mathcal{P}$ が V を生成することが $\Phi_{\mathcal{P}}$ の全射性に同値なことを主張する．それゆえ $\mathcal{P}$ が基底になるときは $\Phi_{\mathcal{P}}$ は全単射であり逆写像を持つ．この逆写像が $\vec{x} \in V$ の座標を与える．

4. 基底の変換と座標の変換

二つの基底 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が与えられたとき，基底の変換の行列 A を $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ で定義する．成分を使った表示は 6 ページ中ほどをみること．基底の変換から座標の変換が定まるが，座標の変換も行列 A をかける形で与えられる．ただし $\mathcal{Q}$ による座標 $\boldsymbol{x}'$ に行列 A をかけたものが，$\mathcal{P}$ による座標 $\boldsymbol{x}$ になっていることに注意せよ．意味を考えずに覚えようとすると逆に考えてしまいやすい．3 番目の式と見比べて理解すること．

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}A, \qquad \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}', \qquad \mathcal{Q}\boldsymbol{x}' = \mathcal{P}A\boldsymbol{x}' = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$$

なお，基底の変換の行列は正則である．A をかける線形写像は $(\Phi_{\mathcal{P}})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{Q}}$ でありこれは逆写像 $(\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ を持つ．

本日の提出課題とヒント

課題 1 V のベクトルの組 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ について $\mathcal{P}$ が V を生成することと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることとは同値であることを示せ．

課題 2 問題 1.9 に答えよ．
課題 3 V の基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ と n 次正則行列 A について $Q = \mathcal{P}A$ も V の規定になることを示せ．

課題 1 については生成することの定義を，$\mathcal{P}$ と数ベクトルの積を使って書き直してみること．課題 2 は $Q = \mathcal{P}A$ を満たす行列 A を見つけることが要点だ．$\mathcal{P}, Q$ とは何かを考えながら取り組んでほしい．課題 3 は講義では述べなかったが，講義メモを書きながらやってもらったほうが良いと感じ，追加で出題した．問題 1.8 の逆であって，基底の取り方は正則行列の取り方と同等の自由度があることが分かる．

線形数学講義メモ (10 月 17 日)

前回のレポート課題の解答例とコメント

まず，提出者があまりに少ないことが残念である．講義メモを活用した学習をきちんとしているのなら問題ないが，家庭学習をせずに受講しているのであればこの講義内容を理解するのは困難だろう．最初の講義で配布した「線形数学の講義の進め方について」を読んでおいてほしい．

課題 1 V のベクトルの組 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ について $\mathcal{P}$ が V を生成することと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることとは同値であることを示せ．

【解答例】 $\mathcal{P}$ が V を生成したとする．任意の $\vec{x} \in V$ について $\vec{x}$ は $\mathcal{P}$ の 1 次結合で書ける．すなわち

$$\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots x_n\vec{p}_n$$

と書ける．$\boldsymbol{x} = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ とおけば右辺は $\mathcal{P}\boldsymbol{x}$ と表せるのでこれは $\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ に他ならない．ゆえに任意の $\vec{x}$ が $\vec{x} = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ と表すことができるので $\Phi_{\mathcal{P}}$ は全射である．

逆に $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射だとする．任意の $\vec{x} \in V$ について $\vec{x} = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ となるような $\boldsymbol{x} \in K^n$ が存在する．右辺を成分により書き下せば

$$\vec{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots x_n\vec{p}_n$$

となる．これは $\vec{x}$ が $\mathcal{P}$ の 1 次結合で表せることに他ならない．ゆえに任意のベクトルが $\mathcal{P}$ の 1 次結合で表せるので $\mathcal{P}$ は V を生成する．

【コメント】

- 生成するの定義と全射の定義に基づいて議論すること．これと次の等式を結び付ければよい．

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots x_n\vec{p}_n$$

- 講義で全射の定義をするとき $f : A \longrightarrow B$ として記述したが，この問題では $\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V$ が全射であることとの同値性が問われている．定義は問題に合わせて記述しなくてはならない．f と書く人がいるが，定義の際に使用した記号に引っ張られるようでは言葉を頭で考えようとしていないと思わざるを得ない．これでは数学が分かるようになるはずはない．
- V の要素，K^n の要素（列ベクトル），K の要素（スカラー），V の要素の組など様々な対象を同時に扱わなければならない．記号の使い分けは，その違いを意識することなのできちんと行ってほしい．$p \in V$ のような表現は間違いとは言えないが現時点ではやめたほうが良い．なお，多くの線形代数の本では V の要素をボールド体 $\boldsymbol{x}$ のように表している（教養の線形代数 p. 115 でも同様）．ただし，K^n の要素との区別がつかなくなるのでこの講義では $\vec{x}$ という記号を使っている．記号の上にある矢印を落とさないこと．
- $\mathcal{P}$ が V を生成することを $V = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots x_n\vec{p}_n$ と書く人がいるが，左辺は集合，右辺は要素でありこの等式は間違いだ．生成する空間の記号を使って $V = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n \rangle$，あるいは $V = \{x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots x_n\vec{p}_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$ と表すこと．

課題 2 問題 1.9 に答えよ．

【解答例】 $a + b\cos 2x + c\sin 2x \in V$ は

$$a + b\cos 2x + c\sin 2x = (a + b)\cos^2 x + 2c\cos x\sin x + (a - b)\sin^2 x$$

と $\{\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x\}$ の 1 次結合で書けるので，$\{\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x\}$ は V を生成する．

また，$a\cos^2 x + b\cos x\sin x + c\sin^2 x = 0$ であれば $x = 0$ を代入して $a = 0$，$x = \pi/2$ を代入して $c = 0$，$x = \pi/4$ を代入して $a + b + c = 0$ を得る．よって $a = b = c = 0$ であり 1 次独立である．ゆえに $\{\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x\}$ は V の基底である．

基底の変換の行列については次で与えられる．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\cos^2 x & \cos x\sin x & \sin^2 x\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\dfrac{1+\cos 2x}{2} & \dfrac{\sin 2x}{2} & \dfrac{1-\cos 2x}{2}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & \cos 2x & \sin 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

【コメント】

- 基底であることを示すのだから 1 次独立であることと，生成することを示せばよい．この程度の議論はできるようになってほしい．変換の行列については，具体的な設定なので単なる計算問題だ．ただ解答例をみれば変換の行列の意味や $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}A$ というテキストの表記の分かりやすいだろう．

課題 3 V の基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ と n 次正則行列 A について $\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}A$ も V の基底になることを示せ．

【解答例】$\mathcal{P}$ が V を生成するので任意の $\vec{x} \in V$ は $\vec{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ と表せる．$\boldsymbol{x}' = A^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Q}A^{-1}\boldsymbol{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{x} = \vec{x}$ となるので $\vec{x}$ は $\boldsymbol{Q}$ の 1 次結合としても表せる．ゆえに $\boldsymbol{Q}$ も V を生成する．

$\mathcal{P}$ が 1 次独立なので $\mathcal{P}\boldsymbol{x} = \vec{0}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ成り立つ．ここで $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}' = \vec{0}$ とすれば $\mathcal{P}(A\boldsymbol{x}') = \vec{0}$ なので，$A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ を得る．A は正則なので $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ であり $\boldsymbol{Q}$ も 1 次独立である．ゆえに $\boldsymbol{Q}$ は基底である．

【コメント】

- 講義ではレポート課題として出さなかったので，この問題については次回の講義で解説する．ただし，講義メモの学習は授業に関連する必修課題なので，今後もこのような形でレポート課題を追加（修正）することはあり得る．残念ながらこの問題に解答した人は 1 人だった．
- $\mathcal{P}$ が基底であることと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全単射であることが同値であることを t 使って次のように議論してもよい．$\boldsymbol{Q} = \mathcal{P}A$ より $\Phi_{\boldsymbol{Q}} = \Phi_{\mathcal{P}} \circ f_A$ である．ただし f_A は行列 A をかける線形写像である．ここで $\mathcal{P}$ が基底なので $\Phi_{\mathcal{P}}$ は全単射である．また A は正則なので f_A は全単射である．よって $\Phi_{\boldsymbol{Q}}$ は全単射の合成なので全単射になる．

本日の講義の要点

1. 有限次元線形空間 V の部分空間 W について $0 \leqq \dim W \leqq V$ が成り立つこと (命題 1.6)

   基本的には 1 年次の線形代数の教科書に記述されている．次の流れで理解するようにしてほしい．

   - W の 1 次独立なベクトルの組 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r\}$ について
   $$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r \rangle \subsetneq W$$
   であれば $\vec{p}_{r+1} \in W \setminus \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r \rangle$ を付け加えることにより 1 次独立なベクトルの組が得られる．その理由を命題 1.3 と合わせて考えてみよ．
   - $\dim V = n$ のとき，$n + 1$ 個以上のベクトルの組は 1 次独立になれない．(命題 1.4 の証明をみよ) だから，上の操作を $n - r$ 回繰り返すまでに必ず W を生成する 1 次独立なベクトルの組が得られえる．すなわち基底である．
   - W の基底が得られたとき，それにさらに V のベクトルを付け加えて行って V の基底を得る．これを基底の延長と呼ぶ．

- $\dim W = 0$ のときは定義から $W = \{\vec{0}\}$ のときである．$\dim W = \dim V$ のときは $W = V$ を得るが，これはレポート課題に回す．自明でない部分空間については $1 \leqq \dim W \leqq \dim V - 1$ である．

2. 共通部分，和空間と次元の等式

　これも 1 年次の教科書に記述されている事項だ．証明も実質的に同じなので比べてみるとよい．なお，次元の等式については次のような議論で証明を行った．

- $W_1 \cap W_2$ の基底を延長する形で W_1 の基底と W_2 の基底を作る．$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ のときは自由に W_1, W_2 の基底を作る．証明の方針はそれを集めたものが $W_1 + W_2$ の基底であることを示すことだ．
- 生成することは簡単だ．授業中に理解できなかった人は定義に基づいて考え直してみること．$W_1 + W_2$ の要素は W_1 の要素と W_2 の要素の和であり，それぞれを W_1, W_2 の基底を使って表示してみればよい．
- 1 次独立であることは少しテクニカルだがテキストにきちんと書いてあるのでじっくり読むように．ポイントは $a = b$ と $a \in A$, $b \in B$ から $a \in A \cap B$ が得られることだ．納得できるだろうか．

3. 直和（定理 1.8）

　1 年次の教科書では 2 個の部分空間の直和しか扱わないが，ここでは r 個の部分空間の直和を紹介した．(1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3), (3) $\Longrightarrow$ (1) の 3 つの命題を証明したが，これによって (1)(2)(3) のどれか 1 つが成り立てば他の 2 つも成り立つ．これから 3 つの主張の同値性が分かる．数学の議論に良くある進め方なので納得できない人は質問に来てほしい．

　(3) は (1)(2) に比べて分かりづらいが，これを挟むことによって証明が明快になる．なかなかうまい議論だと思うが如何か．なお (4) との同値性は時間が無くて来週に回した．

本日の提出課題とヒント

課題 1 問題 1.10　有限次元線形空間 V の部分空間 W について $\dim W = \dim V$ ならば $W = V$ であることを示せ．

【ヒント】 W の基底が V を生成していないとして矛盾を導く．W の基底が V を生成しているとき $V = W$ になるが何故だか分かるか．

課題 2 問題 1.11 定理 1.7(1) 2 つの部分空間の共通部分がやはり部分空間になることを示せ．

【ヒント】 テキストに定理 1.6(1) と書いてあるがこれは間違いだ．部分空間であることを示すには，和とスカラー倍で閉じていることを言えばよい．難しくないので是非考えてほしい．

課題 3 問題 1.12 問題文は省略

【ヒント】 まず各集合が部分空間になることを示すこと．例えば偶関数の集合については，偶関数の和が偶関数になることおよび偶関数のスカラー倍が偶関数であることを示す．こうして考えてみると当たり前のことだ．次に $W_1 \cap W_2$ が $\vec{0}$ のみであることを示すがこれもやさしい．偶関数かつ奇関数の関数は 0 以外に存在しないことを示せばよい．最後に $W_1 + W_2 = V$ を示す．これは任意の関数を偶関数と奇関数の和で表せることを示せばよい．ヒントとして $f(x) + f(-x)$ は偶関数，$f(x) - f(-x)$ が奇関数になることに注意すること．(2) も基本的に同じ方針でアプローチできる．

線形数学講義メモ (10 月 24 日)

前回のレポート課題の解答例とコメント

この講義のレポート課題，試験問題は基本的に証明問題である．まず証明問題に取り組むときの注意事項を箇条書きしよう．

- 用語，記号の意味を考えずに形式的に式をいじってはいけない．これでは自分でも何をやっているのか分かるはずはない．数学の用語・記号はすべて意味を持っている．その意味にこだわること．できれば日本語に翻訳しながら式を読むべきである．数式は使わなければならないが $\forall, \exists$ はできるかぎり使わないようにしてほしい．
- 何か参考になる証明方法はないかと探してはいけない．高校の時の数学的帰納法のイメージが強すぎて，証明も何かのパターンにあてはめようとする人がいる．それでは証明した事実が本当に正しいことだと納得できないのではないか．今回のレポート課題でも，部分空間の基底の構成をまねたり，和空間の基底の取り方の証明をまねたりする人がいるが，すべて見当はずれである．計算問題であれば，例題を参考にそれをまねて解答するという方法もあるが，証明問題ではそのような方法は無効だと思ったほうが良い．
- 証明のポイントは，仮定を正確に認識し，結論を言うには何が問題なのかを考えることにある．この講義で出題する証明問題は基本的に易しいものばかりなのでこの作業ができれば自ずと証明は浮かび上がってくる．解答例を読みながらその様子を味わうようにしてほしい．
- 講義メモにはレポート課題のヒントも掲載している．ヒントは解答への手がかりなので是非参考にしてほしい．

課題 1 問題 1.10　有限次元線形空間 V の部分空間 W について $\dim W = \dim V$ ならば $W = V$ であることを示せ．

【解答例】 $\dim W = \dim V = 0$ のときは $W = V = \{\vec{0}\}$ なので成立する．そこで $\dim W = \dim V = n \geqq 1$ とし W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ をとる．これが V を生成していないとすると $\vec{q} \in V - \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle$ がとれる．命題 1.3 より $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}\}$ は 1 次独立であるが，$n+1$ 個の 1 次独立なベクトルの組が存在することになり，命題 1.4 の証明で示した事項に矛盾する．よって $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ は V を生成する．ゆえに $V = W = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle$ である．

【コメント】

- ヒントに W の基底が V を生成することを示せばよいとしたが，解答例はまさしくその形になっていることに注意せよ．
- この問題では $\dim W = \dim V < \infty$ が仮定されているので，W が有限個のベクトルからなる基底を持つことは仮定されている．命題 1.6 の証明をまねて W の基底を作ろうとする答案があるが無意味だ．
- 解答の中には，分かってはいるがうまく表現できないというものも多い．例えば $n+1$ 個めのベクトルは解答例の議論の $\vec{q}$ のことだと思うがこれでは何か分からない．また，W の基底は V の基底になっているという表現もあるが，これも何故ですかと聞きたくなる．上の解答例ではそういう疑問は生じないはずだ．如何だろうか．明快な証明とそうでない証明の区別ができるような力をまず身につけてほしい．
- $W \supset V$ として議論している答案がある．問題の設定をきちんと理解してから解答を考えること．

課題 2 問題 1.11 定理 1.7(1) 2 つの部分空間の共通部分がやはり部分空間になることを示せ．

【解答例】 $\vec{0}$ は W_1, W_2 の両方に含まれているので $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ である．そこで $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を $W_1 \cap W_2$ からとり，また $\alpha, \beta \in K$ とすれば，$\vec{x}, \vec{y} \in W_1$ と W_1 が部分空間であることから $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1$ を得る．同様に $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$ と W_2 が部分空間であることから $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_2$ を得る．ゆえに $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1 \cap W_2$ であり，$W_1 \cap W_2$ は部分空間である．

【コメント】

- 定理 1.7 の証明を真似した人は失敗した．部分空間であることを示すのだから，定義に従って考えれば良い．比較的易しい問題のはずだ．ただ部分空間の定義を使おうとしない答案がある．証明の基本は定義の確認にあることを忘れないように．
- $W_1 \cap W_2$ の基底をとるという人がいるが，基底は部分空間であることを示してからの話だ．この問題は部分空間であることを示せというのだからこのような議論はそもそもおかしい．また有限次元でないと基底は使えない．定理 1.7 の証明で基底は (3) で使われているが，ここでは有限次元であることが仮定されていることに注意せよ．

課題 3 問題 1.12 問題文は省略

【解答例】 (1) 偶関数 $f(x), g(x)$ の和が偶関数であることは $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ より簡単に分かる．スカラー倍についても $(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$ より偶関数になる．よって偶関数全体の集合は部分空間である．奇関数についても同様に示せるので省略する．

$f(x)$ が偶関数でかつ奇関数だったとすると，$f(-x) = f(x) = -f(x)$ が成り立つ．ゆえに $f(x) = 0$ であり，$f = 0$ となる．よって $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である．

$f(x)$ を連続関数とし $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$ とおけば $g(x)$ は偶関数，$h(x)$ は奇関数である．また $f(x) = g(x) + h(x)$ なので $f(x)$ は奇関数と偶関数の和として表せる．よって $V = W_1 + W_2$ であり $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ と合わせて $V = W_1 \oplus W_2$ を得る．

(2) 対称行列の和とスカラー倍が対称行列であること，交代行列の和とスカラー倍が交代行列であることは簡単なので省略する．また対称行列かつ交代行列であれば ${}^tA = A$ と ${}^tA = -A$ の両方が成り立つので $A = -A$ であり $A = O$ となる．よって $W_1 \cap W_2 = \{O\}$ である．

正方行列 A に対し $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおけば B は対称行列，C は交代行列である．また $A = B + C \in W_1 + W_2$ なので $V = W_1 + W_2$ を得る．これと $W_1 \cap W_2 = \{O\}$ を合わせて $V = W_1 \oplus W_2$ を得る．

【コメント】

- 偶関数全体の集合 W_1 と奇関数全体の集合 W_2 がともに部分空間であることは定義の条件を確認するだけなのでやさしいはずだ．また $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ を示すのもやさしい．ポイントは $V = W_1 + W_2$ を示すことだ．解答例を味わってほしい．
- 一般の線形空間では要素を $\vec{x}$ のように表したが，具体的な線形空間ではその通常の表し方に従って記述するほうが良い．例えば (1) は関数の集合なので $f(x)$ のように，また (2) は行列の集合なので A のように表す．
- 偶関数の集合を $\{2\vec{x}\}$，奇関数の集合を $\{2\vec{x} + 1\}$ とした答案があった．どういう反応をしたらいいのだろうか．
- $V = W_1 + W_2$ を示さない答案が目につく．直和の定義では $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ でいいがこの問題は $V = W_1 \oplus W_2$ を示すことなので，まず $V = W_1 + W_2$ を言う必要がある．

本日の講義の要点

1. 直和の次元による特徴づけ

   前回定理 1.8 の (1)(2)(3) の同値性を証明した．ここでは有限次元の場合に直和であることと，次元の和が和空間の次元に等しいことの同値性を証明した．証明はテキスト 9 ページに書いてあるのでここでは繰り返さない．証明のポイントだけ箇条書きしておく．

   - W_k の基底をとってそれを寄せ集めたものは和空間 $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ を生成している．
   - よって (4) が成り立つことと，こうして寄せ集めたベクトルの組が 1 次独立であることが同値になる．
   - (2) と上のベクトルの組の 1 次独立性が同値であることを示す．

   この証明の難しさは，各 W_k の基底を添え字によってきちんと書き下すことにある．じっくり考えてほしい．

2. 同値関係

   同値関係は数学の様々な分野で使われる基本概念である．最初の学習の機会だが，他の授業でも扱うのでできるだけコンパクトにまとめた．

   同値関係の定義　集合 X の同値関係とはそもそも何かは分かりづらいかもしれない．実態としては直積集合 $X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ の部分集合 E が考察の対象だが $(x, y) \in E$ を $x \sim y$ と書いて表記することが多い．これを「x は y と同値である」と読むと理解しやすい．この表現で同値関係であるための 3 つの条件は，「x は自分自身と同値である (反射律)」「x が y と同値であれば，y は x と同値である (対称律)」「x が y と同値であり，かつ y が z と同値であれば x は z と同値である (推移律)」と読んでほしい．日本語で読むことによって意味がとりやすくなると思う．

   講義では同値関係の具体例として $X = \mathbb{Z} =$ 整数全体の集合とし，

   $$n \sim m \Longleftrightarrow n - m \text{ は } 5 \text{ の倍数}$$

   で同値関係を定めた．これについて反射律，対称律，推移律が成り立つことは，板書せず言葉で説明した．ただ分からないという人もいると思うので記述しておこう．

   - $n - n = 0$ は 5 の倍数なので n は n と同値である．反射率は成り立つ．
   - n が m と同値であれば $n - m$ は 5 の倍数である．$m - n = -(n - m)$ より $m - n$ も 5 の倍数なので，m は n と同値である．対称律も成り立つ．
   - n が m と同値であり，かつ m が l と同値であれば， $n - m$ と $m - l$ は 5 の倍数である．よってそれらの和 $n - l = (n - m) + (m - l)$ も 5 の倍数である．ゆえに n は l と同値であり推移律も成り立つ．

   同値類と代表元　集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき x に同値な要素全体の集合を $[x]$ と表し（x の属する）同値類と呼ぶ．この x を同値類 $[x]$ の代表元と呼ぶ．$[x]$ は X の部分集合である．

   講義で扱った上の例で，1 を含む同値類は

   $$[1] = \{x \mid x \sim 1\} = \{x \mid x - 1 \text{ は } 5 \text{ の倍数} = \{5n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 6, 11, \ldots - 4, -9, -14, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$$

   である．なお，[1] は [126] などとも表される．代表元の取り方は様々である．

   同値類による類別　反射律より $x \in [x]$ なので同値類は空集合ではない．一方，$[x] \cap [y] \neq \emptyset$ であれば $[x] = [y]$ であり，すべての X の要素はいずれか一つの同値類に入る．X は互いに重ならないように同値類に分けられるのでありこれを類別と呼ぶ．

講義で扱った例では，同値類は $[0], [1], [2], [3], [4]$ の 5 つであり，n がどの同値類に属するかは n を 5 で割った余りで判定できる．この同値類による類別とは整数を 5 で割った余りによって 5 つの集合に分けることを言う．

商集合　X とその同値関係が与えられたとき，同値類を一つの要素として新しい集合 $X/\sim$ が定義できる．その要素は $[x] \in X/\sim$ である．

講義で扱った例では $\mathbb{Z}/\sim$ の要素は $[0], [1], [2], [3], [4]$ の 5 つである．このように X が無限集合でも $X/\sim$ は有限集合になることもある．

3. 商空間

線形空間 V とその部分空間 W について $\vec{x} \sim \vec{y}$ を $\vec{x} - \vec{y} \in W$ で定義し，その商集合に線形空間としての構造を定めた．これを商空間と呼び V/W と表す．講義での証明はテキストに書いてあるものと同じなのでここでは繰り返さない．

一般に商空間で物事を考える場合には代表元をとって議論するので，代表元の取り方によらないことは常に意識していないといけない．証明の最初のステップの必要性をしっかり認識しておいてほしい．

本日の提出課題とヒント

課題 1　同値類について $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ならば $[x] = [y]$ であることを示せ（命題 1.9(2)）．

【ヒント】 まず仮定を使って $a \in [x] \cap [y]$ をとる．これから $x \sim y$ を示すのが第 1 段階だ．次に $[x], [y]$ は X の部分集合なのでそれが等しいことを言うには $z \in [x] \Longleftrightarrow z \in [y]$ を示せばよい．このように集合の等式，包含関係は要素をとって表す．推移律が効果的に使われることに注意せよ．

課題 2　$\vec{x} \sim \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in W$ が V の同値関係であることを示せ．

【ヒント】 反射律，対称律，推移律を示す．講義メモの同値関係の具体例を参考に考えてみよ．

課題 3　問題 1.13

【ヒント】 3 次元空間の中で直感が役に立つはずだ．定義に従って同値類がどういう集合かを考えてほしい．

今回の講義で第 1 章はすべて終わった．来週からは第 2 章に入る．今回のレポート課題の解答とコメントは次回の講義メモに掲載する．その内容までが第 1 回試験の範囲である．試験は 11 月 7 日なので準備しておくこと．

線形数学講義メモ (10 月 31 日)

前回のレポート課題の解答例とコメント

課題 3 の問題 1.13 について，こちらが参考にしていた印刷バージョンが古いため番号がずれていました．混乱させてしまったようでお詫びいたします．

課題 1 同値類について $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ならば $[x] = [y]$ であることを示せ（命題 1.9(2)）．

【解答例】 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ より $a \in [x] \cap [y]$ をとる．$a \in [x]$ より $a \sim x$ よって対称律より $x \sim a$，また $a \in [y]$ より $a \sim y$ である．$x \sim a$ と $a \sim y$ が成り立つので推移律により $x \sim y$ である．

次に $z \in [x]$ をとる．$z \sim x$ と $x \sim y$ より $z \sim y$ を得る．よって $z \in [y]$ であり $[x] \subset [y]$ が成り立つ．同様に y と x を入れ替えて議論すれば $[y] \subset [x]$ を得るので，$[x] = [y]$ である．

【コメント】

- $x \sim y$ より $[x] = [y]$ という答案が目立つが，これは証明すべき事項である．
- 同値類は X の部分集合なのでそれが等しいことを言うには $[x] \subset [y]$ と $[y] \subset [x]$ を示す．これは集合を扱う場合の基本的考え方だ．また $[x] \subset [y]$ は要素を使って $z \in [x] \Longrightarrow z \in [y]$ を示す．これも基本だ．上の証明がこの基本的な考えに沿って行われていることに注意せよ．
- $x - y$ のような記号を使う人がいるがこの問題は一般の集合での同値関係の話なので差は定義されていない．この記号は無意味である．
- この証明の後半の部分は $x \sim y \Longrightarrow [x] = [y]$ の証明だ．命題 1.9(3) である．なお同値類 $[x]$ において x はその特別な要素（代表元）である．$[x] \subset [y]$ を示すのに $x \in [x] \Longrightarrow x \in [y]$ を示しても不十分だ．$z \in [x] \Longrightarrow z \in [y]$ のように一般の要素として取らなければならない．
- 空集合 $\emptyset$ を $\mathbf{0}$ のように書く人がいる．もし 0 ベクトルと思っているのであれば重大な勘違いだ．

課題 2 $\vec{x} \sim \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in W$ が V の同値関係であることを示せ．

【解答例】 $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \in W$ より $\vec{x} \sim \vec{x}$ であり反射律は成り立つ．$\vec{x} \sim \vec{y}$ ならば $\vec{x} - \vec{y} \in W$ である．$\vec{y} - \vec{x} = -(\vec{x} - \vec{y}) \in W$ なので $\vec{y} \sim \vec{x}$ となる．対称律も成り立つ．$\vec{x} \sim \vec{y}$ かつ $\vec{y} \sim \vec{z}$ ならば $\vec{x} - \vec{y} \in W$ かつ $\vec{y} - \vec{z} \in W$ である．よって $\vec{x} - \vec{z} = (\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) \in W$ であり，$\vec{x} \sim \vec{z}$ を得る．よって推移律も成り立ち，$\sim$ は同値関係になる．

【コメント】

- 反射律は部分空間が 0 元を含むこと，対称律はスカラー倍で閉じていること，推移律は和について閉じていることを利用する．部分空間の定義が同値関係であることの証明にどう使われているか理解すること．

課題 3 問題 1.14（ご迷惑をおかけしました）

【解答例】 W は原点を含む平面であり，$[\boldsymbol{a}]$ とは $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ の集合である．$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ とおけば，同値関係の定義から $\boldsymbol{w} \in W$ であり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$ となる．よって

$$[\boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W\}$$

であり，$[\boldsymbol{a}]$ は $\boldsymbol{a}$ をとおり W に平行な平面となる．

【コメント】

- $\mathbb{R}^3$ は座標空間なので直感的に理解できる．このとき同値類が何かを考えてもらうのがこの問題の趣旨だ．

本日の講義の要点

1. 線形写像の定義と例

 定義は 1 年生の時に学習したことと同様である．覚えておくこと．ただし，1 年次では $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像しか扱っていなかったので，行列をかけることによる線形写像のみだ．この講義では一般の線形写像を扱っていることに注意しておくこと．とりわけ微分による例（例 2(3)）は重要だ．これが線形写像の例であることをきちんと確認しておくように．

2. 線形写像の像と逆像

 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ と V の部分空間 V_1 について $f(V_1) = \{f(\vec{v}) \| \vec{v} \in V_1\}$ を V_1 の像と呼ぶ．また W の部分空間 W_1 について $f^{-1}(W_1) = \{\vec{v} \mid f(\vec{v}) \in W_1\}$ を W_1 の逆像と呼ぶ．この定義はテキストに記載してなかったので追加しておいてほしい．なお，逆像は逆写像の像ではない．逆像の定義に逆写像は使われていないことに注意しておくこと．

 逆像と像は部分空間になる．これは問題 2.1 だが講義ではきちんと証明を与えた．ここに記述しておく．

 $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in f(V_1)$ をとる．$f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = W_2$ となる V_1 の要素 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が存在する（像の定義）．

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2)$$

だが V_1 は部分空間なので $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in V_1$ であり，この左辺は $f(V_1)$ の要素である．よって $f(V_1)$ は部分空間である．

 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ をとる．逆像の定義から $f(\vec{v}_1)$. $f(\vec{v}_2)$ はともに W_1 の要素である．W_1 は部分空間なので

$$f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) \in W_1$$

であり，$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ を得る．ゆえに $f^{-1}(W_1)$ も部分空間である．

3. 線形同型写像

 線形同型写像と 2 つの線形空間が同型であることの定義を与えた．テキスト 12 ページを参照せよ．ただし，全単射線形写像の逆が線形になることはテキストでは記述されていない．講義で扱ったのでこのメモに書いておく．

 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ が全単射であるとしその逆写像を $f^{-1} : W \longrightarrow V$ とおく．$f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \vec{v}$ とおく．両辺の f で移った先を考えれば $f \circ f^{-1} = I$ より $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = f(\vec{v})$ である．一方 f の線形性から

$$f\left(\alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2)\right) = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = f(\vec{v})$$

であり，f の単射性から

$$\alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2) = \vec{v} = f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2)$$

を得る．よって f^{-1} は線形である．

 有限次元線形空間において，基底の定める線形写像 $\Phi_{\mathcal{P}}$ は全単射である（命題 1.5）．これが例 4 である．

4. 定理 2.1

 (1) の証明はプリントの記述で十分だろう．(2) は次のように議論する．

- $\tilde{f}: V/\mathrm{Ker}f \longrightarrow W,\ \tilde{f}([\vec{v}]) = f(\vec{v})$ が well-defined であること

  $\vec{x}$ を別の $[\vec{v}]$ の代表元とする．$\vec{x} \sim \vec{v}$ すなわち $\vec{x}-\vec{v} \in \mathrm{Ker}f$ が成り立つ．$f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x})-f(\vec{y}) = \vec{0}_W$ より $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ なので $\tilde{f}([\vec{x}])$ の定義は代表元の取り方によらない．
- $\tilde{f}$ が線形写像であること

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}\left(\alpha[\vec{x}]+\beta[\vec{y}]\right) &= \tilde{f}\left([\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}]\right) && V/\mathrm{Ker}f \text{ における演算の定義} \\
&= f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) && \tilde{f} \text{ の定義} \\
&= \alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y}) && f \text{ の線形性} \\
&= \alpha\tilde{f}([\vec{x}])+\beta\tilde{f}([\vec{y}]) && \tilde{f} \text{ の定義}
\end{aligned}
$$

- $\tilde{f}$ が単射であること　$\tilde{f}([\vec{x}]) = f(\vec{x}) = \vec{0}_W$ ならば $\vec{x} \in \mathrm{Ker}f$ である．ゆえに $\vec{x}-\vec{0}_V \in \mathrm{Ker}f$ なので $[\vec{x}] = [\vec{0}_V]$ である．$\mathrm{Ker}\tilde{f}$ の要素は $[\vec{0}_V]$ のみであり $\tilde{f}$ は単射である．
- 値域を $\mathrm{Im}\tilde{f} = \mathrm{Im}f$ に制限すれば $\tilde{f}: V/\mathrm{Ker}f \longrightarrow \mathrm{Im}f$ は全射になる．よって全単射線形写像であり $V/\mathrm{Ker}f$ と $\mathrm{Im}f$ は同型になる．

この定理に関連する話題として問題 2.4 を解説した．微分 $T(f) = f'$ が線形写像であること，その核は定数関数全体の集合であることは簡単に分かるだろう．$V/\mathrm{Ker}T$ の同値類は $[f(x)] = \{f(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\}$ であり，$\tilde{T}$ の逆写像（不定積分）での積分定数が同値類を考えることに他ならないことが分かるだろう．

来週の講義（11 月 7 日）では試験を行うので今回はレポート課題を出題しない．試験に向けた準備をしておくように．

線形数学講義メモ (11 月 7 日)

本日の講義の要点

1. 線形写像の表現行列
   定義は 1 年生の時のテキストに記述してあることと同じである．ただし，ベクトルと行列を使ってより簡便な書き方をした．何故 $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}A$ のような記述が可能なのか，きちんと確認しておくこと．
   表現行列は，p.13 中ほどの図式によって理解すると分かりやすい．基底によって線形同型写像
   $$\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V, \qquad \Phi_{\mathcal{Q}} : K^m \longrightarrow W$$
   が作られるが，
   $$(\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow K^m$$
   が表現行列 A をかける写像になっている．
2. 基底の変換と表現行列
   表現行列は基底の取り方によって変化する．これは p.13 の下のほうの図式をみると分かりやすい．ただし，この図式では $\mathcal{P}', \mathcal{Q}'$ と $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が逆になっている．講義では正しく書いたので訂正しておいてほしい．なお，$AP = QB$ の証明は次のように行った．ただし行列はそれをかける線形写像として扱っている．
   $$A \circ P = (\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{Q}} \circ A \circ P = (\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{P}} \circ P = (\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{P}'} = (\Phi_{\mathcal{Q}})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{Q}'} \circ B = Q \circ B$$
   合成には $\circ$ を使っているが，行列をかける線形写像の合成は，行列の積に他ならない．よって $AP = QB$ である．
3. 表現行列の簡略化を行列の問題として記述しなおす．
   p.14 の初めにまとめている．なお，線形変換の場合は表現行列は正方行列である．また定義域と値域の基底を同一にするので基底の変換の行列も同じであり $P = Q$ である．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 問題 2.2 を解け．

(1) は直和であることを示す．$f \circ f = f$ より $f\left(f(\vec{p})\right) = f(\vec{p})$ がすべての $\vec{p}$ について成り立つ．左辺を移項して f の線形性を使い $\vec{p} - f(\vec{p}) \in \mathrm{Ker} f$ を示すことが議論の出発点であり，ここから $V = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ と $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}\}$ を示す．若干難しめの問題.

(2) は $\vec{p} \in \mathrm{Im} f$ が $\vec{p} \in \mathrm{Ker} f$ であることを言えばよい．像と核の定義を使って $f \circ f = 0$ の仮定を利用する．標準的な問題でじっくり考えてほしい．

課題 2 問題 2.5 を解け．

基底の変換の行列は問題 1.9 と基本的に同一だ．解答を講義メモに記述しているのでそれを参考に考えてほしい．それぞれの基底に関する表現行列は p.13 の 10 行目の式をこの例で書き下してみること．簡単に分かるはずだ.

線形数学講義メモ (11 月 14 日)

前回のレポート課題について

課題 1 問題 2.2 を解け．

(1) $f \circ f = f$ より $f(f(\vec{p})) = f(\vec{p})$ がすべての $\vec{p}$ について成り立つ．ゆえに

$$f(\vec{p}) - f(f(\vec{p})) = f(\vec{p} - f(\vec{p})) = \vec{0}$$

なので $\vec{p} - f(\vec{p}) \in \mathrm{Ker} f$ である．$f(\vec{p}) \in \mathrm{Im} f$ なので

$$\vec{p} = (\vec{p} - f(\vec{p})) + f(\vec{p}) \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$$

を得る．よって $V = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ である．

次に $\vec{x} \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ をとる．$\vec{x} \in \mathrm{Im} f$ より $\vec{x} = f(\vec{p})$ と表せる．$\vec{x} \in \ker f$ より

$$\vec{0} = f(\vec{x}) = f(f(\vec{p})) = f(\vec{p}) = \vec{x}$$

なので $\vec{x} = \vec{0}$ である．よって $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}\}$ である，以上を合わせて $V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ を得る．

(2) $f \circ f = 0$ とする． $\vec{x} \in \mathrm{Im} f$ をとると，$\vec{x} = f(\vec{p})$ と表せる．ゆえに $f(\vec{x}) = f \circ f(\vec{p}) = \vec{0}$ であり $\vec{x} \in \mathrm{Ker} f$ となる．よって $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ である．

逆に $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ とする．$f(\vec{x}) \in \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ より $f(f(\vec{x})) = \vec{0}$ である．ゆえに $f \circ f = 0$ である．

【コメント】

- 核は $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ のことだが，別に f の逆写像 f^{-1} が存在しているわけではない．値域の部分集合 A に対して，逆像 $f^{-1}(A)$ が定まるが，これは逆写像による像ではない．逆写像の存在は仮定していないので $f^{-1}(\vec{p})$ のような書き方はできない．
- $f(\vec{p} - f(\vec{p})) = \vec{0}$ より $\vec{p} - f(\vec{p}) = \vec{0}$ という記述が複数あるが，このおかしさは気づいてほしい．$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ でも $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ と限らないことは何度も経験しているはずだ．

課題 2 問題 2.5 を解け．

V の 2 つの基底を $\mathcal{P} = \{1, \cos 2x,\ \sin 2x\}$, $Q = \{\cos^2 x, \sin^2 x. \cos x \sin x\}$ と表そう．f は微分による線形写像なので $\mathcal{P}$ に関する表現行列は

$$f(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x, \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}A, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q に関する表現行列は

$$\begin{aligned} f(Q) &= \begin{pmatrix} -2\cos x \sin x & 2\cos x \sin x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x, \cos x \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = QB, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．基底の変換の行列は

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x, \cos x \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos 2x}{2} & \frac{1 - \cos 2x}{2} & \frac{\sin 2x}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x, \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathcal{P}P, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．よって

$$PB = AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり $B = P^{-1}AP$ が成り立つ．

【コメント】

- $f(\varphi) = \varphi'$ で定めるという意味がつかめなかった人が少なからずいた．V の要素が関数であること，微分は例 2(3) であげた基本的な線形写像の例であることを考えれば当たり前だと思うのだが．また文字を区別するために $'$ をつけたのであれば写像は定義されたことにならない．表現行列を求めよという問題は成立しない．

本日の講義の要点

1. 線形写像の表現行列の簡略化

   命題 2.2 の証明を与えた．ただし証明の流れはテキストとは若干変更して次のような流れにした．

   - $\mathrm{Im} f \subset W$ の基底 $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$ をとり，それを延長する形で W の基底 $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k, \ldots, \vec{q}_m\}$ をとる．
   - $f(\vec{p}_j) = \vec{q}_j$, $1 \leqq j \leqq k$ として $\vec{p}_j$ をとる．
   - $\mathrm{Ker} f \subset V$ の基底 $\{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-k}\}$ をとる．
   - このとき $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_k, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-k}\}$ は 1 次独立であり，ベクトルの個数が $n = \dim V$ 個であることから基底である．

     ここで 1 次独立であることの証明は 1 次結合が $\vec{0}_V$ であるとして

     $$c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_k\vec{p}_k + d_1\vec{r}_1 + \ldots + d_{r-k}\vec{r}_{n-k} = \vec{0}_V$$

     両辺の f によって移った先を考えれば $f(\vec{p}_j) = \vec{q}_j$, $f(\vec{r}_i) = \vec{0}_W$ より

     $$c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_k\vec{q}_k = \vec{0}_W$$

     となるが $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$ が 1 次独立であることから $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ を得る．ゆえに

     $$d_1\vec{r}_1 + \ldots + d_{r-k}\vec{r}_{n-k} = \vec{0}_V$$

     であるが $\{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-k}\}$ が基底であることから $d_1 = \cdots = d_{n-k} = 0$ を得る．ゆえに係数はすべて 0 になるので $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_k, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-k}\}$ は 1 次独立である．
   - f の V の基底 $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_k, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{n-k}\}$ と W の基底 $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k, \ldots, \vec{q}_m\}$ に関する表現行列が命題 2.2 の結論を満たす．

2. 不変部分空間

   定義はテキストの 14 ページを見てほしい．重要なことは不変部分空間に対応した基底の取り方と表現行列の形の関係である．特に V が f の不変部分空間の直和になっているとき，各不変部分空間の基底を並べることによって V の基底を作ることができる（定理 1.8 の (4)）．その基底に関する表現行列が直和行列になる．このことは難しいことは使わないのだが分かりづらいかもしれない．じっくり考えてほしい．

3. 固有値，固有空間

   定義は 1 年次の線形代数での定義とまったく変わらない．ただし，一般の線形空間の線形変換を考えていることが異なる．例えば V を C^∞ 級の実数値関数全体の集合とし f を微分による線形写像とすれ

ば，どの実数 α も固有値になる．なぜなら固有空間は

$$V(\alpha) = \{ce^{\alpha x} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

となり 1 次元部分空間になるからだ．

V が有限次元の場合は f の固有値はその表現行列の固有値である．表現行列の固有多項式は，基底の変換によって不変であり，これを f の固有多項式として理解できる．

4. 固有空間による直和

固有空間は不変部分空間である．この証明は命題 2.3 の証明の最初の部分に記述されている．一方，相異なる固有値に対する固有空間の和空間は直和である．この証明も命題 2.3 の証明（p.16）と同じ形で与えた．1 年次のテキストにある van der Monde の行列式が効果的に利用されているので興味深い．

さて，この固有空間の直和が V に一致すれば，固有空間の基底を並べてできる V の基底による表現行列は対角行列になる．f の固有空間 $V(\alpha)$ への制限は，単に α 倍するという写像であり，その表現行列は単位行列の α 倍（スカラー行列）になるからだ．スカラー行列による直和行列が対角行列であることは簡単に分かるだろう．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 問題 2.7 を解け．

g 不変の定義と可換という条件を考えること．それほど難しくない．なお (2) は g の固有空間が f 不変であることを表している．分かるだろうか．

課題 2 問題 2.8 を解け．

(1) は固有値は $f(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ で特徴づけられることを使う．条件の $f^2 - 3f + 2I = 0$ をどう使うかだ．

(2) は $V = V(1) + V(2)$ を示せばよい（直和であることは証明済み）．条件から $f(\vec{p}) - \vec{p} \in V(2)$ が分かるがこれがどのような状況で出た式かを考えてみるとよい．

線形数学講義メモ (11 月 21 日)

前回のレポート課題について

課題 1 問題 2.7 を解け．

【解答例】(1)W は g 不変なので $g(W) \subset W$ が成り立つ．ゆえに $f(g(W)) \subset f(W)$ であるが $f \circ g = g \circ f$ より

$$f(g(W)) = (f \circ g)(W) = (g \circ f)(W) = g(f(W)) \subset f(W)$$

を得る．ゆえに $f(W)$ も g 不変である．

(2)

$$g(f(\vec{v})) = f(g(\vec{v})) = f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

【解答例】 (1) $\vec{x} \in g(f(W))$ をとる．像の定義から $g(\vec{y}) = \vec{x}$ を満たす $\vec{y} \in f(W)$ が存在する．さらに像の定義を使って $f(\vec{z}) = \vec{y}$ を満たす $\vec{z} \in W$ をとる．

$$\vec{x} = g(f(\vec{z})) = f(g(\vec{z}))$$

だが W は g 不変なので $g(\vec{z}) \in g(W) \subset W$ である．よって $f(g(\vec{z})) \in f(W)$ であり $\vec{x} \in f(W)$ を得る．よって $g(f(W)) \subset f(W)$ であり $f(W)$ は g 不変である．

【コメント】

- (1) については集合のままの議論と要素を使った議論を紹介した．集合のままの議論のほうが分かりやすいと感じるだろうが，$f(g(W)) = (f \circ g)(W)$ が何故成り立つかなど簡単に答えられるようでないといけない．
- 合成写像の定義は基本的なので $f \circ g(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$ などは当たり前のこととして使ってよい．

課題 2 問題 2.8 を解け．

【解答例】 (1) は f の固有値を α とすれば $f(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$ を満たす $\vec{p} \neq \vec{0}$ が存在する．$f^2 - 3f + 2I = 0$ より

$$\vec{0} = (f^2 - 3f + 2I)(\vec{p}) = f(f(\vec{p})) - 3f(\vec{p}) + 2\vec{p} = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)\vec{p}$$

なので $\vec{p} \neq \vec{0}$ より $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ を得る．ゆえに α は 1 または 2 である．

(2) について $V(1) + V(2)$ が直和であることは証明済みである．ゆえに $V = V(1) + V(2)$ であることを示す．$\vec{p} \in V$ について

$$f(f(\vec{p})) - 3f(\vec{p}) + 2\vec{p} = f\left(f(\vec{p}) - \vec{p}\right) - 2(f(\vec{p}) - \vec{p}) = \vec{0}$$

より $f(\vec{p}) - \vec{p} \in V(2)$ を得る．同様に

$$f(f(\vec{p})) - 3f(\vec{p}) + 2\vec{p} = f\left(f(\vec{p}) - 2\vec{p}\right) - (f(\vec{p}) - 2\vec{p}) = \vec{0}$$

より $f(\vec{p}) - 2\vec{p} \in V(1)$ を得る．よって

$$\vec{p} = -\left(f(\vec{p}) - 2\vec{p}\right) + \left(f(\vec{p}) - \vec{p}\right) \in V(1) + V(2)$$

であり，$V = V(1) + V(2)$ を得る．

【コメント】

- (1) はやさしいので特に言うことはない．

- (2) については「条件から $f(\vec{p}) - \vec{p} \in V(2)$ が分かる」ことをヒントに出したが使い切れない答案が多かった．3 項間漸化式 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ の解き方と解答例を比較してみるとよい．
- $f^2 - 3f + 2I = (f - 2I) \circ (f - I) = 0$ から $f - 2I = 0$ または $f - I = 0$ とする解答があったが，写像の世界ではこのような議論は通用しない．注意せよ．

本日の講義の要点

1. 有限次元線形空間における線形変換 f について，半単純であることとその表現行列が対角化可能であることの同値性（定理 2.4）

   正方行列 A が対角化可能とは $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在することである．基底の変換によって表現行列 A は $P^{-1}AP$ に変わる．基底を正則行列で変換したものはやはり基底になる（10 月 10 日の講義のレポート課題 3，翌週の講義メモに解説有）ので，表現行列になるのは $P^{-1}AP$ である．ゆえに表現行列 A が対角化可能であることと，表現行列を対角行列にとれることは同値である．

   さて，半単純とは，f の固有空間の直和が V と一致することを言う．すると各固有空間の基底を並べることによって V の基底が作れる（定理 1.8 の (4) と他の主張の同値性についての証明を見ること）．この固有ベクトルからなる基底が作れたのでその表現行列は対角行列になる．半単純な線形変換の表現行列が対角化可能であることはこのように証明できる．

   逆に A が対角化可能であるとき，A の固有ベクトルを並べた正則行列が存在する．これから V の基底を固有ベクトルから作れる．V のベクトルは固有ベクトルの 1 次結合で書けるので固有空間の和空間に含まれる．よって半単純である．これで証明は完全だが，納得できるだろうか．良くわからないという人は和空間と半単純の意味をもう一度復習しておいてほしい．
2. 多項式に正方行列を代入すること

   多項式 $p(x)$ について $p(A)$ を定めた．注意すべきは定数項は単位行列の定数倍にすることだ．これによって，A の多項式として得られる 2 つの行列は，可換であることが分かる．この事実は今日の議論で頻繁に使われた．
3. Caley-Hamilton の定理

   A を n 次複素正方行列とする．固有多項式 $p(x) = |xI - A|$ について $p(A) = O$ が成り立つ．証明は
   - A が対角可能な時 $Q^{-1}AQ = B$ を対角行列とする．
     - $A = QBQ^{-1}$ のとき $A^k = QB^kQ^{-1}$ が成り立つ．ゆえに多項式について $p(A) = Qp(B)Q^{-1}$ である．
     - B が対角成分 α_j の対角行列であるとき $p(B)$ は対角成分 $p(\alpha_j)$ の対角行列である．
     - $p(x)$ は A の固有多項式，α_j が A の固有値なので $p(\alpha_j) = 0$ である．ゆえに $p(B) = O$ である．
     - よって $p(A) = O$ である．
   - A が一般の場合
     - 固有多項式 $p(x) = |xI - A|$ の係数は A の成分 a_{ij} の多項式である．
     - $p(A)$ の各成分は A の成分 a_{ij} の多項式である．
     - 「たいていの行列」は対角化可能なので $p(A) = O$ である．
     - 「たいていの行列」について 0 になる多項式は全体で 0 になる．
     - よって $p(A) = O$ である．

   「たいていの行列」の意味はここでは述べない．対角できない行列は重複固有値を持つが，それを少しだけ変形して重複固有値を持たないようだ行列（対角化可能行列）にできることが基本である．

4. 拡大固有空間

　代数学の基本定理により複素係数の方程式は解を持つ．よって 1 次式の因数を持つ（因数定理）ので n 次方程式は n 個の 1 次式の積に因数分解できる．よって

$$p(x) = |xI - A| = (x-\alpha_1)^{i_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_r)^{l_r}$$

とただ一通りに表せる．ここで $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ は A の相異なる固有値であり l_j は α_j の重複度という．

　固有値 α_j に対する拡大固有空間とは $W_j = \mathrm{Ker}(A - \alpha_j I)^{l_j}$ を言う．定義から拡大固有空間は固有空間を含む．

5. $\mathbb{C}^n$ が拡大固有空間 W_j たちの直和であること

　この部分の証明がかなり煩雑だ．テキストの p.17〜18 に証明が記述されているので考えてみてほしい．考えるためのポイントを指摘しておこう．

- B_j は多項式に A を代入したものの積で定められている．多項式に A を代入した行列は可換なので多項式の積の順序をどうとるのかは自由である．
- 固有多項式 $p(x) = |xI - A|$ について，$p(A) = O$ である．積の中に O が一つでもあれば全体は O である．
- $p_j(x)(x-\alpha_j)^{l_j} = p(x)$ であり，$i \neq j$ について $p_i(x)p_j(x)$ は $p(x)$ に多項式をかけたものになっている．ゆえに $p_i(A)p_j(A) = O$ である．
- 行列の積による線形変換の核と像について $\mathrm{Im}AB \subset \mathrm{Im}A$，$\mathrm{Ker}AB \supset \mathrm{Ker}B$ が成り立つ．定義に従って考えれば簡単である．

なお，この証明において固有値が 2 つ以上あることを暗黙のうちに使っている．固有値が 1 つの場合は固有多項式は $p(x) = (x-\alpha)^n$ なので $p(A) = (A-\alpha I)^n = 0$ であり，α に対する拡大固有空間は $W = \mathrm{Ker}(A-\alpha I)^n = \mathbb{C}^n$ であってこの主張は成立している．

6. 拡大固有空間は A によって不変であること．

　固有値 α に対する拡大固有空間のベクトルは $(A-\alpha I)^l \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすので $\boldsymbol{0} = A(A-\alpha I)^l \boldsymbol{x} = (A-\alpha I)^l A\boldsymbol{x}$ である．よって $A\boldsymbol{x}$ も拡大固有空間の要素となり，拡大固有空間は A によって不変である．

　$\mathbb{C}^n$ が拡大固有空間の直和になることの証明はやはり難しい．1 度眺めてその難しさを実感した後は結果のみ覚えておくだけでいいだろう．さて，全空間 $\mathbb{C}^n$ が不変部分空間である拡大固有空間の直和になったことから，表現行列の簡略化の問題は各拡大固有空間でどのような基底をとるかという問題になる．この結論は次回解説しよう．

本日のレポート課題とヒント

【課題】　2 つの線形写像 $f: V \longrightarrow W$ と $g: W \longrightarrow Z$ について $g \circ f = 0$ と $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$ が同値であることを示せ．

【ヒント】　問題 2.2(2) の証明を参考に考えること．易しい．

線形数学講義メモ (11 月 28 日)

前回のレポート課題について

【課題】　2 つの線形写像 $f : V \longrightarrow W$ と $g : W \longrightarrow Z$ について $g \circ f = 0$ と $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ が同値であることを示せ．

【解答例】 $g \circ f = 0$ とする．$\vec{x} \in \mathrm{Im} f$ をとる．像の定義から $\vec{x} = f(\vec{p})$ となる $\vec{p} \in V$ が存在する．$g(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g \circ f(\vec{x}) = \vec{0}$ より $\vec{x} \in \mathrm{Ker} g$ である．よって $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ が成り立つ．

　逆に $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ が成り立つとする．$\vec{p} \in V$ について $f(\vec{p}) \in \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ である．よって $g(f(\vec{p})) = \vec{0}$ であり $g \circ f = 0$ が成り立つ．

【コメント】 問題量も少なく易しいはずだがレポートの提出者は少なかった．残念だ．提出者の答案はそれなりに良くできており特にコメントすべきことはない．

本日の講義の要点

1. 前回の話を線形変換について記述しなおす．

   V を n 次元複素線形空間とし $f : V \longrightarrow V$ をその線形変換とする．V の基底を一つ取りそれによる表現行列を A とおく．

   - A の固有多項式 $|xI - A|$ は $|xI - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}||xI - A||P| = |xI - A|$ より基底の取り方によらない．これを線形変換 f の固有多項式という．
   - 固有値とは固有方程式の解である．固有方程式の解の重複度を固有値の重複度という．
   - 固有値 α の重複度を l とするとき $W(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^l$ を f の拡大固有空間という．拡大固有空間は f で不変である．
   - V は拡大固有空間の直和 $V = W(\alpha_1) \oplus W(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_r)$ になる．

2. 表現行列の簡略化について

   f を $W(\alpha_j)$ に制限した写像を $f_j = f_{|W(\alpha_j)} : W(\alpha_j) \longrightarrow W(\alpha_j)$ とおく．V の基底を $W(\alpha_j)$ の基底を集めることによって作るとき f の表現行列は f_j の表現行列の直和行列になる（テキスト p.15 冒頭）．そこで f_j の表現行列をどこまで簡単にできるかが問題になる．

   - $g_j = f_j - \alpha_j I : W(\alpha_j) \longrightarrow W(\alpha_j)$ とおく．$W(\alpha_j) = \mathrm{Ker}(f - \alpha_j I)^l$ より $g_j^l = 0$ である．このような条件を満たす変換を冪（巾：ベキ）零変換という．
   - $f_j = g_j + \alpha_j I$ より f_j の表現行列は g_j の表現行列にスカラー行列 $\alpha_j I$ を加えたものになる．
   - f_j の表現行列を簡単にする問題は冪零変換の表現行列を簡単にする問題に帰着される．

   冪零変換の表現行列の考察は厳密には行わなかった．ただし次の命題を証明した．

   命題　冪零変換（$g : W \longrightarrow W,\ g^l = 0$）と $\vec{p} \in W,\ \vec{p} \neq \vec{0}$ について $g^k(\vec{p}) = \vec{0}$ かつ $g^{k-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ となる k をとる．$k \leqq l$ である．このとき

   (1) $\{g^{k-1}(\vec{p}), g^{k-2}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p}\}$ は 1 次独立である．

   (2) $W_0 = \left\langle g^{k-1}(\vec{p}), g^{k-2}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p} \right\rangle$ は g で不変である．

(3) $g_{|W_0}$ の基底 $\{g^{k-1}(\vec{p}), g^{k-2}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p}\}$ に関する表現行列は

$$J(0,k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

証明　(1) を示すためにまず $c_1 g^{k-1}(\vec{p}) + c_2 g^{k-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} g(\vec{p}) + c_k \vec{p} = \vec{0}$ とおく．この式の両辺に g^{k-1} を作用させれば $g^k(\vec{p}) = \vec{0}$ より $c_k g^{k-1}(\vec{p}) = \vec{0}$ を得る．$g^{k-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ より $c_k = 0$ である．ゆえに最後の項は消える．そこで次に g^{k-2} を作用させれば $c_{k-1} g^{k-1}(\vec{p}) = \vec{0}$ を得る．よって $c_{k-1} = 0$ である．以下，g の冪を一つずつ下げたものを作用させれば順に $c_r = 0$ を得る．すべての係数が 0 になるので $\{g^{k-1}(\vec{p}), g^{k-2}(\vec{p}), \ldots, g(\vec{p}), \vec{p}\}$ は 1 次独立である．

(2) は $g(c_1 g^{k-1}(\vec{p}) + c_2 g^{k-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} g(\vec{p}) + c_k \vec{p}) = c_2 g^{k-1}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} g^2(\vec{p}) + c_k g(\vec{p}) \in W_0$ より成り立つ．

(3) は表現行列の定義に従って書き下すだけだ．

この命題から冪零変換には様々な不変部分空間があり，そこに制限した写像の表現行列が $J(0,r)$ になることが分かる．よって冪零変換の表現行列は $J(0,r)$ たちの直和行列になると予想されるが，これは実際正しい．すると f_j の表現行列は

$$J(\alpha_j,k) = \begin{pmatrix} \alpha_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_j & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_j \end{pmatrix}$$

たちの直和になる．これを Jordan 細胞と呼ぶ.

以上の議論から f の表現行列は Jordan 細胞 $J(\alpha,k)$ の直和になる．これを行列について記述したのが定理 2.8 である．

3. 固有空間，拡大固有空間の次元と Jordan の標準形

命題 2.9 を証明した．証明は，表現行列を Jordan の標準形 J に取り，$J - \alpha I$ および $(J - \alpha I)^l$ の階数を考えることで示した．

$$\dim V(\alpha) = \dim \mathrm{Ker}(f - \alpha I) = n - \mathrm{rank}(f - \alpha I) = n - \mathrm{rank}(J - \alpha I)$$

$$\dim W(\alpha) = \dim \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^l = n - \mathrm{rank}(f - \alpha I)^l = n - \mathrm{rank}(J - \alpha I)^l$$

において J は Jordan 細胞の直和行列なので

$$J - \alpha I = J(\alpha_1, r_1) \oplus J(\alpha_2, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, r_m) - \alpha I == J(\alpha_1 - \alpha, r_1) \oplus J(\alpha_2 - \alpha, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m - \alpha, r_m)$$

であり，直和行列の階数は各直和成分の階数の和であること，$J(\alpha,r)$, $\alpha \neq 0$ の正則性，$J(0,r)$ およびその冪の階数（問題 2.9）を利用した．テキストの証明を見てほしい．

4. $P^{-1}AP$ が Jordan の標準形になった時の P の列ベクトル．

$P^{-1}AP = J$ を $AP = PJ$ の形でとらえ，P の列ベクトルの満たす条件を考察した．p.20 の議論を読んでほしい．結局 Jordan 細胞 $J(\alpha, k)$ については $(A - \alpha I)^k \boldsymbol{p} = \mathbf{0}$, $(A - \alpha I)^{k-1} \boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{p}$ を見つけることが問題になる．これ以上の話は具体例によって次回紹介することにする．

前回に引き続いて分かりづらい議論になってしまった．Jordan の標準形にできることおよびその一意性の証明は厳密には与えていないが何故この事実が成り立つかのもっとも基本的な部分は解説した．また実際にどうすれば Jordan の標準形にできるのかも概ね解説している．後は具体例を通じて理解に努めてほしい．

Jordan の標準形の重要性は，どんな行列も Jordan の標準形にできること（線形変換の表現行列を Jordan の標準形にできること）である．対角化されたと仮定して進める議論は一般論ではないが，Jordan の標準形になっているとして進める議論は一般論である．このことは常微分方程式の平衡点の安定性の議論などで利用される．ここに Jordan の標準形の重要性がある．

本日のレポート課題とヒント

問題 2.9 を課題にする．特にヒントは不要だろう．また問題 2.10 に関連して次の問題を出題する．

問題　線形変換 f の固有多項式が $(x-2)^4(x-3)^5$ であるとする．$\dim V(2) = \dim V(3) = 2$ のとき，f の Jordan の標準形にはどのようなものがあり得るか答えよ．

後半の問題は命題 2.9 を適用して考えること．ここで Jornda 細胞の並べ方のみが違うものは同じ標準形とみなして考えること．

線形数学講義メモ (12 月 5 日)

前回のレポート課題について

課題 1 問題 2.9

【解答例】 (1) $J(0,r)$ の各列は基本列ベクトルであり $J(0,r) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{r-1})$ と記述できる．ゆえに

$$AJ(0,r) = (A\mathbf{0}, A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_{r-1}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{r-1})$$

が成り立つ．よって

$$(J(0,r))^{r-1} = I(J(0,r))^{r-1} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1) \neq O$$

$$(J(0,r))^{r} = (J(0,r))^{r-1}J(0,r) = O$$

(2) $J(0,r)$ は階数 $r-1$ の階段行列である．

【コメント】

- $J(0,r)$ の冪をとっていくと，斜めに並ぶ 1 が一つずつ右に移動していくのが分かる．これに気がつけば $J(0,r)^{r-1}$ と $J(0,r)^r$ が具体的にどういう行列か分かるはずだ．
- $J(0,r)$ を冪零変換 g のある種の不変部分空間に制限したものの表現行列として導入した（前回の講義メモ：要点 2）．このことと $J(0,r)^k$ が g^k の表現行列であることを使って (1) に答えることもできる．
- (2) は $J(0,r)$ が階段行列であることに注意すればよい．

課題 2 線形変換 f の固有多項式が $(x-2)^4(x-3)^5$ であるとする．$\dim V(2) = \dim V(3) = 2$ のとき，f の Jordan の標準形にはどのようなものがあり得るか答えよ．

【解答例】 まず固有多項式が 9 次式なので線形変換 f は 9 次元線形空間の変換である．そして，固有空間の次元が Jordan 細胞の個数なので 2 に対する Jordan 細胞が 2 つ，3 に対する Jordan 細胞も 2 つである．その次数の和は固有値の重複度なので 2 に対しては 4，3 に対しては 5 である．ゆえに 2 に対する Jordan 細胞は「$J(2,1)$ と $J(2,3)$」，あるいは「$J(2,2)$ と $J(2,2)$」である．同様に 3 に対する Jordan 細胞は「$J(3,1)$ と $J(3,4)$」あるいは「$J(3,2)$ と $J(3,3)$」である．ゆえに f の Jordan の標準形はこれらを組み合わせて

$$J(2,1) \oplus J(2,3) \oplus J(3,1) \oplus J(3,4) \qquad J(2,1) \oplus J(2,3) \oplus J(3,2) \oplus J(3,3)$$

$$J(2,2) \oplus J(2,2) \oplus J(3,1) \oplus J(3,4) \qquad J(2,2) \oplus J(2,2) \oplus J(3,2) \oplus J(3,3)$$

なお，直和成分の並べ方が違うものは同じ Jordan の標準形とみなす．

【コメント】

- Jordan の標準形は何か，直和行列とは何かを理解する必要がある．それが分かれば易しい問題だ．なお $J(2,2) \oplus J(2,2)$ を $J(2,2)^2$ と書いた人がいたがこれは間違いだ．

- 固有多項式が 9 次多項式なので，この行列は 9 次行列である．例えば

$$J(2,1) \oplus J(2,3) \oplus J(3,2) \oplus J(3,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

本日の講義の要点

1. Jordan の標準形と $(f-\alpha I)^k$ の階数

 前回のレポート課題での 4 つのパターンについて $(f-\alpha I)^k$ の階数を求めてみる．まず固有空間の次元が 2 なので $f-2I$ と $f-3I$ の階数は 7 である．$k \geqq 2$ の場合は次の表のようになる．

Jordan の標準形	$(f-2I)^2$	$(f-2I)^3$	$(f-3I)^2$	$(f-3I)^3$	$(f-3I)^4$
$J(2,1) \oplus J(2,3) \oplus J(3,1) \oplus J(3,4)$	6	5	6	5	4
$J(2,1) \oplus J(2,3) \oplus J(3,2) \oplus J(3,3)$	6	5	5	4	4
$J(2,2) \oplus J(2,2) \oplus J(3,1) \oplus J(3,4)$	5	5	6	5	4
$J(2,2) \oplus J(2,2) \oplus J(3,2) \oplus J(3,3)$	5	5	5	4	4

この結果から $(f-\alpha I)^k$ の階数を調べればどの Jordan の標準形になるかが決定できる．また Jordan の標準形を与える基底については次のように取ればよい．固有値 2 に対する Jordan の標準形は

- $J(2,1) \oplus J(2,3)$ のとき

 $\dim \ker(f-2I)^2 = 3 < \dim \mathrm{Ker}(f-2I)^3 = 4$ なので $\vec{p} \in \mathrm{Ker}(f-2I)^3 \setminus \mathrm{Ker}(f-2I)^2$ をとる．$(f-2I)^2(\vec{p}) \in V(2)$ であり，$\dim V(2) = 2$ なので $\{\vec{q}, (f-2I)^2(\vec{p})\}$ が $V(2)$ の基底になるように $\vec{q}$ をとる．$\{\vec{q}, (f-2I)^2(\vec{p}), (f-2I)(\vec{p}), \vec{p}\}$ が Jordan の標準形を与える $W(2)$ の基底になる．

- $J(2,2) \oplus J(2,2)$ のとき

 $\dim \mathrm{Ker}(f-2I) = 2 < \dim \mathrm{Ker}(f-2I)^2 = 4$ より $\mathrm{Ker}(f-2I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(f-2I)$ の 1 次独立なベクトルの組 $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ を $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle \cap \mathrm{Ker}(f-2I) = \{\vec{0}\}$ となるようにとる．このとき $\{(f-2I)(\vec{p}), \vec{p}, (f-2I)(\vec{q}), \vec{q}\}$ が Jordan の標準形を与える $W(2)$ の基底になる．

同様に固有値 3 に対する Jordan の標準形は

- $J(3,1) \oplus J(3,4)$ のとき

 $\dim \ker(f-3I)^3 = 4 < \dim \mathrm{Ker}(f-3I)^4 = 5$ なので $\vec{p} \in \mathrm{Ker}(f-3I)^4 \setminus \mathrm{Ker}(f-3I)^3$ をとる．$(f-3I)^3(\vec{p}) \in V(3)$ であり，$\dim V(3) = 2$ なので $\{\vec{q}, (f-3I)^3(\vec{p})\}$ が $V(3)$ の基底になるように $\vec{q}$ をとる．$\{\vec{q}, (f-3I)^3(\vec{p}), (f-3I)^2(\vec{p}), (f-3I)(\vec{p}), \vec{p}\}$ が Jordan の標準形を与える $W(3)$ の基底になる．

- $J(3,2) \oplus J(3,3)$ のとき

 $\dim \mathrm{Ker}(f-3I)^2 = 4 < \dim \mathrm{Ker}(f-3I)^3 = 5$ より $\vec{p} \in \mathrm{Ker}(f-3I)^3 \setminus \mathrm{Ker}(f-3I)^2$ をとる．$\dim \mathrm{Ker}(f-3I) = 2 < \dim \mathrm{Ker}(f-3I)^2 = 4$ と $(f-3I)(\vec{p}) \in \mathrm{Ker}(f-3I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(f-3I)$ より $\vec{q} \in \mathrm{Ker}(f-3I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(f-3I)$ を $\langle (f-3I)(\vec{p}), \vec{q} \rangle \cap \mathrm{Ker}(f-3I) = \{\vec{0}\}$ となるようにとる．このとき $\{(f-3I)(\vec{q}), \vec{q}, (f-3I)^2(\vec{p}), (f-3I)(\vec{p}), \vec{p}\}$ が Jordan の標準形を与える $W(3)$ の基底になる．

 このように固有値 α について $(f-\alpha I)^k$ の階数を調べればどのような Jordan の標準形になるか分か

る．また Jordan の標準形にするための基底をどう選ぶのかも分かる．味わってほしい．

2. Jordan の標準形の具体例（例 5）

 2 つの行列を扱ったが，どちらも固有値は 2 のみ（重複度 4）である．固有空間の次元は A については 1 なので Jordan 細胞は 1 つである．これを与える基底は $(A-2I)^3(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$ を満たすベクトルをとれば良い．B については固有空間の次元が 3 なので Jordan 細胞も 3 つである．基底を選ぶための考え方と具体的な取り方はテキストに書いたので確認しておくこと．

3. 双対空間

 体 K 上の線形空間 V について V から K への線形写像全体の集合を V^* と表す．これは線形空間になり V の双対空間と呼ぶ．V が有限次元のときは $\dim V = \dim V^*$ が成り立つがこれは V の基底の双対基底を作ることによって証明した．生成すること，1 次独立であることを講義でもきちんと解説したので，テキストをみながらもう一度確認してほしい．

 次章の内容と重なるが双対空間に関連して次の例を紹介した．V を $[-1,1]$ 上の連続関数全体の集合とする．

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

は V の内積を定める．$f \in V$ に対して $\omega_f \in V^*$ を

$$\omega_f(g) = (f,g)$$

と定める．これによって V から V^* への線形写像が作れる．$f \neq 0$ であれば $\omega_f(f) = (f,f) > 0$ より $\omega_f \neq 0$ である，すなわち $f \mapsto \omega_f$ への対応は単射線形写像である．ただし有限次元の場合と異なりこれは同型写像ではない．$\delta \in V^*$ を

$$\delta(f) = f(0)$$

で定めれば，これは上の線形写像の像には含まれない．

本日のレポート課題とヒント

 Jordan の標準形の計算問題，問題 2.11 を課題にする．12 月 19 日の試験でもこの計算問題は出題する予定なのでできるようにしておくこと．

線形数学講義メモ (12 月 12 日)

前回のレポート課題について

【解答例】 まず固有多項式を求める．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |xE - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ -1 & x+4 & -2 \\ -4 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3)^2$$

固有値 -3 に対する固有空間 $V(-3)$ は

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

より 1 次元なので，-3 に対する Jordan 細胞は 1 つであり重複度が 2 であることから $J(-3,2)$ である．3 の重複度は 1 なので Jordan 細胞は $J(3,1)$ である．ゆえに Jordan の標準形は

$$J(-3,2) \oplus J(3,1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である．Jordan の標準形を与える行列は次のように作ることができる．まず

$$(A+3I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \\ 27 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

より $\mathrm{Ker}(A+3I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A+3I)$ の要素 $\boldsymbol{p}$ を任意に取ると $(A+3I)\boldsymbol{p} \in V(-3) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ である．3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{q}$ として $P = \begin{pmatrix} (A+3I)\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ とすればよい．具体的には

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} (A+3I)\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

次の行列についても同様に

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad |xI - B| = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & -1 \\ 2 & x-3 & 1 \\ 6 & -3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^3$$

となるので固有値は 2 のみで重複度は 3 である．固有空間 $V(2)$ は

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より 2 次元である．Jordan 細胞は 2 つであり，Jordan の標準形は $J(2,2) \oplus J(2,1)$ である．

　この場合は $(B-2I)^2 = O$ となるので $\mathrm{Ker}(B-2I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(B-2I)$ からベクトル $\boldsymbol{p}$ を 1 つ選ぶ．$(B-2I)\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ は固有ベクトルなのでこれと合わせて $V(2)$ の基底になるように $\boldsymbol{q}$ を選ぶ．$P = \begin{pmatrix} (B-2I)\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ によって Jordan の標準形が与えられる．具体的には

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} (B-2I)\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

【コメント】

- どんな Jordan の標準形になるかについては比較的少ない情報で分かる．解答例では，最小限の情報から Jordan の標準形を与えている．しかし，$P^{-1}AP$ が Jordan の標準形になるような P を求めるのは若干難しくなる．対角化のように固有ベクトルを並べた正則行列というわけにはいかない．提出されたレポートでは P を求めた答案はほとんどなかったが，これでは正解にはならないことを注意しておく．この解答例とテキストの例を考えてほしい．

本日の講義の要点

1. 内積の定義

   中小線形空間の内積の定義を記述した．係数を複素数として記述しているので通常の定義（1 年次の線形代数のテキスト参照）と若干異なるが複素共役を除けば通常の定義と変わらない．違いと共通点をきちんと理解しておくように．内積からノルム（ベクトルの大きさ）が定義できる．これによって線形空間 V についての幾何学的考察が可能になる．

   内積の基本的例としては $\mathbb{C}^n$ の標準内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}}$ を覚えておいてほしい．$\mathbb{R}^n$ の標準内積の拡張である．

2. Cauchy-Schwarz の不等式と三角不等式

   不等式は実数についてしか意味を持たないので，不等式の両辺が実数になっていることについては注意をはらうこと．不等式の証明は基本的に実の場合と同じだが複素数なので若干工夫が必要である．1 年次の線形代数のテキストの証明と，この講義で紹介した複素内積での証明を比較してほしい．証明は p.23 から p.24 にかけて詳細に記述しているのでここでは省略する．

3. 関数の内積の例

   例 7 を解説した．これが内積であることは問題 3.1 にしているが，講義では証明をつけた．

$$(f, f) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

   に注意すれば内積の性質 (III) と (IV) は非負値連続関数の積分の性質として理解できる．証明は連続関数の性質を使うので実数と論理の守備範囲になるのでここでは省略した．関数に対して積分によって定義される内積は，$\mathbb{C}^n$ の標準内積とならんでこの講義で扱う最も基本的な内積である．これを内積ということになじめないという人はもう一度内積の定義に従って確認してほしい．

4. 内積の表現行列

   V が有限次元のとき，基底を選ぶことによって内積の表現行列が定まる．要点は $\vec{x}, \vec{y}$ の基底による座標を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とするとき

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\bar{\boldsymbol{y}}$$

   が成り立つことだ．基底の取り換えによる座標の変換は基底の変換の行列 P を使って $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ と表せたので

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t(P\boldsymbol{x}')A\overline{P\boldsymbol{x}'} = {}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPA\bar{P}\bar{\boldsymbol{x}}'$$

   であり，表現行列は ${}^tPA\bar{P}$ に変わることが分かる．これが問題 3.2 の解答である．

5. 直交補空間

   複素内積では角度は定義できないが，$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ によって，直交するという概念は定義できる．これによって V の部分空間 W について，W のすべてのベクトルに直交するベクトル全体の集合 $W^{\perp}$ を直交補空間と定める．定義については 3.2 節の冒頭を確認すること．

- $W^\perp$ は部分空間である．

  $\vec{0}$ はあらゆるベクトルとの内積が 0 になるので，あらゆるベクトルと直交するベクトルと言える．ゆえに $\vec{0} \in W^\perp$ である．和とスカラー倍について閉じていることは内積の性質 (II) で示せる．講義でも解説したが自分でも証明できるようにしておくこと．
- $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$

  $\vec{x} \in W \cap W^\perp$ とし $(\vec{x}, \vec{x})$ を考えれば，$\vec{x} \in W^\perp$ は $\vec{x} \in W$ と直交するので 0 になる．$(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ より内積の性質 (IV) から $\vec{x} = \vec{0}$ である．

講義はこの後，V が有限次元の場合に $V = W + W^\perp$ の証明に入った．詳細は次回の講義で行う．

本日のレポート課題とヒント

来週は第 2 章の試験を予定しているのでレポート課題は出さない．今回と次回の講義内容の範囲でのレポート課題は来週出題する．

線形数学講義メモ (12 月 19 日)

本日の講義の要点

1. 直交補空間による直和分解

   計量線形空間 V の部分空間 W について，その直交補空間 $W^{\perp}$ の定義と $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ については前回の講義で紹介した．今日は W が有限次元であると仮定して $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つことを証明した．

   証明のアイデアは $\vec{v} \in V$ について，$\vec{v}$ から最も近い W の点を見つけることにある．それを見つけるために W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ をとって W を $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ と同一視し，$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上の関数

   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left\| \vec{v} - \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{p}_j \right\|^2$$

   の最小値を利用した．最小値の存在については有界閉集合上の連続関数が最小値を持つことを利用したが詳細は他の授業に譲る．

   この関数が $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で最小値を持つとすれば $\vec{w} = \sum a_j \vec{p}_j$ は，W の中で $\vec{v}$ に最も近い点である．このことから $\vec{v} - \vec{w} \in W^{\perp}$ となる．証明はテキストに記述してあるのでここでは述べない．結局

   $$\vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) \in W + W^{\perp}$$

   であり，$V = W + W^{\perp}$ を得る．$W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ と合わせて $V = W \oplus W^{\perp}$ が証明された．

2. Gram-Schmidt の直交化

   1 次独立なベクトルの組 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ について

   $$\vec{a}_k \notin \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle, \qquad k \geqq 2$$

   なので

   $$\vec{a}_k = \vec{c}_k + \vec{b}_k \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle \oplus \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle^{\perp}$$

   とただ一通りに表せる．また $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ とおく．$\vec{a}_k$ は $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ に含まれないので $\vec{b}_k \neq \vec{0}$ であり，またこれらは互いに直交する．これを大きさで割れば正規直交系が得られる．

   具体的な計算式は 1 年次で学習したものと同一である．ここでは式だけではなく，$\vec{a}_k$ から $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ に下ろした垂線ベクトルという形で $\vec{b}_k$ を捉えてほしい．

本日のレポート課題とヒント

問題 3.3 と問題 3.5 を課題にした．問題 3.3 については数学的帰納法を使うとよい．$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ なので $n = 1$ のときは自明だ．問題 3.5 については，命題 3.3 の証明を考えれば前半と後半は同じことを述べている．$\vec{w} \in W$ が $\vec{x}$ に最も近い点であることと $\vec{x} - \vec{w} \in W^{\perp}$ は同値なのだ．後半のほうが示しやすいだろう．

線形数学講義メモ (1 月 23 日)

前回のレポート課題について

問題 3.6　【解答例】 (1) 定義から

$$(x^k, x^h) = \begin{cases} \frac{2}{k+h+1} & k+h \text{ は偶数} \\ 0 & k+h \text{ は奇数} \end{cases}$$

となので，直交化して得られる関数を $f_k(x)$, $0 \leqq k \leqq 4$ とすれば

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x - \frac{(x, f_0)}{(f_0, f_0)} f_0 = x, \quad f_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, f_0)}{(f_0, f_0)} f_0 - \frac{(x^2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$f_3(x) = x^3 - \frac{(x^3, f_0)}{(f_0, f_0)} f_0 - \frac{(x^3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(x^3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$f_4(x) = x^4 - \frac{(x^4, f_0)}{(f_0, f_0)} f_0 - \frac{(x^4, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(x^4, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \frac{(x^4, f_3)}{(f_3, f_3)} f_3 = x^4 - \frac{1}{5} - \frac{6}{7}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35}$$

(2) p_n を積分し p_m を微分する形で部分積分を行う．$n > m \geqq 0$ なので

$$\begin{aligned}(p_n, p_m) &= \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m)} dx \\ &= \left[\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)} dx\end{aligned}$$

となるが $\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ は $(x-1)^n(x+1)^n$ を $n-1$ 回しか微分していないので積の微分法則によるすべての項が $(x-1)(x+1)$ を因数にもつ．よって最初の項は 0 である．同様に部分積分を m 回繰り返せば，部分積分の最初の項はすべて 0 になり

$$(p_n, p_m) = (-1)^m \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)} \left((x^2-1)^m\right)^{(2m)} dx$$

$(x^2-1)^m = x^{2m} - mx^{2m-1} + \cdots$ なので $\left((x^2-1)^m\right)^{(2m)} = (2m)!$ である．$n - m \geqq 1$ なので

$$(p_n, p_m) = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-m)} dx = (-1)^m (2m)! \left[\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m-1)}\right]_{-1}^{1} = 0$$

(3) 定義に従って計算すれば

$$p_0(x) = 1 = f_0(x), \quad p_1(x) = (x^2-1)' = 2x = 2f_1(x), \quad p_2(x) = ((x^2-1)^2)'' = 12x^2 - 4 = 12f_2(x)$$

$$p_3(x) = ((x^2-1)^3)^{(3)} = 120x^3 - 72x = 120f_3(x), \quad p_4(x) = ((x^2-1)^4)^{(4)} = 1680x^4 - 1440x^2 + 144 = 1680f_4(x)$$

【コメント】

- (1) での直交化の考え方は，内積を積分で計算するだけで 1 年次の線形代数での計算と変わらない．難しくはない．
- $[-1, 1]$ での x^k の積分なので偶奇を考慮すると計算しやすい．

- (2) は部分積分を行うこと．なお，$((x-1)^n(x+1)^n)^{(n)}$ の計算において，高階の積の微分法則であるライプニッツの公式を使うとよい．ただし，この公式は 1 年次で使用した微分積分の教科書には記述されていない．ここに記しておく．

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

  ポイントは 2 項係数が出ることだが，$n=4$ ぐらいまで確かめてみれば納得できるだろう．解答例の「$(x-1)(x+1)$ を因数にもつ」という主張の根拠は $((x-1)^n)^{(k)}\ ((x+1)^n)^{(n-k-1)}$ が $(x-1)^{n-k}(x+1)^{k+1}$ の定数倍であることによる．$0 \leqq k \leqq n-1$ なので，べきはいずれも 1 以上である．
- (3) は $(x^2-1)^n$ を展開してからのほうが計算しやすい．x^{2k} の n 階導関数が簡単に分かるからだ．合成関数として微分を繰り返していくと，計算は困難だ．

問題 3.7　【解答例】 $T(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ と T がエルミート変換であることから

$$\alpha(\vec{v},\vec{v}) = (\alpha\vec{v},\vec{v}) = (T(\vec{v}),\vec{v}) = (\vec{v},T(\vec{v})) = (\vec{v},\alpha\vec{v}) = \bar{\alpha}(\vec{v},\vec{v})$$

ここで $(\vec{v},\vec{v}) > 0$ より $\alpha = \bar{\alpha}$ を得る．よって α は実数である．同様に T が歪エルミート変換のときは $\alpha = -\bar{\alpha}$ となるので α は 0 または純虚数である．

【コメント】

- $(T(\vec{v}),\vec{v})$ を計算すると分かりやすい．$(T(\vec{v}),\vec{w}) = (\vec{v},T(\vec{w}))$ から示そうとすると失敗する．講義で解説した T がユニタリの場合の証明と比較してみてほしい．

問題 3.9　【解答例】

$$((T \pm T^*)(\vec{v}),\vec{w}) = (T(\vec{v}),\vec{w}) \pm (T^*(\vec{v}),\vec{w}) = (\vec{v},T^*(\vec{w})) \pm (\vec{v},T(\vec{w})) = (\vec{v},(T^* \pm T)(\vec{w})) = \pm(\vec{v},(T \pm T^*)(\vec{w}))$$

より $T \pm T^*$ は (歪) エルミート変換である．このことから随伴変換を持つ線形変換は

$$T = \frac{1}{2}(T+T^*) + \frac{1}{2}(T-T^*)$$

とエルミート変換と歪エルミート変換の和として表すことができる．ここで $T = S_1 + S_2$ と別のエルミート変換と歪エルミート変換の和としての表示があったとする．

$$\frac{1}{2}(T+T^*) - S_1 = S_2 - \frac{1}{2}(T-T^*)(= Q \text{ とおく})$$

が成り立つが Q は左辺の表示によりエルミート変換，右辺の表示により歪エルミート変換である．

$$(Q(\vec{v}),\vec{w}) = (\vec{v},Q(\vec{w})) = -(\vec{v},Q(\vec{w}))$$

より $(Q(\vec{v}),\vec{w}) = 0$ となるが $\vec{w} = Q(\vec{v})$ とおくことにより $Q(\vec{v}) = \vec{0}$ を得る．よって $Q = 0$ であり

$$\frac{1}{2}(T+T^*) - S_1 = S_2 - \frac{1}{2}(T-T^*) = 0$$

なのでエルミート変換と歪エルミート変換の和としての表示は唯一である．

【コメント】

- ${}^tT$ 等という記述があるが，線形変換の転置は定義していない．また表現行列を使う答案があるが，表現行列は有限次元線形空間の線形変換でないと作れない．随伴変換の定義に基づいた議論を行うこと．

- $(T^*)^* = T$ と $(T+S)^* = T^* + S^*$ を補題として示しておくと証明が分かりやすくなると思う．

本日の講義の要点

1. (歪) エルミート変換の異なる固有値に対する固有ベクトルが直交すること．（問題 3.8）
   まず，T がエルミート変換なら iT は歪エルミート変換，T が歪エルミート変換なら iT はエルミート変換であることを注意した．だからエルミート変換について証明すれば，T と iT の固有ベクトルは同じなので歪エルミート変換についても証明できる．ゆえに T をエルミート変換 α,β をその異なる固有値（問題 3.7 から実数），$\vec{v},\vec{w}$ をそれぞれの固有値に対する固有ベクトルとする．
   $$(T(\vec{v}),\vec{w}) = (\alpha\vec{v},\vec{w}) = \alpha(\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},T(\vec{w})) = (\vec{v},\beta\vec{w}) = \bar{\beta}(\vec{v},\vec{w}) = \beta(\vec{v},\vec{w})$$
   より $(\alpha-\beta)(\vec{v},\vec{w}) = 0$ だが $\alpha \neq \beta$ なので $(\vec{v},\vec{w}) = 0$ となる．
2. 例 11 について
   この例は 3.3 節におくべきだった．講義ではテキストとは少し変えて $T(f) = if'$ がエルミート変換であることを使った．エルミート変換なので固有値は実数でありそれを α とおく．固有ベクトルは
   $$T(f) = if'(x) = \alpha f(x)$$
   を満たす関数なので $f(x) = Ce^{-i\alpha x}$ を得る．これが周期 2π になるためには $e^{-2\pi\alpha i} = 1$ でなくてはならず固有値は整数であることが分かる．固有ベクトルは e^{-ikx} である．これが直交系であることは例 9 ですでにみているが，エルミート変換の固有ベクトルたちが直交していることが確認できたことになる．
3. 2 次形式，エルミート形式
   内積の定義から正定値性（(III)，(IV)）を除いたものをエルミート形式，実の場合は 2 次形式と呼ぶ．2 次形式の表現行列，および基底の変換による表現行列の変化は内積の場合と同様である．エルミート形式はエルミート行列によって表現される．
4. シルヴェスターの慣性法則
   表現行列の固有値は，基底の取り方で変わってしまう．エルミート形式には固有値を定めることはできない．しかし，正固有値の個数，負固有値の個数，0 固有値の個数は基底の取り方によらない．これをシルヴェスターの慣性法則（定理 3.8）の形で記述した．なお，31 ページの 2 行目の式にはミスがある．
   $${}^t(PQ)A\overline{PQ} = {}^tQ\,{}^tPA\bar{P}\bar{Q} = Q\,{}^tPP\bar{P}Q$$
   が正しい．なお，定理 3.8 証明の一部を補足しておく．記号は講義ではなくテキストの記号を使用する．
   $$\vec{v} = \sum_{j=1}^{p} a_j\vec{p}_j \quad のとき \quad (\vec{v},\vec{v}) = \sum_{j=1}^{p} a_j\overline{a_j} > 0$$
   $$\vec{v} = \sum_{j=s+1}^{n} b_j\vec{q}_j \quad のとき \quad (\vec{v},\vec{v}) = -\sum_{j=s+1}^{s+t} b_j\overline{b_j} \leqq 0$$
5. エルミート形式，2 次形式の符号数，指数，ナリティー
   シルヴェスターの慣性法則における p,q,r について，(p,q) を符号数，q を指数，r をナリティーと定義した．さらに $p=n, q=r=0$ のとき正定値，$q=0$ のとき半正定値，$r=0$ のとき非退化と定めた．内積とは正定値エルミート形式に他ならない．これについて定理 3.9 に入ったが途中で時間が足りなくなってしまった．以降は次回の講義で扱う．

来週（1 月 30 日）は 50 分程度講義を行う．これで予定のすべての項目を終える．試験は 2 月 6 日，再試験は 2 月 20 日である．掲示に注意すること．

線形数学講義メモ (1 月 30 日)

本日の講義の要点

今日の講義では前回のやり残しの部分の解説と第 3 回試験に向けて学習しておくべき事項のまとめを行った．この講義メモでは定理 3.9 の証明のあらましをまとめておく．

まず，定理 3.9 の主張を理解するには有限次元線形空間におけるエルミート形式の標準形と，そこから定まる，符号数 (p, q)，ナリティー $r = n - p - q$ の定義を確認しておく必要がある．p は表現行列 A の正固有値の数，q は負固有値の数，r は 0 固有値の数である．エルミート行列のユニタリ行列による対角化，エルミート行列の固有値が実数であることなどが議論の出発点なのできちんと読んでおくこと．

定理 3.9 の (1)(2) は標準形になるような基底のもとに考察すれば

$$\text{正定値} \Longleftrightarrow p = n \Longleftrightarrow \text{標準形は } (\vec{x}, \vec{x}) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n}$$

なので全ての $\vec{a} \neq \vec{0}$ について $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ が成り立つことはすぐに分かる．逆は他の形の標準形においてはこの主張が成り立たないことをみればよい．

(3) はそれぞれの逆の同値性を示すことによって証明した．非退化とは $r = 0$ なので，この逆は $r \geqq 1$ である．要するに表現行列 A が 0 固有値を持つことに他ならない．固有値 0 に対する固有ベクトルとは $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトルに他ならない．要するに非退化でないことはその表現行列 A が $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトルを持つことである．

一方，「各 $\vec{a} \neq \vec{0}$ について，$(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$ を満たす $\vec{b}$ が存在する」の否定は

ある $\vec{a} \neq \vec{0}$ については，どのように $\vec{b}$ を選んでも $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ となる．

と記述される．こらが確かに否定になっていることについて納得がいくまで考えてみよ．後はテキストに記述してあるのでここでは述べない．

実は，定理 3.9 の右側の記述が，エルミート形式の正定値，半正定値，非退化の定義である．この記述は表現行列を利用していないので，無限次元線形空間のエルミート形式に対する定義となる．

線形数学講義メモ (1 月 16 日)

前回のレポート課題について

問題 3.3　【解答例】 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ より $\vec{a}_1 \in \left\langle \vec{b}_1 \right\rangle$ が成り立つ．そこで $1 \leqq l \leqq k$ を満たすすべての l について $\vec{a}_l \in \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_l \right\rangle$ が成り立つと仮定する．

$$\vec{a}_l \in \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_l \right\rangle \subset \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle, \quad 1 \leqq l \leqq k$$

より

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle \subset \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$$

が成り立つので

$$\vec{a}_{k+1} = \vec{c}_k + \vec{b}_k \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle \oplus \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle^\perp$$

と $\vec{c}_{k+1} \in \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$ から $\vec{a}_{k+1} \in \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_{k+1} \right\rangle$ を得る．

【コメント】

- 一次独立なベクトルの組 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ の直交化を，有限次元部分空間のその直交補空間による直和分解（命題 3.3）を利用して

$$\vec{a}_{k+1} = \vec{c}_k + \vec{b}_k \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle \oplus \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle^\perp$$

  で与えた．$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ が互いに直交するベクトルになっている．また $\vec{b}_k \neq \vec{0}$ も $\vec{a}_{k+1} \notin \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ から簡単に分かる．この考え方は単純ではあるが実際の直交化の計算（グラム・シュミットの直交化法）では使えない．直和分解の $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle$ を $\left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$ に置き換える必要がある．この問題はそれを実際に示すために出題した．それゆえ，グラム・シュミットの直交化法の公式を利用した答案は正解とは扱えない．
- 数学的帰納法は高校ではまさに一つの形式として扱っている．しかし，形式にあてはめることにのみ注意が行って，肝心の論理が理解できていないのではないかと疑問を持つ場合が良くある．形式が重要なのではなく，それによる論理の理解と，確かに証明できたという実感を大事にしてほしい．この帰納法では，k の場合に正しいと仮定するのではなく，k 以下のすべての自然数について正しいと仮定している．これでも論理として成立していることを実感してほしい．

問題 3.5　【解答例】 $\vec{w} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}, \vec{a}_k)\vec{a}_k \in W$ とおこう．$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ は正規直交基底なので

$$(\vec{x} - \vec{w}, \vec{a}_j) = (\vec{x}, \vec{a}_j) - \sum_{k=1}^{n} (\vec{x}, \vec{a}_k)(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = (\vec{x}, \vec{a}_j) - (\vec{x}, \vec{a}_j) = 0$$

を得る．ゆえに $\vec{x} - \vec{w} \in W^\perp$ である．

　$\vec{u} \in W$ を任意に取る．$(\vec{x} - \vec{w}, \vec{w} - \vec{u}) = 0$ よりノルムの 2 乗について

$$\|\vec{x} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{w} - \vec{u}\|^2 \geqq \|\vec{x} - \vec{w}\|^2$$

が成り立つ．$\vec{x} - \vec{u}\|$ を最小にする W のベクトルは $\vec{w}$ である．

【コメント】

- この $\vec{w}$ を $\vec{x}$ から W に下ろした垂線の足という．正規直交基底のもとではこのような単純な表示があることを（証明とともに）覚えておくように．

- 後半の等式は 3 平方の定理である．$\vec{w}$ が垂線の足，$\vec{u}$ が W の点なので $\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}$ を頂点とする 3 角形が $\vec{w}$ での角が 90 度の直角三角形になっている．

本日の講義の要点

1. 関数の集合での正規直交系（例 9）
   例示した関数が正規直交系であることは計算で簡単に確かめられる．講義ではこれをさらに進めて $f \in V$ から $2n+1$ 次元部分空間 $V_n = \langle f_k \mid -n \leqq k \leqq n \rangle$ に下ろした垂線の足
   $$h_n = \sum_{k=-n}^{n} (f, f_n) f_n$$
   を考察した．具体的な表示は問題 3.5 から簡単に分かる．また $\|h_n\|$ は f から V_n までの距離なので n の増大に連れて単調に減少していく．この極限がフーリエ展開として知られている．
2. ユニタリ変換，エルミート変換，歪エルミート変換
   計量線形空間の線形変換に対して定まる概念だ．定義とその固有値（命題 3.4）を確認しておくように．係数が実数の場合に対応する概念は直交変換，対称変換，歪対称変換と呼ぶ．これについても命題 3.4 は成立する．
   V が有限次元のとき，これらの線形変換の正規直交基底による表現行列を考えれば，ユニタリ行列，エルミート行列，歪エルミート行列の定義が得られる．対応する実数の場合の概念は直交行列，対称行列，歪対称行列である．これらの定義が 1 年次で学習したものと同じであることを確認しておくこと．
3. 随伴変換
   講義では随伴変換を定義し後，命題 3.5 の証明とその後の注意事項について解説した．ここでは繰り返さないが，随伴変換の存在は保証されていないことに注意してほしい．
4. 正規行列のユニタリ行列による対角化
   対称行列の直交行列による対角化の証明と基本的に同じ議論だが，守備範囲はだいぶ広くなっている．与えた証明はテキストと同じである．また，ユニタリ行列の性質についてテキストでは問題 3.10 にしたが講義では補題として証明をつけた．基本的には ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ と $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ という公式を使うだけである．

本日のレポート課題とヒント

問題 3.6，問題 3.7 および問題 3.9 を課題にした．問題 3.6 の内積は積分で定義されているが，それに注意すればグラム・シュミットの正規直交化法を適用するだけだ．問題 3.7 はユニタリ変換についての証明を参考にすること．α が実数であることと $\bar{\alpha} = \alpha$ が成り立つこととは同値であることをつかえ．問題 3.10 については $(T^*)^* = T$ および $(T+S)^* = T^* + S^*$ を示してから考えること．難しくない．

「線形数学」第 1 回試験（11 月 7 日実施）解答例とコメント

相変わらず意味不明の記述をする人が多い．自分が何を書いているのか分かっていないのではないか．解答例をじっくり考えどういう論理の流れで証明されているかを確認せよ．配点は問 1 は 10 点，問 2 と問 3 は各 15 点の 40 点満点とした．最高点は 37 点（3 人），最低点は 0 点（12 人），平均点は 13.94 点である．10 点以上を一応合格とする．9 点以下の者（32 人）は解答例を熟読したうえ答案を持参し面談を受けること．

問 1 n 次元線形空間 V とその n 個のベクトルの組 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ について，1 次独立であれば基底であることを示せ．

【解答例】 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ は 1 次独立なので V を生成していることを示せばよい．そこで生成していなかったとして矛盾を導く．$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle \subsetneq V$ とする．差集合は空でないので $\vec{q} \in V \setminus \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle$ をとることができる．$\vec{q} \notin \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle$ より $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}\}$ は 1 次独立である．$\vec{q} \in V$ より V は 1 次独立な $n+1$ 個のベクトルの組を持つことになるが，これは次元が n であることに矛盾する．

【コメント】

- $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ の生成する空間を W とおいて，$\dim W = \dim V = n$ により $V = W$ を導いてもよい．また $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ を延長する形で基底を作った時，次元の条件から付けくわえられるベクトルがないことを使ってもよい．いずれも正解である．
- いきなり $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ が V を生成するという答案があるが，これは示すべきことをただ述べているにすぎないので評価の対象にならない．
- 「$\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ が 1 次従属とする」から始まる答案があるが，問題文の仮定を否定しては話にならない．背理法は結論を否定して矛盾を導くのであって，仮定を否定することはあり得ない．

問 2 線形空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 において $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間であることを示せ．また，$W_1 \cup W_2$ が部分空間にならないような例を与えよ．

【解答例】 部分空間は $\vec{0}$ を要素として持つので $\vec{0} \in W_1$ かつ $\vec{0} \in W_2$ である．ゆえに $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ が成り立ち，$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ である．

$\vec{v}, \vec{w}$ を $W_1 \cap W_2$ の要素とし，スカラー $\alpha, \beta \in K$ をとる．$\vec{v}, \vec{w} \in W_1$ と W_1 が部分空間であることから $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in W_1$ である．同様に $\vec{v}, \vec{w} \in W_2$ と W_2 が部分空間であることから $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in W_2$ である．ゆえに $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in W_1 \cap W_2$ であり，$W_1 \cap W_2$ は部分空間である．

$\mathbb{R}^3$ の中で W_1, W_2 を互いに異なる原点を通る直線とする．W_1, W_2 は部分空間である．一方，$W_1 \cup W_2$ は原点で交わる 2 本の直線の合併であり，部分空間にならない．

【コメント】

- 前半は 10 月 17 日の講義で出題した課題であり，解答は 10 月 24 日の講義メモに記述されている．やさしい問題でありこれが解けないということは勉強不足ということだろう．
- 記号 $\mathbf{0}$ の筆記体と，空集合の記号 $\emptyset$ の区別がついていない人がいるようだ．$\emptyset$ は集合であって 0 ベクトルではない．また $\vec{0} \in W_1$ とすべきところを $\{\vec{0}\} \in W_1$ と書く人も目につく．記号の意味は正確に覚えておくこと．
- 部分空間の条件に「空でない」ことが入っている．これについては解答例のように $\vec{0}$ が要素として入っ

ていることを示すが，これを行わない人も多い．

- 基底をとって議論する人がいるが，$W_1 \cap W_2$ が部分空間でなければ基底など取れない．部分空間であることを示すには，基底は使えない．
- $W_1 \cup W_2$ が部分空間にならない例は，できるだけ具体的に作ること．一般論で部分空間にならない状況を説明する答案があるが，好ましくはない．
- 例に「5 の倍数の集合」のようなものをあげる人がいるが，これが部分空間だと思っているのなら大問題だ．部分空間の最も身近な例は解答例にある座標空間内の原点を通る直線や平面だ．「5 の倍数の集合」がそれとは全く異質なものであることは理解できるだろう．

問 3 線形空間 V とその部分空間 W について

$$\vec{p} \sim \vec{q} \Longleftrightarrow \vec{p} - \vec{q} \in W$$

と定めるとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．またこの同値関係による商集合において和とスカラー倍を

$$[\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{x} + \vec{y}], \qquad \alpha[\vec{x}] = [\alpha\vec{x}]$$

で定めるとき，この定義は同値類の代表元の取り方によらないことを示せ．

【解答例】$\vec{p} - \vec{p} = \vec{0} \in W$ より $\vec{p} \sim \vec{p}$ なので反射率が成り立つ．

$\vec{p} \sim \vec{q}$ とすれば $\vec{p} - \vec{q} \in W$ だが，これを -1 倍したベクトル $\vec{q} - \vec{p} = -(\vec{p} - \vec{q})$ も W の要素になるので $\vec{q} \sim \vec{p}$ が成り立つ．よって対称律が成り立つ．

$\vec{p} \sim \vec{q}$ かつ $\vec{q} \sim \vec{r}$ とすれば $\vec{p} - \vec{q}, \vec{q} - \vec{r}$ はともに W の要素である．よってその和 $(\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{q} - \vec{r}) = \vec{p} - \vec{r}$ も W の要素であり $\vec{p} \sim \vec{r}$ が成り立つ．よって推移律も成り立ち同値関係になる．

$\vec{p}$ を $[\vec{x}]$ の別の代表元，$\vec{q}$ を $[\vec{y}]$ の別の代表元とする．$\vec{p} \sim \vec{x}$ と $\vec{q} \sim \vec{y}$ より $\vec{p} - \vec{x} \in W$ かつ $\vec{q} - \vec{y} \in W$ である．ゆえに $(\vec{p} + \vec{q}) - (\vec{x} + \vec{y}) \in W$ であり $[\vec{p} + \vec{q}] = [\vec{x} + \vec{y}]$ が成り立つ．これは問題文での和の定義が代表元の取り方によらないことを表している．スカラー倍については $\alpha\vec{p} - \alpha\vec{x} = \alpha(\vec{p} - \vec{x}) \in W$ より $[\alpha\vec{p}] = [\alpha\vec{x}]$ を得る．これはスカラー倍が代表元の取り方によらないことを意味している．

【コメント】

- 同値関係であることの証明において，反射律，対称律，推移律が何を意味するのかあいまいにした議論が目につく．対称律とは「$\vec{p} \sim \vec{q}$ ならば $\vec{q} \sim \vec{p}$」であり，まず「$\vec{p} \sim \vec{q}$ とする」という議論で始めなくてはならない．推移律についても同様である．
- 「代表元の取り方によらない」ことは同値関係による商集合での考察で常に付きまとう問題である．商集合の要素は同値類であり，代表元を使って表示するしかないからだ．例えばこの問題での和は代表元を使って $[\vec{x} + \vec{y}]$ と定義している．解答例のように別の代表元 $\vec{p}, \vec{q}$ をとって $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{p} + \vec{q}]$ すなわち $(\vec{x} + \vec{y}) \sim (\vec{p} + \vec{q})$ が成り立つことを言って初めて和が定義できたことになる．

$$[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{p}] + [\vec{q}] = [\vec{p} + \vec{q}]$$

という議論は和が定義されていることを前提にした議論であり，間違いである．

- 同値類 $[\vec{x}]$ は部分空間ではない．$[\vec{x}] + [\vec{y}]$ は和空間ではない．

「線形数学」第 2 回試験（12 月 19 日実施）解答例とコメント

問 1 と問 2 を 15 点，問 3 は 20 点の 50 点満点で採点した．最高点は 50 点（1 人），最低点は 0 点（6 人），平均点は 17.5 点である．15 点以上を一応合格とする．14 点以下の者（31 人）は解答例を熟読したうえ答案を持参し面談を受けること．なお，第 1 回第 2 回とも不合格な者が 15 人いる．第 3 回も不合格になった場合は再試験の対象にならないので本試験からきちんと勉強しておくように．

問 1 n 次複素正方行列 A は複数の固有値を持つとする．$A^2 - A - 6I = O$ であるとき，A の固有値を求めよ．また A は対角化可能であることを示せ．

【解答例】 α を A の固有値，$\boldsymbol{p}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとすれば $A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}$ が成り立つ．

$$(A^2 - A - 6I)\boldsymbol{p} = (\alpha^2 - \alpha + 6)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$$

より $\alpha^2 - \alpha + 6 = 0$ であり，$\alpha = 3$ または -2 である．固有値は複数あるので 3 と -2 が A の固有値である．

$\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^n$ について $(A - 3I)(A + 2I)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ より $(A + 2I)\boldsymbol{p} \in V(3)$ である．同様に $(A + 2I)(A - 3I)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ より $(A - 3I)\boldsymbol{p} \in V(-2)$ である．

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{5}(A + 2I)\boldsymbol{p} - \frac{1}{5}(A - 3I)\boldsymbol{p} \in V(3) \oplus V(-2)$$

なので $\mathbb{C}^n = V(3) \oplus V(-2)$ が成り立つ．全空間が固有空間の直和になるので A は対角化可能である．

【コメント】

- $(A + 2I)(A - 3I) = O$ より固有値は 3 と -2 だとする解答があるが，これは正解とは扱えない．また $|A + 2I| = |A - 3I| = 0$ だから固有値は 3 と -2 だとする答案もあったが，3 と -2 以外に固有値がないという根拠がない．間違いである．
- 固有空間の和空間が直和であることは，一般論として解説している．対角化可能性の必要十分条件は固有空間の和空間が全空間 $\mathbb{C}^n$ と一致することであり，その証明が問題の趣旨だ．$V(3) \cap V(-2) = \{\boldsymbol{0}\}$ の証明はしたものもしていないものもいるが，採点の対象にはしなかった．
- $A + 2I \in V(3)$ のような記述は許されない．$A + 2I$ は行列であってベクトルではない．
- $A^2 - A + 6I = O$ と Cayley-Hamilton の定理により A を 2 次だと考えた答案があったが，Cayley-Hamilton の定理とは固有多項式 $p(x)$ について $p(A) = O$ が成り立つことだ．逆ではない．
- 後半の証明は次のようにしてもよい．きれいな解答だ．

  $(A + 2I)(A - 3I) = O$ より $\mathrm{Im}(A - 3I) \subset \mathrm{Ker}(A + 2I)$ である．ゆえに

  $$n = \dim \mathrm{Ker}(A - 3I) + \dim \mathrm{Im}(A - 3I) \leqq \dim \mathrm{Ker}(A - 3I) + \dim \mathrm{Ker}(A + 2I) = \dim V(3) + \dim V(-2) \leqq n$$

  であり固有空間の次元の和が n になるので対角化可能である．
- 配点 15 点，平均点は 2.21 点だった．

問 2 有限次元線形空間 V で定義された線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について，α をその固有値，m を固有値 α の重複度とする．固有空間 $V(\alpha)$ および拡大固有空間 $W(\alpha)$ の定義を述べよ．またそれらは f で不変な部分空間であることを示せ．

【解答例】 定義は

$$V(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I), \qquad W(\alpha) = \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^m$$

である．

$\vec{p} \in V(\alpha)$ について $f(\vec{p}) = \alpha\vec{p} \in V(\alpha)$ なので $V(\alpha)$ は f で不変である．$\vec{p} \in W(\alpha)$ について

$$(f - \alpha I)^m(f(\vec{p})) = f((f - \alpha I)^m(\vec{p})) = \vec{0}$$

なので $f(\vec{p}) \in W(\alpha)$ であり $W(\alpha)$ も f で不変である．

【コメント】

- 固有空間から $\vec{0}$ を除く人がいるがこれは誤りだ．$\vec{0}$ は固有ベクトルではないが固有空間には含まれている．固有ベクトル全体の集合に $\vec{0}$ を付け加えることによって V の部分空間になる．
- $\vec{p} \in W(\alpha) = \ker(f - \alpha I)^m$ について $f(\vec{p}) = \alpha^m\vec{p}$ とする答案が見受けられるが，これでは固有値が α^m になってしまう．おかしさに気づいてほしい．
- $V(\alpha)$ の要素を $\alpha\vec{p}$ と書く人がいるが，$\alpha = 0$ だとおかしなことになる．
- 一般に二つの多項式 $p(x)$, $q(x)$ について $p(f) \circ q(f) = p(f) \circ q(f)$ が成り立つ（命題 2.5 の直前の行を見てほしい）．このことから $(f - \alpha I)^m \circ f = f \circ (f - \alpha I)^m$ であり，$W(\alpha)$ の不変性の根拠になっている．

問 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ を Jordan の標準形にせよ．

【解答例】

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & x & -2 \\ 0 & 2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -1 & x & -2 \\ 2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+1)$$

より固有値は 1（重複度 3）と -1 である．1 に対する固有空間は

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり 2 次元なので，固有値 1 に対する Jordan 細胞は 2 つである．よって Jordan の標準形は

$$J(1,2) \oplus J(1,1) \oplus J(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jordan 細胞にするための行列 P については

- $J(1,2)$ について $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker}(A - I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - I)$ をとり，$(A - I)\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}$ を並べればよい．具体的には

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{より，例えば} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (A - I)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $J(1,1)$ については $(A-I)\boldsymbol{p}$ と合わせて $V(1)$ の基底になるように $\boldsymbol{q}$ をとる．
- $J(-1,1)$ については $V(-1)$ の基底を与えるベクトルをとる．具体的には

$$A+I=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&3&-1&2\\1&1&1&2\\0&-2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{より}\qquad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- 以上から

$$P=\Big((A-I)\boldsymbol{p}\quad \boldsymbol{p}\quad \boldsymbol{q}\quad \boldsymbol{r}\Big)=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&0&-1&-1\\1&0&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

【コメント】

- 基本変形の計算過程は省略した．また同次連立 1 次方程式の解についても結果のみを記した．いずれも 1 年次の前期に学習した事項なので，分からない人は復習しておくこと．
- 基本変形で列の操作を行う人がいる．階数を求めるだけならそれでもいいが，連立方程式を解くには不適切だ．
- 4 次の行列式をサラスの方法で計算する人がいるが，4 次の行列式にはサラスの方法のような定義式を簡単に覚える方法はない．この答案はすべて 0 点にした．
- A を変形してから固有多項式を求める人がいるが，これでは変形した行列の固有多項式を求めたことになる．もちろんこれは A の固有多項式にはならない．
- $V(1)$ の次元は 1 に対する Jordan 細胞の個数だ．すべての Jordan 細胞の個数というわけではない．
- $J(1,2)$ に対応するベクトルの組の並べ方は $(A-I)\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}$ の順だ．逆にしてはいけない．
- $\boldsymbol{p}\in \mathrm{Ker}(A-I)^2\setminus \mathrm{Ker}(A-I)$ より $(A-I)\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ と $(A-I)\,((A-I)\boldsymbol{p})=\boldsymbol{0}$ であること，すなわち $(A-I)\boldsymbol{p}$ が固有値 1 に対する固有ベクトルであることが導かれる．$\boldsymbol{p}\in\mathrm{Ker}(A-I)^2$ になっていない答案があるが間違いである．
- $V(1)$ の要素 $\boldsymbol{p}$ をとってから $(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ を解くという答案がある．この方法は多くのテキストで使われているが，$\boldsymbol{p}$ の取り方によっては解が存在しなくなる．またサイズの大きな Jordan 細胞には対応が困難になる．授業の方法をとってほしい．
- $A-\alpha I$ の階数が 4 になれば，$A-\alpha I$ は正則になるので α は固有値ではない．計算ミスでの結果であっても，本質的な理解を欠いた間違いとみなされる．また P は正則である．明らかに正則でないような行列を答えとする答案があるがこれも本質的な理解ができていないということだ．

「線形数学」第 3 回試験（2 月 6 日実施）解答例とコメント

問 1 と問 3 を 15 点，問 2 は 10 点の 40 点満点で採点した．最高点は 40 点（4 人），最低点は 0 点（3 人），平均点は 21.7 点である．15 点以上を合格とする．3 回の試験の結果から再試験対象者を決定した．掲示を確認すること．答案の返却を希望する者は研究室まで来てほしい．

問 1 エルミート変換の定義を述べよ．またエルミート変換の固有値が実数であること，およびその異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ.

【解答例】 計量線形空間 V における線形変換 $f : V \longrightarrow V$ がエルミート変換であるとは，任意の $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ について

$$(T(\vec{v}), \vec{w}) = (\vec{v}, T(\vec{w}))$$

が成り立つことを言う．

α を T の固有値，$\vec{v}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとすれば

$$(T(\vec{v}), \vec{v}) = (\alpha\vec{v}, \vec{v}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}), \quad (\vec{v}, T(\vec{v})) = (\vec{v}, \alpha\vec{v}) = \bar{\alpha}(\vec{v}, \vec{v})$$

を得るが，T がエルミートなので二つの値は等しく，また固有ベクトルは $\vec{v} \neq \vec{0}$ なので $(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ である．ゆえに $\alpha = \bar{\alpha}$ であり，α は実数である．

α と β を T の相異なる固有値とし，それぞれに対応する固有ベクトルを $\vec{v}$, $\vec{w}$ とおく．固有値は実数なので

$$(T(\vec{v}), \vec{w}) = (\alpha\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{w}), \quad (\vec{v}, T(\vec{w})) = (\vec{v}, \beta\vec{w}) = \beta(\vec{v}, \vec{w})$$

を得るが，T がエルミートなので二つの値は等しく，$(\alpha - \beta)(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ を得る．$\alpha \neq \beta$ より $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ であり 2 つの固有ベクトルは直交する．

【コメント】

- 定義を $(T(\vec{v}), \vec{v}) = (\vec{v}, T(\vec{v}))$ とする答案が見受けられるがこれは間違いだ.
- 固有値が実数であることの証明では $(T(\vec{v}), \vec{v}) = (\vec{v}, T(\vec{v}))$ を利用する必要がある．右の $\vec{v}$ を定義のように $\vec{w}$ にしたら，$\vec{v}, \vec{w}$ の両方が α に対する固有ベクトルだと仮定しなければならない．またたとえその仮定をおいたとしても，$(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ の保証はない.
- 直交することの証明は比較的よくできていた．ただし，固有値の β が実であることに言及していない答案も多い．実数であることは証明済みなので言わなくてもよいのかもしれないが，証明で使う事実（証明まで求めているわけではない）は明示する習慣をつけるべきだ.
- 配点 15 点，平均点は 9.70 点だった.

問 2 計量線形空間 V とその部分空間 W について，その直交補空間 $W^{\perp}$ の定義を述べよ．また和空間 $W + W^{\perp}$ は直和であることを示せ.

【解答例】 直交補空間の定義は

$$W^{\perp} = \{\vec{x} \mid \text{すべての } \vec{w} \in W \text{ について } (\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$$

である．直和であることは $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ を示せばよいので，$\vec{x} \in W \cap W^{\perp}$ をとって考える．このとき $\vec{x} \in W$ でありかつ $\vec{w} \in W^{\perp}$ なので $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ である．内積の定義から $\vec{x} = \vec{0}$ なので $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ を得る．よって和

空間 $W + W^{\perp}$ は直和である．

【コメント】

- 直交補空間の定義は，単に W の要素と $W^{\perp}$ の要素が直交するだけではいけない．W の すべての 要素と直交する V の要素 全体の 集合ということ．下線部を省略しないように．
  解答例では「すべて」は明示してある．「全体の」については集合をそこに含まれる要素の条件で記述するとき，その条件を満たす要素全体の集合を意味しているからだ．
- $V = W \oplus W^{\perp}$ の証明をする人がいるが，ここでは有限次元であることを仮定していないので，必ずしも成立しない．直和が V 全体に等しいことは問題文にない．問題文を正確に理解して考えること．
- 配点は 10 点，平均点は 5.19 点だった．

問 3 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

【解答例】

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & x+2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} x+2 & 1 & -2 \\ 1 & x+2 & 2 \\ -2 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x+3)^2$$

より固有値は 3（重複度 2）と -3（重複度 2）である．3 に対する固有空間は

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．ここで $V(3)$ の基底として取った 2 つのベクトルは直交している．-3 に対する固有空間は

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．この 2 つのベクトルは直交していないので直交化する．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これから $V(-3)$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ をとる．$V(3)$ と $V(-3)$ は互いに直交するので，これらの基底を合わせたものは直交系（互いに直交するベクトルの組）になる．これをノルムで割れば正規直交基底，それを並

べたものは固有ベクトルを並べた直交行列である．これが A を対角化する直交行列である．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

【コメント】

- 4 次の行列式をサラスの方法で計算した人がいた．これは前回の試験と同様に 0 点として扱った．
- 3 に対する固有ベクトルを求めるときに，第 1 変数が消えてしまうので，3 変数の連立方程式として解を求める人がいる．この場合，第 1 変数には条件が無く任意に値をとれるので，任意定数が 2 つあることに注意せよ．
- $V(3)$ と $V(-3)$ は直交するので，それぞれの固有空間での直交化を考えれば良い．4 つのベクトルとして正規直交化を行っても間違いではないが効率は悪い．
- 対角化にしても Jordan の標準形にしてもその形は論理で考えるのであって計算で求めるのではない．${}^tPAP$ の計算はするべきではない．
- 満点は 15 点，平均点は 6.86 点だった．