微分積分 I 講義メモ (4 月 12 日)

本日の講義の要点

1. 実数について

   実数を厳密に扱うことはこの講義のレベルを超える．しかし，実数についての基本事項を抑えておかないと微分積分は理解できない．講義では実数とは何か，できるだけ素朴に考えてみることにした．なお，解説方法はテキストとは異なっている．

   - 実数は数直線上の点である．それは有限または無限の小数で表示される．ただし，有限小数（整数を含む）は途中からすべて 0 になる無限小数とみなせるので，実数は無限小数で表せるとして良い．
   - 数直線上の点から無限小数を作ること

     数直線は物差しとみなせる．数直線上の点を表す小数の，小数点以下第 n 位の数を求めるには $1/10^n$ の目盛の物差しを使えばよい．n は任意なので無限小数が決定できる．
   - 無限小数から数直線上の点を定めること

     有限小数についてはある物差しの目盛なのできちんと定まる．無限小数 $\alpha = 0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}\cdots$ について，それを小数点以下第 n 位までで切り捨てた小数 α_n とそれに $1/10^n$ を加えた小数 β_n をとる．

     $$\alpha_n = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n, \qquad \beta_n = \alpha_n + 1/10^n$$

     このとき α の表す点は幅 $1/10^n$ の閉区間 $[\alpha_n, \beta_n]$ の中にある．これらの閉区間のすべてに含まれる点は唯一つ [*1] でありそれが α の表す点である．
   - 数直線上の点が二通りの無限小数で表されることはないか

     $0.999\cdots$ について，この表す点は $[1 - 1/10^n, 1]$ のすべてに共通に含まれる点である．1 は確かにそのような点であり，共通点の唯一性から $0.999\cdots$ の表す点は 1 でなくてはならないことが分かる．すなわち $0.999\cdots = 1$ である．

     一般に有限小数は $23.44 = 23.43999\cdots$ のように二通りの小数表示を持つ．逆に二つの小数が同じ実数を定めるのはこのような場合に限られることも証明できる（証明はつけていない）．

2. 和・差・積・商の極限（定理 2.1）

   この事実は高校数学でも常識だろう．しかし，証明（この等式が数学的真実であることを自分が確信するための作業）には極限の厳密な定義が必要だ．講義では積についてテキストに沿って解説したが，直感に頼った議論になってしまっている．分からないという人は証明にはこだわらなくてもよい．

   なお，講義でコメントし忘れたが，この定理は $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の両方の収束性が分かっていないと使えない．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ しか分からないときに $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha \lim_{n\to\infty} b_n$ などとしてはいけない．

3. 極限と不等式（定理 2.2）

   これも当たり前の事実として高校で利用してきたはずだ．ただし，(i) の主張での $\leqq$ を単純に $<$ に置き換えた主張は誤りである．誤りであることを確認する例は $a_n = -1/n$, $b_n = 1/n$ としてみればよい．$a_n < b_n$ だが $\lim a_n = \lim b_n = 0$ である．このような例はいくらでも作れるので，自分でも考えてみてほしい．そうすれば，$a_n < b_n$ でも $\lim a_n < \lim b_n$ とは限らないことは簡単に理解できるだろう．

4. 単調増加上に有界な数列が収束すること（定理 2.3）

[*1] 当たり前の事実として認めていただけるだろう．これは縮小閉区間の共通部分に関する議論であり，実数の基本的性質として仮定されるものである．

単調増加については高校で学習している．数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは，ある数 M が存在して $a_n < M$ がすべての n について成り立つことを言う．要するに，a_n の大きさには限界があるということだ．これが分かれば，p.10 の図 2.4 より収束することは納得できるだろう．ただし，この事実の厳密な証明はこの講義では行えない．

この定理の良さは極限が分からなくても収束することは分かるという点だ．応用として例 2.2 があるがこれは次回解説する．

本日の課題

第 2 章，第 3 章，第 4 章の章末問題から数学 III の範囲で解ける問題をいくつか解いてもらった．各 10 点，計 60 点で採点したところ．55 点以上が 28 人いた．数学 III は概ね理解できているとみて良いだろう．その他の人は間違えたところをきちんと確認しておいてほしい．特に 30 点以下 (5 人いた) の人は他の問題も含めてもう一度計算できるかどうか確認しておく必要がある．

- 第 2 章の 1(2) はほとんど全員が正解だった．特に言うことはない．
- 第 2 章の 1(10) は分子の有理化が鍵だが，できない人がいる．また有理化してもその後の処理の間違いも多い．

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+n} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

  最後の式は分母が無限大に発散するので極限はすぐわかるはずだ．さらに処理しようとして失敗している人もいるが残念だ．
- 第 3 章の 1(2) は良くできているので省略する
- 第 3 章の 1(8) では合成関数の微分法則を使うことだがつまらないミスが目立つ．$(x^2+3)^{1/2}$ の微分なので

$$\frac{1}{2}(x^2+3)^{1/2-1}(x^2+3)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

- 第 4 章の 1(2) は分母の微分が分子の -1 倍になっていることをみれば簡単に不定積分できる．なお，$\tan x$ の不定積分を求める問題なのに，微分計算している答案が多かった．また，積分計算の結果の絶対値を落とす答案も目立った．

$$\int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C$$

- 第 4 章の 1(7) は被積分関数を部分分数に展開する．より一般の扱いは大学数学でやることだがこの程度の問題は高校数学の基本問題だろう．なお，見通しのないまま置換積分を行う答案も目に付く．計算量の差が影響しているのではないか．

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) + C$$

微分積分 I 講義メモ (4 月 19 日)

早速，まずい授業をやってしまいました．皆さんを混乱させたかもしれず，申し訳ありません．**本日の講義の要点**

1. 例 2.2(p. 19) について
   漸化式で定められた数列について，$\{a_n\}$ の収束性が分かれば，漸化式の両辺の極限をとることにより極限値が求められることが多い．しかし，収束していない場合はその方法は無意味である．何らかの方法で収束することを示す必要があるが，この例ではそれに定理 2.3 を利用している．今日の講義の最初の失敗はこの証明の準備が不十分だった点だ．改めて $\{a_n\}$ が単調減少下に有界であることを示しておこう．
   まず，$A > 0$ と漸化式から $a_n > 0$ は明らかである．そこで，相加平均と相乗平均の関係を使えば
   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \geqq \sqrt{a_n \frac{A}{a_n}} = \sqrt{A}$$
   となるので $\{a_n\}$ は下に有界である．
   $a_n \geqq \sqrt{A}$ より ${a_n}^2 \geqq A$ なので $a_n \geqq \dfrac{A}{a_n}$ を得る．ゆえに
   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \leqq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$
   なので，$\{a_n\}$ は単調減少である．以上から定理 2.3 により $\{a_n\}$ は収束する．
   失敗の原因は $\geqq$ ではなく $>$ を使ったことと，数学的帰納法にこだわった点だ．訂正する．
2. 連続関数（2.2 節）
   基本的には高校で学習してきた事実ばかりだ．ここでは個々の事実より全体像を明らかにすることを心がけた．また，誤解しやすい点を強調した．以下，授業で述べたことを箇条書きするが，テキストを補完するものとして活用してほしい．
   - 関数の極限の定義において，$x \to a$ のときとは $x \neq a$ を条件として課している．例えば $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ を考える際に，$x \neq 1$ としているので分子分母を $x - 1$ で約分できる．$x = 1$ では定義されないことに注意せよ．また，図 2.6 の左の関数の極限についても $x \neq a$ という前提があるので理解できる．
   - 関数の連続性は極限を利用して定義する（定義 2.2 p.25）．なお，連続性を考えるのは，関数が定義されている範囲においてである．$f(x) = 1/x$ は $x = 0$ で不連続という見方もあるが，厳密には定義されないが正しい．すなわち $f(x) = 1/x$ は定義域で連続な関数である．
   - 和，差，積，商の極限（定理 2.4）と連続性の定義から，連続関数の和，差，積，商は定義域で連続である．
   - 連続の定義における極限 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ では，$x \to a$ のときに $x \neq a$ という制約をつける必要がない．$x = a$ のときは $f(x) = f(a)$ で問題にならないからだ．これに注意すれば合成関数の連続性が理解できる．講義でもきちんと書いたつもりだが，テキストにはないので補足しておく．
     $y = f(x)$ と $z = g(y)$ の合成関数 $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ を考える．$f(x)$ は $x = a$ で連続，$g(y)$ は $y = b = f(a)$ で連続とする．このとき，$x \to a$ のとき f の連続性から $f(x) \to f(a)$ となるので $y \to b$ となる．$y \to b$ より g の連続性から $g(y) \to g(b)$ となる．ゆえに $g(f(x)) \to g(f(a))$ であり，$g \circ f$ の連続性が分かる．

結局，連続関数から和，差，積，商，合成で得られる関数は定義される範囲で連続である．ここまでの論理の流れをまず押さえておいてほしい．

3. 逆三角関数

三角関数の逆関数を導入した．逆関数とは関数 $y = f(x)$ の x と y を入れ替えることに他ならないが，$\sin y = x$ では x の値について y の値は一通りに決まらない．そこで，$-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$ という付加条件をつけて，一つの値としそれを $\sin^{-1} x$ と表した．要するに $\sin^{-1} x$ とは sin をとって x になる値のうち $-\pi/2$ から $\pi/2$ の範囲にあるものということができる．理解しておくべき点を箇条書きしておく．

- $y = \sin^{-1} x$ は $\sin y = x$ と $-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$ の二つの条件と同値である．
- 定義域，値域，グラフはテキスト p.37 にまとめられている．逆関数のグラフは元の関数のグラフを直線 $y = x$ によって対称移動したものなので，それほど難しくはないだろう．
- 三角関数の逆関数なので $\sin(\sin^{-1} x) = x$, $\cos(\cos^{-1} x) = x$, $\tan(\tan^{-1} x) = x$ という式は当然なりたつ．当たり前だと思えるようにしてほしい．しかし，合成の順序を入れ替えた，$\sin^{-1}(\sin x) = x$ は一般には成立しない．これは $\sin^{-1}$ の値域が $[-\pi/2, \pi/2]$ であること（他の逆三角関数でも同様な制限が入る）に注意すればよい．x がこの範囲になければ両辺が等しくなるはずはない．

$$\sin^{-1}(\sin \pi) = \sin^{-1} 0 = 0 \neq \pi$$

  形で暗記しようとするとこの二つの違いはなかなか覚えられない．意味で理解してほしい．$\cos^{-1} x$ とは cos を取ったら x になる値なので $\cos(\cos^{-1} x) = x$ は当然だ．
- 例題として問 2.4（p.38）の (1) を解説した．

4. 初等関数

指数関数，対数関数，べき関数，三角関数，逆三角関数から和，差，積，商，合成で作られる関数を初等関数という．基本となる関数はすべて定義域で連続なので，初等関数も定義域で連続である．初等関数とは既知の関数から一つの式で表示される関数に他ならない．

初等関数ではない関数としては例えば

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

がある．$x = 0$ の周りで一つの式で表せないのでこれは初等関数ではない．なお，この講義で考察するのは関数の値ではなく，$x = 0$ の周りでの関数の振る舞いである．$x = 0$ の場合も 1 という一つの式で表されているではないかと思う人もいるかもしれないが，それは誤解である．なお，この例では $x \neq 0$ では初等関数として表されている．

本日のレポート課題

p. 38 の問 2.4(2)(3) と p. 39 の 6 を課題にする．若干ヒントを与えておこう．

- 問 2.4(2) では，$\sin(\sin^{-1} x) = x$ を利用する．後は cos を sin で表すときの ± の処理がポイントである．
- 講義で紹介した (1) の証明と同様に $\pi/2 - \tan^{-1}(1/x)$ が $\tan^{-1} x$ の 2 条件を満たすことをチェックする．
- 6 は 2 倍角の公式と $\tan(\tan^{-1} x = x$ を利用するだけだ．問 2.4 より易しい．

微分積分 I 講義メモ (5 月 10 日)

前回のレポート課題

【解答例】 講義で注意したように $\sin(\sin^{-1} x) = x$ である．これは cos, tan についても同様である．

問題 2.4(2) $-\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$ より $\cos(\sin^{-1} x) \geqq 0$ である．ゆえに

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

問題 2.4(3) $x > 0$ なので $0 < \tan^{-1}(1/x) < \pi/2$ である．よって $0 < \pi/2 - \tan^{-1}(1/x) < \pi/2$ が成り立つ．

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\tan\tan^{-1}(1/x)} = \frac{1}{1/x} = x$$

なので $\pi/2 - \tan^{-1}(1/x) = \tan^{-1} x$ が成り立つ．よって

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

6(1),6(2) 2 倍角の公式 $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$, $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ を使えばよい．簡単なので省略する．

【コメント】

- 問題 2.4(2) では $\cos u = \pm\sqrt{1 - \sin^2 u}$ の $\pm$ の処理が要点だ．$\sin^{-1} x$ の定義における値の範囲に注意すること．
- 問題 2.4(3) では $\pi/2 - \tan^{-1}(1/x)$ が $\tan^{-1} x$ の定義の 2 条件を満たすことを示す．基本的には講義でやった問題 2.4(1) の証明の考え方と同じだ．ただし，$x > 0$ という仮定をきちんと使わなくては証明できない．左辺は奇関数なので $x < 0$ のときは $-\pi/2$ に等しくなる．また，$x = 0$ では定義されない．
- 等式の証明では，式を少しずつ変形していくが，多くの場合それは同値変形ではない．寄せられた解答でも
  - $A^2 = B^2$ より $A = B$
  - $\tan A = \tan B$ より $A = B$
  - $\tan A = B$ より $A = \tan^{-1} B$

  というような間違いがあった．いずれも逆は正しいがそれは同値変形ではない．
- 等式の証明において，証明すべき式から議論を始める人がいるが，それには「$A = B$ が成り立つためには $C = D$ が成り立たなければならない」といった必要性に観点をおいた式の変形をしなくてはならない．「$A = B$ が成り立てば $C = D$ が成り立つ」といった議論をしてしまうと，証明すべき式を仮定してしまったことになる．これでは証明にならない．
- 問題 2.4(2) の解答で $\cos(\sin^{-1} x) \geqq 0$ とすべきところを $\cos(\sin^{-1} x) > 0$ としてしまう答案が目につく．不等式を書くときに等号をつけるか否かは重大な問題であり，このような解答は基本的には誤りだ．ただし，本質は理解できているので丸を付けている．自分の解答をチェックしておくこと．

本日の講義の要点

テキストの 3.1 節と 3.2 節の前半を解説した．基本的には高校で学習したことばかりなので，ここでは論理のつながりを重視した解説を行った．

1. 微分の定義

微分の定義は何かと聞かれてすぐに答えられない学生は少なくない．しかし，定義が微分の論理のもっとも基礎であり，これをおろそかにしては微分の理解はできない．41 ページの微分の定義は忘れてはならない．

微分の定義と 2 項定理を組み合わせれば x^n の導関数が得られる (44 ページ)．指数法則と組み合わせれば指数関数の導関数が得られる．なお，テキストでは指数関数をべき級数で定義しているが，この講義では高校での定義をそのまま採用する．テキストに記載がないのでコメントしておこう．

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{x\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \alpha a^x$$

ここで $\alpha = 1$ となるような a の値を e と表す．$\dfrac{e^h - 1}{h} \fallingdotseq 1$ より $e^h \fallingdotseq 1 + h$ なので

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

である．$\sin x$, $\cos x$ の微分は加法定理と微分の定義を組み合わせることにより得られる (p.47)．

2. 微分法則

微分の定義から和，差，積，商，合成の微分法則が得られる (p. 42 定理 3.2，定理 3.3)．この証明も微分の定義と極限の性質を組み合わせることによって実行できる．なお，定理 3.3 のテキストの証明は $h \neq 0$ でも $b \neq 0$ とは限らないので厳密には間違いである．合成関数の微分法則の証明にはもう一つの微分の定義（42 ページ定義 3.2) を使う必要がある．ただし，講義では省略した．

微分法則を利用すると，対数関数や無理関数，$\tan x$ や逆三角関数の微分が簡単に求められる．これらの関数は以下の二つの場合を除いて定義域で微分可能である．

- 無理関数 $x^\alpha, 0 < \alpha < 1$ は $[0, \infty)$ で定義されるが $x = 0$ では微分不可能である．
- 逆三角関数 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ は $[-1, 1]$ で定義されるが $x = \pm 1$ では微分不可能である．

3. 初等関数の微分

初等関数とは，べき関数，無理関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数から加減乗除と合成で表される関数を言う．基本の関数の微分と微分法則によりこれらの関数の微分は簡単に計算できる．ただし，前項の状況が生じる点では定義されていても微分可能ではないという場合もある．このことも考慮したうえで，初等関数の微分は簡単に求められるという意識を持ってほしい．もっとも実際に計算しようとすると煩雑になって混乱する場合もあるだろう．ただ，そのような計算はコンピューターに任せておけば良いのではないか．ここでは初等関数の微分は微分法則により簡単に計算できるという意識を持ってほしい．

4. 初等関数でない場合は定義に戻って微分を考察する

初等関数でない関数には微分法則を利用した計算はできないので，定義に戻って考察する．例えば

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

としてみると，$x \neq 0$ での微分は微分法則から簡単に計算できる．しかし，$x = 0$ での微分を考えようとすると，一つの式で表されていないので微分法則は使えない．そこで極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}$$

の収束性を考える必要が生じる．この極限は $-|h| \leqq h\sin(1/h) \leqq |h|$ より 0 になるので $f'(0) = 0$ である．結局 $f(x)$ はすべての x について微分可能であり，導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

である．なお，この関数は $x = 0$ で不連続である．

5. 平均値定理

　微分の応用も微分の定義から導かれる．これも平均値の定理に至る論理の流れを解説した．

(1) 閉区間上の連続関数は最大値および最小値をとる (p. 27 定理 2.7)

　当たり前と思える事実だが，証明には実数と連続関数についての厳密な理解が必要になる．この講義では行わない．

(2) Rolle1 の定理 (p. 49 補題 3.7)

　閉区間上で連続であることから最大値最小値の存在が保証される．両端での値が等しいことから，最大値および最小値の少なくとも一方は区間の内部でとることが分かる．その点を c とおく．c での微分の定義と最大または最小であることから $f'(c) = 0$ を得る．テキストの証明は 1 ページ以上を費やしているが，仮定がどこで使われているか理解してほしい．

(3) 平均値定理の証明 (p. 51)

　51 ページ 1 行目のように $F(x)$ を定めて Rolle の定理を適用するだけだ．$F(x)$ の定め方はテクニカルだが，これに悩む必要はない．平均値定理が論理的に正しいことが納得できればそれで十分だ．証明とは数学的主張について自分自身で確信を持つためのプロセスである．

6. 平均値定理の応用

　テキストでは系 3.8(p.51) の形でしか書いていないので，講義ではより一般に書き直した．区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ について

- 常に $f'(x) \geqq 0$ であれば単調増加，すなわち $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$
- 常に $f'(x) \leqq 0$ であれば単調減少，すなわち $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$
- 常に $f'(x) = 0$ であれば定数関数

が成り立つ．証明は閉区間 $[x_1, x_2]$ で平均値定理を使うだけだ．考えてみよ．

　こうして眺めてみると，微分の議論において定義がいかに重要な役割を果たしているか理解できるだろう．微分の計算練習に矮小化してしまうと微分法則だけで計算できるので定義の重要性を忘れてしまう．注意してほしい．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 章末問題 (68 ページ) の 2 を解け．
課題 2 次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

　章末問題についてはすべて初等関数の微分なので言うべきことはない．課題 2 については $f'(0)$ の考察が鍵になる．なお，この計算においてロピタルの定理を知っている人は使って構わない．知らない人は

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

を使ってよい（高校までの知識で極限を求めるうまい方法があれば指摘してください）.

微分積分 I 講義メモ (5 月 17 日)

前回のレポート課題

課題 1　章末問題 (68 ページ) の 2 を解け．

【コメント】単なる計算問題なので解答例は省略する．テキストの解答を参照すること．

- 商の微分法則，合成関数の微分法則は概ね理解できているようだ．ミスが多かったのは
$$(\cos^{-1} 2x)' = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$
で分子の 2 を落とすもの（中身の微分を忘れている），分母の根号の中身の $(2x)^2 = 4x^2$ が x^2 になっているものだ．
- $\left(\log(x+\sqrt{1+x^2})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ は基本的な公式として覚えておくとよい．

課題 2　次の関数の導関数を求めよ．
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

【解答例】 $x \neq 0$ においては，初等関数で表されているので微分は微分法則で計算できる．
$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$
$x = 0$ においてはその周りで一つの式で表されていないので微分法則は使えない．そこで微分の定義式を使う．
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h - h}{h^2}$$
この極限については前回の講義メモのヒントを使って
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h - h}{h^3}h = -\frac{1}{6}\times 0 = 0$$
を得る．ゆえに $f(x)$ は $x = 0$ でも微分可能で
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

【コメント】

- $x \neq 0$ のときは微分法則を使えばよい．定義を使う人がいるが，微分法則が使えるものに定義を使って計算する必要はない．
- $f'(0)$ の計算に現れる極限は，高校までの知識で求めることは困難だと思う．そこで，ヒントを出しておいたのだが，それを読んできたと思える答案は少なかった．残念だ．ただ，こういう極限を考察することは自分の知識の確実さを知るために有意義だと思う．何ができて何ができないのか，無頓着にしていると，難しい問題に出くわすと許されないことを勝手にやってしまう．注意せよ．この問題での間違いの典型例は
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h}{h} - 1\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-1) = 0$$

というものだ．これがおかしいことが理解できるだろうか．例えば次の計算は如何か．

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^h-1)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-1)=0$$

- $f'(0)$ の計算でロピタル (l'Hospital) の定理を使った人が 5 人ほどいた．ロピタルの定理はある種の極限計算に強力に使えるが不定形であることの確認を怠りがちで間違える人も多い．これについては微分の最後で触れる予定だ．

本日の講義の要点

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは，a の周りでの一次近似式が存在することを言う（p.42 定義 3.2）．この考えを敷衍して $x=a$ の周りで n 回微分できれば n 次近似式が存在するのではないかと考えよう．それを正当化する鍵となるのが Taylor の定理（p.52 定理 3.9）である．今日はこれについて考察を深める．

1. n 階導関数の表し方と計算例

   表し方については 52 ページを参照すること．$f^{(n)}(x)$ の右肩のカッコを落としてはならない．

   n 次導関数を計算できる関数はそれほど多くない．講義では次の例を解説した．

   - $(e^x)^{(n)}=e^x$ 微分して変わらないのだから何回微分しても変わらない．
   - $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

     微分するたびに次数が 1 落ちていくので n 回微分したら $x^{\alpha-n}$ の定数倍になることはすぐ分かるだろう．だから n 回目の微分で出てくる係数は最後の次数よりも 1 だけ大きい $(\alpha-n+1)$ だ．
   - $(\sin x)^{(2k)}=(-1)^k\sin x,\ (\sin x)^{(2k+1)}=(-1)^k\cos x$
   - $(\cos x)^{(2k)}=(-1)^k\cos x,\ (\cos x)^{(2k+1)}=(-1)^{k+1}\sin x$

     $\sin x$ と $\cos x$ が 交互に現れるので，偶数回の微分と奇数回の微分に分けて考えた．奇数回の微分の $\pm$ が異なるのは導関数を考えれば当たり前だ．
   - $(\log x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},\ n\geqq 1$

     問題として考えてもらった．$(\log x)'=x^{-1}$ と表せば $(\log x)^{(n)}=(x^{-1})^{(n-1)}$ なので x^α の n 次導関数の計算が利用できる．ここで $(\log x)'=\frac{1}{x}$ と表してしまうと，見通しが悪くなる．

2. Taylor の定理の意味

   定理 3.9 の意味を考えるときは，a を定数，x を変数とみなす．すると (3.18) 式は x の $n-1$ 次多項式（正確には $n-1$ 次以下）と $R_n(x,a)$ の和とみなせる．だから (3.18) は多項式との誤差を $R_n(x,a)$ とおいたに過ぎない．

   それに対し，(3.19) 式は誤差の表示を与えたことになる．c が何かは分からないので誤差が完全に分かるわけではないが，この表示によって誤差についての考察が可能になることから様々な応用が生じる．

3. Taylor の定理の証明（p.190）

   平均値の定理と同様に $F(x)$ をうまく作り，Rolle の定理（補題 3.7）に持ち込む．証明はテクニカルなのでやり方を覚える必要はない．$F'(x)$ の計算が煩雑だが，微分法則を使っているだけなので，正しいことを確認しておくとよい．

4. Taylor の定理の応用例（ e^x）

   Taylor の定理は汎用性の高い定理であるが，$a, f(x), n$ を具体的にすれば，近似多項式と誤差という構図が具体的に浮かび上がってくる．まず，$a=0$ とした式が講義資料の (I) だ．なお，この式で 0 と x の間の c を $c=\theta x$ と表している．これによって「間」を $0<\theta<1$ という不等式に置き換えることがで

きる．ただし θ が具体的に何かは分からない．x, n によって変わることに注意すれば他は気にしなくてよい．

次に $f(x)$ に具体的関数を代入するが，n 階導関数を求められる例が少ないので，計算例は決して多くない．まず $f(x) = e^x$ として考察した．

- $f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$ なので，講義資料の (II) を得る．
- $R_n(x)$ の表示から $x > 0$ で $R_n(x) > 0$ であることが簡単に分かる．よって次の不等式が得られる．

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

- $n = 4$ とすれば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_4(x), \quad R_4(x) = \frac{e^{\theta x}}{24}x^4$$

となる．まさに 3 次多項式と誤差という構図が浮かび上がってくる．ここで $x = 0.1$ とすれば

$$e^{0.1} = 1.1051666\cdots + R_4(0.1), \quad R_4(0.1) = \frac{0.0001}{24}e^{0.1\theta}$$

左辺をみれば $e^{0.1}$ は 1.1 より若干大きい程度なので，$e^{0.1\theta}$ はそれよりも小さく 1.2 以下として良い．すると誤差は $0.0001/20 = 0.000005$ より小さいと言える．よって左辺第 1 項の小数点以下 5 桁までは誤差の影響を受けない．$e^{0.1}$ は 1.10517 程度であると分かる．

5. Taylor の定理の応用例（$\sin x$）
   - $f(x) = \sin x$ の偶数回微分は $\pm\sin x$ なので $x = 0$ での値は 0 である．よって近似多項式は奇数次の項のみからなる．具体的表示は資料の (IV) にあるので，考えておくこと．
   - $n = 5 = 2\cdot 2 + 1$ の場合に書き下せば

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\theta x}{5!}x^5$$

となる．この式から

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{\cos\theta x}{120}x^2$$

を得るが，右辺第 2 項は cos の取る値が 1 より小さいので $x \to 0$ で 0 に収束する．よって前回の講義メモで課題のヒントとして与えた極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

が得られる．

今日の講義では Taylor の定理に入ったばかりなので，まだ具体例は少ない．しかし，不等式の証明，近似値，極限計算などに応用できることは感じていただけただろうか．まだまだ話は続くので乞うご期待．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 $\log(1 + x)$ についての Taylor の定理の適用例（講義資料 (V)）を導け．

課題 2 この式を利用して $x \neq 0$ で次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\log(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad (x \neq 0)$$

課題 3 $\log 1.1$ の値を小数点以下 4 桁まで求めよ．

課題 1 については $\log(1+x)$ の k 階導関数を求めること．$\log x$ について計算してあるのでそれを応用すればよい．課題 2 については，3 次近似多項式との誤差の正負を判定すること．一般の $R_n(x)$ ではなく $R_4(x)$ を考察しなくてはならない．なお，講義では $x > 0$ という条件を付けたが，$R_4(x)$ の正負に x の正負は影響しない．$x \neq 0$ と条件を弱めておく．課題 3 については $e^{1.1}$ の近似値の求め方を参考に考えてほしい．講義では小数点以下 3 桁と言ってしまったが，3 次近似多項式を利用すれば 4 桁まで決定できる．じっくり考えてほしい．

微分積分 I 講義メモ (5 月 24 日)

前回のレポート課題

課題 1 $\log(1+x)$ についての Taylor の定理の適用例（講義資料 (V)）を導け．

【解答例】 $f(x)=\log(1+x)$ とおけば $f'(x)=(1+x)^{-1}$ なので $f^{(k)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-k+1)(1+x)^{-k}=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ である．ゆえに $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ であり $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{k!}x^k=(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ が成り立つ．Taylor の定理は

$$f(x)=\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x),\quad R_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}$$

課題 2 この式を利用して $x\neq 0$ で次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad (x\neq 0)$$

【解答例】 $n=4$ として Taylor の定理を書き下せば

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_4(x),\qquad R_4(x)=(-1)^3\frac{1}{4}\frac{x^4}{(1+\theta x)^4}$$

である．$x\neq 0$ で $R_4(x)<0$ であり

$$\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)=R_4(x)<0$$

を得る．

課題 3 $\log 1.1$ の値を小数点以下 4 桁まで求めよ．

【解答例】 上の式の x に 0.1 を代入すれば

$$\log 1.1=0.095333\cdots+R_4(0.1),\qquad R_4(0.1)=-0.000025\frac{1}{(1+\theta 0.1)^4}$$

誤差は負で 0 から -0.000025 の間にあるので $\log 1.1$ の値は $0.095333\cdots$ と 0.0953083 の間にある．よって小数点以下第 5 桁を四捨五入することにより近似値 0.0953 が得られる．

まだ Taylor の定理に入ったばかりなので，その活用ができなくても問題はない．ただし，提出されたレポートを見る限り，講義メモを見ていないと思われる答案が多い．講義でも言ったつもりだが，レポート課題に取り組む前にまずその回にどういうことを学習したのか復習しなくてはならない．その時の参考資料が講義メモだ．講義メモをみずにノートで復習しているのかもしれないが，講義メモはそれを読みながら講義を振り返るという趣旨で作成しているので必ず見るようにしてほしい．なお，前回の講義メモではレポート課題についてのヒントのほか，若干の問題の変更も行っている．解答例は変更された課題に対する解答である．

【コメント】

- 課題 1 については $\log(1+x)$ の k 回微分を求めることがポイントである．示すべき式は資料に書いてあるので数回微分しただけでは根拠にならない．なお，$f^{(k)}(x)$ の具体的な形を書かずに，$f^{(k)}(0)$ を記述している答案があるが，分かりづらい．

なお $\sum$ 記号を利用して記述した場合，$f^{(k)}(0)$ の表示が $k=0$ の場合と $k \geqq 1$ の場合で異なるので

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k + R_n(x)$$

と和を分ける必要がある．ここで $f(0) = \log 1 = 0$ なので最初の項は消える．和が一般式では 0 から，ここでは 1 からと取り方が変わっているように見えるが，単に和を分けたに過ぎない．

- 課題 2 については $n=4$ の場合に Taylor の定理を書き下し $R_4(x) < 0$ であることを示せばよい．すぐに分かるはずだ．なお，右辺 − 左辺を作り，それを微分して（高校数学の流儀で）正であることを示している答案があった．もちろん正解だがこういう解答にこの講義での意味はない．レポート課題は答えを出すことが目的ではなく，授業内容の理解につなげることが目的だ．勘違いしないでほしい．
- 課題 3 ではなんとなく値を求めても解答にならない．近似値を扱う場合は誤差の考察が不可欠だ．もちろん誤差なので正確な値を求める必要はない．およその大きさを誤差の表示から見積もってほしい．なお，θ は 0 と 1 の間ということしかわからないので，$R_4(0.1)$ の分母は 1 と 1.1^4 の間ということになる．ゆえに

$$-0.000025 > R_4(0.1) > -\frac{0.000025}{1.1^4} \fallingdotseq -0.000017$$

である．解答例ではこの右辺の計算を面倒なので省き，0 に置き換えている．それでも小数点以下 4 桁を決定するには十分な精度であることが分かる．

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題の解説

   Taylor の定理は強力だが，一般的な枠組みで記述されるのでなじむのには時間がかかるだろう．まず，前回のレポート課題についての解説を通じて，Taylor の定理の意味を解説した．誤差 $R_n(x)$ の表示を利用して不等式の証明や近似値の計算に応用している．

2. $f(x) = \cos x$ の Taylor の定理

   $\sin x$ と同様な考えで理解できる．特に言うべきことはない．

3. $f(x) = (1+x)\alpha$ について

   表示のために一般化された 2 項係数（2 項定理に現れる係数，ようするに組合せ）を導入した．

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

ここで α が自然数の場合は $k \leqq \alpha$ までは組合せ ${}_\alpha C_k$，$k > \alpha$ の場合は，分子に 0 が現れるので 0 である．これによる Taylor の定理の表示は講義資料 1 の (VI) 式に記述してある．

さて，講義では $\alpha = 1/2,\ n = 4$ としてこの式を具体的に書き直してみた．まず一般化された二項係数の値を具体的に求めておく．

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

すると Taylor の定理は

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4(x), \quad R_4(x) = -\frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-7/2}$$

となる．$-1 \leqq x,\ x \neq 0$ において $R_4(x) < 0$ なので次の不等式が得られる．

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3, \qquad -1 \leqq x,\ x \neq 0$$

なお，左辺が定義できるために $-1 \leqq x$ の仮定は必須である．

4. いくつかのコメント
   - $f^{(n)}(x)$ を求めることができなければ，この方法で $R_n(x)$ を調べることはできない．その場合は n を小さな数に限定して考える必要がある．講義資料 1 の (VII) を参照すること．
   - 講義では $x = 0$ の場合のみを解説したが，$x = a$ で Taylor の定理を使いたければ，$x = u + a$ とおき直し $g(u) = f(u + a)$ について $u = 0$ での Taylor の定理を使えばよい．$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ と $u = x - a$ から定理 3.9 の形を導くことができる．

本日のレポート課題

課題 1 講義で紹介した $\sqrt{1+x}$ の Taylor の定理の式を利用して $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ．なお，誤差については

$$0 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001$$

を利用して考察すること．

課題 2 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ について $a = 0,\ n = 4$ の場合の Taylor の定理の式を具体的に記述せよ．その式により $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を与えよ．

微分積分 I 講義メモ (5 月 31 日)

前回のレポート課題

課題 1 講義で紹介した $\sqrt{1+x}$ の Taylor の定理の式を利用して $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ．なお，誤差については

$$0 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001$$

を利用して考察すること．

【解答例】 講義で解説したように

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4(x), \quad R_4(x) = -\frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-7/2}$$

なので，この式に $x = 0.1$ を代入すれば

$$\sqrt{1.1} = 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.0000625 + R_4(0.1) = 1.0488125 + R_4(0.1)$$

$$0 > R_4(0.1) > -\frac{0.0005}{128} > -\frac{0.0005}{125} = -0.000004$$

となるので，小数点以下第 6 桁を四捨五入すれば近似値として 1.04881 を得る．

課題 2 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ について $a = 0$, $n = 4$ の場合の Taylor の定理の式を具体的に記述せよ．その式により $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を与えよ．

【解答例】 まず一般化された二項係数を計算する．

$$\binom{1/3}{1} = \frac{1}{3}, \quad \binom{1/3}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{9}, \quad \binom{1/3}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} = \frac{5}{81}$$

$$\binom{1/3}{4} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!} = -\frac{10}{243}$$

ゆえに，$n = 4$ の場合の Taylor の定理は

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + R_4(0.1), \quad R_4(0.1) = -\frac{10}{243}x^4(1+\theta x)^{-11/3}$$

となる．$x = 0.1$ を代入すれば

$$\sqrt[3]{1.1} \fallingdotseq 1 + 0.0333333 - 0.0011111 + 0.0000617 + R_4(0.1) = 1.0322839 + R_4(0.1)$$

$$0 > R_4(0.1) > -0.0000041$$

となる．よって小数点以下第 6 桁を四捨五入すれば，近似値 1.03228 を得る．

【コメント】

- どちらの問題も誤差は 0 から -0.000004 の間にあるので，小数点以下第 5 桁までは信頼できる．第 6 桁での四捨五入を想定し，近似値の計算は，ゆとりをもって各項を小数点以下第 7 桁まで求めている．
- まだ，誤差の大きさの見積もりが不十分である．誤差がほぼ 0 というのは誤差の大きさを考えたことにならない．どの程度小さいのかを考える必要がある．一方，誤差はほぼ $-0.0005/128$ という答案もある．これも「ほぼ」としてしまうので実際の値との差を考えたことにはならない．

- 小数点以下 3 桁，4 桁という答えが目につく．せっかく 3 次近似多項式を利用したのに，3 次の項の大きさ（0.00006 程度）が無視されるような近似値では，計算したかいが無い．
- $\sqrt[3]{1+x}$ を $(1+x)^{3/2}$ ととらえた答案があった．3 乗根の意味なので間違えないように．

本日の講義の要点

1. Taylor の定理と n 次近似多項式

   微分可能な関数は 1 次近似式が存在する（接線の方程式）．同様に n 回微分できる関数は n 次近似式が存在する．今日はまずこの事情を考察した．まず n 次以下の多項式 $p(x)$ が，関数 $f(x)$ の $x=0$ における n 次近似多項式であるとは
   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^n}=0$$
   が成り立つことを言う．この式はランダウのオーを使って
   $$f(x)=p(x)+o(x)$$
   と記述される．ランダウのオーについては，物理や化学でも頻繁に扱うので，意味はそのときに確認すればよい．ここではあまり気にしないように．

   さて，Taylor の定理を使えば
   $$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=R_n(x)-\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n=\frac{x^n}{n!}\left(f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)\right)$$
   となる．ここで $f^{(n)}(x)$ が $x=0$ で連続なら $\lim_{x\to 0}f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)=0$ なので
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(o)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
   が $f(x)$ の n 次近似多項式になる．$f^{(n)}(x)$ が連続という条件を付加したが，n 次近似多項式の存在が分かった．

2. Taylor 展開

   $f(x)$ が無限回微分可能な時，各 x について $\lim_{n\to\infty}R_n(x)$ を考えることができる．Taylor の定理から，この極限が 0 に収束すれば
   $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
   という無限級数による表示を得る．これを Taylor 展開という．

3. e^x, $\cos x$, $\sin x$ の Taylor 展開

   いずれの場合も $R_n(x)$ は $\dfrac{x^n}{n!}$ に何か（θ を含む式）をかけた形になっている．θ は良くわからないが，この何かがある値（$e^{|x|}$, 1 など）より小さいことは分かる．一方，17 ページの例 2.1 より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ である．よって $R_n(x)$ はいずれの場合も 0 に収束する．

   こうして，e^x, $\cos x$, $\sin x$ の Taylor 展開（講義資料 2 参照）が得られる．例 2.1 の証明はテキストと同じように行ったのでここでは省略する．なお，テキストでは誤差の表示を述べていないので，Taylor 展開できる範囲も記述していない．講義では，誤差の表示と例 2.1 を利用してすべての x について Taylor 展開できることを証明した．

   この応用として

- $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots$
- Euler の公式（テキスト 60 ページ）
- 博士の愛した数式 [*1] $e^{i\pi} + 1 = 0$

を紹介した.

4. $\log(1+x)$ の Taylor 展開

講義資料 1 の R_n の表示を利用すれば，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^n \leqq 1$, $(1+\theta x)^n \geqq 1$ なので

$$0 \leqq |R_n| = \frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n} \leqq \frac{1}{n}$$

を得る．ゆえに $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で Taylor 展開（講義資料２）できる.

実は，Taylor 展開は $-1 < x \leqq 1$ の範囲で行える．これについては次のように議論した.

(1) 公比 $-x$ の等比級数の和を考える.

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}$$

(2) $-1 < x < 0$ とし，この式の変数を t に置き換えた上で 0 から x まで積分する.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

この積分以外の式は $\log(1+x)$ の n 次近似式に他ならないので最後の積分が誤差 $R_{n+1}(x)$ を表している [*2].

(3) 誤差が 0 に収束すること.

最後の積分を $-t = u$ とおいて処理すれば

$$R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt = -\int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u}du < 0$$

となるが $\dfrac{u^n}{1-u} \leqq \dfrac{u^n}{1+x}$ なので

$$|R_{n+1}(x)| \leqq \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-x}du = \frac{1}{n+1}\frac{(-x)^{n+1}}{1-x}$$

$-1 < x < 0$ より右辺の極限は 0 になる．よって $R_{n+1}(x)$ は 0 に収束する.

本日のレポート課題とヒント

今日学習した Taylor 展開を利用して次の Taylor 展開を求めよ．また収束する範囲も考えること.

課題 1 $f(x) = \cos x$ の $x = \pi/4$ における Taylor 展開（68 ページ 3(3)）

課題 2 $f(x) = \cos^2 x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

課題 3 $f(x) = \log(2+x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開

[*1] 小川洋子の本，寺尾聰主演で映画化された

[*2] Taylor の定理は誤差の表示を与えるが，誤差の表し方はいろいろある．このような表示があったからと言って驚くことではない.

いずれの問題も，53 ページの定理 3.10 を適用する形で解こうとすると大変だ．そこで今日学習した Taylor 展開（4 つある）を利用する．

課題 1 については $x = u + \pi/4$ とおいて，加法定理を適用してから $\cos u, \sin u$ の Taylor 展開を利用する．そこまでで基本的には終わりだが，問題の趣旨を踏まえ，$u = x - \pi/4$ で x の式に戻しておく．$(x - \pi/4)^k$ たちによる級数の表示が得られるはずだ．

課題 2 については，2 倍角の公式を利用して $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ とし $\cos x$ の Taylor 展開を利用する．

課題 3 については，$2 + x = 2\,(1 + x/2)$ として代入し，対数法則と $\log(1 + x)$ の Taylor 展開を利用する．なお課題 2 および課題 3 については次の議論を参考にしてほしい．

指数関数 e^x の Taylor 展開に $2x$ を代入すれば

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots \frac{2^n x^n}{n!} + \cdots$$

e^x の Taylor 展開はあらゆる x について可能なので，この式もあらゆる x について成立する．

微分積分 I 講義メモ (6 月 7 日)

前回のレポート課題

課題 1　$f(x) = \cos x$ の $x = \pi/4$ における Taylor 展開（68 ページ 3(3)）

【解答例】 $x = u + \pi/4$ とおくと

$$f(x) = \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u - \sin u)$$

右辺に $\cos u,\ \sin u$ の $u = 0$ での Taylor 展開を代入すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{(2m)!\sqrt{2}}u^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{(2m+1)!\sqrt{2}}u^{2m+1}, \quad -\infty < u < \infty$$

この符号を ε_n とおけば

$$\varepsilon_{2m} = (-1)^m, \quad \varepsilon_{2m+1} = (-1)^{m+1}$$

となり

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \frac{1}{n!\sqrt{2}}u^n, \quad -\infty < u < \infty$$

$u = x - \pi/4$ で戻せば,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \frac{1}{n!\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, \quad -\infty < x < \infty$$

課題 2　$f(x) = \cos^2 x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

【解答例】

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}$$

この等式は $-\infty < 2x < \infty$ すなわち $-\infty < x < \infty$ で成り立つ.

課題 3　$f(x) = \log(2 + x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開

【解答例】

$$\log(2 + x) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}x^n$$

この等式は $-1 < x/2 \leqq 1$ すなわち $-2 < x \leqq 2$ で成り立つ.

【コメント】

- 既知の Taylor 展開（といってもまだ $e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \log(1 + x)$ の 4 つしか与えていない）を利用した. この 4 つについては収束する範囲もきちんと証明しているので，その部分も含めて利用できる．解答例を確認してほしい.
- Taylor 展開ができるためには $R_n(x)$ が $n \to \infty$ で 0 に収束することを示さなくてはならない．しかし，その作業は大変だ．講義では 4 つの例についてこの作業をきちんと行ったが，テキストには全く書かれていない．Taylor 展開の式は記述されているが，それがどの範囲の x について成り立つのかまったく示されていないのだ.

  ただし，この問題はその作業を求めるものではない．既知の Taylor 展開を利用することで，その作業なしに Taylor 展開と収束する範囲を決定することができる．それゆえ $R_n(x)$ は考えなくてよい．n 回微分も計算しなくてよい.

- テキストに従って Taylor 展開をするには $f^{(n)}(a)$ を計算することになる．しかし，この作業は決してやさしくはない．さらに $R_n(x)$ が 0 に収束することを示すには $f^{(n)}(x)$ の計算が必要になる．それに比べて解答例の方法がいかに単純か理解できるだろう．
- Taylor 展開において，一般項に続く $\cdots$ を落とす人がいるが，これでは有限級数であるように見える．落とさないこと．

本日の講義の要点

1. $(1+x)^\alpha$ の Taylor 展開

   残念ながら $R_n(x)$ の表示は複雑であり，収束する範囲は結果のみにとどめる．なお $\alpha = -1$ のときは

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n$$

   なので Taylor 展開は

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

   である．これは公比 $-x$ の無限等比級数の和に他ならない．この場合は $-1 < x < 1$ で収束することは既知である．

   また α が自然数の場合は $n \geqq \alpha + 1$ について $f^{(n)}(x) = 0$ なので $R_n(x) = 0$ である．この Taylor 展開は単に 2 項定理による展開式である．

2. $\tan^{-1} x$ の Taylor 展開

   この関数の n 次導関数は，今までの知識では求められない．しかし，公比 $-x^2$ の級数と積分を利用することによって，収束する範囲も含めて Taylor 展開を求められる．

   - 等比級数 $1 - u^2 + u^4 - \cdots + (-u^2)^{n-1} = \dfrac{1-(-u^2)^n}{1+u^2}$ より次の式を得る．

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - \cdots + (-u^2)^{n-1} + \frac{(-u^2)^n}{1+u^2}$$

   - この式を 0 から x まで積分すれば，左辺の原始関数は $\tan^{-1} u$ なので

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{u^{2n}}{1+u^2}du$$

     を得る．よって

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{u^{2n}}{1+u^2}du$$

     という表示を得る．

   - 被積分関数が偶関数であることに注意して $x < 0$ のときには $[0, |x|]$ での積分に置き換える．$1 + u^2 \geqq 1$ より

$$|R_{2n}(x)| = \int_0^{|x|} \frac{u^{2n}}{1+u^2}du \leqq \int_0^{|x|} u^{2n} du = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

     を得る．よって $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $R_{2n}(x)$ は 0 に収束し，Taylor 展開できる．

   $x = 1$ で Taylor 展開できることが示せたので，58 ページの (3.32) 式が成り立つことが証明された．

3. $\sin^{-1} x$ の Taylor 展開 (お話)

　$(1+x)^{-1/2}$ の Taylor 展開から出発して，この x を $-x^2$ に置き換え積分する．すると $\sin^{-1} x$ の Taylor 展開が出てくる．これはより高度な話題なのでお話として聞いておくこと．

　一般に Taylor 展開は，変数の置き換えやべき級数の微分・積分（項別微分，項別積分という）を利用して，気楽に計算できる．この操作での収束域の考察も可能である．より高度な話題になるのでこれ以上は踏み込まないが，Taylor 展開は比較的気楽に行えることに注意してほしい．

4. 不定形の極限

　l'Hospital の定理を解説する前に不定形という用語を整理しておこう．これは高校で聞いていた人もあると思う．まず，極限の求め方の基本は四則演算と極限の公式だ（定理 2.4）．これが使えない場合が不定形であり $0/0$ 型，∞/∞ 型，0∞ 型，$\infty-\infty$ 型，0^0 型，∞^0 型などがある．極限を求める問題は基本的には不定形をどう処理するかにかかっている．

5. l'Hospital の定理

　定理の内容については定理 3.11 および定理 3.13 を見ること．重要なのは定理を使うための条件

- $0/0$ 型不定形または ∞/∞ 型不定形であること
- 分子分母をそれぞれ微分したものの極限（商の微分ではない）が，収束（あるいは ∞ に発散）すること

の二つだ．これをチェックしないで計算するととんでもない結論になる．例として $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$ をやってもらったが如何だろうか．ただし不定形のチェックさえすれば，$x\to\infty$ の極限にも使えるので非常に使い勝手はいい．

　なお，この定理の証明は講義では扱わなかった．単に極限を求めるためだけの定理なので，微分の理論における重要度は低いからだ．証明も全ての場合に示そうとすると非常に煩雑になる．テキストには $0/0$ 型の場合（定理 3.11）と ∞/∞ 型の場合（定理 3.13）の証明が記述されているので，前者だけでも読んでみるとよい．

　なお，$0/0$ 型と ∞/∞ 型以外の不定形のときは，工夫が必要である．講義では次の例を紹介した．

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x}$$

左辺は 0∞ 型不定形なので使えない．そこで右辺のように処理し ∞/∞ 型になおす．この分子分母を微分したものの極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

である．よって l'Hosipital の定理により

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

を得る．

6. 極限への Taylor 展開の利用

　Taylor 展開により関数を多項式で近似できる．極限の式ですべてを多項式で近似してしまえば，極限は簡単に求められるはずだ．この発想で次の例を紹介した．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-x^3/6+x^5/5!-\cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+\cdots = \frac{1}{6}$$

もう一つの応用例として例 3.4 の (3.38) 式を紹介した．$a \geqq 0$ の場合は不定形ではなく明らかに ∞ に発散する．$a < 0$ の場合は 0∞ 型の不定形である．そこで，自然数 N を $0 < -\alpha < N$ となるようにとる．

次に $x > 0$ において e^x の Taylor 展開 $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ は収束し，その項はすべて正なので $e^x > \frac{x^N}{N!}$ が成り立つ．よって

$$x^a e^x > x^a \frac{x^N}{N!} = \frac{1}{N!} x^{a+N}$$

だが，$a + N > 0$ なので右辺は $x \to \infty$ で ∞ に発散する．よって

$$\lim_{x\to\infty} x^a e^x = \infty$$

があらゆる a について成立する．

本日のレポート課題とヒント

課題 1　章末問題 5

【ヒント】l’Hospital の定理で計算すればよい．ただし，不定形のチェックが明示されていない解答は正解とはみなさない．0^0 型と ∞^0 型の不定形の場合は，log をとった極限を考えるとよい．べきは積に変わる．

課題 2　章末問題 6

【ヒント】(1) は自力で解いてみよ．難しくはない．(2) は $\cos x$ と $\sin x$ にその Taylor 展開を入れてみて考察せよ．

微分積分 I 講義メモ (6 月 14 日)

前回のレポート課題

課題 1 章末問題 5

(1) 0/0 型不定形なので l'Hospital の定理を使う．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Taylor 展開を使えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2! + x^4/4! + \cdots}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots = -\frac{1}{2}$$

(2) 0∞ 型不定形なのでこのままでは l'Hospital の定理は使えない．そこで $\dfrac{\log x}{1/\sin x}$ と変形すれば ∞/∞ 型不定形になる．

$$\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{1/\sin x} = \lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = -\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

(3) 0/0 型不定形なので l'Hospital の定理を使う．

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5^x\log 5 - 3^x\log 3}{1} = \log 5 - \log 3$$

(4) 0/0 型不定形なので l'Hospital の定理を使う．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-x)}{\log x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(1-x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} -x\cos(1-x) = -1$$

(5) 0/0 型不定形なので l'Hospital の定理を使う．

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-1}{\cos^{-1} x} = \lim_{x\to 1-0}\frac{3x^2}{-1/\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0} -3x^2\sqrt{1-x^2} = 0$$

(6) ∞/∞ 型不定形なので l'Hospital の定理を使う．分子分母を微分した極限は

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x}$$

ここで $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots > \frac{x^3}{6}$ なので

$$0 < \frac{1+x^2}{e^x} < 6\frac{1+x^2}{x^3} \longrightarrow 0, \quad (x\to\infty)$$

よりこの極限は 0 である．よって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\pi/2 - \tan^{-1} x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-1/(1+x^2)} = 0$$

(7) 0^0 型不定形なのでこのままでは l'Hospital の定理は使えない．そこで対数をとった極限を考え

$$\lim_{x\to +0}\log x^x = \lim_{x\to +0}\frac{\log x}{1/x}$$

とすれば ∞/∞ 型不定形になるので l'Hospital の定理が使える．

$$\lim_{x\to+0}\log x^x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0} -x = 0$$

よって

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\log x^x} = e^0 = 1$$

(8) ∞^0 型不定形なのでこのままでは l'Hospital の定理は使えない．そこで対数をとって

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$$

とすれば ∞/∞ 型不定形になり l'Hospital の定理が使える．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1} = 0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\log\sqrt[n]{n}} = e^0 = 1$$

【コメント】

- l'Hospital の定理は 0/0 型および ∞/∞ 型不定形にしか使えない．解答の中に，それ以外の型の不定形にも強引に使ったものがあるがこの解答は評価に値しない．定理を使う場合はきちんと使うための条件を確認すること，この態度は数学を使うすべての研究者・学生に必須のものだ．
- 分母，分子を微分した極限を考えるとき，まずは式の計算によって単純な形になおすべきだ．
- (6) で $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{e^x}$ を l'Hospital の定理を連続して適用することで求めた答案が多かったが，解答例のような Taylor 展開を利用する方法は如何だろうか．分子の次数が高い場合も同じ発想で証明できることを味わってほしい，前回の講義メモの 6 を見てほしい．
- (7)(8) で対数をとったが，解答例のようにすれば明快だろう．なお，「$\lim_{x\to+0} x^x = a$ とおく」というような答案があるが，この表現は極限が収束することが分かっている場合にしか使えない．存在するかどうかわからないものを a とおくことはできない．厳密には間違いである．

課題 2 章末問題 6

(1) $g(x) = x - \sin x$ とおけば，$g(0) = 0$ および $g'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ が成り立つ．ゆえに $g(x)$ は単調増加であり $x > 0$ で $g(x) \geqq 0$ を満たす．ここで $g(a) = 0$ となる $a > 0$ があったとすると $0 < x < a$ について $0 = g(0) \leqq g(x) \leqq g(a) \leqq 0$ なので $(0, a)$ で $g(x) = x - \sin x = 0$ となってしまう．これは $\sin x$ の定義に矛盾し，$g(a) = 0$ を満たす $a > 0$ は存在しない．$g(x)$ は奇関数なので $g(a) = -g(-a)$ であり，$g(a) = 0$ を満たす負の値も存在しない．よって $x = \sin x$ を満たす x は 0 以外に存在しない．

(2) 分母分子の Taylor 展開を考えれば

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\cos x + ax^2 + bx + c}{\sin x - x} &= \frac{(1+c) + bx + (a - 1/2)x^2 - x^4/24 + \cdots}{-x^3/6 + x^5/120 - \cdots} \\ &= \frac{(1+c)x^{-3} + bx^{-2} + (a-1/2)x^{-1} - x/24 + \cdots}{-1/6 + x^2/120 - \cdots} \end{aligned}$$

最後の変形では分母分子を x^3 で割っている．ここで $x \to 0$ とすれば分母は $-1/6$ に収束する．そのためこの極限が収束するためには分子もある値に収束しなくてはならない．よって

$$1 + c = 0, \quad b = 0, \quad a - \frac{1}{2} = 0$$

でなくてはならない．このとき分子は 0 に収束するので，$a = 1/2,\ b = 0,\ c = -1$ のとき $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ となる．ゆえに $f(0) = 0$ とおけば $f(x)$ は実数全体で連続な関数になる．

【別解】 $f(x)$ の分母は $x \to 0$ で 0 に収束するので $\lim_{x\to 0} f(x)$ が収束するためには分子も 0 に収束しなくてはならない．よって $\cos 0 + c = 0$ より $c = -1$ でなくてはならない．$c = -1$ のとき $\lim f(x)$ は 0/0 型不定形である．よって分母分子を微分した極限を考える．

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2ax + b}{\cos x - 1}$$

この分母も 0 に収束するので，この極限が収束するためには $-\sin 0 + b = 0$ でなくてはならない．ゆえに $b = 0$ である．このときこの極限も 0/0 型不定形なので，分母分子を微分して

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 2a}{-\sin x}$$

という極限を考える．この分母も 0 に収束するので，この極限が収束するためには $-\cos 0 + 2a = 0$ すなわち $a = 1/2$ でなくてはならない．実際，$a = 1/2,\ b = 0,\ c = -1$ のとき $\lim f(x)$ は l'Hospital の定理を 4 回繰り返して計算できる．

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + (1/2)x^2 - 1}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\cos x} = 0$$

よって $f(0) = 0$ とおけば $x = 0$ でも連続になる．

【コメント】

- (1) は $g(x)$ が単調増加であることをみればほぼ十分だ．$g'(x) \geqq 0,\ g'(0) = g''(0) = 0,\ g'''(0) = 1 > 0$ によって $x > 0$ で $g(x) > 0$ を示す解答もあるが，不等式の証明の基本としてやっているのだろう．ただ，$g'(x) \geqq 0$ から単調増加は分かるので，解答例のように $g(a) = 0$ なら $(0, a)$ で定数関数になってしまうことを理解しておくほうが良いと思う．
- (1) の証明に Taylor 展開や Taylor の定理は使えない．おそらく分からないままにそれらしく書いてしまったのだろうが，そのやり方でたとえあったとしても意味があるとは思えない．解答は完全に分かった状態で書くべきだ．
- (2) は Taylor 展開を用いる方法と l'Hospital の定理を用いる方法の二つの解答例を示した．Taylor 展開を利用すればこのような問題はいくらでも作れるだろう．
- (2) で Taylor 展開を使った後の処理ができない人が多い．x^3 で分母分子を割ったが，それによって分母の 0 での値が 0 でなくなっている．極限は不定形にならず簡単に求められるのであり，極限計算の基本的手法のはずだ．

本日の講義の要点

1. 不定積分，特に置換積分

　不定積分は微分の逆演算である．この考えを出発点に，基本的な関数の不定積分 (p. 83 表 4.1)，置換積分（合成関数の微分法則に対応），部分積分（積の微分法則に対応）をおさらいした．なお，置換積分は

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

で $\varphi(x) = u$ とおくやり方のほうが利用される．$\varphi'(x)dx = du$ と考え

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

と計算する．積分の中に $\varphi'(x)dx$ の形を見出すのがポイントで，これを du に置き換える．

例として

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

ここで第 1 式から第 2 式に移る際に $x^2 = u$ という置換を行っている．$2xdx = du$ なので $xdx = \frac{1}{2}du$ としている．置換積分は苦手にしている人が多いので，丁寧に計算するように心がけてほしい．

2. 不定積分，特に部分積分

基本的な公式なので特にコメントはない．講義では $\log x$, $\tan^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ の原始関数を部分積分を用いて計算した．いずれも $1 = x'$ がかかっているものとみなして部分積分をしている．

$$\int \sin^{-1} xdx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ここで $\sqrt{1-x^2} = u$ とおけば $1 - x^2 = u^2$ なので $-2xdx = 2udu$ を得る．$xdx = -udu$ であるから

$$\int \sin^{-1} xdx = x\sin^{-1} x + \int \frac{udu}{u} = x\sin^{-1} x + u = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

3. 有理関数の積分

最も基本的な例は高校でも見たことがあるはずだが，今日のところは簡単な解説にとどめた．次回，具体的な計算例を含めて解説する．有理関数 $P(x)/Q(x)$ は次のプロセスで積分できる．

(1) $P(x)$ の次数が $Q(x)$ の次数以上であるときは，割り算を行うことにより，多項式と分子の次数が分母の次数よりも小さな分数式の和に分ける．（84 ページの下から 4 行目以下）

(2) $Q(x)$ を 1 次式と判別式が負の 2 次式の積に因数分解する．このような因数分解は次のような考えで行う．実数解 α に対しては $(x-\alpha)$ という因数を持つ．虚数解 $\beta \pm i\gamma$ については $(x-\beta-i\gamma)(x-\beta+i\gamma) = x^2 - 2\beta x + \beta^2 + \gamma^2$ という判別式負の 2 次式の因数を持つ．

(3) $Q(x)$ の因数分解の形に応じて部分分数展開する．詳細は次回の講義で解説する．

(4) 出てきた一つ一つの分数式の原始関数を求める．

今日の計算例を記述しておこう．

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \int x + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \int x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} + A\log|x-1| + B\log|x+1| + C$$

A, B を求めるのは実質的に連立一次方程式である．

$$x + 2 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B), \qquad A + B = 1,\ A - B = 2$$

より $A = 3/2,\ B = -1/2$ である．これを含めて書き直せば

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + C$$

本日のレポート課題とヒント

4 章の章末問題（103 ページ）の 2(1)(2)(3)(4) を計算せよ．表 4.1 の基本公式と置換積分で計算できる．

微分積分 I 講義メモ (6 月 21 日)

前回のレポート課題

【解答例】(1) 割り算を行って簡単な分数式になおすだけだ.

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx = \int x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tan^{-1} x + C$$

(2) 実質的には $x-1=u$ による置換積分だが，$dx = du$ なので特に変換しなくても計算できる.

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \tan^{-1}(x-1) + C$$

(3) $x = \sqrt{2}u$ で置換積分する．$dx = \sqrt{2}du$ である.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{2-2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(4) $\sqrt{x^2+1} = u$ で置換積分する．$x^2+1 = u^2$ より $2xdx = 2udu$ である.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{2udu}{u} = 2u = 2\sqrt{x^2+1} + C$$

【コメント】

- 逆三角関数や 2 次式の置換を行うので高校の数学 III を超えるものだが，どれもそれほど難しくない.
- 積分定数は最後の結論のみにつけている．特に問題はない.
- (3) で結論に $1/\sqrt{2}$ がついている答案があるが，基本的には置換積分の失敗である．やはりきちんと変数をおきなおしたほうが良い.
- (4) は $(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を知っていればすぐに答えが分かる．この微分計算は何度も行ったことがあるのではないか.

本日の講義の要点

1. 部分分数展開

   講義資料に基づいて部分分数展開の方法を解説した．チェックするポイントは
   - 分母の次数が分母の次数より大きいこと
   - 分母を一次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解すること
   - 各因数に対応して，どのような分数式を用意するか

   の 3 点だ．これを確認すれば，後は係数比較から出てくる連立方程式を解けばよい．講義での例とは異なるが，ここでも例示しておこう.

   $$\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

   分母が 7 次式なので未知数 7 個の連立方程式になる．実際にやるとなると大変だが，地道にやれば必ず解ける．ただし，実際にこの連立方程式を解く必要はない．これはあくまで部分分数展開における分数式の設定の仕方を理解するために例示したものだ.

2. 部分分数展開に現れる分数式の不定積分

   1 次式については 85 ページにまとめられている．数学 III の知識で計算できる．2 次式 $x^2+2bx+c$, $b^2-c<0$ については，講義での説明法を若干修正する.

- まず $\dfrac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^n} = \dfrac{B}{2}\dfrac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^n} + \dfrac{C-Bc}{(x^2+2bx+c)^m}$ と変形すれば第 1 項の積分は $x^2+2bx+c=u$, $(2x+2b)dx=du$ という置換積分で簡単に計算できる．

$$\int \frac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^n}dx = \int \frac{du}{u^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} & n \geqq 2 \\ \log(x^2+2bx+c) & n=1 \end{cases}$$

- 第 2 項の積分は $x+b=\sqrt{c-b^2}u$ と置換積分することにより $x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)=(c-b^2)(u^2+1)$ で

$$\int \frac{C-Bc}{(x^2+2bx+c)^n}dx = \frac{C-Bc}{(c-b^2)^n}\sqrt{c-b^2}\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

となる．この積分は積分の漸化式によって計算できる．(194 ページ参照)

平方完成 $(x+b)^2+(c-b^2)$ を利用した変数変換は便利なのでいつでも使えるようにしておいてほしい．

以後の計算はテキスト 194 ページに詳しく書いてある．なお，講義では最初に置換を行っているが，分子の 1 次の項を処理してから置換を行ったほうが分かりやすいので，ここではそのように記述している．計算例を示しておく．

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

より第 1 項の積分は $\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)$ になる．第 2 項は平方完成により $(x+1/2)=(\sqrt{3}/2)u$ と置換積分すれば

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3}/2}{(3/4)(u^2+1)}du = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

以上まとめて

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3. 置換積分の技法（2 次式の平方根）

講義資料には 5 項目を箇条書きしているが，知らないと思いつかない置換は

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = u - \sqrt{a}x \ (a>0), \qquad \tan\frac{x}{2} = u$$

という二つの変換だ．プリントでは一般的な形で記述しているが，講義では実例を取り上げて説明した．ここでも実例を書いておこう．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx$$

について $\sqrt{1+x^2}=u-x$ と置換積分する．両辺を 2 乗すれば $1+x^2=u^2-2ux+x^2$ であり，x^2 の項が消える．これがこの置換のうまみである．$x=\dfrac{u^2-1}{2u}=\dfrac{u}{2}-\dfrac{1}{2u}$ より $dx=\dfrac{u^2+1}{2u^2}du$ である．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \frac{u^2+1}{2u}\frac{u^2+1}{2u^2} = \frac{1}{4}\int u + 2\frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2} + 2\log|u| - \frac{1}{2u^2}\right)$$

$u=\sqrt{1+x^2}+x$ より $u^{-1}=\sqrt{1+x^2}-x$ なので

$$u^2 - \frac{1}{u^2} = (u+u^{-1})(u-u^{-1}) = 4x\sqrt{1+x^2}$$

を得る．すべてまとめて

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

なお，この式で log の中身は正（$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \geqq |x|$）なので絶対値をつける必要はない．

4. 置換積分の技法（三角関数）　三角関数の分数式については $\tan(x/2) = u$ とおく方法が有効である．

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = 2\cos(x/2)\sin(x/2) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

なので u の有理関数となり積分が計算できる．例えば

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{1}{1+u+u^2}du$$

この積分はすでに計算してあり

$$\int \frac{1}{1+u+u^2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

なので

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

本日のレポート課題

4 章の章末問題（103 ページ）の残り 2(5)(6)(7)(8)(9)(10) を計算せよ．どの問題も講義で扱った例より易しいのでヒントはつけない．

微分積分 I 講義メモ (6 月 28 日)

前回のレポート課題

【解答例】 レポート提出者が大幅に減った．特に部分分数展開について戸惑っている人が多いようだ．講義資料・テキストの記述が不十分なためかもしれないが，正確に記述しようとしていたずらに複雑な表現をしても理解しやすくはならないだろう．資料・テキストの記述だけを読んで自分勝手に判断するのではなく，具体例を通じて何をすべきかを理解してほしい．

(5) まず分母を 1 次式と判別式負の 2 次式に因数分解する必要がある．ここでは

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

とすればよい．よって部分分数展開は

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

であり，分母を払って両辺の係数を比較すれば

$$A+C=0,\quad -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0,\quad A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0,\quad B+D=1$$

を得る．第 1 式と第 3 式から $B=D$，第 2 式と第 4 式から $A-C=1/\sqrt{2}$ であり，この連立方程式は簡単に解けて

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad D=\frac{1}{2}$$

である．よって計算すべき積分は

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

となる．右辺の 2 つの積分はほぼ同じ形なので，複号 $\pm$ を利用して同時に計算しよう．平方完成により

$$x^2\pm\sqrt{2}x+1=\left(x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

となるので $x\pm 1/\sqrt{2}=\left(1/\sqrt{2}\right)u$ とおく．

$$\int\frac{\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}dx=\int\frac{\pm\frac{u}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\pm u+1}{u^2+1}du=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}\log(u^2+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}u$$

$u=\sqrt{2}x\pm 1$ を使って元に戻す．$u^2+1=2x^2\pm 2\sqrt{2}x+2$ より $\log(u^2+1)=\log 2+\log(x^2+\pm\sqrt{2}x+1)$ だが，$\log 2$ は定数なので積分定数に含めてよい．これからテキストの解答にある次式を得る．

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)+C$$

(6) $\sqrt{2-x}=u>0$ とおく．$x=2-u^2$ であり，$dx=-2udu$ である．

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2-x}dx&=\int(2-u^2)u(-2u)du=\int 2u^4-4u^2du=\frac{2}{5}u^5-\frac{4}{3}u^3\\&=\frac{2}{15}(3(2-x)-10)(2-x)\sqrt{2-x}=\frac{2}{15}(3x+4)(x-2)\sqrt{2-x}+C\end{aligned}$$

(7) $\tan\frac{x}{2}=u$ とおく．$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\frac{2}{1+u^2}du$ より

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du=\int 1du=u=\tan\frac{x}{2}+C$$

(8) (7) と同じ置き方をすると分母が $(1+u^2)^4$ になってしまうので煩雑だ．3 倍角の公式を利用するほうが容易い．ここでは $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$ として $\sin x=u$ と置換積分する．

$$\int\cos^3 xdx=\int(1-u^2)du=u-\frac{1}{3}u^3=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

(9) $e^x=u$ とおいて置換積分してもよいが，分母の微分が分子になっているので簡単である．

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\log\left(e^x+e^{-x}\right)+C$$

(10) $e^x=u>0$ とおく．$e^xdx=du$ より $dx=\frac{du}{u}$ である．

$$\int\frac{e^x-1}{(e^x+1)^2}dx=\int\frac{u-1}{(u+1)^2}\frac{du}{u}=\int\frac{u-1}{u(u+1)^2}du$$

最後の被積分関数は $\frac{u-1}{u(u+1)^2}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u+1)^2}$ の形に部分分数展開できる．

$$u-1=A(u+1)^2+Bu(u+1)+Cu=(A+B)u^2+(2A+B+C)u+A$$

より $A=-1,\ B=1,\ C=2$ である．よって

$$\int\frac{u-1}{u(u+1)^2}du=\int-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{2}{(u+1)^2}du=-\log u+\log(u+1)-\frac{2}{u+1}$$

この式を x の式になおして

$$\int\frac{e^x-1}{(e^x+1)^2}dx=-x+\log(e^x+1)-\frac{2}{e^x+1}+C$$

【コメント】

- 部分分数展開の方法は講義資料に従って確実に行うこと．なお因数 $(x-1)^2$ は 2 次式の因数ではなく 1 次式の因数 $(x-1)$ の 2 乗とみなすこと．部分分数展開のために用意する分数式は $\dfrac{Ax+B}{(x-1)^2}$ ではなく $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$ である．また因数 x^2+1 に対して用意する分数式は $\dfrac{A}{x^2+1}$ ではなく $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}$ である．
- (5) はテキストの結論でとどめたが tan の加法定理と $\tan(\tan^{-1}x)=x$ を利用して

$$\tan(\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1))=\frac{\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}x-1}{1-(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}=\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$$

  $\tan^{-1}\tan x$ は x と $k\pi$ の違いがあるが，違いは定義域で一定なので不定積分においては積分定数に組み込んでよい．よって

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$$

- (7) は分子分母に $1-\cos x$ をかけることによって高校までの知識でも計算できる．

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+C$$

- 置換積分のとき，変化した変数に条件が付く場合がある．例えば $e^x = u$ とおいたとき，当然 $u > 0$ である．この場合 $1/u$ の原始関数は $\log u$ で構わない．
- (9) は $e^x = u$ とおけば $dx = \frac{du}{u}$ であって

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{u - u^{-1}}{u + u^{-1}} \frac{du}{u} = \int \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)u} du$$

部分分数展開のためには $\frac{u^2-1}{(u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$ とおけばよいので分母を払って

$$u^2 - 1 = A(u^2 + 1) + (Bu + C)u = (A + B)u^2 + Cu + A$$

ゆえに，$A = -1,\ B = 2,\ C = 0$ である．

$$\int \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)u} du = \int \frac{-1}{u} + \frac{2u}{u^2 + 1} du = -\log u + \log(u^2 + 1)$$

$u = e^x$ で x の式に戻せば

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = -x + \log(e^{2x} + 1) + C$$

- (7)(9) のように解法によって出てくる関数の形が変わってくる場合がある．両方とも正しい答えであり，二つの関数が同じ（あるいはあったとしても差は定数）であることが分かる．例えば

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

本日の講義の要点

1. リーマン和

   区間 $[a, b]$ 上で定義された関数についてリーマン和を定義した（p.73(4.1) 式）．リーマン和は $f(x)$ のほか区間の分割（これを Δ で表す），小区間上の点の取り方 $\{p_i\}$ で決まる．講義では

$$S(f; \Delta, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1})$$

   という記号を使った．

2. 積分の定義

   分割の幅 $|\Delta|$ を最も大きな小区間の長さと定め，分割の細かさの指標とする．積分とは

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} S(f; \Delta, \{p_i\})$$

   として定める．この定義を厳密に記述することはしない．今までの極限の定義と同様に感覚的にとらえればよい．ただし，分割や $\{p_i\}$ の取り方の任意性が大きく，分からないという人も多いと思う．極限を厳密に定義する方法を学べば，基本的に同じ考えで定義できることが分かる．

   定積分とはリーマン和の極限である

3. 積分の定義から証明できること

   まず閉区間上で連続関数の積分可能性が分かる．この事実の証明はレベルを超えるので行わない．事実だけ知っておくこと．

次に，定理 4.2 の基本性質を紹介した．テキストでは連続性を仮定しているが，積分可能という条件だけで構わない．いずれもリーマン和についての対応する性質を利用して証明する．例えば (1) は，分割 Δ と小区間上の点 $\{p_i\}$ について

$$S(f+g;\Delta,\{p_i\}) = S(f;\Delta,\{p_i\}) + S(g;\Delta,\{p_i\})$$

が成り立つことを見ればよい．後は極限の性質である．

なおテキストでは連続性を仮定しているので問題はないが，積分可能だけの仮定だと，

- (3) では $f(x)$ が $[a,b]$ 上積分可能ならその部分区間 $[a,c]$, $[c,b]$ でも積分可能であること
- (5) では $f(x)$ が $[a,b]$ 上積分可能であれば $|f(x)|$ も $[a,b]$ 上積分可能であること

を示す必要がある．これらはどちらも成立する．

4. 微分積分学の基本公式を目指して

積分の平均値定理　関数の取る値の平均値とは積分を区間の幅で割ればよい．平均値は最大値と最小値の間にある（79 ページ 4 行目）ので，$f(c)$ が平均値となるような点の存在が中間値の定理で分かる．

微分積分学の基本定理　$f(x)$ が連続な時に

$$F(t) = \int_a^x f(t)dt$$

と定めれば $F'(x) = f(x)$ になる．証明は定理 4.2(3) と積分の平均値定理を使う．

微分積分学の基本公式　証明はテキストに与えられているので特に補うことはない．

微分積分学の基本公式によって高校での定積分の定義（出発点）にたどり着いたことになる．ずいぶん煩雑な議論だと感じるかもしれないが，高校の方法では連続関数の積分可能性など証明できない．また定積分の応用も理解できない．積分の議論をより深めていくには高校のやり方ではなくリーマン和から出発する議論が必要不可欠なのだ．

ただし，微分積分学の基本公式を得たことによって，部分積分や置換積分などの積分計算が定積分にも使えることになる．この意味で基本公式も重要な道具と言える．

本日のレポート課題

4 章の章末問題 4(1)(2)(3) を課題とする．これについては

$$2\sin x \sin y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$$

等の三角関数の積を和に直す公式を利用するといいだろう．他に不定積分の計算問題

$$(1)\ \int \frac{1}{x^4+5x^2+4}dx \qquad (2)\ \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx \qquad (3)\ \int \frac{dx}{1-e^x}$$

を出題する．不定積分の計算は自分で取り組むべき課題なので，講義資料の方針に従って計算してほしい．

微分積分 I 講義メモ (7 月 5 日)

前回のレポート課題

【解答例】 章末問題 4 について

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\cos(m+n)x + \frac{1}{2}\cos(m-n)x$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin(m+n)x - \frac{1}{2}\sin(m-n)x$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m+n)x + \frac{1}{2}\cos(m-n)x$$

によりこれらの積分は $\sin kx$, $\cos kx$ の積分に帰着される．整数 $k \geqq 1$ について

$$\int_0^{2\pi} \sin kx dx = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_0^{2\pi} = 0$$

$k = 0$ については $\sin kx = \sin 0 = 0$, $\cos kx = \cos 0 = 1$ であることから $\cos 0x$ 以外の積分はすべて 0 である．特に (2) は常に 0 である．また唯一 0 でない $\cos 0x$ の積分は 2π である．

m, n は 0 以上の整数なので $m + n = 0$ は $m = n = 0$ の場合に限る．以上から

$$(1)\ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} -\pi + \pi = 0 & m = n = 0 \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad (2)\ \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi + \pi = 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

【コメント】

- k が自然数のとき，$\sin kx$, $\cos kx$ の $[0, 2\pi]$ での積分が 0 になることはグラフを考えれば明らかだろう．こういう感覚は大事にしてほしい．
- 部分積分を 2 回使って

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \left[\frac{1}{m}\sin mx \cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{n}{m}\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx \\ &= \frac{n}{m}\left[-\frac{1}{m}\cos mx \sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx\end{aligned}$$

  とし，0 であることを示す解答もあるが，これを使うには $m \neq n$ の他に $m \neq 0$ も必要である．$m = 0$ の場合を別に考える必要があるので，解答例の方法より場合分けが複雑になる．

【解答例】 (1) については次のように部分分数展開する．

$$\frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

よって，

$$\int \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(2) の部分分数展開は

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{(1/2)x}{x^2+1}$$

よって，

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{(1/2)x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + C$$

(3) では $e^x = u$ とおいて $dx = \frac{du}{u}$ より

$$\int \frac{dx}{1-e^x} = \int \frac{du}{u(1-u)} = \int \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}du = \log u - \log|1-u| = x - \log|1-e^x| + C$$

【コメント】

- (1) の有理式は x^2 の有理式とみなせるので $\frac{1}{x^2+5x+4}$ と同じように部分分数展開される．部分分数展開の分子を $Ax+B,\ Cx+D$ としているが，$A=C=0$ になるのは当然だ．
- $x^4+5x^2+4=(x^2+4)(x^2+1)$ の因数分解は見ただけでできてほしい．平方完成から因数分解しているものがあるが残念だ．
- (2) の部分分数展開で

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

  とおく人がいるが，これでは A, B, C は一通りには決まらない．このような解答は混乱して失敗しているものが多い．また

$$\frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

  と部分分数展開する人もいる．この場合は

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(1/2)x}{(x-1)^2} - \frac{(1/2)x}{x^2+1}$$

  となるが，第 1 項を積分するためには

$$\frac{(1/2)x}{(x-1)^2} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2}$$

  と変形（あるいは基本的にそれと同じ作業を）しなくてはならない．講義の置き方ならそのような変形は済んでいることになる．
- (3) はちょっとした工夫で高校までの知識で解ける．大学で新たに学んだ知識を使わないとできないというものではなく残念だ．

$$\int \frac{dx}{1-e^x} = \int 1 + \frac{e^x}{1-e^x}dx = x - \log|1-e^x| + C$$

本日の講義の要点

1. 広義積分

   関数が無限大に発散する点を持っていたり，積分域が無限に広がっていたりする場合は通常の積分は定義できない．例えば $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ を考えるためにリーマンを作れば

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p_k}}(x_k - x_{k-1}) \quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,\ x_{k-1} < p_k < x_k$$

となるが，$0 < p_1 < x_1$ はいくらでも小さくとれるのでリーマン和は p_1 の取り方でいくらでも大きくなる．よってリーマン和は分割を細かく知っていても一定の値には収束しない．積分の定義に従えば積分不可能だ．

このような場合に積分と極限を組み合わせることによって積分の意味を拡張する必要がある．それが広義積分だ．この場合は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2-2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

となる．

- 広義積分の計算は極限を利用するが，原始関数が連続なら極限は値を代入することに他ならない．

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

  は $F(x)$ が連続であれば広義積分についても成り立つ．また $b = \infty$ の場合は $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$ と理解すればよい．要するに計算上は積分も広義積分も違いはない．

  なお，原始関数による積分計算で $F(x)$ の連続性は必須である．不定積分計算の方法によっては原始関数が不連続になる場合があるので注意を要する．

- 理論上は広義積分と通常の積分はまったく異なるものとして扱わないといけない．例えば通常の積分では連続関数は積分可能だが，広義積分では積分可能かどうかの考察が必要になる．このことをガンマ関数によって紹介した．テキストでは 94 ページに数行書いてあるだけなのでここにも証明を記述しておく．

  $[1,\infty)$ での広義積分が収束すること．

  Taylor 展開を考えれば $x > 0$ で $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つ．ゆえに $x^{\alpha-1}e^{-x} < n!x^{\alpha-n-1}$ である．ここで $\alpha < n$ と自然数 n をとれば

$$\int_1^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx < n!\int_1^M x^{\alpha-n-1}dx = n!\left[\frac{x^{\alpha-n}}{\alpha-n}\right]_1^M = \frac{n!}{n-\alpha}(1-M^{\alpha-n}) < \frac{n!}{n-\alpha}$$

  ここで左辺の被積分関数は正なので積分域が広くなれば積分値も大きくなる．ゆえに左辺は M が大きくなるにつれて単調に増加する．一方，全体の不等式はそれが有界であることを表している．単調増加有界であることから収束する．

  $0 < \alpha < 1$ のとき $(0,1)$ での広義積分が収束すること．

  $e^{-x} < 1$ なので

$$\int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}(1-\varepsilon^\alpha) < \frac{1}{\alpha}$$

  である．左辺は $\varepsilon > 0$ が右から 0 に近づいていくとき，単調に増加する．しかも有界なので収束する．

- 通常の積分では $f(x)$ が積分可能なら $|f(x)|$ も積分可能であることが証明できる．しかし，対応する事実は広義積分では成り立たない．

2. 定積分の計算例

定積分の計算において，置換積分，部分積分によって通常の積分が広義積分になったり，逆に広義積分が通常の積分になったりする．原始関数を求めて積分値を計算する場合は広義積分と通常の積分は区別しないほうが良い．まずは $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$ について

- $x = a\sin\theta$ と置換する．このとき

  積分範囲　$x : 0 \to a$ のとき $\theta : 0 \to \pi/2$ である．

  被積分関数　$\dfrac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{1}{a\sin\theta + a\cos\theta}$，　θ の動く範囲から $\cos\theta \geqq 0$ に注意せよ．

  積分要素　$dx = a\cos\theta d\theta$

  と変換されるので与式は

$$\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta}{a\sin\theta + a\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \tan\theta}$$

- さらに $\tan\theta = u$ と置換する．このとき

  積分範囲　$\theta : 0 \to \pi/2$ のとき $u : 0 \to \infty$

  被積分関数　$\dfrac{1}{1 + \tan\theta} = \dfrac{1}{1 + u}$

  積分要素　$\theta = \tan^{-1} u$ より $d\theta = \dfrac{1}{1 + u^2} du$

  となるので

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \tan\theta} = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u)(1 + u^2)} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u} - \frac{u}{1 + u^2} + \frac{1}{1 + u^2} du$$
$$= \frac{1}{4}\left[\log\frac{(1 + u)^2}{1 + u^2} + 2\tan^{-1} u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

最初の被積分関数は $x \in [0, a]$ で分母が 0 になることはないので連続関数であり通常の積分である．次の被積分関数も $[0, \pi/2]$ の連続関数になっている．しかし 2 回目の置換積分をすると，積分域が無限に広がり広義積分に変わっている．なお，最後の結論で ∞ を代入することを $x \to \infty$ での極限をとることに置き換えている．なお，積分要素の変換については $x = f(u)$ のときは $dx = f'(u)du$，$g(x) = u$ のときは $g'(x)dx = du$ 等のように考えれば良い．

3. 積分の計算例 $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2 - x}}$

$u = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$ と置換積分する．$x = \dfrac{2u^2}{1 + u^2}$ である．

積分範囲　$x : 0 \to 2$ のとき $u : 0 \to \infty$

被積分関数　$\sqrt{\dfrac{x}{2 - x}} = u$

積分要素　$dx = \dfrac{4u}{(1 + u^2)^2} du$

より

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2 - x}} = \int_0^{\infty} \frac{4u^2}{(1 + u^2)^2} du = \int_0^{\infty} \frac{4}{1 + u^2} - \frac{4}{(1 + u^2)^2} du$$

この第 2 項の原始関数は例 4.1(4) で計算済みなので

$$\text{与式} = \left[4\tan^{-1} u - 2\tan^{-1} u - 2\frac{u}{u^2 + 1}\right]_0^{\infty} = \pi$$

4. 積分の計算例 $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}}$, $(a < b)$

$\sqrt{\ }$ の中身に注目して，$x = \dfrac{b + a}{2} + \dfrac{b - a}{2}\sin\theta$ とおく．

積分範囲　$x : a \to b$ のとき $\theta - \pi/2 \to \pi/2$

被積分関数　$(b-x)(x-a)=\dfrac{b-a}{2}(1-\sin\theta)\dfrac{b-a}{2}(1+\sin\theta)=\left(\dfrac{b-a}{2}\cos\theta\right)^2$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\dfrac{2}{(b-a)\cos\theta}$

積分要素　$dx=\dfrac{b-a}{2}\cos\theta d\theta$

より

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2}{(b-a)\cos\theta}\frac{b-a}{2}\cos\theta d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1d\theta=\pi$$

この例では広義積分が置換積分によって通常の積分に置き換わっている．

今日の講義では積分の計算例を 3 つ紹介したが，いずれも置換積分が重要な役割を果たしている．置換積分は，積分範囲，被積分関数，積分要素がそれぞれどう変わるのかを考えることによって行うことができる．じっくり考えてほしい．なお，計算の過程において通常の積分と広義積分は変わる場合がある．計算上は区別しないほうが理解しやすい．

本日のレポート課題とヒント

4 章の章末問題 5 を課題とする．(2) は部分積分を利用する．また (4) は $1\leqq x\leqq 2$ の場合と $0\leqq x\leqq 1$ に積分域を分けて考察する．追加の課題として

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\qquad (a>0,\ b>0)$$

を出題しておく．

微分積分 I 講義メモ (7 月 12 日)

前回のレポート課題

【解答例】 章末問題 5(1) $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$ より $x - 1/2 = \sqrt{3}/2u$ とおく．この置換積分によって

積分範囲 $x : -\infty \to \infty$ のとき $u : -\infty \to \infty$

被積分関数 $\dfrac{1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{4}{3(u^2 + 1)}$

積分要素 $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}du$

なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\tan^{-1} u\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

(2) $\lim_{x\to+0} x\log x = 0$（例 3.4）に注意して部分積分を行う．

$$\int_0^1 \log x dx = [\log x]_0^1 - \int_0^1 1 dx = -1$$

ここで部分積分の第 1 項の $x = 0$ での値を $x \to +0$ での極限に読み換えている．

(3) $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ により原始関数は簡単に求められる．

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

(4) 絶対値を外すため積分域を $[0, 1]$ と $[1, 2]$ に分ける．

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1 - x|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}} = \left[2\sqrt{x - 1}\right]_1^2 = 2$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1 - x|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = \left[-2\sqrt{1 - x}\right]_0^1 = 2$$

より,（広義）積分の値は 4 である．

追加の問題について，$a \neq b$ の場合は部分分数展開により

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{b^2}{b^2 - a^2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2 + b^2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2 + a^2}$$

とする．ここで

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a}$$

なので

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{(b - a)\pi}{2(b^2 - a^2)} = \frac{\pi}{2(b + a)}$$

$a = b$ の場合は部分分数展開をしてもよいが p.86 の計算例をみれば分子が x^2 のまま部分積分で計算するほうが良い．

$$\int_0^{\infty} x\frac{x}{(x^2 + a^2)^2}dx = \left[-\frac{1}{2}x\frac{1}{x^2 + a^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2a}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a}$$

この場合も含めて次の結果を得る．

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2(b + a)}$$

【コメント】

- 積分の計算での $F(b) - F(a)$ において，定義できない場合は極限に置き換えて考えないといけない．特に (2) において $\lim_{x\to+0} x\log x$ は不定形なのできちんと極限について考察する必要がある．
- 追加の問題で $a = b$ の場合の議論はできていなかった．$a \neq b$ の場合の部分分数展開はできないが，それを理由に $a = b$ の場合はあり得ないという解答があったが，問題は $a = b$ でも当然成立している．あり得ないという解答をした人は，その主張のおかしさを理解してほしい．
- 追加の問題は x^2 の分数式なので $\dfrac{A}{x^2+a^2} + \dfrac{B}{x^2+b^2}$ の形に展開できるはずだ．しかし，この感覚が持てないうちは大変でも $\dfrac{Ax+B}{x^2+a^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+b^2}$ の形に展開すること．

本日の講義の要点

1. 積分の応用：面積（直交座標）

   リーマン和の極限という積分の定義の発想から面積が求められることは明らかだ．また，高校でも良く使った事実だ．例 4.6 のサイクロイドの囲む面積も，計算したことがあると思うが，その際置換積分していることに注意してほしい．

2. 積分の応用：面積（極座標）

   極方程式 $r = f(\theta)$ のグラフと $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた部分の面積について考察した．θ について分割したときに，分割した小領域を扇形で近似して面積の和をとると

   $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\tau_j)\right)^2 (\theta_j - \theta_{j-1})$$

   となるが，これが $\dfrac{1}{2}(f(\theta))^2$ の Riemann 和になっていることがポイントだ．この発想の転換が，積分を様々な場面に応用するための鍵だ．

   例としては例 4.7 とレムニスケートの囲む面積（章末問題 7(3)）を解説した．なお，極座標においては $r \geqq 0$ が前提だ．この条件から θ の動く範囲が自然に限定される．直交座標の場合との違いであり，例を通じて確認しておくこと．

3. 積分の応用：曲線の長さ

   講義では $y = f(x)$ の形で扱ったが，ここではパラメーター表示 $(x(t), y(t))$, $a \leqq t \leqq b$ として解説しなおす．

   - 前提として $x'(t)$, $y'(t)$ がともに連続であることを仮定する．
   - t の動く範囲 $[a, b]$ を $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ と分割する．$\mathrm{P}_i = (x(t_i), y(t_i))$ とおく．
   - 曲線を P_i, $0 \leqq i \leqq n$ を結ぶ折れ線で近似する．折れ線の長さは

   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}(t_i - t_{i-1}) \\ &\fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

   - 最後の表示は $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ の Riemann 和であり，分割を細かくしていけば

   $$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

   に収束する．これが曲線の長さである．

$y = f(x)$ の場合のように平均値の定理を使って τ_i を求めたのではないので，最後の等号が近似式に変わっている．ただし，分割を細かくしいぇ行くときにこれが曲線の長さに近づいていくことは納得できるだろう．

例として例 4.8 の懸垂線の長さとアステロイド（p.104 図 4.24 参照）の長さを解説した．アステロイドについて解を記述しておく．なお，第 1 象限の部分のみ求める．全体はこれを 4 倍すればよい．

- 曲線の媒介変数表示 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, 0 \leqq t \leqq \pi/2$
- 公式の利用により長さは

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t dt = \frac{3a}{2}\left[\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

講義では直交座標による長さの表示（定理 4.13）に置換積分を使った形にしたので煩雑になってしまった．媒介変数による長さの表示（ここに記述したもの）を利用したほうが簡明である．

4. 極座標による長さの計算

$r = f(\theta)$ による曲線は $(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$ の媒介変数表示による曲線に他ならない．簡単に計算できる．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 極座標による曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$（カージオイド）の囲む部分の面積，および曲線の長さを求めよ（上半分のみで良い）．

面積は定理 4.12 を適用する基本問題，長さは講義メモの 4 により媒介変数表示として計算する．

課題 2 第 4 章章末問題 8 （105 ページ）

(1) は定理 4.13 を適用する問題．ただし積分計算は大変だ． $\sqrt{1 + e^{2x}} = u$ とおくと比較的楽に計算できる．(2) は媒介変数表示による曲線の長さの公式を利用する．計算は基本的だ．

課題 3 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の第 1 象限の部分の長さを求めよ．

$x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t,\ 0 \leqq t \leqq \pi/2$ として媒介変数表示による長さの公式を利用する． この際，被積分関数を $\cos 2t$ と $\sin 2t$ の式で表して $\cos 2t = u$ とおくと良い．計算は大変だ．なお，次は公式として使ってよい．

$$\int \sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})\right) + C$$

微分積分 I 講義メモ (7 月 19 日)

前回のレポート課題

課題 1 極座標による曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$（カージオイド）の囲む部分の面積，および曲線の長さを求めよ．

【解答例】 カージオイドのパラメーターの動く範囲は $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ ととれるので面積は

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{3a^2\pi}{2}$$

カージオイドの周は $(a(1 + \cos\theta)\cos\theta, a(1 + \cos\theta)\sin\theta)$，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ なので，長さは

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-a\sin\theta - 2a\cos\theta\sin\theta)^2 + (a\cos\theta - a\sin^2\theta + a\cos^2\theta)^2} d\theta$$

で求められる．

$$(\sin\theta + \sin 2\theta)^2 + (\cos\theta + \cos 2\theta)^2 = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

なので

$$2a\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a$$

【コメント】

- 面積のほうは計算内容も含めて極座標での面積計算の基本的問題と言える．なお，$\sin kx$, $\cos kx$ を幅 2π の区間で積分すると 0 になるのは，周期性と三角関数のグラフの特徴（正の部分と負の部分の形が同じ）から当然と感じてほしい．
- 周の長さは，極座標の定義と合わせて xy 平面での媒介変数表示ととらえなおす．なお，被積分関数の根号の中身は複雑で，処理に戸惑う人も多いだろう．ただし，$\sin\theta$ は偶数べきしか現れないので $\cos\theta$ のみの式に表せることは簡単に分かるはずだ．

$$\begin{aligned}(-a\sin\theta - 2a\cos\theta\sin\theta)^2 &+ (a\cos\theta - a\sin^2\theta + a\cos^2\theta)^2 \\ &= a^2(1 - \cos^2\theta)(1 + 2\cos\theta)^2 + a^2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)^2\end{aligned}$$

  これが $2a(1 + \cos\theta)$ になることは単純に計算していくだけだ．
- 解答例のように θ の動く範囲をとると， その範囲で $\cos(\theta/2) \geqq 0$ となる．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ でとると正負が変わるので積分を二つの区間に分けないといけない．

課題 2 第 4 章章末問題 8 （105 ページ）

【解答例】 (1) 定理 4.13 より，曲線の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

で求められる．ここで $\sqrt{1 + e^{2x}} = u$ と変数変換すれば，$1 + e^{2x} = u^2$ より $x = \frac{1}{2}\log(u^2 - 1)$ となる．

積分範囲　$x : 0 \to 1$ のとき u : $\sqrt{2} \to \sqrt{1 + e^2}$

被積分関数　$\sqrt{1 + e^{2x}} = u$

積分要素　$dx = \dfrac{u}{u^2 - 1} du$

より，長さは

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1}du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$
$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \log(\sqrt{1+e^2}-1) - \log(\sqrt{2}-1)$$

(2) 媒介変数表示による曲線の長さの式を使って

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

【コメント】

- (1) は計算は複雑だが特に難しいことは使っていない．なお対数の性質上，結果の見かけの形はさまざまである．$\log(\sqrt{2}+1) = -\log(\sqrt{2}-1)$ 等に注意せよ．
- (2) も媒介変数表示による曲線の長さの基本的問題だ．課題 1 のカージオイドの周長の計算のときと同様に $\sqrt{1 \pm \cos t}$ の形の積分が出てくるが，半角の公式が使えることに気づいてほしい．

課題 3 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の第 1 象限の部分の長さを求めよ．

【解答例】 $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t,\ 0 \leqq t \leqq \pi/2$ として媒介変数表示による長さの公式を利用する．

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-4\cos^3 t\sin t)^2 + (4\sin^3 t\cos t)^2}dt = \int_0^{\pi/2} 4\cos t\sin t\sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}dt$$

ここで $\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - 2\cos^2 t\sin^2 t = \dfrac{1+\cos^2 2t}{2}$ に注意して $\cos 2t = u$ とおく．

積分範囲 $t : 0 \to \pi/2$ のとき $u : 1 \to -1$

被積分関数 $\sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} = \sqrt{\dfrac{1+u^2}{2}}$

積分要素 $-2\sin 2t dt = -4\sin t\cos t dt = du$

変数の動く方向と積分要素の符号を相殺させて，長さは

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+u^2}{2}}du = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u\sqrt{1+u^2} + \log(u + \sqrt{u^2+1})\right]_0^1 = 1 + \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

【コメント】

- 積分要素を $4\sin t\cos t dt$ ととらえ，被積分関数を $\sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}$ にしている．dt を u の式に表すのが基本だが，このような柔軟な発想も持ってほしい．
- 以下は公式として覚えておいてほしい．（68 ページ 2(6)）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

この等式と部分積分

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

を組み合わせれば

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})\right) + C$$

本日の講義の要点

今日の講義は前期の総まとめを行った．基本的事項を箇条書きしておくと

- 逆三角関数の導入とその導関数
- Taylor の定理と Taylor 展開（具体的な例と応用）
- l'Hospital の定理による極限計算（不定形のチェックを明示的に行うこと）
- 有理関数の部分分数展開と積分計算
- 置換の技法 $\tan\dfrac{x}{2} = u$，$\sqrt{x^2+1} = u - x$ など
- 積分，定積分の計算（とりわけ，置換積分）
- 積分の応用 (面積と長さ)

試験準備としては，テキスト，過去の講義メモ，資料を合わせて復習しておけばよい．特にレポート課題については丁寧な解説を付けているのできちんと理解しておくように．

微分積分 I 講義資料 2

Taylor 展開において，無限級数が実際に $f(x)$ に収束しているかは，各 x について $R_n(x)$ の $n \to \infty$ での極限が 0 になるか否かを調べなくてはならない．これについてテキストには触れられていないが重要なことなので講義ではできる限り説明をつけたい．ただし，以下のすべてに証明を与えるわけではない．

(I) $f(x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開（定理 3.10 の $a = 0$ の場合），Maclaurin 展開ともいう．
$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つ x について

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{(k)!}x^k + \cdots$$

$x = a$ での Taylor 展開を求めるには，$x = a + u$ と変数変換して，$g(u) = f(a+u)$ を $u = 0$ で Taylor 展開し $u = x - a$ で戻せばよい．$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ なので定理 3.10 と結びつく．

(II) e^x の $x = 0$ における Taylor 展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(III) $\cos x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(IV) $\sin x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

(V) $\log(1+x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$$

(VI) $(1+x)^\alpha$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

(VII) $\tan^{-1} x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

(VIII) $\sin^{-1} x$ の $x = 0$ における Taylor 展開

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} \cdots + \binom{-1/2}{k}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

微分積分 I 講義資料３（不定積分）

(I) **部分分数展開**　分数式 $g(x)/f(x)$（以下，有理関数という）が，

- （条件 1）　分母 $f(x)$ の次数が，分子 $g(x)$ の次数より大きい．
- （条件 2）　分母 $f(x)$ が一次式と判別負の 2 次式の積に因数分解されている．

という二つの条件を満たすとき，$g(x)/f(x)$ と，各因数に対応して用意した次の有理関数の総和

- （1 次の部分分数）　因数 $(x-a)^k$ に対しては次の k 個の有理関数の和を用意する．

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

- （2 次の部分分数）　因数 $(x^2+2bx+c)^h$, $b^2-c<0$ に対しては次の h 個の有理関数を用意する．

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+2bx+c)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_hx+C_h}{(x^2+2bx+c)^h}$$

の等式を作り，両辺に $f(x)$ をかけて各係数を比較する．A_i, B_j, C_l は連立方程式を解くことにより求められる．条件 1 を満たしていない有理関数では割り算により多項式と条件 1 を満たす有理関数の和にできる．条件 2 はどの $f(x)$ についても成り立つことが知られている．

(II) **有理関数の不定積分**　1 次の部分分数の不定積分については 85 ページ中ほどに記述れている．2 次の部分分数の不定積分については $x+b=\sqrt{c-b^2}u=\alpha u$ と置換積分することにより

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^m}dx=\int\frac{\alpha Bu+C-bB}{\alpha^{2m}(u^2+1)^m}\alpha du,\quad \alpha=\sqrt{c-b^2}$$

となるので

$$\int\frac{u}{(u^2+1)^m}du,\qquad \int\frac{1}{(u^2+1)^m}du$$

という二つの積分に帰着できる．前者は $u^2+1=t$ と置換積分することで簡単に計算できる．後者は積分の漸化式により計算できる．詳細についてはテキスト 193 ページに記載されている．結果として，分数式の不定積分は，多項式，分数式，対数 log，逆三角関数 $\tan^{-1}$ で表すことができる．

(III) **有理関数の積分に帰着するための置換積分の技法**　$f(x,y)$ を 2 変数の有理関数とする．

- 被積分関数が $f(x,\sqrt{ax+b})$ または $f(x,\sqrt{(ax+b)/(cx+d)})$ のときは $t=\sqrt{ax+b}$ または $t=\sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$ とおく（テキスト 87〜88 ページ）．
- 被積分関数 $f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ で $a>0$ のときは，$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ とおく（テキスト 194 ページ）．おき方のポイントは，両辺を 2 乗したときに x^2 の項がなくなることだ．これから x が t の有理関数になる．
- 被積分関数が $f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ で $a<0$ のときは，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{-a}(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$ の工夫でふたつ前の場合に帰着できる（テキスト 195 ページ）．
- 被積分関数が $f(\cos x,\sin x)$ のときは，$t=\tan(x/2)$ とおく（テキスト 88 ページ）．
- 被積分関数が e^x の有理関数のときは $t=e^x$ とおく（テキスト 89 ページ）．同様に $\tan x$ の有理関数のときは $t=\tan x$ とおく．

以上の知識で積分できる関数は飛躍的に広がる．しかし，それでも不定積分を既知の関数で表すことができない関数のほうが圧倒的に多い．計算ミスや置換の失敗でそのような関数に行き当たる場合があるが，知識があいまいだと都合よく解釈して間違った計算をしてしまう．公式は正確に使うように心がけること．

微分積分 I 講義資料 1

Taylor の定理（p.52 定理 3.9）に関連する公式をまとめておく．

(I) Taylor の定理 (p.52) の $a = 0$ の場合 (この場合は Maclaurin の定理とも言う)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

ここでテキストの c を θx と表記した．これによって 0 と x の間に c があるということは，$0 < \theta < 1$ という不等式になる．($f^{(n)}(\theta x)$ は $f^{(n)}$ に θx を代入したものである．$f(\theta x)$ の n 階導関数ではない)

以下の等式は n 階導関数が求められる関数について具体的に書き下したものである．

(II) $a = 0$ で $f(x) = e^x$ の場合

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \qquad R_n = \frac{1}{n!}e^{\theta x}x^n$$

(III) $a = 0$ で $f(x) = \cos x, \quad n = 2m$ の場合

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-2)!}x^{2m-2} + R_{2m}, \qquad R_{2m} = (-1)^m \frac{\cos\theta x}{(2m)!}x^{2m}$$

(IV) $a = 0$ で $f(x) = \sin x, \quad n = 2m+1$ の場合

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + R_{2m+1}, \qquad R_{2m+1} = (-1)^m \frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

(V) $a = 0$ で $f(x) = \log(1+x)$ の場合

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^{n-1} + R_n, \qquad R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}$$

(VI) $a = 0$ で $f(x) = (1+x)^\alpha$ の場合（一般化された 2 項定理）

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + R_n, \qquad R_n = \binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

ここで

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

であり（テキスト p.57(3.28)）一般化された 2 項係数という．

n 階導関数が求められない関数については n を限定することによって等式が得られる．

(VII) $a = 0$ で $f(x) = \tan x, \quad n = 6$ の場合

$f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ を利用すると $f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = 2,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 16$ は比較的簡単に分かる．

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + R_6, \qquad R_6 = \frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!}x^6$$

$f^{(6)}(x)$ の計算は大変なので省略する．

理系基礎科目「微分積分 I」期末試験（8 月 2 日実施・試験時間 90 分）の問題と解答例

配点は問 1 が (1)(2) とも 10 点，問 2 が (1)5 点，(2)15 点，問 3 が 10 点，問 4 が (1)(2)(3) 各 10 点，問 5，問 6 はそれぞれ 10 点で計 100 点満点である．微分の問題は基本的ではあるが計算が煩雑だった．できたと思っている人もつまらない計算ミスで減点されている人も多いだろう．積分の問題は計算はそれほど難しくないが，学習した知識をきちんと使う必要があるので大きく差がついた．日頃の学習の不足を痛感する．最高点は 98 点，最低点は 5 点，平均 60.07 点である．合格点は 48 点，それに満たない 19 人を再試験の対象者とする．

なお，試験問題は理学部 1 年次共通であるが，配点，採点基準，合格基準はクラスごとに異なる．ここに述べたのは井上担当クラス（1 組及び 2 組）に関するものである．

1 (1) $f(x) = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

【解答例】

$$f'(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1 + \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1 + x^2 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)}$$

(2) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{6} - \cos^{-1} x\right)^2$ に対し，$f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を求めよ．

【解答例】

$$f'(x) = 2\left(\frac{\pi}{6} - \cos^{-1} x\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \cos^{-1} x\right)\left(-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)\right)$$

ここで x に $\sqrt{3}/2$ を代入すれば $\dfrac{\pi}{6} - \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 0$ となるので第 2 項は消える．ゆえに

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{1-3/4} = 8$$

【コメント】

- 上記 2 つの問題は基本的な微分計算の問題だがミスが多い．初等関数の微分は基本（微分法則）の積み重ねで計算できるので落ち着いてやるようにしてほしい．
- (1) については解答例の最後の形が出るまで変形すること．途中で終わったものは減点した．
- 逆三角関数の扱いは比較的よくできていた．
- (2) は展開せずに計算したほうが楽だ．特にこの問題では $\sqrt{3}/2$ を代入するので $\dfrac{\pi}{6} - \cos^{-1} x$ の形は残したい．まず展開してという発想はやめたほうが良い．
- 平均点は (1)6.58 点 (2)6.72 点

2 (1) $f(x) = (1+x)^{1/4}$ とおくとき，$f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を求めよ．

【解答例】

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-3/4}, \quad f''(x) = -\frac{3}{16}(1+x)^{-7/4}, \quad f'''(x) = \frac{21}{64}(1+x)^{-11/4}$$

(2) $(1.04)^{1/4}$ を小数第 4 位まで求めよ．

【解答例】$a = 0$, $n = 3$ の場合の Taylor の定理は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_3, \quad R_3 = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

と記述されるのでこれを $f(x) = (1+x)^{1/4}$ に適用する．

$$(1+x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + R_3, \quad R_3 = \frac{7}{128}(1+c)^{-11/4}x^3$$

この式に $x = 0.04 = 4 \times 0.01$ を代入すれば

$$(1.04)^{1/4} = 1 + 0.01 - \frac{3}{2}0.0001 + R_3, \quad R_3 = \frac{7}{2}(1+c)^{-11/4}0.000001$$

となる．R_3 以外の項の和は 1.00985 であり，R_3 は

$$0 < R_3 < 0.0000035$$

なので $(1.04)^{1/4}$ を小数点以下第 5 位で四捨五入すれば 1.0099 を得る．

【コメント】

- (1) はサービス問題，特に言うことはない．
- (2) は Taylor の定理を $n = 3$ の場合で記述しているが，何故 $n = 3$ にしたのかは説明が難しい．ただし，n のままではこの問題の趣旨である値の近似値は求められない．$n = 4$ の場合の Taylor の定理を使った人もいるが，それでも構わない．計算は大変になるが．ただし $n = 2$ の場合では小数第 4 位までという問題文の要請にこたえれらない．誤差項の大きさが 0.0001 を超えるからだ．
- 近似値を求めるには誤差項の大きさを調べる必要がある．これをやらずになんとなく値を出した答案は減点した．
- 小数第 4 位までは 1.0098 なのでこれでも正解にした．小数点以下第 5 位で切り捨てたことになる．なお，誤差項を考慮すれば，上の計算で得られる近似値は 1.00985 である．小数第 6 位での四捨五入によって，誤差は 0.0000035 より小さいので切り捨てられる．
- 小数の計算で間違える人が多い．日常的に計算する習慣はどんどん薄れているのかもしれないが，こういう当たり前の計算は数学力の基礎である．電卓に頼るのではなく，簡単な数値計算は暗算でやるような習慣を身につけてほしい．
- 平均点は (1)4.84 点，(2)8.72 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^{-1} x}{\log(1+x^2}$ を求めよ．

【解答例】0/0 型不定形の極限なので分子分母をそれぞれ微分した関数の極限を考える．

$$\frac{\sin^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{2x}{1+x^2}} = \frac{\sin^{-1} x}{2x}(1+x^2) + \frac{1+x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

右辺の $x \to 0$ での極限において，問題になるのは $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{2x}$ のみである．これは 0/0 型不定形であり

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

である．よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^{-1} x}{\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1} x}{2x}(1+x^2) + \frac{1+x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

【コメント】

- l'Hospital の定理を使う．不定形であることを確認して議論を進めること．この問題は 2 回 l'Hospital の定理を使う必要があるが，それぞれで不定形のチェックを行わなければならない．2 回目のチェックを忘れた人が多い．
- 何も工夫しないと計算は大変だ．合成関数の微分や商の微分で失敗している人も多い．この問題は

$$\frac{x\sin^{-1}x}{\log(1+x^2)} = \frac{\sin^{-1}x}{x}\frac{x^2}{\log(1+x^2)}$$

  と二つの関数の積に分けてそれぞれの極限を求めるのが簡単だ．やってみよ．
- この問題は Taylor 展開を使っても簡単にできる．$\sin^{-1}x = x + \dfrac{x^3}{6} + \cdots$，$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots$ なので

$$\frac{x\sin^{-1}x}{\log(1+x^2)} = \frac{x^2 + \dfrac{x^4}{6} + \cdots}{x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \cdots} = \frac{1 + \dfrac{x^2}{6} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots} \longrightarrow 1$$

- 平均点は 4.86 点

4 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$ を求めよ．

【解答例】 被積分関数を次のように部分分数展開する．

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

両辺に $(x-1)^2(x^2+1)$ をかけて分母を払えば

$$2x-4 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

となるので右辺を展開して係数を比較することにより

$$A + C = 0, \quad -A + B - 2C + D = 0, \quad A + C - 2D = 2, \quad -A + B + D = -4$$

を得る．この連立一次方程式を解けば $A = 2,\ B = -1,\ C = -2,\ D = -1$ である．以上から

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx &= \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\log|x-1| + \frac{1}{x-1} - \log(x^2+1) - \tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

【コメント】

- 基本的な部分分数展開なのに，できない人が多い．このようなテクニックは例を通じて身につけるのは当然だが，例を扱う時に一般論（講義資料 3 (1)）と関連して考えないといけない．一般論を考えずに例だけで理解しようとすると，必ず部分分数展開できるという確信はいつまでたっても持てないだろう．分母が判別式負の 2 次式のときに分子を 1 次式でおくが，その経験だけで，分母 $(x-1)^2$ に対して分子を 1 次式にしてしまう．一般論は分かりづらいから例だけやろうという感覚があるのだとしたら，早急に改めてほしい．
- 部分分数展開で分母を払う時に $(x-1)^3(x^2+1)$ をかけていた答案が複数あった．従来ないことだ．分母を払うには分母の積をかけるという感覚だろうが，これだと左辺が $(2x-4)(x-1)$ になってしまう．$2x-4$ のままでは解は得られない．

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$ は大学で学習した基本公式だ．講義でももっとも使われた式である．これが分からない人がいることに驚かされる．授業に出席したいたとしても授業を聞いていないのではないか.
- 平均点は 5.48 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ (2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$ を求めよ．

【解答例】 $\tan(x/2) = u$ と置換積分すれば

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

である．また $\left(1+\tan^2(x/2)\right)/2dx = du$ より $dx = \dfrac{2du}{1+u^2}$ である．ゆえに

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{1}{2+\dfrac{2u}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u^2+u+1}$$

平方完成 $u^2+u+1 = \left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ より $u + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ とおけば

$$\text{与式} = \int \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}dt}{\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\tan\frac{x}{2}+1\right)\right) + C$$

【コメント】

- $\tan(x/2) = u$ という置換積分を行う．高校までの知識を使って思い付きで置換積分してもうまくいかない.
- 後半は分母が判別式負の 2 次式の場合に，平方完成の形から置換積分するのがポイント．結果は煩雑だがテキストにも例示されている．
- 平均点は 5.32 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ (3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ を求めよ．

【解答例】 $e^x = u$ と置換積分すれば $x : 0 \to \infty$ のとき $u : 1 \to \infty$ である．また $x = \log u$ なので $dx = \dfrac{du}{u}$ である．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^\infty \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{du}{u^2+1} = \left[\tan^{-1} x\right]_1^\infty$$

だが $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \pi/2$ なので

$$\left[\tan^{-1} x\right]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

【コメント】

- $e^{-x} = u$ と置換積分すれば $x = -\log u$ であり

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^0 \frac{1}{u^{-1}+u}\frac{-du}{u} = \int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

  となる．置換積分によって広義積分が通常の積分に変わっている．

- 講義でも述べたことだが，微分積分学の基本公式 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$ は，代入できないときに極限に置き換えるとの了解のもとに広義積分でも成り立っている．解答例はその考えに従って記述した．
- 平均点は 6.39 点

$\boxed{\mathbf{5}}$ $a > 0$ に対して，極方程式で表された曲線 $r = a\sin 3\theta; 0 \leqq \theta \leqq \pi/3$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

【解答例】

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/3} 1 - \cos 6\theta d\theta = \frac{\pi}{12}a^2$$

【コメント】

- 極方程式で表された曲線なので，テキストの定理 4.12 を使えばよい．
- $\sin^2 3\theta$ の積分を計算するが，三角関数の積分においては冪を下げるほうに変形していくのが基本だ．2 次式を 1 次式にするために $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ という公式を使っている．この問題で $\sin 3\theta$ に 3 倍角の公式を使うと，$\sin x$, $\cos x$ の 9 次式になるので計算はますます困難になる．この感覚は受験数学のときに身につけておくべきものだ．
- 平均点は 6.62 点

$\boxed{\mathbf{6}}$ $y = \log\cos x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \pi/3$ の部分の長さを求めよ．

【解答例】

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$$

ここで $\tan(x/2) = u$ と置換積分すれば

積分区間　$0 \leqq x \leqq \pi/3$ より $0 \leqq u \leqq \tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$
被積分関数　$\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$
積分要素　$dx = \dfrac{2du}{1+u^2}$

なので

$$与式 = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1-u^2}du = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}du = \left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \log(2+\sqrt{3})$$

【コメント】

- 直交座標による $y = f(x)$ で表された曲線の長さなので定理 4.13 を使えばよい．
- $\dfrac{1}{\cos x}$ の積分は $\dfrac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ と書き直して $\sin x = u$ と置換積分してもよい．

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\sqrt{3}/2}$$

- 平均点は 5.41 点