微分積分 II 講義メモ (10 月 4 日)

前回のレポート課題について

良くできていた．偏微分計算が微分計算と実質的に変わらないことを感じていただけたのではないか．特にコメントすべきことはない．

本日の講義の要点

1. 全微分可能性

   定義はテキスト p.123 に記述されている．要するに，1 次式で近似できることが全微分可能の定義である．定義から次は比較的簡単に示せる．

   - 全微分可能なら連続である．

     全微分可能の定義から $(x, y) \to (a, b)$ のとき $\varepsilon(x, y; a, b) \to 0$ である．ゆえに $f(x, y) \to f(a, b)$ であり連続性が得られる．

   - 全微分可能なら偏微分可能である．また定義における A, B は偏微分係数になる．

     全微分可能の定義での (6.5) 式に $y = b$ を代入し次のように変形する．

     $$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = A + \frac{\varepsilon(x, b; a, b)}{x - a}$$

     右辺の第 2 項は $x \to a$ で 0 に収束する．よって偏微分可能であり $A = f_x(a, b)$ である．y についても同様である．

   全微分可能か否かを定義に従って考察してみた．テキストにはない例なのでコメントしておく．

   $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   の $(x, y) = (0, 0)$ での全微分可能性について考察する．そのためにまず偏微分可能か否かを調べる．

   $$\lim h \to 0 \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

   より x に関して偏微分可能で $f_x(0, 0) = 1$ となる．同様に y についても偏微分可能で $f_y(0, 0) = -3$ である．よってテキスト (6.5) 式の ε は $(x, y) \neq (0, 0)$ において

   $$\varepsilon(x, y; 0, 0) = \frac{x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} - x + 3y = \frac{3x^2 y - xy^2}{x^2 + y^2}$$

   である．よって極座標を使えば

   $$\frac{\varepsilon(x, y; 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta$$

   となる．これは r によらず一定の範囲で変動するので，$r \to 0$ で 0 に収束するとは言えない．よって全微分不可能である．

   第 1 段階では偏微分可能性を示している．もし偏微分可能でなければ全微分可能でもない．ここでさらに偏微分係数が求められるので，(6.5) 式における A, B が決まる．よって ε も具体的に記述できる．それから (6.6) の極限式をチェックする．定義と議論の流れを見比べておくこと．

2. C^1 関数の定義と全微分可能性

偏微分可能で偏導関数が連続になるとき C^1 級であるという．もっとも基本的な概念のひとつである．講義では C^1 級関数の全微分可能性を証明した．テキスト p.195 の証明と同じ手法である．ポイントは偏微分可能性が，y を定数とみなして x の 1 変数関数とみなした時の微分可能性に対応するので，そこに微分の平均値定理を使っている．

この事実により，偏微分の結果から全微分可能性について一定の結論を得る．例えば前回のレポート課題で (1)(4) は全平面で C^1 級，(2) は直線 $cx + dy = 0$ を除いた部分で定義されそこで C^1 級，(3) は放物線 $1 + x + y^2 = 0$ を除いた部分で定義されそこで C^1 級，(5) は $xy > -1$ で定義されそこで C^1 級，(6) は $x \neq 0$ で定義されそこで C^1 級，(7) は円板 $x^2 + y^2 \leqq 1$ で定義され，その内部で C^1 級，(8) は $x > 0$ で定義されそこで C^1 級である．これらはすべて全微分可能である．

なお，C^1 級でないからと言って全微分可能でないとは言えない．この場合は定義に従って議論する必要がある．

3. 合成関数の微分

定理 6.5 としてテキストにきちんと証明付で記述されている．ただ，次々と新しい文字を導入していくので理解するには時間がかかるだろう．将来数学を勉強したいという人は腰を据えてじっくり考えてほしい．ただし，講義では概略を述べるにとどめた．講義でコメントしたことを箇条書きしておく．

- この定理は Z が x, y の 1 次式で，x, y が t の 1 次式で近似できれば z は t の 1 次式で近似できるということを述べているに過ぎない．こう考えるといかにも成り立ちそうな結果だということに気づくだろう．

$$z \fallingdotseq ax + by + c,\ x \fallingdotseq \alpha t + \beta,\ y \fallingdotseq \gamma t + \delta \Longrightarrow z \fallingdotseq (a\alpha + b\beta)t + (a\beta + b\delta + c)$$

であり，また 1 次の項の係数が (偏) 微分係数であるので

$$a = \frac{\partial z}{\partial x},\ b = \frac{\partial z}{\partial y},\ \alpha = \frac{dx}{dt},\ \gamma = \frac{dy}{dt}$$

となる．これを代入すれば次の定理の等式を得る．証明とは言えないが定理の成り立つ背景は理解できる．

$$\frac{dz}{dt} = a\alpha + b\beta = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- 多変数の関数については合成の仕方も様々である．$z = f(x(s,t), y(s,t))$ と $y = g(x(s,t))$ について，合成関数の微分の等式がどう記述されるのかを解説した．一つ一つ覚えるのではなく，等式がが出る仕組みを考えるようにしてほしい．
- より一般には 1 次式は行列を使って記述される．1 次式の合成は行列の積で表される．変数の個数が多くなると行列を前面に出したほうが理解しやすい．例えば $z = f(x(s,t), y(s,t))$ については

$$\begin{bmatrix} z_s & z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$$

- 偏微分可能だけではこれらの等式は成立しない．

本日のレポート課題

152 ページ章末問題 6 の 3 を課題とする．今回もヒントはなし．

微分積分 II 講義メモ (10 月 11 日)

前回のレポート課題について

今回も特にコメントすべきことはない．提出していない人が多いが，自分できちんとできるようにしておくこと．

本日の講義の要点

1. 接平面

   全微分可能であるとは 1 次式で近似できることだ．これを図形的に見ればグラフの曲面が平面で近似できることになる．これが接平面であり，接平面とは 1 次近似式のグラフである．

   $$z = f(x, y) \longleftrightarrow z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

   なお，この平面は
   - $(a, b, f(a, b))$ を通る．
   - x 方向の傾きは $f_x(a, b)$，y 方向の傾きは $f_y(a, b)$

   という 2 つの条件で特徴づけられる．また法ベクトル（接平面に直交するベクトル）として $(-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1)$ を与えた．この証明には内積を利用して線形代数の立場から示している．テキストでは p. 130 から p.131 にわたって記述されているので読んでみるとよい．ただし p. 1315 行目の法ベクトルは下向きであり，図 6.16 とは矛盾している．
2. 高階偏導関数，C^n 級

   偏導関数をさらに偏微分することによって 2 階の偏導関数が得られる．k 階の偏導関数は偏微分の順序により 2^k 通り現れる．n 階までの偏導関数がすべて存在して連続であるとき，$f(x, y)$ は C^n 級であるという．C^n 級関数において $n - 1$ 階までの偏導関数はすべて（少なくとも）C^1 級であり，全微分可能である．
3. 偏微分の順序交換（定理 6.7）

   まずこの定理から C^n 級関数の偏導関数は偏微分の順序によらないことが導かれる．例えば f_{xy} が C^2 級なら $f_{xyxy} = (f_{xy})_{xy} = (f_{xy})_{yx} = f_{xyyx}$ であり，この両辺をさらに偏微分して $f_{xyxyxx} = f_{xyyxxx}$ 等の等式を得る．3 番目と 4 番目の偏微分の順序が変わっている．だから C^n 級関数については k 階の偏導関数は $k + 1$ 個ということになる．
4. 定理 6.7 の証明

   テキストに記述されていないので講義で解説した証明を記しておく．

   $$\varDelta = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

   とおく．$\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$ とおけば，$\varDelta = \varphi(a + h) - \varphi(a)$ となる．f の偏微分可能性から $\varphi(x)$ は微分可能であり，平均値の定理が使え

   $$\varDelta = \varphi'(a + \theta_1 h)h = (f_x(a + \theta_1 h, b + k) - f_x(a + \theta_1 h, b))h$$

   となる．f_x は y について偏微分可能なので $x = a + \theta_1 h$ で固定したとき y についての微分可能関数である．ゆえにさらに平均値定理を使うと

   $$\varDelta = f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)hk$$

が得られる．

同様な議論を $\psi(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$ として行う．$\mathit{\Delta} = \psi(b+k) - \psi(b)$ より

$$\mathit{\Delta} = \psi'(b+\theta_3 k)k = (f_y(a+h, b+\theta_3 k) - f_(a, b+\theta_3 k))k = f_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k)hk$$

を得る．これから $hk \neq 0$ のとき

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k)$$

であり，$(h,k) \to (0,0)$ とすれば 2 階偏導関数の連続性から $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ を得る．

5. Taylor の定理

1 変数関数の場合と同じように，C^n 級関数を $(n-1)$ 次多項式と誤差の和として記述する定理である．詳しくは p. 133(6.18) 式を見ること．$\sum$ 記号を使って表されているが一般項は

$$\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l} f}{\partial^k x \partial^l y}(a,b)(x-a)^k(y-b)^l, \qquad \frac{1}{m!}\frac{d^m f}{dx^m}(a)(x-a)^m$$

である．1 変数関数の Taylor の定理における一般項との類似性に注意せよ．この証明は $F(t) = f(a+tp, b+tq)$ に Taylor の定理を適用することによって行う．合成関数の微分により

$$F'(t) = pf_x + qf_y = \left(p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+tp, b+tq)$$

となる．2 変数関数 f に対し $pf_x + qf_y$ を対応させる操作を $D = p\dfrac{\partial}{\partial x} + q\dfrac{\partial}{\partial y}$ と表せば

- $x = a+tp, y = b+tq$ を代入して t に関する 1 変数関数にしてから t で微分する．
- f を Df に変えてから $x = a+tp,\ y = b+tq$ を代入して t の関数にする．

という二つの操作がまったく同じであることを意味している．このことから

$$F^{(m)}(t) = D^m f(a+tp, b+tq) = \left(p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+tp, b+tq)$$

であることが直ちに導かれる．この m 乗の計算は 2 項定理とまったく同じであり，証明（p. 197 に記述されている）も同様である．

$$F^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{\partial^m f}{\partial^k x \partial^{m-k} y}(a+tp, b+tq)(x-a)^k(y-b)^{m-k}$$

この結果と $F(t)$ に関する Taylor の定理

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n, \qquad R_n = \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} \quad 0 < \theta < 1$$

を組み合わせれば Taylor の定理が得られる．

6. 2 次近似多項式

この講義では 2 次近似式までを扱う．2 次近似多項式は

$$f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

である．一般の場合から何故この表示になるか考えておいてほしい．

本日のレポート課題

152 ページ章末問題 6 の 2(2)(4)(6)(8) を課題とする．これについてはヒントはなし．もう一つ 4(1) を課題にする．$z = f(x,y)$ の形にしてから講義で扱った接平面の方程式を具体的に考えること．

微分積分 II 講義メモ (10 月 11 日)

前回のレポート課題について

2 階の偏導関数の計算については特に言うことはない．$f(x,y)=\sin(xy)$ について $f_{xy}(x,y)=-xy\sin(xy)$ というミスが目立った程度だ．正しくは $f_{xy}(x,y)=\cos(xy)-xy\sin(xy)$ だ．他の結果に引きずられたのかもしれない．

接平面（問 4.4(1)）については $z=f(x,y)$ の形に直してから講義で紹介した接平面の方程式を利用する．$(x,y,z)=(a/\sqrt{2},b/\sqrt{3},c/\sqrt{6})$ での接平面なので $z>0$ の部分で考えれば良い．ゆえに

$$z=f(x,y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

と表せるので偏導関数は

$$f_x=-c\frac{x/a^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\quad f_y=-c\frac{y/b^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

となる．よって

$$f(a/\sqrt{2},b/\sqrt{3})=c/\sqrt{6},\quad f_x(a/\sqrt{2},b/\sqrt{3})=-\frac{c}{a}\sqrt{3},\quad f_y(a/\sqrt{2},b/\sqrt{3})=-\frac{c}{b}\sqrt{2}$$

なので接平面の方程式は

$$z=\frac{c}{\sqrt{6}}-\frac{c\sqrt{3}}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{c\sqrt{2}}{b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

となる．1 次の項を左辺に移項して整理すれば

$$\frac{x}{a\sqrt{2}}+\frac{y}{b\sqrt{3}}+\frac{z}{c\sqrt{6}}=1$$

となる．

【コメント】

- 一般に $f(x,y,z)=0$ の (a,b,c) における接平面の方程式は

  $$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$$

  である．この結果を使って解答した答案が少なからずあったが，この事実は自分で発見したのだろうか．何か本を読んで知ったのであればこれが何故成り立つか分かったのだろうか．もし何も分からないままただ使っただけなら，果たしてそれにどんな意味があるのだろうか．問題は，授業で扱った事項を使えば答えられるものしか出していない．レポート課題に取り組むのは，授業内容の確認が目的だということを忘れないでほしい．
- x による偏微分は y を定数とみなして x で微分することだ．1 変数で使った事実は自由に使ってよい．例えば $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ において，z を x,y の 2 変数の関数 $f(x,y)$ とみて，x で偏微分すれば

  $$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}f_x(x,y)=0$$

  である．$f_x(x,y)=-\frac{c^2x}{a^2z}$ であり，これに $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ を代入すれば解答例の f_x を得る．

ただしこの考えで解答した人は，接平面の方程式の x の係数を $-\frac{c^2x}{a^2z}$ にしてしまった．これでは定数になっていないので平面の方程式になっていない．$y=x^2$ の接線の方程式を $y'=2x$ だから $y=2x(x-a)+a^2$ とやったらおかしいことはすぐ分かるはずだ．これと同質の誤りだ．

このパターンの間違いも複数あった．全員が同じ間違いをしたのなら仕方がない．しかし，誰かの間違いを写した結果ならこのレポートには意味がない．友達同士で相談してレポートに取り組むのは構わない．ただし，自分で理解できないことをレポートに書くべきではない．このレポートは自らの学習のために課していることを肝に銘じてほしい．

本日の講義の要点

1. Taylor の定理の証明の補足

   $F^{(k)}(t)=\left(p\dfrac{\partial}{\partial x}+q\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^k f(a+tp,b+tq)$ という等式を利用したが，やはりこの式は理解しづらい．思い切って，関数の世界での対応の観点からみなおすことで解説してみたが如何だろうか．失敗かもしれないが．話はこうだ．

   (A) 2 変数関数の世界で $f(x,y)$ を pf_x+qf_y にする対応 $p\dfrac{\partial}{\partial x}+q\dfrac{\partial}{\partial y}$

   (B) 1 変数関数の世界で $F(t)$ を $F'(t)$ にする対応 $\dfrac{d}{dt}$

   (C) 2 変数関数の世界から 1 変数関数の世界に移る対応 $f(x,y)\longmapsto f(a+tp,b+tq)$

   とおくとき，(A)(C) の順に操作を繰り返すことと，(C)(B) の順に操作を繰り返すことが同じだということを証明した．これはあらゆる関数について成り立つので，一つの関数に次々と操作を行って行くことができる．例えば (A)(A)(C) の順に操作を行うと，最後の 2 回の操作を (C)(B) におきなおせば (A)(C)(B) になる．次に最初の 2 回の操作を (C)(B) におきなおして (C)(B)(B) という操作になる．これは (A) を 2 回行ってから (C) で 1 変数関数の世界に移ることと，まず (C) で 1 変数関数の世界に移ってから (B) を 2 回行うことが同じだということを意味している．これを繰り返していけばよい．

   こう書いてもやはり難しい．興味があれば考えてみてほしい．

2. 陰関数の定理 (定理 6.9)

   テキストとは少し変更して解説した．まず関数は C^1 級であるとして

   - $F(x,y)=c$ のグラフは $z=F(x,y)$ のグラフ（滑らかな曲面）と水平面 $z=c$ の切り口である．(a,b) が $F(x,y)=c$ 上にあるとは $F(a,b)=c$ を意味する．
   - $z=F(x,y)$ のグラフの $(a,b,F(a,b))=(a,b,c)$ の接平面は

     $$z=F(a,b)+F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=c+F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)$$

   - $(F_x(a,b),F_y(a,b))\neq(0,0)$ のとき接平面は傾いているので，水平面 $z=c$ との切り口は

     $$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

   - 曲面（$z=F(x,y)$ のグラフ）とその接平面を，水平面 $z=c$ で切れば，その切り口は滑らかな曲線と接戦になる．

   ここまでの議論をまとめれば次の定理になる．

   定理 $F(x,y)=c$ 上の点 (a,b) について，$F(x,y)$ は (a,b) の周りで C^1 級で，かつ $(F_x(a,b),F_y(a,b))\neq(0,0)$ であれば $F(x,y)=c$ のグラフは $x=a$ の周りで滑らかでありその接線は

   $$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

$F_y(a,b) \neq 0$ であれば接線は y 軸と平行ではないのでグラフは，$x = a$ に接しないように横切る．このグラフによって $y = y(x)$ を定めれば

$$F(x, y(x)) = c$$

となる．陰関数 $F(x,y) = c$ を関数 $y = y(x)$ に書き直せたのであり，これが定理 6.9 である．

3. 例 6.4

陰関数定理の適用例である．グラフは図 6.18 に書いてあり，しかも $y = \pm x\sqrt{1+x}$ のグラフなのでよくわかるだろう．定理 6.9 の適用できない点は $(-1,0)$ と $(0,0)$ であるが，講義で解説した形では $(-1,0)$ でも使える．実際，$(-1,0)$ の周りでグラフは滑らかであり，接線は $x = -1$（x 軸に垂直な直線）である．確かに，この点の周りで 1 つの微分可能な関数のグラフとしては記述できない．なお，$(0,0)$ においてはグラフは 1 本の滑らかな曲線になっていない．この定理では考察できない．

4. 変数変換 (定理 6.10)

(x,y) の関数を $x = x(s,t), y = y(s,t)$ によって (s,t) の関数に直すことを考える．もっとも重要なのは極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ である．定理 6.10 は (s_0,t_0) において偏微分係数の作る行列

$$\begin{bmatrix} x_s(s_0,t_0) & x_t(s_0,t_0) \\ y_s(s_0,t_0) & y_t(s_0,t_0) \end{bmatrix}$$

が正則であれば，(s_0,t_0) の周りで (s,t) と (x,y) が 1 対 1 に対応することを主張している．1 対 1 に対応するとは分かりづらいが (s,t) を逆に (x,y) の関数とみることもできるという趣旨だ．要するにこの変数変換で (x,y) と (s,t) を自由に行き来できるということだ．

この定理が何故成り立つか次のように感覚的な説明をしてみた．$x_0 = x(s_0,t_0),\ y_0 = y(s_0,t_0)$ とおいて 1 次近似式を作れば

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \fallingdotseq \begin{bmatrix} x_s(s_0,t_0) & x_t(s_0,t_0) \\ y_s(s_0,t_0) & y_t(s_0,t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - s_0 \\ t - t_0 \end{bmatrix}$$

だから 1 次近似式の逆（(x,y) から (s,t) への対応）は作れる．それに近いのだから，元の変数変換についても (x,y) から (s,t) への対応が作れる．

ただし，この説明でうまくいったとは思えない．分からなければ無視してほしい．ただこの考え方は微分のもっとも基本的な応用の仕方につながる．

- （良くわからない）関数を（良くわかる）1 次式で近似する．
- その 1 次式の性質を調べる．
- 考えている点の周りでは元の関数も同じ性質を持つであろう．

如何だろうか．

5. 変数変換による偏導関数の書き換え

基本的には合成関数の微分法則に過ぎない．p. 139 ページの (6.27) 式とその一つ前の式を見てほしい．これから逆関数の微分の公式

$$\begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}^{-1}$$

がでる．$\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial s}^{-1}$ などとしてしまわないように注意せよ．

これを極座標で具体的に書いたものが p. 140 にある．

$$\begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

である．この式は $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ を直接偏微分しても得られる．章末問題 1(6) をみよ．

6. 例 6.5

この例は行列を使って計算した．

$$0=\begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_r & f_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -(\sin\theta)/r & (\cos\theta)/r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_r & f_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=-f_\theta$$

行列を使うと計算の見通しが良くなることを感じてほしい．

本日のレポート課題

章末問題の 5 を課題にする．陰関数のグラフの接線を求める問題だが，定理 6.9 よりもこの講義で扱った形のほうが簡明だと思う．

微分積分 II 講義メモ (10 月 25 日)

前回のレポート課題について

良くできていて特に言うことはない．なお $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$ については $x = 0$ では x についての偏微分はできない．同様に $y = 0$ では y についての偏微分はできない．陰関数の定理が利用できるのは $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ の場合に限られる．このグラフ上の 4 つの点 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$ は除外しなくてはならないが，このことを意識した答案はなかった．まあ，無理もないが．

なお，この曲線のグラフはアステロイドと呼ばれ，p.104 図 4.24 に掲載されている（座標の 1 は a に訂正しておくこと）．除外すべき 4 点ではグラフが滑らかな曲線になっていないことが分かるだろう．

本日の講義の要点

1. 極座標による偏微分（座標変換の補足）

   極座標について p．127(6.13) 式は

   $$f_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y, \qquad f_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y \tag{1}$$

   となる．これを使えば

   $$(f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$$

   が簡単に得られる．これも重要な式である．2 階の偏導関数について

   $$f_{rr} = \Big(\cos\theta f_x + \sin\theta f_y\Big)_r = \cos\theta (f_x)_r + \sin\theta (f_y)_r$$

   となることは分かるだろう．ここで $(f_x)_r$ の意味は $f(x,y)$ を x で偏微分したもの $f_x(x,y)$ を極座標を使って書き直して $f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$ として r で偏微分したものである．すなわち f_x と極座標変換を合成したものの偏微分であるから (1) 式が使える．すなわち

   $$(f_x)_r = \cos\theta f_{xx} + \sin\theta f_{xy}, \qquad (f_y)_r = \cos\theta f_{yx} + \sin\theta f_{yy}$$

   でありこれを代入して整理すれば次の式が得られる．

   $$f_{rr} = \cos^2\theta f_{xx} + 2\cos\theta\sin\theta f_{xy} + \sin^2\theta f_{yy} \tag{2}$$

   この考えを $f_{\theta\theta}$ にも使って

   $$f_{\theta\theta} = -r\cos\theta f_x - r\sin\theta f_y - r\sin\theta (f_x)_\theta + r\cos\theta (f_y)_\theta$$

   とし $(f_x)_\theta$, $(f_y)_\theta$ の計算に (1) 式を使う．

   $$(f_x)_\theta = -r\sin\theta f_{xx} + r\cos\theta f_{xy}$$

   この計算を続ければ次の極座標によるラプラシアンの表示式を得る．

   $$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} - \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

   テキスト p.201 の 1 番下の行から次のページにかけて記述されているので参考にしてほしい．

2. 極値問題 極値をとるための必要条件

   1 変数関数と同じように 2 変数関数でも極値の候補となる点は偏微分が消えている点である．定理 6.11 だが定義では接平面の方程式に基づいた幾何学的考察で証明をつけている．講義では違う方法で証明をつけたので，定理の条件も全微分可能ではなく偏微分可能にしている．ここに再現しておく．

定理 $f(x,y)$ が (a,b) の周りで偏微分可能で (a,b) において極値をとれば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ が成り立つ．

証明 $F(x)=f(x,b)$ とおけば，条件から $F(x)$ は a の周りで微分可能で $x=a$ において極値をとる．ゆえに $F'(a)=f_x(a,b)=0$ である．y についても同様なので省略する．

3. 極値問題 2 次近似式の利用

$f(x,y)$ が C^2 級（2 階までの偏導関数がすべて存在して連続になっている）のとき，関数は 2 次式で近似できる．極値の候補となる点（$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点）で 2 次近似式の値の取る範囲を考えることにより，極値をとるか否かの判定を行う．

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right) \tag{3}$$

この 2 次の項が常に正であれば $f(x,y)$ は $f(a,b)$ より大きくなり $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小となる．また常に負であれば極大となる．負になったり正になったりすれば極値をとらない．というのが定理の結論だ．厳密な証明には誤差の大きさについての考察が必要なので難しい．Taylor の定理の誤差項の表示を利用しなくてはならない．

結論は定理 6.12 にまとめられているので，この定理の条件を確認しながら問題に取り組んでほしい．

4. 極値問題 2 次式の取る値

$f_{xx}(a,b)=A,\ f_{xy}(a,b)=B,\ f_{yy}(a,b)=C$ とおき，変数を $x-a=p,\ y-b=q$ とおきかえれば (2) 式の右辺のカッコ内は

$$Ap^2+2Bpq+Cq^2$$

になる．この 2 次式のとる値を調べるには次の 3 つの手法がある．

- 平方完成を利用する方法

  $A\neq 0$ のときは平方完成で

  $$Ap^2+2Bpq+Cq^2=A\left(p+\frac{B}{A}q\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}q^2$$

  となるので $AC-B^2>0,\ A>0$ ならこの値は常に正である（もちろん $(0,0)$ 以外という話だ．この場合は 0 になる．）．同様に $AC-B^2>0,\ A<0$ なら常に負である．また $AC-B^2<0$ なら係数は異符号なので正負いずれの値もとる．

- 極座標を利用する方法（講義で解説した方法）

  $p=r\cos\theta,\ q=r\sin\theta$ とおけば

  $$Ap^2+2Bpq+Cq^2=r^2\left(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta\right)=r^2\left(\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\cos 2\theta+B\sin 2\theta\right)$$

  となる．最後の式で単振動の合成を行えば

  $$Ap^2+2Bpq+Cq^2=r^2\left(\frac{A+C}{2}+\sqrt{\frac{(A-C)^2}{4}+B^2}\sin(2\theta+\alpha)\right)$$

  よってこの 2 次式を r^2 で割ったものの最小値と最大値は

  $$m=\frac{A+C}{2}-\sqrt{\frac{(A-C)^2}{4}+B^2},\quad M=\frac{A+C}{2}+\sqrt{\frac{(A-C)^2}{4}+B^2}$$

となる．$r^2 = p^2 + q^2$ なので

$$m(p^2 + q^2) \leqq Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 \leqq M(p^2 + q^2)$$

が成り立つ．この 2 次式の値は $m > 0$ なら常に正，$M < 0$ なら常に負，$m < 0 < M$ なら正負いずれの値もとる．$Mm = AC - B^2$ と $Mm = AC - B^2 > 0$ のときは $AC > B^2 \geqq 0$ となるので，A, C, M, m の符号はすべて同じになる．

- 対称行列の固有値を利用する．

  テキスト p.146 に記述されている．上の議論における m, M は実は固固有値である．この方法の良さは，変数を 3 つ以上に増やしても有効だという点にある．線形代数の対称行列の対角化をやってから解説しよう．

5. 極値問題（具体例）

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値を調べた．まず，極値の候補となる点を調べるために，連立方程式

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0, \qquad f_y(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

を解く．2 つの式を加え合わせれば $4x^3 + 4y^3 = 0$ を得るが，これから $y = -x$ となる．これを代入して x のみの式にすれば解ける．解は $(0, 0)$ と $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ の 3 点である．

極値の判定には以下の表を使う．$f_{xx} = 12x^2 - 4$，$f_{xy} = 4$，$f_{yy} = 12y^2 - 4$ より

候補点	$A = f_{xx}(a, b)$	$B = f_{xy}(a, b)$	$C = f_{yy}(a, b)$	$AC - B^2$	判定
$(0, 0)$	-4	4	-4	0	判定できない
$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$	20	4	20	正	極小

$(0, 0)$ で極値をとらないことを解説したが，これは今日の講義では省略しておくべきだった．次回，もう一度解説します．

本日のレポート課題

章末問題の 6 を課題にする．来週の講義は休みなので締め切りは再来週の火曜日とする．

微分積分 II 講義メモ (11 月 8 日)

前回のレポート課題について

6(1) は $f(x,y) = x^2 - xy + 4y^2 + x + 2y$ なので $f_x = 2x - y + 1$, $f_y = -x + 8y + 2$ である．ゆえに $fx = f_y = 0$ は連立 1 次方程式であり，その解は $(-2/3, -1/3)$ である．$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 8$ より $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 15 > 0$, $f_{xx} > 0$ なので $f(x,y)$ は $(-2/3, -1/3)$ で極小であり極小値は $f(-2/3, -1/3) = -2/3$ である．

6(2) は $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^3$ である．

- $f_x = f_y = 0$ を解く．（極値の候補となる点を求める）

  $f_x = 2x - 3y = 0$ より $x = \frac{3}{2}y$ である．これを $f_y = -3x + 6y^2 = 0$ に代入すれば

  $$-\frac{9}{2}y + 6y^2 = 6y\left(y - \frac{3}{4}\right) = 0$$

  より $y = 0$ または $y = \frac{3}{4}$ である．$y = 0$ のときは $x = 0$, $y = \frac{3}{4}$ のときは $x = \frac{3}{2}\frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ なので解は $(0,0)$ と $(9/8, 3/4)$ の 2 つである．これが極値の候補である．

- 判定

  $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 12y$ より

候補点	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	判定
$(0,0)$	2	-3	0	-9	極値をとらない
$(9/8, 3/4)$	2	-3	9	9	極小

  ゆえに $(9/8, 3/4)$ で極小値 $-27/64$ をとる．

【コメント】

- 連立方程式を解くには一方の式から $y =$(x の式)，あるいは $x =$(y の式) を作り他方の式に代入するのが基本である．今回のレポート課題ではこのアイデアで簡単に極値の候補点を求められる．
- $f_x + f_y = 0$ を計算した人が 2 人いたが，講義で扱った例での工夫をそのまま使ってしまったようだ．工夫は問題によってうまくいく場合もうまくいかない場合もある．講義の例では $f_x = 0, f_y = 0$ よりも $f_x + f_y = 0$ のほうが簡単なのでこの方法をとった．しかしレポート課題の問題ではむしろ $f_x + f_y = 0$ のほうが複雑だ．

本日の講義の要点

1. 極値問題の具体例　$f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$

   極値問題は (1)$f_x = f_y = 0$ を満たす点（極値の候補となる点）を求める，(2) その点での f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の値を求め定理 6.12 に従って極値の判定を行う，という 2 つのプロセスによって考察する．これを具体例を通じて行ってもらった．

   - $f_x = f_y = 0$ を解くこと．

     これは高校（中学）までの知識しか使わないが，まさに数学的な論理能力が試される問題である．決してやさしくはない．基本的な考え方は次の 2 点だろう．

     - $y = x$ の式，あるいは $x = y$ の式を作り出して一つの式に代入する（未知数の消去）．

- 因数分解により $p(x,y)q(x,y)=0$ の形にできたときは，$p(x,y)=0$ と $q(x,y)=0$ の場合に分ける．因数分解は 2 次以上の方程式を解くときの基本的な方法であったことを思い出してほしい．

このアイデアに従えば $f_x=3x^2y+y^3-4y=y(3x^2+y^2-4)=0$ は $y=0$ の場合と $3x^2+y^2-4=0$ の場合に分ける．また $f_y=x^3+3xy^2-4x=x(x^2+3y^2-4)=0$ は $x=0$ の場合と $x^2+3y^2-4=0$ の場合に分ける．よって $f_x=f_y=0$ は 4 通りの場合に分けて考えれば良い．解は以下の 9 個である．

- $y=0$ かつ $x=0$ から，解 $(0,0)$
- $y=0$ かつ $x^2+3y^2-4=0$ から，解 $(\pm2,0)$
- $3x^2+y^2-4=0$ かつ $x=0$ から，解 $(0,\pm2)$
- $3x^2+y^2-4=0$ かつ $x^2+3y^2-4=0$ から，解 $(\pm1,\pm1)$, $(\pm1,\mp1)$

- 定理 6.12 による判定

$f_{xx}=6xy$, $f_{xy}=3x^2+3y^2-4$, $f_{yy}=6xy$ より判定を行う．なお，$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ の計算は一般には煩雑なので行わないほうがいい．候補点での値を計算してから $AC-B^2$ を求めること．結果を表にまとめれば次の通りである．

候補点	$A=f_{xx}$	$B=f_{xy}$	$C=f_{yy}$	$AC-B^2$	判定	値
$(0,0)$	0	-4	0	-16	極値をとらない	
$(\pm2,0)$	0	8	0	-64	極値をとらない	
$(0,\pm2)$	0	8	0	-64	極値をとらない	
$(\pm1,\pm1)$	6	2	6	32	極小	-2
$(\pm1,\mp1)$	-6	2	-6	32	極大	2

2. 極値問題の具体例 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$（前回の続き）

計算内容は前回の講義メモに記述してある．問題は極値の候補点 $(0,0)$ で $AC-B^2=0$ になっていることだ．この場合は一般的にアプローチする方法はない．極大・極小の意味を踏まえて個別に考える．この例では $f(0,0)=0$ なので $(0,0)$ で極大なら $(0,0)$ の周りで $f(x,y)\leqq 0$，極小なら $f(x,y)\geqq 0$ である．ゆえに原点の周りで関数の取る値の正負を考えれば良い．

$$f(x,y)=(x^4+y^4)-2(x-y)^2$$

と整理すれば x^4+y^4 と $2(x-y)^2$ のどちらが大きいのか考えることになる．一般に小さい数については 2 乗のほうが 4 乗よりも大きい．この値は基本的には負になると思われる．しかし $x=y$ の上では $2(x-y)^2=0$ のため，正になる．より具体的に

$$f(x,0)=x^4-2x^2<0\,(0<x^2<1/2), \qquad f(x,x)=2x^4>0\,(x\neq0)$$

であることを考えれば極値でないことが分かる．

3. 条件付き極値問題

条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで，関数 $f(x,y)$ の極値を考えることを条件付き極値問題という．結論は Lagrange の未定乗数法として定理 6.13 にまとめられているが，ここでは極値の候補点を求めているに過ぎない．候補点を求めるだけでも十分意味があることについては次回の最大最小問題で解説する．

さて，$z=f(x,y)$ のグラフを曲面とし一つの地形としてイメージしよう．陰関数のグラフ $f(x,y)=f(a,b)$ は (a,b) を通る等高線である．そして条件 $\varphi(x,y)=0$ のグラフをその地形の上での道（コース・

遊歩道）と考える．すると極大とはその道の上で登りから下りに変わる地点，極小とは下りから登りに変わる地点となる．こう考えた時に，等高線と道が接していなければ極大でも極小でもないことが分かるだろう．要するに極値の候補点では，道と等高線が接している．すなわちそれぞれの接線の方程式

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0, \qquad \varphi_x(a,b)(x-a)+\varphi_y(a,b)(y-b)=0$$

が同一でなくてはならない．この条件は線形代数の知識を使えば

$$\left\{\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_x(a,b) \\ \varphi_y(a,b) \end{bmatrix}\right\} \text{ は 1 次従属}, \qquad \begin{vmatrix} f_x(a,b) & \varphi_x(a,b) \\ f_y(a,b) & \varphi_y(a,b) \end{vmatrix} = 0$$

と書ける．定理 6.13 では $\varphi_x = \varphi_y = 0$ ではないという仮定のもとに 1 次従属を

$$\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \varphi_x(a,b) \\ \varphi_y(a,b) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

と記述している．この λ を未定乗数とよぶ．3 変数以上の場合は 1 次従属で考えるしかないが，2 変数の場合は行列式で考えたほうが余分な未知数を使わないので簡単なことが多い．覚えておくとよい．

なお，$\varphi_x = \varphi_y = 0$ の点ではコースが滑らかな曲線ではないのでこの方法は使えない．ただし，極値の候補点を求めるという趣旨からはこの点も極値の候補として残しておくだけで良い．要するに

$$\varphi(x,y)=0, \qquad f_x\varphi_y - f_y\varphi_x = 0$$

の連立方程式の解が条件付き極値問題の候補点である．

本日のレポート課題

$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2), (a>0)$ の極値を求めよ．講義メモの解説に従って考えてみてください．

微分積分 II 講義メモ (11 月 15 日)

前回のレポート課題について

$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2), (a>0)$ の極値を求める問題だ．$f_x=f_y=0$ は

$$f_x = 4x^3+4y^2x-4a^2x = 4x(x^2+y^2-a^2)=0, \qquad f_y = 4x^2y+4y^3+4a^2y = 4y(x^2+y^2+a^2)=0$$

であるが，$a>0$ より $x^2+y^2+a^2 \geqq a^2 > 0$ であり $f_y=0$ は $y=0$ と同値である．これを $f_x=0$ に代入すれば $x(x^2-a^2)=0$ を得る．よって極値の候補点は $(0,0)$ と $(\pm a, 0)$ である．

$f_{xx}=12x^2+4y^2-4a^2$，$f_{xy}=8xy$，$f_{yy}=4x^2+12y^2+4a^2$ より極値の判定は以下のとおりである．

候補点	$A=f_{xx}$	$B=f_{xy}$	$C=f_{yy}$	$AC-B^2$	判定	値
$(0,0)$	$-4a^2$	0	$4a^2$	$-16a^4$	極値をとらない	
$(\pm a,0)$	$8a^2$	0	$8a^2$	$64a^4$	極小	$-a^2$

【コメント】

- $f_y=0$ を $y=0$ または $x^2+y^2+a^2=0$ とする人が多いが，後者は不要だ．このような判断はすぐにできるようになってほしい．この程度の問題なら実害はないが，もう少し複雑だと混乱に陥りやすい．
- 虚数を考える答案があるが，これは間違いだ．複素数の世界には標準的な大小関係はなく，極値問題も成立しない．極値問題は実数に値をとる関数についてのみ考える．

本日の講義の要点

1. 条件付き極値問題

   前回の復習として条件付き極値問題，特にテキストとの扱い方の違いを解説した．具体的内容は前回の講義メモをみてほしい．

2. 最大最小問題

   与えられた領域において，関数 $f(x,y)$ の最大最小を調べる方法を解説した．

   - D を座標平面内の閉じた曲線で囲まれた領域およびその周上の点とする．D を $\mathbb{R}^2$ の閉領域と呼ぶ．閉領域は $\mathbb{R}$ の閉区間に対応する概念であり，閉領域 D 上で連続な関数は最大値および最小値を持つことが知られている．
   - $f(x,y)$ を D 上の C^1 級関数とする．f が D の内部で最大（最小）をとれば $f_x=f_y=0$ が成り立つ．その点は最大最小の候補点である．
   - D の境界が，C^1 級関数により $\varphi(x,y)=0$ で定義されているとする．そこで f が最大（最小）をとれば，$\varphi = f_x\varphi_y - f_y\varphi_y = 0$ が成り立つ．ゆえにこれを満たす点は最大最小の候補点である．
   - $f(x,y)$ が C^1 級でない点，D の境界で C^1 級関数による $\varphi(x,y)=0$ という表示を持たない点があればその点も最大最小の候補点として加える．
   - 以上の候補点での $f(x,y)$ の値を比較すれば，その一番大きいものが最大，一番小さいものが最小である．

   この方法は 2 階の偏導関数を使う必要がなく効率的であるが，候補点を一つでも見失うと間違いになる．慎重に考えること．

3. 例 6.6（p.150）

   - $f_x=f_y=0$ の解は $(0,0)$ であり，これは D の内部にあるので最大最小の候補点である．

- 境界上では

$$\varphi(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad \begin{vmatrix} f_x & \varphi_x \\ f_y & \varphi_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & 2x/a^2 \\ x & 2y/b^2 \end{vmatrix}=2\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x^2}{a^2}=0$$

より $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$ であり

$$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right),\quad (x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る．これらは最大最小の候補点である．

- $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ は全平面で C^1 級なので他に最大最小の候補となる点はない．
- 候補点での $f(x,y)$ の値を比較する．

$$f(0,0)=0,\quad f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=\frac{ab}{2},\quad f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{ab}{2}$$

以上から最大値 $\dfrac{ab}{2}$，最小値 $-\dfrac{ab}{2}$ を得る．（どこでとるかは省略）

テキスト p.150 の方法と比較してほしい．講義での方法のほうが簡明なのが分かるだろう．

4. 直線と点の距離

条件付き極値問題の応用として，直線 $ax+by+c=0$ と点 (l,m) との距離を求めた．$\varphi(x,y)=ax+by+c=0$ の条件のもとに，距離の 2 乗 $f(x,y)=(x-l)^2+(y-m)^2$ の極値を考えたが，ある 1 点で最小になることは分かっているので条件付き極値問題で見つかる点がすなわち最小を与える点になる．候補は

$$\varphi=ax+by+c=0,\qquad f_x\varphi_y-f_y\varphi_x=2b(x-l)-2a(y-m)=0$$

という連立 1 次方程式の解なので，唯一つであり，その点が距離の最小値を与える．

5. 重積分

重積分の導入として体積を断面積の積分で求めること，断面積は積分で得られることを解説した．$f(x,y)$ を長方形領域 $D: a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d$ 上の連続な関数とし，xy 平面と $z=f(x,y)$ のグラフの D 上で囲まれる部分の体積を考察した．$y=$ 一定での断面積は

$$S(y)=\int a^b f(x,y)dx \quad y \text{ を定数とみなして } x \text{ で積分する}$$

なので体積は

$$V=\int_c^d S(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

で求められる．このように積分を繰り返すことを累次積分と呼ぶ．なおこの右辺は

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

と表すのが普通である．積分記号とどの変数で積分しているかをセットで考えるためだ．

本日のレポート課題

第 6 章の章末問題 7 を課題にする．(3) は平面全体の最大最小問題だが，以下より最大値は内部でとることが分かる．すなわち最大値は極大値であり，候補点は簡単に調べられる．

$$0\leqq f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)\leqq\frac{2(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}}\longrightarrow 0\quad (x^2+y^2\longrightarrow\infty)$$

微分積分 II 講義メモ (11 月 22 日)

前回のレポート課題について

【解答例】 有界な閉領域の C^1 級関数について，最大最小をとる点は，$f_x = f_y = 0$ を満たす点，および境界での条件付き極値問題の候補点である．そこで (1) は次のように解くことができる．まず

$$f_x = 2x + y = 0, \quad f_y = x + 4y = 0, \qquad \text{より} \qquad (x, y) = (0, 0)$$

だが $(0, 0)$ は D の内部にあるのでこれは最大最小の候補である．次に

$$\varphi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} f_x & \varphi_x \\ f_y & \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + y & 2x \\ x + 4y & 6y \end{vmatrix} = -2x^2 + 4xy + 6y^2 = -2(x - 3y)(x + y) = 0$$

であるが，$x = -y$ のときは $4y^2 = 1$，$x = 3y$ のときは $12y^2 = 1$ である．ゆえに

$$(x, y) = \left(\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \qquad (x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

が，D の境界での最大最小の候補である．

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{6}$$

より，最大値は $\frac{7}{6}$ 最小値は 0 である．

(2) も同様に $f_x = 3x^2 = 0$, $f_y = 3y^2 = 0$ より D の内部の最大最小の候補は $(0, 0)$ のみである．次に

$$\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} f_x & \varphi_x \\ f_y & \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x \\ 3y^2 & 4y \end{vmatrix} = 12x^2y - 6xy^2 = 6xy(2x - y) = 0$$

を満たす点は $x = 0$ の場合は $2y^2 = 1$， $y = 0$ の場合は $x^2 = 1$， $2x = y$ の場合は $9x^2 = 1$ である．ゆえに周上での最大最小の候補は

$$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (\pm 1, 0), \quad \left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right)$$

である．それぞれの候補点での $f(x, y)$ の値は

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad f(\pm 1, 0) = \pm 1, \quad f\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right) = \pm\frac{1}{3}$$

なので，最大値は 1，最小値は -1 である．

(3) は閉じた領域ではないので最大最小の存在は保証されない．しかし，

$$0 \leqq f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{e^{x^2+y^2}} \leqq \frac{2x^2 + 2y^2}{e^{x^2+y^2}} \longrightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \longrightarrow \infty$$

であるから，最小は 0 であること，原点から十分離れたところでは最大をとりえないことが分かる．よって内部で最大をとりそこでは極大である．[*1]

$$f_x = 2x(1 - x^2 - 2y^2)e^{-x^2-2y^2} = 0, \quad f_y = 2y(2 - x^2 - 2y^2)e^{-x^2-2y^2} = 0$$

[*1] この議論は正確さを欠いているが，現段階ではこの程度の理解が限界だろう．

より，$f_x = f_y = 0$ を満たす点は $x = 0$ の場合に $y(2 - 2y^2) = 0$，$x^2 + 2y^2 = 1$ の場合に $y = 0$ である．ゆえに $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ の 5 つの点が最大最小の候補である．候補点での $f(x, y)$ の値は

$$f(0,0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}, \quad f(\pm 1, 0) = \frac{1}{e}$$

であり，最小値は 0 ，最大値は $\dfrac{2}{e}$ である．

【コメント】

- (3) のような非有界領域での最大最小問題は一般には難しい．この関数の場合は無限遠で 0 に近づいていくので感覚的には納得できるだろう．なお，問題の趣旨とは異なるが次のようにすれば高校数学の範囲でも解ける．
$$0 \leqq f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{e^{x^2+y^2}} \leqq \frac{2x^2 + 2y^2}{e^{x^2+y^2}}$$
において $u = x^2 + y^2$ とおけば，$g(u) = 2ue^{-u}$ の概形を書くことにより $g(u) \leqq 2/e$ を得る．等号は $u = x^2 + y^2 = 1$ で成り立つ．よって
$$0 \leqq f(x, y) \leqq \frac{2}{e}$$
であり，左の等号は $x^2 + 2y^2 = 0$ すなわち $(x, y) = (0, 0)$ で，右の等号は $x^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ で，すなわち $(0, \pm 1)$ でとる．
- 最大最小の候補をすべて求め，その点での値を比較して最大最小を決定するという方法は，強力ではあるが候補をすべて求めないと意味を失う．見落とした点が実際に最大最小をとる点かもしれないからだ．だから答えが正しくても，候補をすべて求めていない答案は間違いとみなされる．候補を求めるときには細心の注意をはらうこと．

本日の講義の要点

1. 長方形領域での累次積分
   もっとも簡単な場合であり，p.161 定理 7.3 にまとめられている．ただし，テキストでは重積分の定義からこの式を導いている．講義では，体積は断面積の積分で求められるという素朴な認識をもとに説明している．
2. 縦線集合（横線集合）での累次積分
   縦線集合とは，2 つの曲線 $y = \varphi_1(x)$ と $y = \varphi_2(x)$ のグラフが $a \leqq x \leqq b$ の範囲で囲む領域を言う．横線集合は x と y の役割を入れ替えて考えれば良い．その時の積分の計算例を紹介した．断面積をとるときの y の動く範囲が x ごとに異なることに注意せよ．
   講義では例 7.2 と，その同じ領域での $f(x, y) = e^{x^2}$ の積分（本質的に例 7.3）を扱った．例 7.2 では縦線集合として積分しても，横線集合として積分してもそれほど難しさは変わらない．ただ，被積分関数を e^{x^2} に変えると，横線集合として計算した場合は計算不可能になる．このように順序によって計算の大変さ（可能か不可能化も含めて）が変わってくるので注意が必要である．
3. 積分の順序交換
   積分が累次積分の形で与えられているとき，その順序の交換について解説した．ポイントは累次積分の形から積分域 D を決定することだ．単に不等式から領域を決めるという問題なので，高校でも扱った事項だ．D を求めた後は，順序を交換した形の累次積分に直す．実例を中心にやってみるとよい．

4. 補足

　一般の領域 D での積分は，D を縦線集合または横線集合に分割する．分割した一つ一つの領域での積分を足し合わせれば全体での積分値を得る．このように積分域を分けることは，縦線集合（横線集合）を定める関数が一つの式で表せない場合にも使う．p.183 の 2(4) を題材に順序交換したとき 2 つの積分域に分ける必要が出てくることを解説した．それほど難しくはないだろう．

これ以上話を進めるためには重積分の定義を見直す必要がある．詳しくは次回解説する．

本日のレポート課題

第 7 章の章末問題の 1 を課題にする．ヒントはいらないだろう．

微分積分 II 講義メモ (11 月 29 日)

前回のレポート課題について

【解答例】 累次積分にしたところから解答を記述する．与えられた重積分を累次積分にするには，積分域を作図して考察するが，ここでは省略する．

$$(1)\ \int_0^a dx \int_0^b x^2 + xy + y^2 dy = \int_0^a x^2 b + \frac{xb^2}{2} + \frac{b^3}{3} dx = \frac{a^3 b}{3} + \frac{a^2 b^2}{4} + \frac{ab^3}{3}$$

$$(2)\ \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 + xy + y^2 dy = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x = \int_0^1 \frac{11}{6} x^3 - x^4 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{3} dx = \frac{107}{840}$$

$$(3)\ \int_0^1 dy \int_y^1 (1-x)^3 (1-y)^2 dx = \int_0^1 dy \left[-\frac{(1-x)^4}{4} (1-y)^2 \right]_y^1 = \int_0^1 \frac{(1-y)^6}{4} dy = \frac{1}{28}$$

$$(4)\ \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \sin(x+y) dy = \int_0^{\pi/2} dx \left[-\cos(x+y) \right]_0^x = \int_0^{\pi/2} \cos x - \cos 2x dx = \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$(5)\ \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{\pi}{12}$$

なおここで $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ が半径 a の円の面積の 1/4 であり $\pi a^2/4$ に等しいことを使っている．

【コメント】

- (1) はやさしい．間違いようのない問題だ．また (4) についても特に コメントすべきことはない．
- (2) では積分域を $\int_0^1 dx \int_0^1 \quad dy$ としてしまった人が 2 人いた．これでは長方形での積分になってしまう．また $\int_0^1 dx \int_0^{x-x^2} \quad dy$ という答案もあった．確かに積分域 D の面積を求める問題であれば $x - x^2$ と両端の差を積分すればよかった．しかし，D での積分を計算したいのだから y の動く範囲は $x^2 \leqq y \leqq x$ としなくてはいけない．これを $0 \leqq y \leqq x - x^2$ としてしまうと積分する範囲が変わってしまう．
- (3) は展開せずに計算すること．展開しないほうが楽に計算できることは受験勉強で経験しているはずだ．
- (5) は $\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy$ の計算で失敗した人が多い．累次積分の第 1 段階では x を定数とみなして積分するので，1 変数関数の積分の技術はすべて使える．ここでは $y = x \sin\theta$ とでも置換積分するのが普通だろう．なお，この積分計算は $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ の計算と同じである．このように書けば $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ のグラフ（上半円周）と x 軸が $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で囲む部分，すなわち円全体の 1/4 であることが容易に分かるだろう．

本日の講義の要点

まず，今日の授業で 10 分弱遅刻したことをお詫びします．今後こういうことが無いように努力します．

1. リーマン和による重積分の定義

   この講義では重積分の厳密な定義は与えない．講義での説明は感覚的なので，君たちも細部にこだわることなく感覚的にとらえるようにしてほしい．

   - 長方形領域での有界関数のリーマン和

長方形領域 $D=[a,b]\times[c,d]$ を縦横に細分し小長方形 $D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ に分割する．$(p_{ij},q_{ij})\in D_{ij}$ をとった時

$$S=\sum_{ij} f(p_{ij},q_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=\sum_{ij} f(p_{ij},q_{ij})D_{ij}\text{の面積}$$

をリーマン和という．D は一般になっているが 156 ページの図がリーマン和を理解するのに分かりやすいだろう．

- 重積分の定義

  分割を細かくしていくときにリーマン和が体積に近づいていくことは容易に想像できる．そこでリーマン和の極限によって重積分を定義する．ただし，この極限を厳密に理解するのは難しい．ここは感覚的に把握すること．

  一般の有界領域 D についてはそれを含む長方形領域 D^* をとり，D^* 上の積分として定義する．なおその際 D の外側では 0 として関数の定義域を D^* まで広げておく．この定義によりある種の閉じた領域（厳密な説明は省略）での連続関数は積分可能であることが証明できる．

2. 定義と累次積分との関連

リーマン和での (p_{ij},q_{ij}) を (p_i,q_j), $x_{i-1}<p_i<x_i, y_{j-1}<q_j<y_j$ の形に取る．これは D_{ij} の点を縦横に整然と並ぶようにとることに対応する（p.161 図 7.9）．このときリーマン和は

$$\sum_{ij} f(p_i,q_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} f(p_i,q_j)(x_i-x_{i-1})\right)(y_j-y_{j-1})$$

と整理できる．ここで内側の $\sum$ の中は 1 変数関数 $f(x,q_j)$ のリーマン和になっている．よって x の分割を細かくしていけば $\int_a^b f(x,q_j)dx$ に収束する．$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ と定めれば，$x\in[a,b]$ の分割を細かくしていった時の極限は

$$\sum_{j=1}^{m} F(q_j)(y_j-y_{j-1})$$

であり $F(y)$ のリーマン和である．そこで $y\in[c,d]$ の分割を細かくしていけば $\int_a^b F(y)dy$ に収束する．これで重積分を 2 段階の積分で計算できることが分かる．

3. 重積分の定義から得られる重積分の性質（p.159 定理 7.2）

どの主張もリーマン和については当たり前に成り立つのでその極限である重積分についても成り立つことが分かる．なお 3 番目の等式（積分域を二つに分ける）については若干の説明が必要だが省略した．納得できる主張だとは思うのだが．

4. 重積分の変数変換

重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ の変数変換で求めることについて考察した．考える設定は以下のとおりである．

- st 平面の領域 Ω が xy 平面の領域 D に対応する．ここで Ω は長方形領域にしておく．
- Ω を細分しその小長方形を Ω_{ij} と表す．
- Ω_{ij} に対応する D の小領域を D_{ij} と表す．D_{ij} たちは内部で重なることなく D 全体を覆っているものとする．
- Ω_{ij} の点 (u_{ij},v_{ij}) をとり，それに対応する点を $(p_{ij},q_{ij})\in D_{ij}$ とおく．$p_{ij}=x(u_{ij},v_{ij})$, $q_{ij}=y(u_{ij},v_{ij})$ である．

さて，$\iint_D f(x,y)dxdy$ は D の $\{D_{ij}\}$ たちへの分割に対応するリーマン和（リーマン和は長方形分割で考えているので，これはリーマン和とは言えない．しかし，重積分の値に近いものであることは納得できるだろう）を考え

$$\iint_D f(x,y)dxdy \fallingdotseq \sum_{ij} f(p_{ij},q_{ij})D_{ij}\text{の面積} = \sum_{ij} f(x(u_{ij},v_{ij}),y(u_{ij},v_{ij})\frac{D_{ij}\text{の面積}}{\Omega_{ij}\text{の面積}}\Omega_{ij}\text{の面積}$$

と整理する．ここまでは簡単だろう．

5. D_{ij} と Ω_{ij} の面積比

   $x(s,t)$ と $y(s,t)$ がともに C^1 級のとき，x,y は s,t の 1 次式で近似できる．すると小長方形 Ω_{ij} の像である D_{ij} は平行四辺形で近似できる．この議論はテキストでは p.169 から p.170 にわたって記述されている．かなり煩雑な議論だ．要点は

$$\begin{bmatrix} x(s+h,t+k) \\ y(s+h,t+k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{bmatrix} \fallingdotseq \begin{bmatrix} hx_s+kx_t \\ hy_s+ky_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

   であり，これから st 平面での $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ 方向への移動が xy 平面では $\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ 方向への移動になることが分かる．面積比は行列 $\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$ をかける線形写像での面積比と等しく，この行列の行列式の絶対値に一致する．

   この行列式は p.138 の定理 6.10 に登場しておりヤコビアンと呼ばれ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ と表される．ゆえに D_{ij} と Ω_{ij} の面積比は次の値で近似できる．

$$\frac{D_{ij}\text{の面積}}{\Omega_{ij}\text{の面積}} \fallingdotseq \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|(u_{ij},v_{ij})$$

6. 変数変換の公式

   4 の結論に 5 で得られた式を代入すれば

$$\iint_D f(x,y)dxdyrisingdotseq \sum_{ij} f(x(u_{ij},v_{ij}),y(u_{ij},v_{ij})\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|(u_{ij},v_{ij})\Omega_{ij}\text{の面積}$$

   であり，これは $f(x(s,t),y(s,t))\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|(s,t)$ のリーマン和になる．これから p.167 定理 7.7 の公式を得る．

本日のレポート課題

章末問題の 2（p.183）を課題にする．積分の順序交換であり，前回の講義内容に関する課題である．

微分積分 II 講義メモ (12 月 6 日)

前回のレポート課題について

積分域の順序交換に関する問題だった．積分域を図示することがポイントなので，解答には図を書くようにしてほしい．答えはあっているが図は間違えているという答案もあった．図を間違えたのに答えがあったということは 2 重に間違えたものとみなさざるを得ない．累次積分の形と積分域の関係がうまくとらえられていないのだろう．注意してほしい．これ以上の解答例およびコメントについては省略する．

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換

   積分の変数変換においては，積分域がどう変わるか，被積分関数がどう変わるか，積分要素がどう変わるかを確認しなければならない．被積分関数については単に変数変換と合成するだけなので易しい．積分要素については

   $$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| dsdt$$

   なので簡単である．問題は積分域の変換であり，変数の関係をきちんと考察しなければならない．あとは具体例を計算しながら解説した．

2. 例 7.4 （p.171）

   $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ という極座標変換の例である．変数変換の例としてもっとも重要でありかつ考えやすいものである．積分域の変換には r が原点からの距離であり θ が x 軸の正方向とのなす角（偏角）であることを意識すると分かりやすい．このことから極座標においては $r \geqq 0$ で考えること．また $dxdy = rdrd\theta$ は計算せずに使ってよい．具体的な計算内容についてはテキストにあるが一言だけコメントしておく．

   $$\iint_\Omega r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta, \qquad \Omega : 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

   について，これは長方形領域での $f(r)g(\theta)$ の積分とみなせるので

   $$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy \qquad D : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$$

   という公式が使え

   $$\iint_\Omega r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta = \int_0^a r^3dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{a^4}{4}\frac{1}{2}$$

   と計算できる．使いやすい公式なので覚えておくとよい．公式の証明は次のようにすれば簡単だ．

   $$\begin{aligned}\iint_D f(x)g(y)dxdy &= \int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy = \int_a^b dx\left(f(x)\int_c^d g(y)dy\right)\\ &= \int_a^b\left(\int_c^d g(y)dy\right)f(x)dx = \int_c^d g(y)dy\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

   ここで y で積分する際には $f(x)$ は定数であること，$\int_c^d g(y)dy$ も定数であること，定数は積分の外に出せることを使っている．

3. 楕円内での積分の工夫

   $$\iint_D x^2 + y^2 dxdy, \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

について $x = ar\cos\theta,\ y = br \sim \theta$ という変数変換をした．$0 < r \leqq 1$ で一定のとき $x = ra\cos\theta, y = rb\sin\theta$ は D の境界の楕円を r 倍に縮めた楕円のパラメーター表示になっている．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で動くとき，ちょうどこの楕円を 1 周することになる．そこで $r\theta$ 平面の Ω を $\Omega : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とすればこれが D に対応する領域であることが分かる．被積分関数の対応は簡単であり，積分要素の対応は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

と $abr \geqq 0$ より $dxdy = abrdrd\theta$ である．これから変数変換したものは

$$\iint_\Omega abr(a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta)drd\theta = ab\int_0^1 r^3dr\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta d\theta$$

となる．ここで前の項目で触れた公式を使っていることに注意せよ．

4. 置換積分との類似と違い

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy, \qquad D : x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

を考えた．これを極座標で変換すれば

$$\iint_\Omega \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdrd\theta, \qquad \Omega : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

になる．これも長方形領域での $f(x)g(y)$ の積分の公式が使え

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr$$

となる．この積分は $u = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}$ という置換積分で計算できる．考察することは 2 変数の変数変換の場合と同じである．

積分範囲　r が 0 から 1 まで動くとき，u は 1 から 0 まで動く．

被積分関数　$\sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}} = u$ とする．r がついているがこれは積分要素と一緒に考えたほうが分かりやすい．このへんは臨機応変にして良い．

積分要素　$r^2 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ より

$$2rdr = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$$

より置換積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr &= \int_1^0 \frac{-2u^2}{(1+u^2)^2}du = \int_0^1 u\frac{2u}{(1+u^2)^2}du \\ &= \left[-u\frac{1}{1+u^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = -\frac{1}{2} + \left[\tan^{-1}u\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

1 変数関数の定積分は変数の動く向きを考えている．そのため $\dfrac{dr}{du}$ が負の場合は逆に動くことになるので積分域の上下の大小関係が変わる．これによって積分要素の比に絶対値をつける必要がない．一般に

$x = x(t)$ と変数変換したときの積分要素の変換は $dx = x'(t)dt$ である．ところが 2 変数関数の積分では向きは考慮されていない．微小部分の面積比は正にする必要がありヤコビアンに絶対値をつける必要が出てくる．ここに二つの積分の意味の違いが隠されている．

本日のレポート課題

章末問題の 3（p.183）を課題にする．(1)(2)(3) は極座標変換，(5) は講義で扱った極座標を楕円に即して変えたものを使えばよい．(4) は $x + y = s$, $x - y = t$ とおくと簡単だ．次回の講義で解説するがまず取り組んでみてほしい．

微分積分 II 講義メモ (12 月 6 日)

前回のレポート課題について

変数変換により重積分を計算する問題だが，まだレポート提出していない人も多いので締め切りを 1 週間先に延ばす．この講義の必修課題であり全員が提出するようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 長方形領域での $f(x)g(y)$ の重積分

   前回の講義メモ 2 に証明を含めて記述している．なかなか活用できない人も多いのでまず注意した．$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ について

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

2. 極座標ではない変数変換の例

   章末問題 3(4) によって極座標によらない変数変換の例を解説した．レポート問題なので解答は次回の講義メモに掲載しよう．ここでは注意事項のみ箇条書きする．まだ提出していない人はもう一度自分で考えて取り組んでみてほしい．

   - $x + y = s, x - y = t$ という形で変数変換したが，公式を使うためには x, y を s, t の関数に書き換える必要がある．この場合は対応は線形変換なので簡単に求められる．
   - この変数変換は正則行列による変換なので対応は比較的見やすい．D の周囲（D を記述する不等式が等号になるとき）がどの直線に対応するかをみること．
   - 変数変換のヤコビアンは負である．積分要素の変換の公式

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right| dsdt$$

     において，$|\quad|$ は行列式ではなく絶対値を意味している．ヤコビアンの絶対値なので正にする必要がある．

3. 変数変換の計算例

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dxdy, \qquad D : (x^2 + y^2)^2 \leqq x^2 - y^2, \quad x \geqq 0$$

を考察した．変数変換では，積分域の変換，被積分関数の変換，積分要素の変換と 3 つの操作を行うが，一番難しいのは積分域の変換である．この例は極座標変換であるが，積分域が原点を中心とする円ではないので，その作業の難しさを実感できる．ただし，D の周囲はレムニスケート（p.104）だ．まったくなじみのない領域というわけではない．

さて，積分域の変換においては D を記述する不等式を極座標で書き直す．

$$r^4 \leqq r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \quad r\cos\theta \geqq 0$$

極座標では r は原点からの距離であり正とすること，θ は x 軸の正方向とのなす角（偏角）であることを意識しなくてはならない．$r \geqq 0$ より

$$r^2 \leqq \cos 2\theta \quad \cos\theta \geqq 0$$

である．また最初の不等式が成り立つために

$$\cos 2\theta \geqq 0,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\cos 2\theta}$$

でなくてはならない．$\cos\theta \geqq 0,\ \cos 2\theta \geqq 0$ より，θ の取り得る範囲は

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$$

であることが分かる．これはレムニスケートの右側の部分と考えれば納得できるはずだ．以上から

積分域の変換　$D \longrightarrow \Omega : -\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\cos 2\theta}$

被積分関数の変換　$\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{1}{(1+r^2)^2}$

積分要素の変換　$dxdy = rdrd\theta$（これは極座標では周知のこととして使ってよい）

であり，変数変換の結果として

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = \iint_\Omega \frac{r}{(1+r^2)^2}drd\theta$$

を得る．以後の計算は基本的なものである．

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 - \frac{1}{1+\cos 2\theta}d\theta$$

最後の被積分関数は偶関数であり $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ を使えば

$$= \int_0^{\pi/4} 1 - \frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\tan\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

難しい問題だが決して理解できないようなものではない．じっくり考えてほしい．

4. 広義積分

　重積分においても無限に広がる領域の積分や被積分関数が有界でないような関数の積分について，極限と組み合わせて考察することができる．これを広義積分という．一般論は難しいので一つ例をあげるにとどめる．D を第 1 象限とし

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$$

を考える．これを $D_R : x^2+y^2 \leqq R^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ 上での積分によって考察する．極座標を利用する．

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R})$$

また $E_R : 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R$ 上の積分によって考察する．これは正方形領域の $e^{-x^2}e^{-y^2}$ の積分なので最初の公式が使える．

$$\iint_{E_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^R e^{-x^2}dx \int_0^R e^{-y^2}dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

積分域の包含関係 $D_R \subset E_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ と被積分関数が正であることから広い領域での積分のほうが大きくなるので

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

を得る．これから p.173 例 7.5 の結果が得られる．なお重積分における広義積分の計算もできたことになる．

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

本日のレポート課題

　前回のレポート課題のところで述べたように，今週は新たなレポートだ課題は出さない．前回のレポート課題をまだ提出していない人は，12 月 17 日までに提出してほしい．

微分積分 II 講義メモ (12 月 20 日)

本日の講義の要点

1. 重積分の応用 体積

重積分の導入に際して体積を考えたのでこの応用については特に説明すべきことはない．例として球の体積を解説したが既知の結果（回転体の体積として高校で学習している）を重積分によって再確認したということだ．なお，球の体積の一部（章末問題 4(3)）を求める計算も解説した．ここで $D: x^2+y^2 \leqq ax$ での積分を極座標で計算したが，積分域がどう変わるかについて二通りの説明を付けた．

- D を定義する不等式を極座標で書きかえれば $r^2 \leqq ar\cos\theta$ になる．極座標では r は原点からの距離を意味するので 0 以上で考える．ゆえにこの不等式は $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ となる．これが成り立つには $\cos\theta \geqq 0$ でなくてはならない．極座標では θ の範囲はちょうど一回りになるように考える必要があるので $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，あるいは $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲でとるのが普通である．$\cos\theta \geqq 0$ の条件は後者の範囲を利用して $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とすればよい．
- D は原点で y 軸に接する直径 a の円である．θ が一定になるのは，原点から放射状に出る半直線だが，これが D と交わるのは $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ の範囲である．交わりの弦の長さは $a\cos\theta$ なので θ 一定の半直線の上で r の動く範囲は $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ である．

前者の考え方は，不等式の書き換えを利用にするので様々な変数変換に使える考え方だ．後者は極座標の xy 平面上での意味を全面的に使うので極座標でしか使えない．ただし，極座標はもっとも基本的な変数変換なのでこういう考え方もできるようにしておいてほしい．

計算結果を書いておこう．求める体積は

$$2\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq ax$$

これを極座標に変換すれば

積分域 $\Omega: -\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2,\ 0 \leqq r \leqq a\cos\theta$

被積分関数 $\sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-x^2}$

積分要素 $dxdy = rdrd\theta$

より

$$\begin{aligned}
2\iint_\Omega \sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}dr = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1-|\sin^3\theta|d\theta = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1-\sin^3\theta d\theta \\
&= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta d\theta = \frac{4a^3}{3}\left[\theta+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right) = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

2. 重積分の応用 曲面の面積

C^1 級関数 $z=f(x,y)$ によるグラフ（滑らかな曲面）の xy 平面上の領域 D の上にある部分の面積を考察した．考え方は区分求積法（細かく分割し，分割した一つ一つをきれいなもので近似してその面積

の和をとる．分割を細かくしていけばその極限として求めるものが得られる）という古代ギリシャから使われているアイデアによる．古代ギリシャではこのアイデアで球の体積や表面積を求めている．

- D をいくつかの小領域 D_j に分割する．曲面の D_j の上にある部分を S_j とおく．求めるものは S_j の面積の総和である．
- S_j を $(p_j, q_j) \in D_j$ での接平面（の D_j の上にある部分）で近似する．これを T_j とする．
- 接平面と水平面のなす角を θ_j とすれば，T_j は D_j を一つの方向に $1/\cos\theta_j$ 倍に引き延ばした図形（相似ではない）なので面積も $1/\cos\theta_j$ 倍になっている．

以上から区分求積法の考えにより

$$\text{面積} = \sum_j S_j\text{の面積} \fallingdotseq \sum_j T_j\text{の面積} = \sum_j \frac{1}{\cos\theta_j} D_j\text{の面積}$$

であり分割を細かくしていけば右辺は求める面積に収束する．

一般に平面 $ax + by + cz = d$ の法線ベクトルは (a, b, c) である[*1]．これは平面の方程式を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d$ と考えれば簡単に確認できる．2 つの平面のなす角は法線ベクトルどおしのなす角に等しいので θ_j は接平面の法線ベクトル $(-f_x(p_j, q_j), -f_y(p_j.q_j), 1)$ と水平面の法線ベクトル $(0, 0, 1)$ のなす角に等しい．よって内積を使えば

$$\frac{1}{\cos\theta_j} = \sqrt{1 + (f_x(p_j, q_j))^2 + (f_y(p_j, q_j))^2}$$

を得る．これによって

$$\text{面積} \fallingdotseq \sum_j \sqrt{1 + (f_x(p_j, q_j))^2 + (f_y(p_j, q_j))^2} D_j\text{の面積}$$

となるが右辺は $\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}$ のリーマン和の形になっている．この分割を細かくしていった時の極限は重積分で計算できる．

$$\text{面積} = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$$

この等式が曲線の長さを求める公式（p.102 定理 4.13）とよく似ていることに注意せよ．

3. 応用例　球の表面積

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ についてその表面積は

$$2\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy = 2\iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq a^2$$

である．この積分は被積分関数が D の周囲で無限大に発散するので広義積分である．ただし，計算上はあまり意識する必要はない．これも極座標で計算する．

$$2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 4\pi a \left[-\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = 4\pi a^2$$

本日のレポート課題

章末問題の 4 を課題にする．(3) は講義で解説しこのメモにも結果を書いているのでやらなくても構わない．締め切りは 1 月 14 日 (火)12 時半とする．

[*1] ベクトルは本来は縦に成分を並べるべきだが，ここでは横に並べる．以下同様．

微分積分 II 講義メモ (1 月 10 日)

本日の講義の要点

1. 3 変数関数の積分の定義

   数学では一般に n 変数関数の積分を考えるが，それが何を表すかは理解しづらいだろう．ただし，3 変数関数の積分の場合は密度関数から質量を求めることとして理解できる．すなわち立体 D の密度が D 上の連続関数 $\rho(x, y, z)$ で与えられているとする．D を各座標軸に垂直な平面によって分割しその一つの小立体を D_j とおけば，D_j の質量は $(p_j, q_j, r_j) \in D_j$ によって

   $$\rho(p_j, q_j, r_j)v(D_j), \qquad v(D_j) \text{ は } D_j \text{ の体積}$$

   で与えれれる．その総和

   $$\sum_j \rho(p_j, q_j, r_j)v(D_j)$$

   が $\rho(x, y, z)$ の D 上での Riemann 和であり，分割を細かくしていった時の極限を 3 重積分といい次のように表す．

   $$\iiint_D \rho(x, y, z)dxdydz$$

   これが立体 D の質量であることは理解できるだろう．

2. 3 重積分の計算（累次積分）

   p．179 から p．180 にかけて簡単に記述されているのでこのメモでは省略する．

3. 3 重積分の計算（変数変換）

   p．180 を見ること．積分域，被積分関数，積分要素のそれぞれを変換していくが，積分要素の変換においてヤコビアンの絶対値が現れる．これは小立体の体積の比から現れてくる量であり，平行 6 面体の体積が行列式の絶対値であることに由来する．

4. 極座標

   図 7.22 を参考に 3 次元での極座標の r, θ, φ の意味と動く範囲を考えてほしい．またヤコビアンが $r^2 \sin\theta \geqq 0$ であることを確認しておくように．

5. 応用として，密度が中心からの距離で決まっている半径 R の球体の質量を求めた．中心を原点に取れば，質量は

   $$M = \iiint_D \rho(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})dxdydz$$

   である．これを極座標で変換すれば

   $$M = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho(r)r^2 \sin\theta d\varphi = 4\pi \int_0^R r^2\rho(r)dr$$

   となる．ここで $\rho(r)$ が定数であれば $M = \dfrac{4\pi}{3}R^3\rho$ である．これは球の体積が $\dfrac{4\pi}{3}R^3$ であることを示している．

6. さらにこの球体が球の外部の点におよぼす重力を考えた．計算を簡単にするため外部の点を $(0, 0, a)$, $a > R$ とし，そこにおいた質点 P の質量を m とする．球を小立体 D_j に分割すれば D_j の P に及ぼす引力の大きさは $(p_j, q_j, r_j) \in D_j$ により

   $$\frac{Gm\rho(p_j, q_j, r_j)v(D_j)}{p_j^2 + q_j^2 + (a - r_j)^2}$$

である．ここで G は万有引力定数である．さて引力は球体の中心方向に向くはずなので，各小立体による引力の z 成分の大きさのみを考えれば良い．それは

$$\frac{Gm\rho(p_j,q_j,r_j)v(D_j)}{p_j^2+q_j^2+(a-r_j)^2}\frac{a-r_j}{\sqrt{p_j^2+q_j^2+(a-r_j)^2}}$$

で与えられる．この総和

$$\sum_j \frac{Gm\rho(p_j,q_j,r_j)v(D_j)}{p_j^2+q_j^2+(a-r_j)^2}\frac{a-r_j}{\sqrt{p_j^2+q_j^2+(a-r_j)^2}} = \sum_j Gm\frac{(a-r_j)\rho(p_j,q_j,r_j)}{\left(\sqrt{p_j^2+q_j^2+(a-r_j)^2}\right)^3}v(D_j)$$

は関数 $Gm\dfrac{(a-z)\rho(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}\right)^3}$ の Riemann 和であり，分割を細かくしていった時の極限は

$$Gm\iiint_D \frac{(a-z)\rho(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}\right)^3}dxdydz$$

で与えられる．これが球体の質点 P に及ぼす引力である．これを極座標を利用して計算する．

$$Gm\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}\frac{(a-r\cos\theta)\rho(r)}{\left(\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\right)^3}r^2\sin\theta d\varphi$$

被積分関数は φ によらないので，最初の積分は単に 2π がかかるだけである．

$$2\pi Gm\int_0^R dr\int_0^\pi \frac{(a-r\cos\theta)\rho(r)}{\left(\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\right)^3}r^2\sin\theta d\theta$$

$r^2\rho(r)$ は最初の積分の外に出してよいので次の 1 変数関数の積分が課題になる．

$$I=\int_0^\pi \frac{(a-r\cos\theta)\sin\theta}{\left(\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\right)^3}d\theta$$

これを $\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}=u$ とおいて置換積分する．

積分範囲　$\theta : 0 \longrightarrow \pi$ のとき $u : a-r \longrightarrow a+r$

被積分関数　$\dfrac{a-r\cos\theta}{\left(\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\right)^3}=\dfrac{a-\frac{r^2+a^2-u^2}{2a}}{u^3}=\dfrac{a^2-r^2+u^2}{2au^3}$

積分要素　$2ar\sin\theta d\theta=2udu$ より $\sin\theta d\theta=\dfrac{udu}{ar}$

より

$$I=\frac{1}{2a^2r}\int_{a-r}^{a+r}\frac{a^2-r^2+u^2}{u^2}du=\frac{1}{2a^2r}\left[u-\frac{a^2-r^2}{u}\right]_{a-r}^{a+r}=\frac{a+r-(a-r)-(a-r)+(a+r)}{2a^2r}=\frac{2}{a^2}$$

I は r によらないので積分の外に出して

$$4\pi\frac{Gm}{a^2}\int_0^R r^2\rho(r)dr=\frac{GmM}{a^2}$$

を得る．ここで M は前項で求めた球体の質量であり，球体の及ぼす引力は全質量が中心にある質点の及ぼす引力と等しいことが分かる．

最後の計算については授業中 3 回ミスをした．不必要に分かりづらい話になってしまったことをお詫びする．ここではかなり丁寧に書いているので読んでみてほしい．

微分積分 II 講義メモ (1 月 24 日)

今日の講義では章末問題の 4(4) と 5(3) を解説した．それも含めて章末問題 4 と 5 の解答例を如何に示しておく．

章末問題 4，5 の解答例

4(1)　$z = 2 - x/3 - 2y/3$ を $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ (z =)2 - x/3 - 2y/3 \geqq 0$ の定める領域 D の上で積分すればよい．

$$\iint_D 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} dxdy = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} dx = \int_0^3 dy \left[\frac{6-2y}{3} x - \frac{x^2}{6} \right]_{x=0}^{6-2y}$$
$$= \int_0^3 \frac{(6-2y)^2}{6} dy = \left[-\frac{(6-2y)^3}{36} \right]_0^3 = 6$$

4(2)　求める円錐は $D : x^2 + y^2 \leqq a^2$ で $z = h - \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} h$ のグラフが囲む部分なので極座標を利用して次のように計算する．

$$\iint_D h - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} h dxdy = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \frac{h}{a}(a-r) r d\theta = \frac{2\pi h}{a} \int_0^a (a-r) r dr = \frac{2\pi h}{a} \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^2 \pi h}{3}$$

【コメント】 体積を底面積×高さ÷　3 で求める人がいるが，この問題が講義内容の理解度をはかるためのものだということを意識するように．

4(3)　12 月 20 日の講義メモの 1 を見よ．

4(4)　曲面の方程式を z の式として表せば

$$z = \pm \sqrt{c^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - a \right)^2}$$

なのでグラフは xy 平面で対称であり，体積は上半分を求めて 2 倍すればよい．また z が定義できるのは $D : c^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - a \right)^2 \geqq 0$ である．よって体積は

$$2 \iint_D \sqrt{c^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - a \right)^2} dxdy, \qquad D : c^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - a \right)^2 \geqq 0$$

を求めればよい．これを極座標で計算する．D は $(r-a)^2 \leqq c^2$ なので $a - c \leqq r \leqq a + c$ となる．

$$= 2 \int_{a-c}^{a+c} dr \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 - (r-a)^2} r d\theta = 4\pi \int_{a-c}^{a+c} r \sqrt{c^2 - (r-a)^2} dr$$

この積分を $r = a + c \sin u$ と置換積分する．積分範囲を $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$ として

$$= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a + c \sin u)(c \cos u)(c \cos u) du = 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ac^2 \cos^2 u + c^3 \cos^2 u \sin u du$$
$$= 4ac^2 \pi \int_0^{\pi/2} \cos 2u + 1 du = 2ac^2 \pi^2$$

【コメント】 D の範囲をどうとるかの考察ができない人が多い．D の形状を正確にとらなければ正しい答えは出てこないので，不等式の変形は同値性を維持した形で行わなければならない．解答例を考察しておくこと．

最後の積分では偶関数，奇関数の原点に関し対称な区間での積分を利用した．$\cos^2 u \sin u$ は奇関数なのでその積分は 0 である．

5(1)　$z = 1 - x^2 - y^2 \geqq 0$ なので，積分域は $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ である．後は曲面積を求める公式を使って

$$\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}dxdy = \iint \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

を求めればよい．これも極座標に変数変換して計算する．

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 4r^2}d\theta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}dr = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

5(2)　$z_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ より曲面積は

$$2\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}dxdy = 2\iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy, \qquad D : x^2 + y^2 \leqq ax$$

である．領域は 4(3) と同じなので極座標で計算すれば

$$\begin{aligned} &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}dr = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-a\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^{a\cos\theta} \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 - a^2|\sin\theta|d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/2} 1 - \sin\theta d\theta = 2a^2(\pi - 2) \end{aligned}$$

【コメント】 $\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta} = a|\sin\theta|$ と絶対値がつくことに注意せよ．後は偶関数の積分であることを利用している．

5(3)　$z = \pm c\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフの曲面積であり，これも上半分を求めて 2 倍する．

$$2\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}dxdy = 2\iint_D \sqrt{\frac{1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2)}{1 - x^2 - y^2}}dxdy, \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 1$$

これを極座標に変換して

$$= 2\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{\frac{1 + (c^2 - 1)r^2}{1 - r^2}}d\theta = 4\pi \int_0^1 r\sqrt{\frac{1 + (c^2 - 1)r^2}{1 - r^2}}dr$$

この積分を $u = \sqrt{\dfrac{1 + (c^2 - 1)r^2}{1 - r^2}}$ で置換積分する．このとき $r \to 1$ のとき $u \to \infty$ なので広義積分になる．

$$r^2 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + c^2 - 1}, \qquad rdr = \frac{c^2 u}{(u^2 + c^2 - 1)^2}du$$

より

$$\begin{aligned} &= 4\pi c^2 \int_1^\infty \frac{u^2}{u^2 + c^2 - 1}du = -2\pi c^2 \int_1^\infty u\left(\frac{1}{u^2 + c^2 - 1}\right)' du \\ &= -2\pi c^2 \left[\frac{u}{u^2 + c^2 - 1}\right]_1^\infty + 2\pi c^2 \int_1^\infty \frac{1}{u^2 + c^2 - 1}du = 2\pi + \frac{2\pi c^2}{\sqrt{c^2 - 1}}\left[\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{c^2 - 1}}\right]_1^\infty \\ &= 2\pi + \frac{\pi^2 c^2}{\sqrt{c^2 - 1}} - \frac{2\pi c^2}{\sqrt{c^2 - 1}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} = 2\pi + \frac{2\pi c^2}{\sqrt{c^2 - 1}}\tan^{-1}\sqrt{c^2 - 1} \end{aligned}$$

【コメント】1 変数関数の積分の問題としても相当難しい問題だ．なお，最後の等式は $x > 0$ で $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つこと（テキスト 38 ページ，問 2.4(3)）を利用した．

これでこの授業の講義を終える．試験は 1 月 31 日である．微分については計算（合成関数の微分を含む）の他，接平面の方程式，陰関数のグラフの接線，極値問題，最大最小問題などが扱った項目である．また積分については，積分計算，積分の順序交換，変数変換，体積，曲面積などが重要な話題である．過去の講義メモを参考に勉強しておいてほしい．

微分積分 II 講義メモ (9 月 27 日)

今日から多変数関数の微積分を扱う．何故多変数関数を扱うかについてはテキストの第 6 章に記述してあるがここでは扱わない．なお，この講義で扱うのは基本的に 2 変数関数のみである．

数学は自ら考えて理解を深めていく学問である．計算だけでは概念の本質的な理解はできない．数学に向き合う態度については結城浩の「数学ガール」を読むとよい．数学的内容も興味深いが何よりも数学の問題に向かう主人公たちの態度が良い．

この講義の内容を自ら深めていくための材料として，毎回の講義の内容を講義メモにまとめる．家庭学習に活用すること．レポート課題は講義で扱ったことをきちんと考えてから取り組むこと．

本日の講義の要点

1. 2 変数関数のグラフ

   2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは座標空間の中で $(x, y, f(x, y))$ たちの作る図形である．まずこれについて具体的に考察した．

   - 1 次関数のグラフ

     $z = ax + by + c$ のグラフは平面になる．a はグラフと y 軸に垂直な平面との切り口の直線の傾きになっている．これを x 方向の傾きと呼ぶ．同様に b を y 方向の傾きと呼ぶ．c は平面と z 軸との交点の座標であり，z 切片と呼ぶことにする．
   - 2 次関数のグラフ

     $z = ax^2 + by^2$ のグラフについて，xz 平面との切り口 $z = ax^2$ と yz 平面との切り口 $z = by^2$，および水平面 $z = c$ との切り口 $ax^2 + by^2 = c$ を考察することによりグラフの形を考察した．a, b がともに正の場合（ともに負の場合）と a, b が異符号の場合に分けて考察したが，グラフの形状が大きく変わることに注意すること．

     なお，これらの式に 1 次式を加えた関数のグラフは，平方完成とグラフの平行移動を組み合わせて理解できる．中学校で 2 次関数のグラフを調べた時と基本的に同じアイデアである．ただし，xy の項が現れる場合はうまくいかない．これについては線形代数の固有値が有効である．
   - その他の例

     無理関数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフは上半球面になる．何故だか考えてみよ．

   以上のように 2 変数関数のグラフは座標空間内の曲面として理解できる．今後微分について考察していく際，一般の関数を曲面とみなして直感的なアプローチを行うことにする．

2. 2 変数関数の極限，連続

   2 変数関数の極限はグラフにより直感的に理解すればよい．厳密な定義は 2 年次後期以降で学習する．ここでは極限と連続に関するいくつかの事実を紹介した．

   - 関数の和，差，積，商と極限の関係（定理 6.1）
   - 極限による連続性の定義（定義 6.1）
   - 連続関数の合成がやはり連続であること（118 ページ下から 3 行目）

3. 2 変数関数の極限の例

   前項の事実によって，具体的な式（既知の連続関数から加減乗除と合成で記述）で記述される関数は定義される範囲で連続であることが分かる．連続であれば極限は代入するだけでいい．117 ページ例 6.1 の前半である．しかし，連続の保証されていない点（不定形になる点）では，2 変数にしたことによる難しさが出てくる．

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

 $(x,y)\to(0,0)$ とは (x,y) を原点 $(0,0)$ に近づけていくことだから，2 点の距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ を 0 に近づければよい．極座標を使えば

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

となる．ここで $r\to 0$ での極限を $\cos\theta\sin\theta$ としてはいけない．原点に偏角 θ の方向から近づければ極限は $\cos\theta\sin\theta$ だがこれは近づける方向によって変わってしまうので，$(x,y)\to(0,0)$ で一定の値に近づくとは言えない．

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

 極座標により

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^4\sin^4\theta}=\frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta}$$

である．ここで $\cos\theta\neq 0$ なる方向から原点に近づければ 0 に収束する．また $\cos\theta=0$ のときは，分子が 0 なのでやはり 0 に収束する．原点に直線的に近づけていく場合はどの方向からも 0 に収束する．しかし，放物線 $x=y^2$ に沿って原点に近づけると $(x,y)=(t^2,t)$ とおくことにより関数の値は 1/2 になっている．結局この関数は 0 に収束するとは言えず，発散している．

 このように $(x,y)\to(0,0)$ といっても近づけ方は多様なので，より慎重な考察が必要になる．116 ページ図 6.6 の直前の記述を参考にしてほしい．

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

 2 変数関数の極限を求める際にも挟み撃ちの原理が使える．この極限では

$$-2r\leqq\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\leqq 2r$$

が成り立つので $(x,y)\to(0,0)$ の極限は 0 である．ここで挟み撃ちが θ によらない関数で行われていることが重要だ．θ がないので近づけ方に制限をつけていないことになる．

4. 偏微分

 定義は 119 ページ定義 6.2 に記述されている．ようするに x で偏微分するとは y を定数とみなして微分することに他ならない．1 変数関数の微分計算が問題なく適用できる．なお，定義とともに記号の表し方もきちんと覚えておくこと．f' のような記号は使えない．

 偏微分の計算例は 121 ページ例 6.2 の他 $f(x,y)=e^{-x^2-2y^2}$ で計算してもらった．授業中に十分理解できたのではないか．

5. 定義に基づく偏微分係数の計算例

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について考察した．$(x,y)\neq(0,0)$ においては単に商の微分法則を使うだけだ．さて $(0,0)$ での x に関する偏微分係数は

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

である．y についても同様に $f_y(0,0)=0$ である．ゆえに $f(x,y)$ は全平面で偏微分可能である．しかしすでにみたように $(x,y)\to(0,0)$ で $f(x,y)$ は収束しない．偏微分可能であっても連続とは限らないのだ．

このことは $f(x,y)$ のグラフの等高線を考えれば納得できる．高さ 1/2 の等高線は原点を通る傾き 1 の直線，高さ $-1/2$ の等高線は原点を通る傾き -1 の直線，高さ 0 の等高線は x 軸および y 軸である．他の等高線もすべて原点を出発する直線である．

偏微分の定義では $f_x(0.0)$ は x 軸上での値 $f(x,0)$ で決まる．x 軸上では 0 で一定なのでその微分も 0 になる．偏微分はある方向のデータしか見ていないのでその点の周りの関数の振る舞いを規制することができないのだ．

今日は，2 変数関数の導入から偏微分までを扱った．次回はもう一つの微分の一般化である全微分について解説する．

本日のレポート課題

152 ページ章末問題 6 の 1 を課題とする．偏微分の計算方法を確認してから解答してほしい．