数学の世界 C 講義メモ（4 月 17 日）

1. 高校までの最大公約数の求め方について

   最大公約数の求め方など知っているという人も多いだろうが，従来の方法ではあらゆる場合に最大公約数が求められるとは言えない．このことについて説明をしたが如何だろうか．一般の場合に適用できる方法は，整数についての一般論の理解に役立つが，単なる簡単な場合の求め方では理解は深まらない．この講義で扱う方法と従来の方法を比較してみてほしい．

2. 除法の原理

   詳細はプリントで確認すること．本質は割り算 $a \div b = p \cdots r$ なので，納得できるだろう．ただし，この事実の証明は与えていない．興味のある者は考えてみるとよい．

   なお，余りを $0 \leqq r \leqq |b| - 1$ の範囲で考えているので負の数については注意すること．

   $$(-8) \div (-3) = 3 \cdots 1$$

   である．また 0 で割ることは定義できないので $b \neq 0$ としておく．

3. 約数，倍数，公約数，最大公約数，互いに素

   どれも周知の用語である．ただし負の数も含めて考えているので少し注意は必要だ．注意事項はプリントに箇条書きしてあるのでここでは省略しておく．

   a と b の公約数の集合を $D(a, b)$ で表した．集合に戸惑う人もいるだろうが，現代数学の基本概念なのであえて使用した．整数のなす有限集合なので理解しやすいものと思う．

   $$D(9, 32) = \{\pm 1\}, \qquad D(24, 36) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

4. 除法の原理と公約数

   まず $a = bp + r$ が成り立つとき $D(a, b) = D(b, r)$ が成り立つことを示した．講義では c を a と b の公約数として議論を始めた．プリントの証明も同じだが「逆も同じように議論できる」としているので逆の部分を記述しておく．

   > 逆に c が b と r の公約数だとする．c は b の約数なので $b = ck$ と表せる．また c は r の約数でもあるので $r = cl$ と表せる．$a = bp + r = ckp + cl = (kp + l)c$ なので，c は a の約数になる．よって c は a と b の公約数になる．
   >
   > 以上の考察から a と b の公約数であることと b と r の公約数であることは同値であり $D(a, b) = D(b, r)$ が成り立つ．

5. ユークリッドの互除法

   この事実を利用して二つの数の最大公約数を求めることができる．これをユークリッドの互除法と呼ぶ．これについては実例を用いて説明した．3 ページの 2 行目から 5 行目までの式をじっくり眺めてほしい．

   - この最大公約数の求め方については素数も素因数分解は利用していない．割り算と約数・公約数の定義のみを使って議論している．
   - 一つ前の割り算の余りを割る数として次の割り算を行うので，余りは減少していく．ゆえに有限回の割り算で割り切れるところまで計算できる．よってユークリッドの互除法による最大公約数の計算はあらゆる自然数の組について実行できる．
   - a と b の公約数の集合 $D(a, b)$ は，最大公約数 d の約数全体の集合と一致する．互除法による最大公約数の求め方の帰結である．

6. 定理 1

自然数 a と b について $Ma+Nb$ を最大公約数になるように整数 M,N をとることができる．これについてはユークリッドの互除法の計算を逆にたどることによって実行できる．プリントでは文字を使って一般的な記述をしているが，添え字をうまく使う必要があり難しい．むしろ具体的計算例（4 ページ 2 行目）で考えたほうが良いだろう．

なお，a と b が互いに素であることと，$Ma+Nb=1$ を満たす整数の組 M,N が存在することは同値であることを証明した．互いに素という扱いづらい概念が，一つの式で表現できるので，今後の様々な証明で使われる．プリントの証明を補足しておくのでじっくり考えておいてほしい．

> 互いに素とは最大公約数が 1 であることに他ならないので，ユークリッド互除法を逆にたどれば $Ma+Nb=1$ を満たす M,N を求めることができる．逆に $Ma+Nb=1$ となる M,N が存在したとし，c を a と b の公約数とする．$a=ck$ かつ $b=cl$ と表せるので $Ma+Nb=Mck+Ncl=(Mk+Nl)c=1$ となる．ゆえに c は 1 の約数なので $c=\pm1$ である．よって $D(a,b)=\{\pm1\}$ であり，a と b は互いに素である．

本日の課題

1. 問 1

【解答例】 a が b の約数であることから $b=ak$ と表せる．また b が c の約数であることから $c=bl$ と表せる．ゆえに $c=bl=(ak)l=a(kl)$ が成り立つが，これは a が c の約数であることを意味する．

【コメント】 良くできている．a が b の約数であることを $a=bk$ と書いてしまった人がいるがこれでは a は b の倍数である．注意せよ．

2. 問 3

【解答例】次のような割り算を繰り返す．

$$\begin{aligned}
297 \div 184 &= 1 \cdots 113 & \qquad 297 &= 184 \times 1 + 113 \\
184 \div 113 &= 1 \cdots 71 & 184 &= 113 \times 1 + 71 \\
113 \div 71 &= 1 \cdots 42 & 113 &= 71 \times 1 + 42 \\
71 \div 42 &= 1 \cdots 29 & 71 &= 42 \times 1 + 29 \\
42 \div 29 &= 1 \cdots 13 & 42 &= 29 \times 1 + 13 \\
29 \div 13 &= 2 \cdots 3 & 29 &= 13 \times 2 + 3 \\
13 \div 3 &= 4 \cdots 1 & 13 &= 3 \times 4 + 1
\end{aligned}$$

次は $3 \div 1 = 3$ より割り切れるのでその一つ前の余り 1 が最大公約数である．

【コメント】 少し煩雑な計算になってしまったが，計算自体は良くできていた．どんな数についてもユークリッドの互除法が使えるという自信が持つためにはこの程度の計算は簡単にできるようにしてほしい．ただし，計算が長いので，最大公約数についての結論を出すのに混乱している人もいる．ユークリッド互除法の理解には，除法の原理を

$$\text{割られる数} \div \text{割る数} = \text{商} \cdots \text{余り}$$

と言葉で書くと分かりやすいだろう．これからユークリッド互除法で使うのは

$$D(\text{割られる数}, \text{割る数}) = D(\text{割る数}, \text{余り})$$

という等式だ．商は現れないことに注意すれば，混乱も少なくなるのではないか．最後の割り算は割られる数が 3，割る数が 1，商が 3，余り 0 なので $D(3,1) = D(1,0)$ が得られることになる．要するに割り切れた時の割る数が最大公約数である．それは，割り切れる直前の割り算の余りでもある．

- 途中で計算を打ち切って最大公約数を求めている人がいる．それでも間違いではないが，次の問題を考えるには不十分である．割り切れるまで計算し，割り切れた時の割る数が最大公約数だという認識を持ってほしい．
- 最大公約数が 3，4 という解答があったが，これが公約数にならないことは少し考えればすぐ分かるはずだ．自分の出した答えが正しいか，ちょっと考えてみるという習慣を身につけてほしい．
- 計算するだけで答えのない答案がある．最大公約数は 1 であると述べなければ正解にはならない．

3. 問 3 を元に「$M297 + N184 =$ 最大公約数」となる M, N を構成せよ．

【解答例】

$$\begin{aligned}
1 &= 13 - 4 \times 3 = 13 - 4 \times (29 - 2 \times 13) = 9 \times 13 - 4 \times 29 = 9 \times (42 - 29) - 4 \times 29 \\
&= 9 \times 42 - 13 \times 29 = 9 \times 42 - 13 \times (71 - 42) = 22 \times 42 - 13 \times 71 = 22 \times (113 - 71) - 13 \times 71 \\
&= 22 \times 113 - 35 \times 71 = 22 \times 113 - 35 \times (184 - 113) = 57 \times 113 - 35 \times 184 \\
&= 57 \times (297 - 184) - 35 \times 184 = 57 \times 297 - 92 \times 184
\end{aligned}$$

より $M = 57, N = -92$ とすればよい．

【コメント】この計算を理解するには a, b と各割り算の余りの系列 297，184，113，71，42，29，13，3，1 に着目するとよい．1 を 3 と 13 の定数倍の和で表し，その 3 に 3 を 13 と 29 との定数倍の和で表した式を代入する．すると 1 が 13 と 29 の定数倍の和として表される．ユークリッドの互除法の割り算の式を最後のものから順に使っていけば，最後には 1 が 297 と 184 の定数倍の和になる．割り算の回数が多く，計算が煩雑なので分かりづらいかもしれないが，上の解答を考えてみてほしい．またプリントでは k 回目の割り算の余りを r_k と表してより一般的な説明を与えている．分かるだろうか．

なお，$Ma + Nb$ を最大公約数にする M, N は一通りではない．例えば $-184 \times 297 + 297 \times 184 = 0$ なのでこれを加えて $-127 \times 297 + 205 \times 184 = 1$ も成り立つ．

数学の世界 C 講義メモ（4 月 24 日）

1. $Ma + Nb = d$ となる M, N の作り方について

   前回の演習課題と講義ノート 3 ページ 1.4.1 の記述を参考に $Ma + Nb$ を最大公約数にするための具体的方法を解説した．ポイントは

   - 1.4.1 では $a = r_1$, $b = r_2$ とし，k 回目の割り算の余りを r_{k+2} とおいている．なお，最初の割り算は大きい数を小さい数で割るので $r_1 > r_2$ としている．r_1, r_2, r_3, $\cdots, r_{k+2}, \cdots$ を余りの系列と呼ぶことにする．前回の演習課題（問 3）では $\{297, 184, 113, 71, 42, 29, 13, 3, 1, 0\}$ が余りの系列である（前回の講義メモ）．
   - 余りの系列は次々に小さくなる自然数の系列なので，有限回で割り切れ，余りは 0 になる．その直前の割り算の余り r_n（問 3 では 1）が最大公約数である．
   - 割り算の式は余り r_{k+2} を，割られる数 r_k と割る数 r_{k+1} の定数倍の和として表す形になおせる（1.4.1 の 3 行目）．この式を利用して最大公約数 r_n を $r_n = r_{n-2} - p_{n-2}r_{n-1}$ から初めて，次々に表示に使う r_k の番号を下げていく．このプロセスはまさにユークリッド互除法を逆にたどっていることになる．
   - こうして最終的に r_n は r_1 と r_2 の定数倍の和として表せる．

   ここで，この方法があらゆる異なる自然数の組 $\{a, b\}, a > b$ について有効なことを理解してほしい．皆さんに具体的計算をやってもらうのも，なんとなく正しい結果が出たという段階から，どんな場合でも可能だとの確信が得られる段階に進んでほしいからだ．そして，それができれば定理 1 の主張に納得がいくはずだ．そのためにも少々面倒でもユークリッドの互除法における割り算の式を，一つずつたどっていくというプロセスを身につけてほしい．

   定理の証明とは定理に主張されている事実が正しいことを納得するためのプロセスを言う．あらゆる場合に有効な手段を理解することは，単なる計算方法の理解ではなく，証明の一つのプロセスを理解したことになる．

2. 命題 2 の証明

   定理 1 の応用として解説した．当たり前のことに思えるかもしれないが定理 1 を使うと見事に証明できる．如何だろうか．

3. 素数の規約性（1.4.2 定理 2）

   証明は命題 2 を使うだけなのでそれほど難しくはない．ただ，素数は無数にあるのでそれほど自明なことでもない．ab が 97 の倍数ならば a と b の少なくとも一方は 97 の倍数だと言われても，すぐに当たり前とは思えないのではないか．97 は素数なので定理 2 が証明できたということはこの事実も証明できたことになる．

   なお，「a, b の少なくとも一方が p の倍数」という主張を「a が p の倍数でなければ b は p の倍数」という主張に読み換えた．これが実質的に同じ意味であることを理解してほしい．

4. 素因数分解の一意性（1.4.3 定理 3）

   第 1 部の主定理である．証明を理解できないという人も多いだろうが，すぐにあきらめるのではなくもう少し考えてほしい．数学的帰納法（少し変わった形だが）と定理 2 がポイントになる．ここでも証明を箇条書きしておく．

   - 素数は 1 と自分自身以外に約数を持たないので 2 以上の二つの自然数の積としては表せない．素数を素数の積として表す（素因数分解する）方法は，自分自身以外にはなく一通りである．特に 2

以上 3 以下の自然数 2,3 は素数なのでただ一通りに素因数分解できる．

- 2 以上 $n-1$ 以下の自然数がすべてただ一通りに素因数分解できたとする．n がただ一通りに素因数分解できることが示せれば，全ての自然数についてただ一通りに素因数分解できることが示せる（数学的帰納法）．
- n が素数のときはすでに示しているので n が素数でないとして議論する．
- n の素因数を一つ取り p とおく．$2 \leqq p < n$ であり $a = n/p$ は n より小さな 2 以上の自然数になる．
- 帰納法の仮定により a はただ一通りに素因数分解できる．そこで $a = p_2 p_3 \cdots p_m$ と素因数分解する．ここで p_j は素数である．
- $n = pa = pp_2 p_3 \cdots p_m$ と n は素数の積として表せるので，n は素因数分解できる．
- $n = q_1 q_2 \cdots q_k$ を n の素因数分解とする．n は p の倍数なので，定理 2 により q_1，q_2，$\ldots, q_k$ の少なくとも一つは p の倍数である．必要なら $q_1, q_2, \ldots, q_k$ の添え字を取り換えて（素数の並べ方を入れ替えて）q_1 が p の倍数になるとしておく．q_1 も素数なので $q_1 = p$ である．
- $a = n/p = p_2 p_3 \cdots p_m = q_2 q_3 \cdots q_k$ であるが，a の素因数分解の方法はただ一通りなので（帰納法の仮定），$k = m$ と $\{q_2, q_3, \ldots, q_m\}$ が $\{p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ を並べ替えたものになっていることが分かる．ゆえに，n の素因数分解は $\{p, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ を並べ替えたものしかなく n の素因数分解の仕方は一通りである．

本日の課題

数学の世界 C 講義メモ（5 月 8 日）

前回の提出課題

課題 1 $M412 + N357$ が 412 と 357 の最大公約数になるような M, N の例を与えよ．

【解答例】 ユークリッドの互除法を実行すると

$$412 = 357 + 55, \quad 357 = 6 \times 55 + 27, \quad 55 = 2 \times 27 + 1, \quad 27 = 27 \times 1$$

となる．余りの系列は $412, 357, 55, 27, 1, 0$ であり，割り切れる直前の余り 1 が最大公約数である．

$$\begin{aligned} 1 &= 55 - 2 \times 27 = 55 - 2 \times (357 - 6 \times 55) = 13 \times 55 - 2 \times 357 \\ &= 13 \times (412 - 357) - 2 \times 357 = 13 \times 412 - 15 \times 357 \end{aligned}$$

となるので $M = 13,\ N = -15$ とすればよい．

【コメント】 前回と同様な課題であり，良くできていた．ただ，最大公約数を 27 としてしまう答案が若干目についた．これは解答例のように余りの系列を明確に意識するとよい．余りが 0 になることが割り切れるということであり，その直前の余りが最大公約数である．これは割り切れた時の割る数でもある．

課題 2 プリント 4 ページ問 4

$14 = 2 \times 7$ なので $a = 2,\ b = 7$ とでもすればよい．こうして考えれば合成数（素数でない数）では定理 2 で主張されている性質「ab が p の倍数なら a と b の少なくとも一方は p の倍数」が成り立たないことは明らかだろう．この問題はそれを理解してもらうために出題したものだ．

数人が難しいという感想を寄せていた．証明の部分はどうしても分からないというのであれば無視してもかまわない．重要なことは素因数分解の可能性・一意性が論理的に証明できたということだ．30 の素因数分解が $30 = 2 \times 3 \times 5$ しかないことは当たり前だと思うだろうが，$3576290148 = 2^2 \times 3^2 \times 23 \times 73 \times 59167$ がただ一通りに素因数分解できるということは当たり前だとは思えないだろう．100 桁を超えると素因数分解を実行することさえ困難になってしまう．数学の定理は，例外なく成り立つというところにその強さがある．このことは覚えておいてほしい．

今回の講義内容

1. 素因数分解の一意性から分かること（1．5.2）

   プリントに従って 3 つの命題を紹介した．プリントには事実しか書いていないので若干補足しておこう．

   - 第 1 の命題は簡単だろう．互いに素とは正の公約数が 1 しかないことなので，素数の公約数は持たないし，逆に互いに素でなければ 2 以上の公約数を持つので特にその素因数は素数の公約数になる．
   - $a = b^n$ のとき，b の素因数分解を n 乗する形で a の素因数分解が得られる．n 乗したので各素因数は n の倍数個現れる．
   - a の素因数分解と b の素因数分解から ab の素因数分解が作れる．このとき，ab は n 乗数なので各素因数は n の倍数個現れる．さらに a と b が互いに素なので，a と b の素因数分解には共通の素数は存在しない．よって a（b）の素因数分解では各素因数は n の倍数個現れるので a（b）は n 乗数である．

2. 様々な無理数 (1.5.1)

命題 3 の証明の前に例 1 を解説した．$\sqrt[5]{27}$ は $x^5-27=0$ の解であるが，整数ではないので無理数だということが分かる．「整数ではないから無理数」というのはおかしいと思った人もいるようだが，命題 3 の α の前提として最高次の係数が 1 の整数係数 n 次方程式の解であることが仮定されているのを忘れてはならない．この例でもまず $\sqrt[5]{27}$ が命題 3 の仮定を満たしていることを確認している．

命題 3 の証明自体はそれほど難しくはない．既約分数 $\alpha=b/c$ において，α の正負は分子 b の正負とし，分母は正（$c \geqq 1$）としておいたほうが分かりやすいだろう．プリントにもきちんと証明を記述しているので読んでおくこと．

例 2 は例 1 をより一般にしたものだ．味わってほしい．

3. ピタゴラス数について

ピタゴラス数とは $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 $\{a,b,c\}$ を言う．今日の講義で解説したことは

- どれか二つが共通な素因数 p を持てば，p はもう一つの数の素因数にもなっているので，$\{a/p, b/p, c/p\}$ がより小さなピタゴラス数になる．ゆえに，どの二つも互いに素であるとして考察する．
- a, b がともに奇数とすると，$a^2+b^2=2\times$ 奇数 であり，素因数 2 をちょうど 1 つ持つので平方数になりえない．よって a, b の一方が奇数，他方が偶数と仮定してよい．特に a を奇数， b を偶数として議論する．
- 定理 4 は，このとき $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ となることを主張している．これでピタゴラス数は完全に決定されたことになる．

1.5 節までを第 1 章の試験範囲とする．試験は 5 月 22 日に行う．提出課題にした問題を中心に，授業内容を復習しておくこと．定理 4 の証明とフェルマーの最終定理の解説は次回行う．

本日の課題

課題 1 $\sqrt[3]{16}$ と $\sqrt[3]{27}$ について有理数か否か判定せよ (問 5).

【解答例】 $\sqrt[3]{27}=3$ なのでこれは有理数である．一方 $2^3=8<16<27=3^3$ より $2<\sqrt[3]{16}<3$ なので $\sqrt[3]{16}$ は整数ではない．またこれは $x^3-16=0$ の解なので命題 3 より $\sqrt[3]{16}$ は無理数である．

【コメント】

- $\sqrt[3]{27}=3$ であることはほぼ全員が気づいていた．もちろんこれは有理数だ．逆に有理数になるのはこのような場合しかないことを理解してほしい．
- $\sqrt[3]{16}$ が無理数であることを言うには，これが整数ではないことと $x^3-16=0$ の解であることの二つを述べなくてはならない．後者を落とした答案が目につくが，当たり前で言わずもがなと思ってしまったのかもしれない．しかし，「整数でなければ無理数」という主張は一般には正しくないのでこれでは正解とは言えない．
- $\sqrt[3]{16}$ が無理数であることの証明を，高校で扱った $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明をまねて実行した人がいる．間違いではないが，この講義の趣旨には反している．命題 3 を利用する方法の強力さを理解してほしい．
- $\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$ とし，$\sqrt[3]{2}$ が無理数だからこれも無理数だとする答案があったが，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることの証明がないので正解とは言えない．

問題を解くときには授業内容をきちんとおさえてから考えてほしい．高校までの知識を駆使すれば答

えが出るような問題もあるが，それではこの授業で学習したことの成果にはならない．

課題 2 2 以上の自然数 a について a の最小の 2 以上の約数は素数であることを示せ (問 2).

【解答例】 a の 2 以上の最小の約数を p とおく．p が素数でなかったとすると p は $1 < q < p$ を満たす約数 q を持つ．q は p の約数であり，p は a の約数なので q は a の約数である．このことと $1 < q < p$ からこれは p の取り方に矛盾する．よって p は素数である．

【コメント】 この問題は当たり前のこととして感じる人も多いだろう．ただ，きちんと証明することは意外に難しい．ここでは背理法を利用したが，一つのロジックとして考えてほしい．

- この証明は 2 以上の最小の約数が素数でなかったら，さらに小さな約数があるはずだという素朴な感覚に基づいている．証明は素朴な感覚を如何に数学の言葉を使って記述するかという点にポイントがある．まずは素朴に考えてみるという姿勢が最も重要だと思う．何か，参考になる証明方法はないか探すという感覚では，いつまでたっても証明問題は苦手ということになってしまうと思う．
- この問題は「2 以上の自然数 a が素因数を持つ」ことを主張している．それを証明しやすくするために「a の 2 以上の最小の約数は素数である」という形に変えた．解答例で p が素因数で無かったとした後，p の素因数 q をとると言ってしまうと，素因数の存在を仮定したことになってしまう．この方法はこの問題の趣旨に反する．

  解答例では p が素数でないことから $1 < q < p$ を満たす p の約数 q が存在するとしている．これはまさに素数の定義（1 と自分自身以外に正の約数を持たない）を利用していることに注意してほしい．
- a の素因数分解を使った答案が目につく．a の素因数分解に現れる最小の素数が a の 2 以上の最小の約数ということは事実として正しいが，それが何故かをきちんと述べるには素因数分解の可能性と一意性を使わなくてはならない．なお講義では素因数分解の可能性の証明に問 2 を使っている（1．4.3 定理 3 の証明の 5 行目）．だから問 2 の解答は素因数分解を使うべきではない．なお，問 2 の出題が今回にずれ込んだが，問 2 は問 1 の次に出題されていることに注意してほしい．素因数分解はまだ前面には登場していない．
- a について偶数の場合，奇数の場合というように場合分けで考えた答案も目につくが，奇数の場合の証明はこの考えではできない．

感想で，具体例にこだわる意見を見かける．それは「定理は覚えるものでそれをどう使うかを学ぶのが数学の勉強」だと誤解しているからではないか．例えば素因数分解の一意性定理を証明したが，それは計算に使うものではない．素因数分解の仕方など，中学校までに学習しているはずだ．しかし，その後の論理の展開で素因数分解の一意性がいかに有効に使えるかは説明した．素因数分解の具体例を示すことの必要性はまったく感じない．

一方，命題 3 は無理数であることの証明に活用した．具体例として例 1 を示しているし，問 5 もその趣旨だ．この程度で充分だろう．今後とも計算する内容には具体例をつけていく．ただし，具体例を積み重ねてなんとなく理解するという方法をとる考えはない．また，論理による新しい事実の獲得という数学本来の議論の進め方においては，具体例よりも一般論のほうがはるかに重要である．このことも授業内容の学習を通じて確認していってほしい．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 15 日）

今回の講義内容

1. 前回の提出課題の解説

   問 2 の解答についての解説を行った．前回の講義メモにも解答例とコメントが書いてあるので確認してほしい．この問題のように一見当たり前と思えることを証明するには，何故当たり前と感じるのか突き詰めて考えることが基本である．この意味で前回の講義メモの証明がいかに自然なものか感じていただけるとありがたい．

   ここまでが来週の試験の範囲である．以下はお話．

2. ピタゴラス数の決定（定理 4）

   プリントでの証明は定理 4 の前に記述されている．講義では段階を追って証明の各ステップを箇条書きした．ここでもその形でまとめておこう．難しい証明だが，今まで学習した事実が巧妙に利用されており，その流れを理解できれば数学の実力にもつながるだろう．

   (a) 互いに素なピタゴラス数を決定すれば十分（1.6 節冒頭の 4 行，前回解説済み）
   (b) $a^2+b^2=c^2$ において，a と c は奇数，b は偶数として差し支えないこと（1.6 節第 2 段落の最初の 3 行，前回解説済み）
   (c) $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$ において $c+a=2p$, $c-a=2q$ とおく．
   (d) a, c が互いに素であることから，p, q が互いに素になること（第 3 段落，最初の 3 行，定理 1 の後半の応用）
   (e) $b=2k$ とおくと $4k^2=4pq$ となるので pq は平方数である．1.5.2 の 3 番目の主張から，p と q はそれぞれ平方数になる．
   (f) $p=m^2$, $q=n^2$ とおけば結果を得る．

   如何だろうか．互いに素な二つの数の積が平方数ならばそれぞれが平方数であるという事実が巧妙に使われている．また，a,b が互いに素であることから p,q が互いに素であることを示す議論も巧妙である．じっくり考えてほしい．

3. フェルマーの最終定理に関する話題

   歴史的なことを含めて解説した．お話として受けとめること．

4. $n=4$ の場合のフェルマーの定理

   フェルマーの最終定理の証明は現代数学の最先端の議論を使うので，この講義のレベルを超える．しかし $n=4$ の場合は定理 4 を利用することによって比較的簡単に証明できる．8 ページを参照すること．

   以上で第 1 部を終える．整数という良く知っている対象について，論理の積み重ねによっていろいろな事実が示されるのを確認してほしい．さて，今日の講義の後半で第 2 章の球面幾何の話に移った．図形的直観を基礎にどのように厳密な議論を展開するか考えてほしい．

5. 球面上の直線

   球面幾何での直線は大円（中心を通る平面との切り口）である．何故，大円を直線としてとらえるかについて，距離と慣性運動の二つの側面から解説した．数学の論理としては不十分だが，感覚的には納得してもらえたのではないか．どうしても納得できないという人は，ひとまず大円を直線とみなすことを出発点として考えてほしい．なお，球の半径を R と表しておく．

   - 球面上の点 A，B について，中心 O と合わせた 3 点が同一直線上になければ，A と B を通る大円

はただ一本である．その大円の弧の短いほうを A と B を結ぶ線分と呼ぶ．線分が A と B を結ぶ最短線であることについてはこの講義では証明しない．

- 3 点 O，A，B が同一直線上にあるのは，A と B が対蹠点（北極と南極のように中心に関して対称の位置にあること）の場合である．このとき 3 点を含む平面は無数にあるので，A と B を結ぶ大円も無数にある．その弧はちょうど半円であり，長さは πR である．この一つ一つの半円もすべて線分と呼ぶことにする．

  この事情は A を北極，B を南極とすれば分かりやすい．北極と南極を結ぶ線分は子午線（経線）であり，経度に応じて無数にある．それらの長さはすべて等しいことも地球儀を見れば納得できるはずだ．
- 2 点を結ぶ線分は対蹠点でない場合は 1 本である．対蹠点の場合は無数にある（平面幾何との違い）．
- n 個の線分で囲まれた図形を n 角形と呼ぶ．球面幾何においては 2 角形が存在する．2 角形において，2 つの頂点は対蹠点の位置にある．

次回は，講義の前半（40 分程度）で球面幾何の続きの話をする．後半（45 分）は第 1 章の試験を行う．今までの講義メモを参考に，提出課題の解答例やコメントに目を通しておいてほしい．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 22 日）

今回の講義内容

1. 2 辺のその挟む角による合同定理

   従来学習した平面幾何では周知の事実であるが，球面幾何では成り立つだろうか．それにはこの定理を平面幾何においてどのように証明するかを考察する必要がある．しかし，中学校（高等学校）でこの事実を学習した時，それが何故成り立つかの説明を受けたことはないようだ．講義ではまずユークリッドのアイデアに従って，平面幾何での証明を与えた．

   ユークリッドの証明は，仮定を満たす二つの三角形が与えられたとき，平行移動，回転移動，裏返しによって一方を他方に重ねることである．球面では平行移動という概念はないが，球の中心を通る直線を軸とする回転および大円に関する線対称移動が球面の合同変換を与えるので，ユークリッドの証明をそのままなぞることができる．講義ノート定理 6（9 ページ）の記号に従って，証明を箇条書きしておく．なお，O は球面の中心である．

   (a) O を通り，平面 OAD に直交する直線を軸とする回転で，点 D を点 A に重ねる．
   (b) AB=DE により OA を軸とする回転で点 E を点 B に重ねる．
   (c) $\angle$BAC= $\angle$EDF により，必要なら AB を通る大円に関する裏返しによって，二つの角を重ねる．
   (d) AC=DF より，F は C と重なる．
   (e) B と C が対蹠点でないときは B と C を結ぶ線分（半円より短い大円弧）は一本しかないので，B と E，C と F が重なっていることから線分 BC は線分 EF に重なる．
   (f) 二つの三角形は合同変換ですべての辺を重ねることができるので合同である．

   B と C が対蹠点の場合は，この定理は成り立たない．しかしそれは実質的に B と C を頂点とする 2 角形の場合であり，非常に特殊な状況であることが確認できる．

2. 円と正三角形の作図（プリントに書いていません）

   球面の 1 点から等距離にある点の軌跡を円と呼ぶ．地球上で 1 点を北極 N に取れば，円とは緯線に他ならない．これを赤道面の方向から眺めれば（地球儀を真横から見る）NO と直交する線分として見える．このように空間図形を理解するには，3 次元的に絵を描くのではなく，一方向から投影して現れる図形をみるとよい．

   ユークリッド原論の第 1 命題は与えられた線分を一辺とする正三角形を作図することだ．作図方法は誰でも知っている．それを球面上で行ってみる．

   (a) 球面上に線分 AB を与える．平面 OAB の真上から眺めれば，AB は円の周上に現れる．
   (b) A を中心とし，半径 AB の円は，B を通り OA に直交する線分として見える（北極と緯線の関係と同じ）．同様に B を中心とし半径 BA の円は，A を通り OB に直交する線分に見える．
   (c) 二つの線分の交点を C とし，対応する球面上の点 C を考える．初等幾何の議論と同様に，3 点 A，B，C は互いに等距離にある．そこで，A と C，B と C を線分（大円弧）で結べば正三角形 ABC を得る．
   (d) しかし，二つの線分が交わるとは限らない．交わるための条件については次回考察しよう．

今回は後半に試験を行ったので講義は実質 40 分間だった．次回からまた提出課題つきの講義に戻す．

数学の世界 C 講義メモ（5 月 29 日）

球面幾何学になってから，難しいと感じている学生も多いと思う．議論は空間図形（球面）の認識に基づいているので分かりづらいのも当然かもしれない．空間図形をいろいろな方向から眺めながら，またなじみ深い平面図形の思考方法も利用しながら議論を深めていってほしい.

今回の講義内容

1. 球面上の円と正三角形の作図

   円とは，ある点 A（円の中心）から等距離にある点の集合をいう．円については次が成り立つ.

   - 北極を中心とする円は緯線である.
   - 球の中心 O と A を結ぶ直線 OA に垂直な平面による切り口である.
   - 円の中心が周上に見える方向から眺めれば，円は OA に垂直な直線である.

   緯線が北極から等距離にある点の集まりであることは納得できるだろう．球の中心と北極を結ぶ直線を z 軸方向に取れば，緯線とは水平面（z 軸に垂直な平面）と球面との切り口である．これを一般化したのが箇条書きの 2 つの項目だ．地球儀を眺めながら確認してほしい.

   以上の考察のもとに線分 AB を一辺とする正三角形が描けるための条件を考察した．平面 OAB に直交する方向（AB を通る大円が赤道としたとき，北極）から眺めれば，球面は円に，AB のその円周上に見える．A を中心とし B を通る円は，OA に直交し B を通る線分として見える．同様に B を中心とし A を通る円は，OB に直交し A を通る線分として見える．二つの線分は A と B の距離が，$2\pi R/3$ より小さければ交わり，等しい時は接し，大きくなると交わらない．このことから正三角形の辺の長さは $2\pi R/3$ 以下であることが分かる．なお，もっとも大きい正三角形は，一つの大円を 3 等分する三つの線分の作る正三角形である．例えば，赤道上で，経度 0 度の点を A，東経 120 度の点を B，西経 120 度の点を C としたとき，△ABC は一辺 $2\pi R/3$ の正三角形である．内角はすべて π（180 度）である.

   この話題はプリントには掲載していなかった．正三角形の作図というなじみある題材なので取り上げたが，イメージを持つのが予想外に難しかった．どうしても分からないという人もいるだろうが気にしなくてもよい.

2. 二角形の面積

   二角形を頂点の真上から眺めれば，角の大きさによって球面に占める面積の割合が決まることが分かる．球の面積は $4\pi R^2$ なので，頂角 α ラジアンの 2 角形の面積は全体の $\alpha/2\pi$ であり $2\alpha R^2$ である．なお，ここでの角はあくまでラジアンである．通常の角度を使うと，面積の割合は $\alpha/360$ になるので簡単な式にならない.

3. 三角形の面積，四角形の面積

   三つの辺の作る 6 枚の二角形で球面を埋め尽くせる．このとき三角形の内部は 3 重に，反対側にある合同な三角形の内部も 3 重に覆われる．このことから，6 枚の 2 角形の面積の総和から球の表面積を引いたものが，三角形の面積の 4 倍になる．プリントの図 3 をみながら考えてほしい.

   四角形については，2 つの三角形の合わせたものとしてとらえればよい．平面図形で内角の和を考えるときと同様の手法だ.

4. 緯度・経度から空間座標を決定する.

   地球の中心に空間座標の原点を，北極方向に z 軸を，本初子午線（経度 0 の経線）と赤道の交わる方向に x 軸を，赤道上の東経 90 度の方向に y 軸を作る．そうすると地球上の点の緯度と経度から，空間座標を決定できる．図 4 を眺めてほしい．表示は三角比の基本事項のみを利用している．十分理解でき

る内容だと思う．

5. 空間ベクトルの内積と 2 点の距離

　球面上の 2 点の距離は大円の弧の長さだ．角度をラジアンで測れば，弧の長さは角度に半径をかければよい．このことと内積の 2 種類の表示（8 ページの一番下）を結び付ければ，11 ページの最後の等式を得る．この式は，2 点の緯度・経度から 2 点の距離を求める式として活用できる．活用の仕方は次回もう一度解説しよう．

今回の提出課題

問 6　前半については「考察せよ」という数学ではあまり例のない質問になっているのでどう答えたらいいのか分からないという人もいるだろう．まず，直感的にどのような図形か把握すること，そしてそれを人に伝えるにはどうすればよいのかを考えることが課題となる．想定した解答としては

- 北極と赤道上の経度 0 度の点，経度 90 度の点の三点が作る三角形
- 図示による説明：北極と赤道上に 2 点を書き，直角記号を補う．
- 球面を互いに直交する三つの面（例えば xy 平面，yz 平面，xz 平面の三つ）で切り取った図形

ただ，三角形を書き 3 頂点に直角記号を書いただけでは理解できているとは判断しがたい．

　後半については角度がすべて $\pi/2$ ラジアンなので

$$\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)R^2=\frac{\pi}{2}R^2$$

である．なお，この三角形は球面全体を 8 等分した一部なので $4\pi R^2/8=\pi/2R^2$ としても正解である．

【コメント】

- 直角を 90 度とした答案があるが，内角から面積を求める公式は角度の単位としてラジアンを使っている．出発点の 2 角形の面積 $2\alpha R^2$ がラジアンによる記述であることに注意せよ．
- この三角形は正 8 面体を球に内接させ，各面を中心から球面上に投影した時に現れる．正 8 面体は各頂点に 4 つの正三角形が集まるので投影した三角形の内角の大きさは $360/4=90$ 度になる．同様に正 4 面体を投影すれば内角 120 度の正三角形が，正 20 面体を投影すれば内角 72 度の正三角形が現れる．

問 7　凸多角形なので，一つの頂点から隣り合わない $n-3$ 個の頂点に対角線を引くことにより $n-2$ 個の三角形に分割できる．$n-2$ 個の三角形の内角の総和は n 角形の内角の和に他ならないので，面積は

$$(n\text{ 角形の内角の和}-(n-2)\pi)R^2$$

である．

【コメント】

- 結果のみでも正解で良いが，上のような議論を行うと分かりやすい．なお，凸と断ったのは，これを仮定しないと多角形の形が多様になり過ぎて，三角形への分割をどう考えたらよいか分からなくなるためだ．ただし，そのような多角形でもこの事実は成立している．
- n 角形の内角の和を $(n-2)\pi$ とする答案があったが，これは平面図形の場合の事実だ．球面ではもちろん成立しない．球面においては三角形の内角の和が 180 度を超えることに注意せよ．
- この事実は 3 角形でも 2 角形でも正しい．2 角形では二つの内角の大きさがともに等しいので内角の和が 2α になっている．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 5 日）

今回の講義内容

1. 正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体と球面の正三角形による分割

   前回の提出課題で，球面上の角が 90 度の正三角形を考察してもらった．これが球面を 8 等分したものであることに気づいた人も少なからずいた．これは，正 8 面体を球面に内接させ，中心から球面に投影したものになっている．中心からの投影だから，辺は大円の一部（すなわち球面上の線分）であり，長さはすべて等しい．また 8 面体では一つの頂点に 4 つの三角形が集まるので，球面上での内角は $360/4 = 90$ 度である．

   同様なことを正 4 面体，正 20 面体で考察した．正 4 面体では各頂点に 3 つの三角形が集まるので，球面に投影した図形の内角は $360/3 = 120$ 度，すなわち $2\pi/3$ ラジアンである．よってこの三角形の面積は
$$\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)R^2=\pi R^2$$
   である．これは球面の面積の 4 分の 1 に相当する．

   正 20 面体を球面上に投影すると，その内角は $360/5 = 72$ 度，すなわち $2\pi/5$ ラジアンである．上と同様に面積を求めれば
$$\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}-\pi\right)R^2=\frac{\pi}{5}R^2$$
   である．これは球面の面積の 20 分の 1 である．

2. 緯度，経度から 2 点の距離を求めること

   前回の学習事項をおさらいした．なお，計算にはエクセルを利用しているので，講義で計算することはしない．ホームページにファイルをおいているので興味のある人は計算してみてほしい．注意事項を箇条書きしておく．

   - 計算するための数学知識は高校までの知識でほぼ足りている．
   - 緯度と経度は度分秒を使って表示される．分は 1/60 を秒は 1/3600 を意味する 60 進小数の単位である．時間だけを表すのではない．距離の計算は，この表示の角度をラジアンに翻訳することから始まる．
   - 計算により「距離 / 半径」の cos が求まるが，これから「距離 / 半径」を決定するには，cos の値に対して対応する角度を与える関数が必要になる．理系学生は「アークコサイン」として学習しているはずだ．エクセルでは ACOS という関数として用意されている．文系学生にとってはなじみのない関数だが，ここに述べた事実だけ抑えておけば十分である．

3. 余弦定理

   球面上に一点 P をとり，そこから 2 点 A, B までの距離 a, b と角 $\gamma = \angle \mathrm{APB}$ を求める．このとき A と B の距離を a, b, $\cos\gamma$ を使って表すのが余弦定理である．地球規模で考えるとその重要性が分かるだろう．離れたところにある 2 点の距離が，P からの観測データで決定されるのだ．

   公式は（13 ページ定理 8） P を北極に，A を本初子午線上に，B を経度 γ の子午線上にとって，A, B の緯度と経度を求めることにより証明した．緯度と経度が分かれば，距離はすでに学習している．なお，北極からの距離で緯度が決まることに注意せよ．

4. 球面上での方角

余弦定理は三つの辺の長さから角度を求めるための定理としても使える．そこで地球上の A から B までの方角を調べるために，北極 N と合わせて三角形 △NAB を考える．∠NAB が B の方向が真北からどれだけずれているかを表す．そこで，三つの辺の長さが分かれば角度を求めることができるが，A と B の距離の求め方はすでに学習した．北極との距離は緯度で決まるので簡単に求められる．後は計算すればよい．

この計算も図 5 のエクセルファイルで同時に行われている．式の処理は大変なので，講義では深入りしなかった．プリント 13 ページにきちんと書いてあるので興味のある人は読んでみてほしい．

今回の提出課題の解答例とコメント

問 8　【解答例】 正 12 面体とは 12 個の正 5 角形の作る正多面体で，各頂点には 3 個の正 5 角形が集まっている．これを球面に内接させたうえで中心から球面に投影すれば，球面は 12 個の合同な球面正 5 角形で覆われる．各頂点には 3 つの 5 角形が集まるので，その内角の大きさは $360/3 = 120$ 度，すなわち $2\pi/3$ ラジアンである．よって正 5 角形の面積は

$$\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}-(5-2)\pi\right)R^2=\frac{1}{3}\pi R^2$$

であり，球面全体の 12 分の 1 に相当する．

【コメント】

- 正五角形の面積が球面の面積の 12 分の 1 であることを利用して，面積や内角を求めた答案もあるが，この問題の趣旨は面積の公式の正しさを再確認するためのものでもあるので，解答例を正解としたい．内角が 120 度であることは素朴に理解できるはずだ．
- 面積の公式の適用を間違えた答案が少しあった．5 角形なので $(5-2)\pi = 3\pi$ を引かなくてはならない．

問 10　【解答例】 (1) は余弦定理で $\gamma = \pi/2$ とおけばよいので

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}$$

(2) はこの式で $a = b = r$，$R = 20000/\pi$ とすればよいので，AB の距離 c は

$$\cos\frac{c\pi}{20000}=\cos^2\frac{r\pi}{20000}$$

である．$r = 10000\mathrm{km}$ のときは

$$\cos\frac{c\pi}{20000}=\cos^2\frac{r\pi}{20000}=\cos^2\frac{\pi}{2}=0$$

より $\dfrac{c\pi}{20000}=\dfrac{\pi}{2}$ なので $c = 10000\mathrm{km}$ である．

$r = 10000/2 = 5000\mathrm{km}$ のときは

$$\cos\frac{c\pi}{20000}=\cos^2\frac{r\pi}{20000}=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

より $\dfrac{c\pi}{20000}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $c = 20000/3\mathrm{km}$ である．

$r = 10000/3$ のときは

$$\cos\frac{c\pi}{20000}=\cos^2\frac{r\pi}{20000}=\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$$

であるが，cos の値が 3/4 になる角度（エクセルでは ACOS(0.75)，逆三角関数を使えば $\cos^{-1}(3/4)$）は，きれいな値にはならない．

$$c = \frac{20000}{\pi}\mathrm{ACOS}(0.75)$$

と答えればよい．なお関数電卓を使えばこの値は 0.722734 ラジアンであり

$$c = \frac{20000}{\pi}0.722734 \fallingdotseq 4601.07$$

【解答例】

- (1) は余弦定理で $\gamma = \pi/2$ にするだけなので易しいはずだ．平面幾何でも余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ で $\gamma = \pi/2$ とすれば三平方の定理が出る．それと同じことだ．
- 余弦定理（定理 8）では辺の長さを a, b, c ，角 C の大きさを γ として記述している．この文字の意味を混乱している人がいた．
- (2) では (1) の等式で $a = b = r$, $R = 20000/\pi$ とした時の c を求めればよいのだということに気づいてほしい．ここで躓いている人が目立った．
- AB の距離を A と B を結ぶ緯線の長さとした答案があるが，緯線は大円ではないのでその長さは距離にはならない．ただし $r = 10000$ の場合は，A と B は赤道上にあるので，緯線 (赤道) は大円になり距離を与える．$r = 10000/2$ のときは北緯 45 度なので，緯線は半径 $R\cos(\pi/4)$ の円でありその円周の 4 分の 1 の長さは $\pi\frac{20000}{2\pi\sqrt{2}} = 5000\sqrt{2}$km である．また $r = 10000/3$ のときは北緯 60 度なので，緯線は半径 $R\cos(\pi/3) = R/2$ の円なので，その円周の 4 分の 1 は 5000km である．
- 式は書いてあるが計算結果が $\sqrt{2}r$ になっている人がいる．式の処理ができずに，直角二等辺三角形の斜辺と考えたのだろうが，球面では成立しない．$\sqrt{2}$ 倍になる理由は 3 平方の定理（球面では成り立たない）であることに注意せよ．
- $\cos(c/R)$ が 3/4 になって困ってしまった人がいる．$\cos x = 3/4$ を解こうとしたのかもしれないが，このような方程式は一般には解けない（解はあるが)．高校数学では解けるものしか扱わないので何か解かなくてはいけないと思ってしまうのだろうが，受験数学の弊害かもしれない．
- $\cos(c/R) = 0$ で $c = 0$ としてしまう答案がある．冷静になって考えればおかしさに気づくと思う．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 12 日）

今回の講義内容

1. 球面上での円周の長さ

　前回の提出課題の問 10 で，北極から $r$km 離れた二つの点の距離を，それらを結ぶ緯線の長さとして求めた答案があった．緯線は赤道を除いて大円ではないので，球面上の最短距離を与えない．だから 2 点の距離を求めよという問題の解答としては間違いである．しかし，緯線は北極を中心とする円なので，半径 r の円周の長さを求めよという問いの解答としてなら正しい答えになる．円周の長さは与えていなかったので，球面幾何の最後の話題としてコメントした．

　北極を N，北極から $r$km 離れた点を A，球の中心を O とすれば，ラジアンの定義から $\angle\mathrm{NOA}=\dfrac{r}{R}$ である．すると A と地軸（地球の自転軸，直線 ON）との距離は，$R\sin\dfrac{r}{R}$ である．緯線は座標空間の中で半径 $R\sin\dfrac{r}{R}$ の円であり [*1]，その長さは $2\pi R\sin\dfrac{r}{R}$ である．

2. ユークリッド幾何から非ユークリッド幾何へ

　2.6 節の内容である．詳細は講義ノートに記述してあるのでここでは繰り返さない．記述されていない点をいくつかコメントしておこう．

   - ユークリッドは，それまでに知られていた数学の事実を一つの論理体系としてまとめようとした．そこから論理体系の傷として「公準 5」の問題が浮かび上がった．公準 5 の内容は当たり前の事実として受け入れられていたが，他の公理・公準とは異質であり何とか証明できないかと考えたのもうなずける．例えば，講義では言わなかったが，ユークリッドは命題 2 で線分 AB と等しい長さの線分を，点 C から引く方法を与えている（命題 2）．当たり前と思えることにも証明をつけ，公理・公準をより基本的なものにしようと努力したのは明らかであり，その発想から当然公準 5 の証明も考えていたはずだ．しかし，どうしてもそれが果たせず，公理として残したと言えよう．
   - 非ユークリッド幾何を当時の最高の数学者であるガウスが発見していたことはそのノートから明らかである．しかし，彼はその結果を発表せず，非ユークリッド幾何の発見者に名を連ねなかった．当時はユークリッド幾何が唯一絶対の幾何とみなされており，それ以外の幾何の存在を主張することは，躊躇したと言われている．
   - 公準 5 は図形の性質というよりも図形の入っている空間の性質としてとらえたほうが良いだろう．実際，リーマン幾何（様々に曲がった空間の幾何）の登場によって幾何学の関心は図形の性質から図形を含む空間の性質へと関心が移っていった．一つの問題の解決が，学問自体を変えていった例とも言えよう．

　今日の講義で第 2 部を終了する．第 2 部の試験は 1 週あけて 6 月 26 日に実施する．問題にできそうなテーマはそれほど多くないので，きちんと学習しておいてほしい．

今回の提出課題について

　平面幾何学と球面幾何学の違いをまとめてもらった．次のような項目があげられよう．

- 2 つの直線（大円）は 2 点で交わる．
- 2 点間の距離は最大で πR である．
- 2 点を結ぶ線分はたいていは 1 本だが，2 点が対蹠点の場合は無数にある．

[*1] 球面上の円としての半径，球面における中心と周までの距離は r である．

- 2 辺とその挟む角による合同定理はたいてい成り立つが，角の頂点以外の 2 点が対蹠点の場合は成立しない．
- 正三角形の辺の長さは最大で $2\pi R/3$ である．
- 三角形の内角の和は 180 度より大きい．n 角形の内角の和は $180(n-2)$ 度より大きい．
- 二角形が存在する．
- 多角形の面積はその内角の和によって決まる．
- 球面幾何では相似という概念はない．
- 余弦定理（三平方の定理）は平面と異なる．
- 半径 r の円周の長さは平面と異なる．

以下にはコメントが必要である．

- 直線の定義が平面とは異なる．
  【コメント】異なるのは当たり前だ．最短性と力学的観点から大円を直線としてみるべきだということを解説した．例えば赤道に高速道路を作れば，運転している人はまっすぐ進んでいると感じるはずだ．遠心力は地球の中心からの方向に働いており，重力と相殺して感じられない．一方，北緯 30 度では遠心力の方向は地球の中心からの方向に比べて 30 度ずれている．地球に接する方向への遠心力が感じられるので，曲がりを認識できる．
- 2 点を結ぶ線分が無数にある．
  【コメント】この表現は不正確だ．たいていは 1 本しかない．
- 三角形の内角の和は 900 度以下である．
  【コメント】これを自分で気づいたならすごい．球面三角形が与えられたとき，その外側も同じ辺に囲まれた球面三角形になっている．三つの線分によって囲まれた図形と定義するとそうならざるを得ない．このとき，2 つの三角形の内角の和を加えれば $360 \times 3 = 1080$ 度になる．一方が 180 度より大きいので他方は 900 度より小さくなる．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 19 日）

今回の講義内容

1. 微分の定義

　微分の定義は高校ですでに学習している．この講義では計算方法よりも，微分の考え方に重点をおいて講義するので，出発点としての定義は特に重要である．さて，考えやすくするために t を時刻とし $f(t)$ を時刻とともに変化する量と考える．$f(a+h)-f(a)$ は時間が a から $a+h$ まで進む間に変化する量である．それを時間 h で割れば単位時間当たりの変化量が出てくる．さらに $h \to 0$ と極限を取れば，瞬間における単位時間当たりの変化量になる．これが微分係数である．h が小さければ変化量も小さくなる．h で割り単位時間あたりで考えることによって時刻 a での変化の様子を記述することができる．

2. 三角関数と指数関数の微分

　高校の数学 III での重要課題であり，多くの学生は知っているはずだが，受講者の中には数学 III を履修していない学生もいるので，基本的事項をまとめておいた．

$$(\cos t)' = -\sin t \qquad (\sin t)' = \cos t$$

これは $(\cos t, \sin t)$ が原点を中心とする半径 1 の円周上の速度 1 の運動（t はラジアン）であることを利用して，その速度ベクトルが位置ベクトルを 90 度回転したものであることから自然に導かれる．

　指数関数では

$$\frac{a^{t+h}-a^t}{h} = \frac{a^t a^h - a^t}{h} = a^t \frac{a^h-1}{h}$$

より $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \alpha$ とおいて $(a^t)' = \alpha a^t$ を得る．ここで $\alpha = 1$ となるときの a の値を e と表す．数学で最も重要な定数の一つである．これによって

$$(e^t)' = e^t, \qquad (e^{ct})' = ce^{ct}$$

を得る．2 番目の式は次の変形による．

$$\frac{e^{c(t+h)}-e^{ct}}{h} = e^{ct}\frac{e^{ch}-1}{h} = ce^{ct}\frac{e^{ch}-1}{ch} = ce^{ct}\frac{e^k-1}{k}$$

$h \to 0$ のとき $k = ch \to 0$ なので最後の分数式は 1 に収束する．

3. 変化量一定の現象

　$x'(t)$ は $x(t)$ の瞬間での単位時間当たり変化量である．これが一定だとすると $x(t)$ は

$$x'(t) = C$$

という条件を満たす．導関数の等式で与えられる条件を微分方程式と呼び，微分方程式を満たす関数を見つけることを微分方程式を解くという．この方程式では解は

$$x(t) = Ct + D$$

という一次式になる．変化量一定の現象は一次関数で記述される．

4. 変化率一定の現象

変化量は全体量が大きければ大きくなるので全体量との割合が重要である．これを変化率という．単位時間当たりの瞬間的な変化率は

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{hx(t)}=\frac{x'(t)}{x(t)}$$

である．ここで変化量 $x(t+h)-x(t)$ を h で割ることによって単位時間当たりの変化量とし，さらに全体量 $x(t)$ で割ることによって変化率にしている．さらに $h\to 0$ にすることにより瞬間における単位時間当たり変化率を得る．

変化率一定の現象は微分方程式 $x'(t)=Cx(t)$ で記述される．この方程式の解は指数関数 $x(t)=De^{Ct}$ である．

今回の提出課題について

問 11 (1) 身長が毎月 5 伸びるのだから身長の変化量が月当たり 5 で一定ということだ．これは変化量一定の現象であり一次関数で記述される．

(2) 出生率とは単位期間（通常は 1 年間）における出生数を人口で割ったもの（実際にはそれを 1000 倍し，1000 人当たりの数字で表される）だ．逆に死亡率は死亡数を人口で割ったものだ．転入・転出はないとしているので，出生数から死亡数を引いたものが人口の増加数である．これを人口で割れば単位時間当たりの人口増加率が出てくる．ゆえにこれは変化率一定の現象であり，指数関数で記述される．

【コメント】

- (1) は簡単だ．多くの人ができていた．なお式としては時間の単位を月で，長さの単位を mm でとれば $5t+a$ になる．これを $5t$ とする解答があったが，正しくない．$t=0$ での身長を a とするべきだ．
- (2) は間違いも少なからずあった．出生率とは 1 年間に生まれる子供の割合だ．同様に死亡率とは 1 年間に死亡する人の割合だ．解答例はあっさり書き過ぎたので，少し細かく述べよう．出生率を α 死亡率を β その年の人口を N とすれば 1 年間の人口の変動は

$$N(t+1)-N(t)=(\alpha-\beta)N(t)$$

ある時刻での変化を見るためには時間間隔を短くし，その時間で割って 1 年あたりになおせばよい．

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h}=(\alpha-\beta)N(t)$$

すなわち $N'(t)=(\alpha-\beta)N(t)$ であり $N(t)$ は指数関数 $Ce^{(\alpha-\beta)t}$ となる．
- コメントに厳密な議論を書いたが，まずは変化量が一定か変化率が一定か，状況から感じ取ってほしい．出生率 − 死亡率はまさに人口の変化率だ．

問 12 人口増加率は人口の単位時間当たりの変化率を表すので，人口 $N(t)$ によって $N'(t)/N(t)$ で記述される．工場の稼働率は，工場のすべての機械の中で動いている機械の割合である．これは時間とともに変わり得るものだが，稼働率自体は何らかの変化の状態を表してはいない．その時点での工場の稼働状態を述べているだけだ．これは微分によっては記述されない．

経済成長率とは GDP（国内総生産）の年あたりの増減率である．GDP の変化を表しており微分によって記述することが可能と考える．例えば $G(t)$ を時刻 t における過去 1 年間の国内総生産

を表すとしよう．このような統計調査はないが，形式的に考えることは可能である．経済成長率は $\dfrac{G(n)-G(n-1)}{G(n)}$ とすればよい．ただし，GDP が急激に変動する時期もある．その時は短い時間 h での変化を調べ，そのままの状況で 1 年間続いたら経済成長率はどうなるかを考察する．それは $\dfrac{G(t+h)-G(t)}{hG(t)}$ を考えることに他ならない．h を小さくしていけば $G'(t)/G(t)$ になる．

食料自給率は，その国の必要な食糧の量と，その国で生産される食料の割合を言う．これも食糧生産の変動を表すものではなく，微分によっては記述されない．

【コメント】

- この問題は数学の問題ではない．数学ではどんな（連続）関数もそれを積分したもの（原始関数）の微分になるからだ．しかし，応用上は原始関数に意味が意味がなければ仕方がない．要するに，これらの概念が何らかの量の変化量（変化率）で記述されているか素朴に考えてもらうという趣旨である．
- 微分とは単位時間当たりの変化量である．人口増加率はまさに変化量の総人口における割合で，微分によって記述されるのは明らかだ．これは理解してほしい．
- 半数ほどの人が正しい答えを記述しているが，その理由は怪しい．時間によって変化する量という点ならすべてあてはまる．何かの量（これ自身時間によって変化する）の変化量（あるいは変化率）として記述されることが微分で表されるための条件だ．微分とは単位時間当たりの瞬間的な変化量であることを意識してほしい．
- 食料自給率，工場稼働率も時間によって変動するので，その変化量（変化率）を考えることができる．しかし，それは食料自給率，工場稼働率の微分であって，食料自給率，工場稼働率が何かの微分になっているわけではない．実際，食料自給率が高いからと言って，食料自給の状況の変化が規定されるわけではない．

  なお，食料自給率を積分した量を考えれば食料自給率はその微分になる．しかし，このような量を考える意味があるかは私には分からない．

数学の世界 C 講義メモ（6 月 26 日）

今回の講義内容

1. 前回の提出課題について

   問 12 についてコメントした．この問題は数学の問題ではないが，微分がどのようなものに応用されるのかの一つの見方を与える．前回の講義メモを確認してほしい．

2. 変化率一定の現象：放射性元素の崩壊

   変化率一定の現象としてもっとも基本的なのが放射性元素の崩壊である．「放射性元素は一定時間に一定の割合で崩壊していく」という科学の法則から，放射性元素の個数 $x(t)$ についての微分方程式 $x'(t) = -\alpha x(t)$ を得る．これから $x(t)$ は指数関数 $x(t) = De^{-\alpha t}$ と表示される．

   これから放射性元素の半減期が理解できる．半減期とは崩壊によって放射性元素の個数が半分になるのに要する時間である．

   $$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{De^{-\alpha t_1}}{De^{-\alpha t_2}} = e^{\alpha(t_2 - t_1)}$$

   だからこれが 2 になるためには

   $$t_2 - t_1 = \frac{\log_e 2}{\alpha}$$

   である．すなわち半分になるのにかかる時間は最初にある元素の量によらず一定である．これを半減期と呼び，崩壊のスピードを知る目安とする．

今回は後半に第 2 部の試験を行ったので授業中に扱った事項は以上である．次回は変化率が様々な条件で変化していく場合に，数学を利用してみる．

数学の世界 C 講義メモ（7 月 3 日）

来週で授業を終えます．第 3 回の試験は 7 月 24 日に行います．3 回の試験で合格基準に達しないものは掲示で呼び出しますので注意してください．

今回の講義内容

1. 単一の生物の生態系モデル

   生物 X の時刻 t における個体数を $x(t)$ とおく．この増加率は $x'(t)/x(t)$ になる．増加率が一定の現象は前回考察した放射性元素の崩壊と同じであり，解は指数関数になる．増加率一定の場合は

   もう一つ考えたのは増加率が x の増加に従って減少していく場合である．簡単にするために増加率を x の一次関数にする．

   $$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha(\beta - x)$$

   これをロジスティック方程式と呼び，この解のグラフは講義ノートに掲載している．この曲線を成長曲線と呼ぶ．

2. 二種の生物の生態系モデル

   生物 X の個体数を $x(t)$，Y の個体数を $y(t)$ と表す．二種の生物が相互に関連して増加率に影響を与えるような状況を考える．このとき $(x(t), y(t))$ は座標平面上の点を定め，時間の変化による $(x(t), y(t))$ の変化は座標平面内の曲線ととらえることができる．被食者・捕食者モデル，生存競争モデルという二つのモデルを紹介した．どちらも変化率を x, y の 1 次式で記述している．さらに具体的に数値を決め，数式処理ソフトを使って解の曲線を記述したのが図 9 および図 10 である．最初の状態（初期状態，$t = 0$ での座標平面上の点）を決めれば一つの曲線（その後の二つの種の個体数の変化）が決まる．

   この図は $x'(t)$，$y'(t)$ の正負を考えることによっても推察できる．$x'(t)$ が正（負）のときは右（左）方向に変化する．また $y'(t)$ が正（負）のときは上（下）方向に変化する．$x'(t)$ の正負は変化率の正負と同じだから，モデルを作るために設定した 1 次式の正負を考えることにより $(x(t), y(t))$ がどちらの方向（左上，左下，右上，右下のいずれか）に変化するか知ることができる．図 9 と図 10 はそのような考察が有効だということを示している．なお，生存競争モデルの解の解説について，講義ノートでは

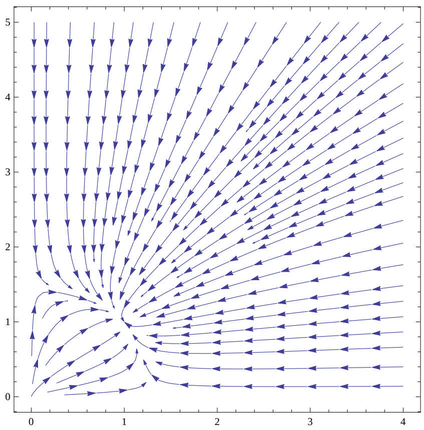

図 1　生存競争モデル $x'(t) = (4 - 3x - y)x,\ y'(t) = (3 - x - 2y)y$

一つの場合しか扱っていなかった．実は $x'(t)$ の符号が変わる直線 $A-Bx-Cy=0$ と $y'(t)$ の符号が変わる直線 $D-Ex-Fy=0$ の位置関係によって，全ての解が二つの直線の交点に近づいていく場合もある．この場合は二つの種が安定した共存状態に近づくと言える．係数を具体的に決めて数式処理ソフトで記述してみたので紹介する．確かにどの解も二つの直線の交点に近づいていくのが分かるだろう．

3. ケプラーの法則

この章の最後の話題は，万有引力の法則と運動方程式からケプラーの法則を導くことだ．難しい課題だが，微分積分の理論の誕生という科学史上の大事件を考えるうえで最も重要なことである．細かい点は理解できないかもしれないが，好奇心を大事に授業に臨んでほしい．今日はケプラーの法則の解説のみにとどめた．

本日の提出課題

問 15 対数を利用する標準的な問題であり高校でもやったことがあるかもしれない．

【解答例】 $(1.02)^n > 2$ となればよいので対数をとって $\log_{10}(1.02)^n = n\log_{10}1.02 > \log_{10}2$ である．ゆえに

$$n > \frac{\log_{10}2}{\log_{10}1.02} \fallingdotseq \frac{0.3010}{0.0086} = 35$$

より 2 倍になるのに 35 年を要する．

【コメント】

- wikipedia によれば地球の人口は 20 億人（1927 年）から 40 億人（1974 年）になるのに 37 年間，30 億人（1961 年）から 60 億人（1998 年）になるのに 37 年間要しているので，この間 2 %に近い増加率で推移していたものと思われる．ただし，40 億人（1974 年）から 37 年たっても 70 億人（2011 年）にとどまっているので増加率は減少している．
- $x'(t)/x(t) = 0.02$ として $x(t) = Ae^{0.02t}$ として考察してもよい．その場合 2 倍になるのに要する時間を a とすれば $e^{0.02a} = 2$ が成り立つ．両辺の自然対数をとれば

$$0.02a = \log 2 \fallingdotseq 0.6931$$

であり 35 年を要することが分かる．

問 16 プリントに天文単位を AI と書いてしまったが，講義で使ったように AU(astronomical unit) の間違いである．AU は距離の単位で地球と太陽の平均距離（1 億 4959 万 7870.7km）を 1AU とする．

【解答例】 ケプラーの第 3 法則により軌道長半径の 3 乗と公転周期の 2 乗は比例する．すなわち，二つの比は惑星によらず一定である．特に時間の単位を年で距離の単位を AU でとれば，地球ではどちらも 1 なのでその比も 1 である．ハレー彗星の軌道の長半径を xAU とすれば

$$\frac{x^3}{76^2} = 1, \qquad x = 76^{2/3} \fallingdotseq 17.94$$

太陽から最も近づくときは 0.59AU なので，最も離れるときは $2 \times 17.94 - 0.59 = 35.29$AU である．

【コメント】

- 太陽系で最も遠い惑星である海王星の太陽からの距離は，平均 30.11AU である．ハレー彗星はそれよりも遠いところまで到達する．

- 軌道長半径とは楕円の中心からの長径上の点までの距離を言う．太陽（焦点）と近日点（太陽に最も近づく点），遠日点（太陽から最も離れる点）はすべて長径上にあるので，長半径の 2 倍が，近日点までの距離と遠日点までの距離の和になる．遠日点までの距離を求めるためには長半径の 2 倍から近日点までの距離を引く．
- 比例定数は講義資料では $\dfrac{4\pi^2}{GM}$ である（問 16 の 2 行上）．ただし，比例定数は単位の取り方で変わる．地球を基準に考えて，公転周期を 1 年，距離を 1AU としているのだから比例定数は 1 で良い．
- 講義での説明が悪く，長半径のみを求めた人もいたが，それも正解とみなす．ただし，長半径は楕円の中心からの距離であって太陽（焦点）からの距離ではない．その認識は持ってほしい．
- 授業の後に $76^{2/3}$ についてきれいな値にならないのかという質問を受けた．この問題は実際の天体を扱っており，数値がきれいになるように工夫して作った問題ではない．きれいな数値にならないと間違っているような気がするという感覚は高校できれいな数値になる問題しか扱ってこなかった悪影響である．

数学の世界 C 第 1 回試験（5 月 22 日実施，試験時間 45 分）の解答とコメント

小問を含め 4 題出題したが各 10 点，40 点満点で採点した．平均点は 33.09 点，満点は 30 人だった．試験に出題できる内容は，講義で解説した内容の一部に過ぎないので，これだけで講義の内容を完全に理解できたとまでは判断できないが，まずは満足のいく結果だった．ただし，証明問題は舌足らずな答案も目立つ．基本的な理解ができていると思われる答案は正解にしたが，解答例とも比較してみてほしい．

今回の試験の合格点は 20 点とする．これに満たないものが 7 人いたが，解答例を参考に学習した上で，一度答案をもって私のところに来てほしい．簡単な面談の上，合格とする場合がある．

問 1 (1)　ユークリッドの互除法により 271 と 186 の最大公約数を求めよ．
(2)　(1) の計算を利用して $271M + 186N$ が最大公約数になるような整数 M, N の例を求めよ．

【解答例】 (1) 互除法の計算は以下のようになる．

$$271 \div 186 = 1 \cdots 85, \quad 186 \div 85 = 2 \cdots 16, \quad 85 \div 16 = 5 \cdots 5, \quad 16 \div 5 = 3 \cdots 1$$

次は $5 \div 1$ で割り切れるので最大公約数は 1 である．
(2) 次のように互除法の計算を逆にたどればよい．

$$\begin{aligned}1 &= 16 - 3 \times 5 = 16 - 3 \times (85 - 5 \times 16) = 16 \times 16 - 3 \times 85 = 16 \times (186 - 2 \times 85) - 3 \times 85 \\ &= 16 \times 186 - 35 \times 85 = 16 \times 186 - 35 \times (271 - 186) = 51 \times 186 - 35 \times 271\end{aligned}$$

$M = -35,\ N = 51$ とおけばよい．
【コメント】

- (1) については，前の割り算の余りが次の割り算の割る数になるという方法をきちんと理解できているかを判断のポイントにした．数が大きいうちは，商よりも余りのほうが大きいので間違えた人はいなかったが，繰り返すうちに混乱してしまう人もいる．そのような人は減点対象にした．余りの系列（この場合は，271，186，85，16，5，1）を意識して計算すると混乱しないで済むと思う．
- (2) については，割り算の式を利用して，1 を 5 と 16 の定数倍の和で表し，その 5 を 16 と 85 の定数倍の和として表し，という形で計算を進める．解答例を見ても分かるように，1 が余りの系列の隣り合う二つの数の定数倍の和として表されている．そして隣り合う数を徐々に大きいほうに移していく．こうすれば必ず答えが得られることは容易に判断できる．

  なお，1 を 5 と 16 の定数倍の和で表した後，その 5 を 16 と 85 の定数倍の和で，16 を 85 と 186 の定数倍の和で表していく人がいる．結果的に 1 は 16 と 85 と 186 の定数倍の和になる．確かにこの考え方でも計算できるが，余りの系列が長いと計算はどんどん複雑になり見通しも悪くなる．この方法で計算ミスをした人は通常の計算ミスよりも減点を大きくしている．
- 平均点は 18.79 点だった．良くできていた．

問 2　a を 2 以上の自然数とする．a の 1 以外の自然数の約数で最小のものは素数になることを示せ．

【解答例】a は 2 以上なので 2 より大きな約数（例えば a 自身）を持つ．そこで 2 以上の約数で最小のものは存在し，それを p とおく．ここでもし p が素数でなければ p は 1 と p 自身以外の約数 q を持つ．$2 \leqq q < p$ が成り立つ．一方，p は a の約数で，q は p の約数であることから，$a = pk,\ p = qh$ と表せる．ゆえに $a = pk = qhk$

であり q は a の約数である．a は p より小さな 2 以上の約数を持つことになり，これは p の取り方に矛盾する．

【コメント】

- 5 月 8 日の講義の提出課題で，5 月 15 日に詳しく解説した問題である．素因数分解を使わないようにという指示は，この問題が，素因数の存在を保証し，素因数分解の可能性の証明の出発点として使うためだ．
- 解答例では，a に 2 以上の約数が存在することから議論を始めた．2 以上の約数が存在しなかったら，「2 以上の約数で最小のもの」は存在しなくなり，問題の主張は意味を失う．このことをチェックしておくことによって，2 以上のすべての自然数について素因数の存在が証明される．ただし，講義で言い忘れてしまったのでこの部分は採点対象にはしていない．
- 解答例では背理法を使っており，q を $2 \leqq q < p$ を満たす p の約数としている．ただここで「p の約数」という言葉を落としている答案があった．これでは q が何か分からなくなるので議論は破たんしてしまう．なお，単に「約数」とするのは「p が素数でないとする」から出発する議論の中での用語なので間違っているとは言えない．しかし「a の約数」としてしまうと，何故かという疑問が生じる．
- 次の議論は「p が a の約数で，q が p の約数だから，q は a の約数である」というものである．解答例ではこの部分の証明も含めて書いているが，これは結果のみでも構わない．十分理解できていると判断する．
- 矛盾の詰めが甘い答案も目につく．解答例の「a は p より小さな 2 以上の約数を持つことになり」という表現が，最もよく矛盾を導くのではないか．
- 背理法を使わずに，「a の約数 p が素数でなければ，a は p より小さな 2 以上の約数を持つ」ことを示した答案があった．実質的には同じ内容であり，これも正解である．
- p, q 等の文字を使わずに言葉でぎろんする答案もあった．それでも本質は理解できていると思うが，やはり文字を使ったほうが分かりやすい．巷では「文字や式を使うと分かりづらい」と感じる人も多いようだが，この講義では文字や式に慣れてほしい．
- 平均点は 7.37 点だった．

問 3　100 以下の自然数 n で $\sqrt[4]{n}$ が有理数になるものをすべて求めよ．なお，求めたもの以外にないことを理由をつけて説明すること．

【解答例】 $1^4 = 1 < 2^4 = 16 < 3^4 = 81 < 100 < 4^4 = 256$ から $\sqrt[4]{n}$ が整数になるような n は，1, 16, 81 の 3 つである．逆にそれ以外の n については $\sqrt[4]{n}$ は整数にならない．一方，$\sqrt[4]{n}$ は $x^4 - n = 0$ の解であるから，整数でなければ無理数である．よって $\sqrt[4]{n}$ が有理数になるのは $\sqrt[4]{1} = 1$，$\sqrt[4]{16} = 2$，$\sqrt[4]{81} = 3$ に限られる．

【コメント】

- 1, 16, 81 の 3 つが出てきた時点で 5 点を与えた．
- これ以外に有理数でないことの理由は，ただ整数ではないだけでは不十分だ．整数でないからと言って有理数でないとは言えない．このミスが多かった．
- 「整数でなければ無理数である」という主張が成り立つ理由は $x^4 - n = 0$ の解だからだ．これが明示してある答案を正解とみなした．
- $\sqrt[4]{n} = b/a$ と既約分数でおいて，$a = 1$ を証明した答案もあった．$b^4 = na^4$ だから a が素因数をもつと

矛盾が生じるというもので良い解答だと思う．

- 平均点は 6.94 点だった．

証明問題では意味不明な記述が多く見受けられた．採点者に意味が伝わらない主張は基本的に評価の対象にならないのでその部分の得点は与えていない．採点結果に疑問のある人は申し出てほしい．

数学の世界 C 第 2 回試験（6 月 26 日実施，試験時間 45 分）の解答とコメント

小問を含め 4 題出題したが各 10 点，40 点満点で採点した．平均点は 26.24 点，満点は 10 人だった．

問 1 (1)　球面三角形の 3 つの内角を α, β, γ（ラジアン）とする．この三角形の面積が $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$ であることを示せ．ただし R は球の半径であり，球の表面積は $4\pi R^2$ である．

【解答例】 三角形の頂点を A，B，C とし，球面を A を頂点とする内角 α の 2 つの二角形，B を頂点とする内角 β の 2 つの二角形，C を頂点とする内角 γ の 2 つの二角形で覆う．このとき △ABC と，その対蹠点の作る △ABC と合同な三角形は 3 重に，他の部分は 1 重に覆われる．6 枚の二角形の面積の和から球の面積を引けば，△ABC の面積の 4 倍が残ることになる．二角形の面積は内角の大きさの $2R^2$ 倍なので，三角形の面積を S とおけば

$$4S = 2 \times 2\alpha R^2 + 2 \times 2\beta R^2 + 2 \times 2\gamma R^2 - 4\pi R^2 = 4(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

となり，両辺を 4 で割れば示すべき等式を得る．

【コメント】

- $4S = 4(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$ の式をどう説明するのかがポイントになる．ここでは図は書かないが，答案では図を描きながら説明することを期待した．説明のないもの，間違った説明をしているものは 5 点のみ与えた．また説明はあるが，説明不足と思われるものは若干減点した．説明のポイントは 6 枚の二角形で球面を覆うこと，二つの三角形は 3 重に他の部分は 1 重に覆われることを指摘してほしい．曖昧な表現が目についた．
- n 角形の面積の公式 (内角の和 $- (n-2)\pi)R^2$ から $n = 3$ として説明する答案があったが，この公式は 3 角形の面積を出発点に証明したものだ．この議論は誤りであり，0 点とした．
- 平均点は 5.75 点だった．

問 1 (2)　球面正 n 角形（n 個の辺の長さがすべて等しく，n 個の角の大きさもすべて等しい球面 n 角形）の内角を α（ラジアン）とする．$\alpha > \dfrac{n-2}{n}\pi$ が成り立つことを示せ．

【解答例】 n 角形の面積は

$$(\text{内角の総和} - (n-2)\pi)R^2$$

で与えれらる．正 n 角形なので内角の総和は $n\alpha$ であり面積は

$$(n\alpha - (n-2)\pi)R^2 > 0$$

である．よって $n\alpha - (n-2)\pi > 0$ であり，$\alpha > \dfrac{n-2}{n}\pi$ が成り立つ．

【コメント】

- $n\alpha - (n-2)\pi$ が正であることを言うが，解答例では面積が正であることと結び付けている．「平面上の正 n 角形の内角より大きくなる」からというのは，これが証明すべきことに他ならないので正解にはならない．
- 平均点は 8.48 点

問 2　A を北緯 30 度東経 130 度の点（南西諸島周辺），B を北緯 45 度東経 10 度（イタリア北部）とする．AB の距離を c とおくとき，$\cos(c/R)$ の値を求めよ．ただし，R は地球の半径である．

$$\cos(c/R) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

【解答例】 ここに表示した等式は 2 点の緯度・経度による表示なので，ただ代入するだけだ．

$$\cos(c/R) = \cos 30 \cos 45 \cos(130 - 10) + \sin 30 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

【コメント】

- 講義で 2 点の距離を求めるために，また余弦定理を導くために使った等式だ．緯度を θ_j，経度を φ_j で表していることに気が付くべきだ．
- 緯度・経度を通常の角度で与えたが，それをわざわざラジアンに直している人がいる．ここでは単に三角比の値をとるだけなのでラジアンにする必要はない．実際プリントの例（熊本大学とエッフェル塔との距離）でもラジアンは使わずに扱っている．

  ラジアンを使用する必要があるのは長さと関係づける場合である．左辺の c/R は長さなのでこれはラジアンで考えるべきだ．
- 北極からの距離を考える答案があったが，余弦定理の証明の議論との混同だ．余弦定理の証明では，北極からの距離から緯度を定め（今回の問題の問 3），緯度経度を決めたのちに問題に示した公式を利用して距離を求めている．この問題は最初に緯度と経度を与えているのだから，距離を考える必要はない．
- 平均点は 7.89 点

問 3　北極から距離 r の点の緯度をラジアンを使って表せ．またその緯度の緯線の長さを求めよ．なお，地球の半径は R とする．

【解答例】 北極を N，北極から距離 r 離れた点を A とおけば，∠NOA の大きさが $\frac{r}{R}$ になる．よって OA の赤道面とのなす角は $\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$ であり，これが A の緯度に他ならない．

緯度 θ の緯線は座標空間の中で半径 $R\cos\theta$ の円周なので，長さは

$$2\pi R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}\right) = 2\pi R \sin\frac{r}{R}$$

【コメント】

- 緯度を r/R とする答案が少なからずあった．緯度は赤道面からの角度であり，北極方向からの距離ではない．
- 余弦定理を使う答案があるが，求めるのは円周の長さなので見当外れだ．
- 平均点は 4.12 点

数学の世界 C 第 3 回試験（7 月 24 日実施，試験時間 60 分）の解答とコメント

3 題出題した．問 1 と問 3 が各 15 点，問 2 が 10 点の 40 点満点で採点した．平均点は 27.50 点，満点は 4 人だった．問 4 はアンケートで評価の対象にはしていない．これについては別に扱うことにする．

問 1　次の現象について，変化量一定か変化率一定か，あるいはそのどちらでもないか理由をつけて答えよ．

(1) 時速 20km で走るマラソンランナーについてスタート地点からの距離が時間によってどのように変化するか.

(2) 上に放り投げた物体の高さが，時間によってどのように変化するか.

(3) 木材に含まれる炭素のうち放射性炭素 ^{14}C の割合がどのように変化するか.

【解答例】 (1) 時速 20km なのでスタートしてから t 時間の間に走る距離は $20t$km である．1 次関数なので変化量一定である．
(2) 高さは，最高点に到達するまでは増加し，それ以後は減少する．これは 1 次関数でも指数関数でも表せないので，どちらでもない.
(3) 放射性元素の崩壊は，単位時間当たり一定の割合で起こる．これは変化率一定の現象である.
【コメント】

- いろいろな現象の中で最も基本的な現象は変化量一定の現象と変化率一定の現象である．講義では前者が 1 次関数として，後者が指数関数として記述されることを紹介した．解答例はそれをもとに記述している.
- ランナーの走る速さは時間によって変わるという答案があった．確かにその通りだが，それはその次の問題だ．ここでは等速度だとして出題している．この講義で扱った現象（生態系を含む）はあくまで過度に理想化したもの（数学モデル）である．それによって数学的議論を行っている．もちろんそれは現実とは異なるという批判はある．数学ですべてわかるのであれば，世の中はあまり面白くないだろう．とはいっても，このような数学の議論に価値がないわけではない．それは様々な現象の深い理解につながっており，現実に様々な場面で利用されている.
- (2) は加速度一定の現象である．加速度とは速度の微分（速度の変化量）であって，変化率ではない.
- 放射性炭素 ^{14}C の半減期は約 5730 年である．自然界では崩壊する一方で，宇宙線によって窒素からたえず作り出されており，放射性炭素 ^{14}C の割合はほぼ一定に保たれている．放射性炭素の割合は一定だという答案があったが，それはこのことを言っているのだろう．樹木は呼吸によって外気を取り込むのでその放射性炭素の割合は大気の放射性炭素の割合と等しい．しかし，伐採されて木材になるともはや呼吸は行われないので，放射性炭素は減少していく．このことを利用して年代測定が行われることは有名である.
- 15 点満点で平均点は 11．43 点だった.

問 2　指数関数により変化する量 $X(t) = Ca^t$ について，時刻 t から $t+1$ の間に変化する量の $X(t)$ に対する割合は，時刻 t によらず一定であることを示せ．ただし，微分は使ってはいけない.

【解答例】 時刻 t から $t+1$ の間に変化する量は $X(t+1)-X(t)$ である．この $X(t)$ に対する割合は

$$\frac{X(t+1)-X(t)}{X(t)} = \frac{Ca^{t+1}-Ca^t}{Ca^t} = \frac{Ca^t a - Ca^t}{Ca^t} = a-1$$

であり t によらず一定である．

【コメント】

- 変化率一定の現象は指数関数で記述されることを解説したが，逆に指数関数で記述される現象が変化率一定の現象であることを示すための問題だ．言葉を式として記述すればあとは指数法則を使うだけだ．
- 単位時間の変化量を考えているので，変化量を単位時間あたりに換算する必要はない．例えば 10 分間での変化量から 1 時間当たりの変化量を出すためには 10 分間 = 1/6 時間で割ってやらなければならない（すなわち 6 倍する）．
- $X(t+1)$ と $X(t)$ の割合が一定だとする答案があったが，問題に出されていることと若干ずれがある．
- 10 点満点で平均点は 7.80 点だった．

問 3　月は地球を焦点とする近地点 36 万 3300km，遠地点 40 万 5500km の楕円軌道を描いているとする．また公転周期は 27 日と 7 時間 43 分（27.32 日）である．静止衛星軌道（公転周期が地球の自転周期と一致する円軌道）の半径を式で求めよ．またその値が 4 万 km と比べて大きいか小さいか答えよ．ただし，地球の自転周期は 23 時間 56 分（0.988 日）である．（注：データは Wikipedia による．）

【解答例】 月の軌道の長半径は $(36.33+40.55)/2 = 38.44$ 万 km である．静止衛星の軌道の半径を x 万 km とすれば，ケプラーの第 3 法則から軌道長半径の 3 乗 ÷ 周期の 2 乗が一定なので

$$\frac{x^3}{(0.988)^2} = \frac{(38.44)^3}{(27.32)^2}$$

が成り立つ．よって

$$x = 38.44\left(\frac{0.988}{27.32}\right)^{2/3} \qquad \text{（単位は万 km）}$$

である．これが 4 万 km より大きいか小さいかを知るには $(27.32/0.988)^{2/3}$ が $38.44/4 = 9.61 = (3.1)^2$ より大きいか小さいかを調べればよい．$27.32/0.988 \fallingdotseq 28.6$ と $(3.1)^3 = 29.791$ から

$$x = 38.44\left(\frac{0.988}{27.32}\right)^{2/3} > 38.44\left(\frac{1}{(3.1)^3}\right)^{2/3} = \frac{38.44}{(3.1)^2} = 4$$

であり，x は 4 万 km より大きい．

【コメント】

- 軌道長半径を遠地点までの距離とした答案があった．この誤解をしないように試験の際に板書してコメントしたのだが．
- 「式で求めよ」の意味をつかめなかった人もいるようだ．期待したのは解答例の式だが，いかがだろうか．
- 0.988/27.32 を 1/27 に置き換えて 4 万 km より大きいとした答案が多かったが，大きな数に置き換えて 4 万 km より大きくなったとしてももともと 4 万 km より大きいとは言えない．若干減点した．

- この数値を関数電卓で計算すれば 42037km になる．なお，静止衛星が地球から見て静止しているように見えるためには，赤道面の上になければならない．静止衛星の存在し得る場所は非常に少なく，すでに過密が問題になっている場所もあるという．
- 15 点満点で平均点は 8.28 点だった．