線形代数 I 講義メモ (4 月 11 日)

授業に先立って，微分積分と線形代数の果たす役割を解説した．また，講義の進め方や試験・評価についても解説した．シラバスも参考に確認しておいてほしい．

本日の講義の要点

1. 行列の定義と用語 (1.1 節)

   注意事項を箇条書きしておこう．

   - 1 ページから 2 ページに掛けて様々な用語が出てくる．これらはすべて正確に覚えておかなければならない．覚えるポイントは行が横の並びを列が縦の並びを意味しているということだ．そして番号を考えるときには行，列の順に考える．これを意識するだけで多くの用語は自然に覚えられるだろう．
   - スカラーはベクトルの特別な場合であり，ベクトルは行列の特別な場合であることに注意せよ．ベクトルは行列でないと思はないこと．
   - A が $m \times n$ 行列であるとき，$A = \left[a_{ij}\right]$ と略記することがある．1×1 型行列と思わないこと．

   この節で最も重要なのは，行列，ベクトル，スカラーの記号の使い分けである．線形代数は行列やベクトルを一つの対象として扱うので，一つの文字で表す必要がある．そのとき，その文字が行列，ベクトル，スカラーのいずれを表しているのか常に意識する必要がある．形式的なこととしておざなりにする人もいるが，それでは講義内容を理解することはできない．

行列	大文字	A, B, C, X, Y
ベクトル	小文字のボールド体	$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$，筆記用のボールド体 (一本余分)
スカラー	小文字	$a, b, c, x, y, \alpha, \beta$

2. 行列の演算 (1，2 節)

   和，差，スカラー倍の定義は簡単だろう．計算例 (例 2) も煩雑で面倒くさいと思う人はいるだろうが，難しいと感じる人はいないのではないか．なお，和と差は型が同じ行列どうしでないと定義できない．

   積の定義はより複雑だが正確に覚えること．次の 3 つがポイントである．

   - AB が定義できるためには A の行と B の列が同じ個数の数からならなければならない．すなわち A が $m \times n$ 型で，B が $k \times l$ 型のとき $n = k$ でなくてはならない．
   - AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の積である．ここで積とは対応する成分を掛け合わせたものを加え合わせることを言う（内積の計算と似ていることに注意せよ）
   - A が $m \times n$ 型で，B が $n \times l$ 型のとき，AB は $m \times l$ 型である．

   積についてはテキストの例 3 を使って解説した．ただ，黒板に問 4 と書いてしまったようだ．つまらないミスで混乱させたかもしれない．このようなミスは気づいた人がすぐに指摘してほしい．

本日の提出課題

今回はレポート課題とせず，その場で提出してもらった．要望，感想についてコメントしておく．

- 板書が読みづらい，字が小さいなどの指摘があった．また声が聞き取りづらいとの声もあった．気をつけてはいるのだが完全に皆さんの希望どうりにすることは難しい．線形代数では添え字を使わなくてはならないという問題もある．私も気をつけるが，皆さんも前のほうに座るなどの工夫をしてほしい．この講義室は 135 人収容だが，受講者は 60 人弱なので前半分の席で足りるはずだ．

- ゆっくり進めてほしい，演習を増やしてほしいとの意見があった．演習は必要な範囲で取り込む予定だ．しかし，演習主体の授業とは公式の使い方など How to に重点を置いた授業だ．使い方を知るだけでは，何故数学が使えるのかの理解は深まらない．今日のガイダンス部分でもその話をしたつもりだ．演習を重点に講義を組み立てるつもりはない．
  「ゆっくり」については，気を付けてやっているつもりだ．ただ，私にとってごく当たり前であっても，皆さんにとっては難しいということは当然あり得る．さらっと説明してスピードが速すぎるとの印象を持つ人もいるだろう．これを避ける最善の方法は質問によって授業にストップをかけることだ．講義は教員と学生の双方で作るものだと思う．

計算問題については，良くできていた．

$$2A + B = C, \quad 5A + 3B = D$$

という二つの式から

$$A = 3C - D, \quad B = -5C + 2D$$

を導けばよい．こうしてみると，A, B, C, D が行列であることを忘れてしまえば，中学校で習った連立方程式の解法とまったく変わらない．問題では

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

なので

$$A = 3C - D = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = -5C + 2D = \begin{bmatrix} 17 & -7 & -1 \\ -6 & -14 & 12 \end{bmatrix}$$

である．なお，A, B の成分を未知数でおいて（結局 12 個の未知数が登場する）連立方程式を解くという解答をした人も 5 人いた．この方法では 6 組の連立方程式を個別に解くことになる．これがいかに煩雑かは想像できるだろう．

行列を扱うということは複数の数を一つの対象として扱うことだ．それによって議論は単純になる．このような方法で解いてしまうと行列を導入した良さが使えない．成分で書き下して考えれば良いと思っている人は，行列を扱う本当の意義を理解できない．こうして考えれば行列やベクトルを一つの文字で表すこと，そのためにも記号の使い分けを行うことの必要性を納得できるだろう．

線形代数 I 講義メモ (4 月 18 日)

本日の講義の要点

1. 行列の積の定義の復習
   AB の定義については積が定義できるための条件と AB の (i, j) 成分の計算式を覚えておくこと．なお，計算式については
   $$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$
   の二通りの表示を使いこなせるようにしておくこと．$\sum$ 記号を使いこなすことは線形代数の理解に欠かせない．
2. 行列の演算法則 (1.3 節)
   この節は基本的にテキストに沿って解説した．テキストを補足した点を箇条書きしておく．
   - 例 5 について，一般に連立一次方程式は $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の形に表せることに注意すること．ここで，記号の使い分けを意識しないと無意味になる．どれが行列でどれがベクトルか分かるか．
   - 6 ページの演算法則は行列の相等の定義に基づいて証明される．なお，テキストにある積に関する結合法則の証明には $\sum$ 記号の処理が使われているので注意が必要だ．
     $$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}\right)$$
     については，次の表を見ると分かりやすい．
     $$\begin{array}{ccccc} a_{i1}b_{11}c_{1j} & a_{i1}b_{12}c_{2j} & a_{i1}b_{13}c_{3j} & \cdots & a_{i1}b_{1p}c_{pj} \\ a_{i2}b_{21}c_{1j} & a_{i2}b_{22}c_{2j} & a_{i2}b_{23}c_{3j} & \cdots & a_{i2}b_{2p}c_{pj} \\ a_{i3}b_{31}c_{1j} & a_{i3}b_{32}c_{2j} & a_{i3}b_{33}c_{1j} & \cdots & a_{i3}b_{3p}c_{pj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in}b_{n1}c_{1j} & a_{in}b_{n2}c_{2j} & a_{in}b_{n3}c_{3j} & \cdots & a_{in}b_{np}c_{pj} \end{array}$$
     この表に沿って縦に加えたものは c_{kj} が共通因数として含まれるのでくくり出すことができる．それを横に足していったものが最初の $\sum$ 記号による式である．一方，この表に沿って横に加えたものからは，a_{il} をくくり出すことができる．それを縦に加えたものが最後の式である．これらは，この表全体の pn 個の値の和に等しい．それが真ん中の式である．
     この等式は単にかける順序を変えたもので，等しいのは当然だということに気づいてほしい．
   - 単位行列について $AI_n = A$ の証明を与えた．I_n の成分は δ_{ij}（クロネッカーのデルタ）なので
     $$AI_n\text{の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}$$
     2 番目の等式は $i \neq j$ について $\delta_{ij} = 0$ であること，3 番目の等式は $\delta_{jj} = 1$ であることによる．
   - 行列のべき乗について，正方行列でない行列では定義できないことを注意した．

   この節では多くの用語が出てきたが，全て覚えようとすると消化不良になるのではないか．特に零因子，べき等行列については，今後使う場合でも簡単に意味を紹介しながら使うので覚えないで構わない．
3. 行列の転置 (1.4 節)
   転置行列の定義と転置行列に関する演算法則 (定理 1.1) を解説した．特に追加でコメントすることはない．

本日のレポート課題

17 ページの 1.3 と 1.5 を課題にする．いずれも簡単なのでヒントはつけない．なお，提出締め切りと提出場所は

提出締め切り　4 月 22 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (5 月 9 日)

前回のレポート課題

1.3 については簡単な計算問題なので特にコメントはない．若干注意を要するのが (6) だ．これは 3×1 型と 1×2 型の積なので，積が定義でき，その型は 3×2 型である．4 ページ 3 行目の積の定義で $n = 1$ の場合に相当する．(5) の積の結果は 1×1 型行列である．これはスカラーなのでカッコはつけないのが普通である．

1.5 についてはほとんどの人が内容は理解できていると思う．しかし，説明の仕方は不十分だ．特に，必要条件，十分条件の理解が不十分な人が多い．まず，解答例を示しておこう．

【解答例】(1) 左辺 − 右辺を計算すれば

$$(A + B)^2 - A^2 - 2AB - B^2 = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - 2AB - B^2 = BA - AB$$

となるので，左辺 = 右辺であるためには $BA = AB$ が必要十分である．すなわち A と B が可換であることが (1) が成り立つための必要十分条件である．

(2) 左辺 − 右辺を計算すれば

$$(A + B)(A - B) - A^2 + B^2 = A^2 + BA - AB - B^2 - A^2 + B^2 = BA - AB$$

となるので (1) の場合と同様に A と B が可換であることが (2) が成り立つための必要十分条件である．

【コメント】

- 結論のみ書く人がいるが，それは 0 点として扱われる場合もある．誤った議論による正しい結論は誤答だからだ．
- A と B が可換とは $AB = BA$ が成り立つことを言う．「AB は可換」とは言わない．
- $AB = BA$ を仮定して (1)(2) を示した場合，(1)(2) が成り立つための十分条件しか言っていないことになる．解答としては不十分だ．

  $AB = BA$ ならば (1) が成り立つ．すなわち，$AB = BA$ が成り立てば必ず (1) が成り立つ．$AB = BA$ は (1) が成り立つための十分条件である．
- (1)(2) の等式を変形して $AB = BA$ を導いたとき，それぞれの変形が同値変形であることに注意しなくてはならない．同値変形でないものが一回でもあれば必要条件であることしか分からない．

  (1) が成り立てば $AB = BA$ が成り立つ．すなわち，(1) が成り立つためには $AB = BA$ でないといけない（必要条件）．
- 解答例では，「左辺 = 右辺」と「左辺 − 右辺 = O」が同値であることを利用している．それによって必要十分性を一度に示している．

まったく同じ内容の解答が目につく．共同作業で解答を作ったのであれば問題はないが，誰かの答案を写した結果であればそれをした人に失望する．レポート課題は提出すべきものだが，評価の材料にはしない．写して提出するくらいなら提出しないでほしい．私にも他の人にも迷惑だ．レポート課題はあくまで各自の自宅学習のためのものであることを注意しておく．

本日の講義の要点

1. 対称行列・交代行列

   正方行列に対する概念である．特にコメントするような事項はない．なお，講義では問 11 を解説した．${}^tA$ は A を対角成分を中心に折り返したものなので対角成分 a_{ii} は変わらない．ゆえに A が交代行列

（すなわち ${}^tA = -A$ ）であれば $a_{ii} = -a_{ii}$ になる．すなわち $a_{ii} = 0$ であり，交代行列の対角成分は 0 であることが分かる．

2. 三角行列・対角行列

これも正方行列に対する概念である．なお，対角成分は左上から右下に斜めにならぶ成分であり，その逆ではない．

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は三角行列でも対角行列でもない．講義では上三角行列の積が上三角行列になることの証明を与えた．教科書では書かれていないので補足した．

- A が上三角行列であることは，全ての $i > j$ を満たす添え字の組について $a_{ij} = 0$ が成り立つことと同値である．これについては 2 ページの正方行列の表示を使えばよい．
- AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の積である．A の第 i 行では第 1 成分から第 $i-1$ 成分までがすべて 0 であり，B の第 j 列では第 $j+1$ 成分から第 n 成分までがすべて 0 である．
- よって $i > j$ のときは $j + 1 \leqq i$ なので積の定義でのすべての項が 0 になる．よって (i, j) 成分は 0 であり AB は上三角行列になる．

3. 正則行列

これも正方行列に対する概念である．なお，12 ページの冒頭にあるように，逆行列は存在すれば唯一つである．これによって A の逆行列を A^{-1} と表すことが許される．講義では例 11 よりもっと強く

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ がについて A が正則であるためには $ad - bc \neq 0$ が必要十分である．このとき次が成り立つ．

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

を紹介した．この事実自体は周知のことのようだが，証明は知らない人もいるようなので講義で補足した．積の計算により

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc)I$$

が分かるが，これと積に関する演算法則 (6 ページ) の 4 番目の式を利用すれば $ad - bc \neq 0$ の場合は簡単に示せる．$ad - bc = 0$ の場合は $AB = O$ という形の式が得られたことになるが，ここで A が正則だとすると

$$O = A^{-1}O = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$$

となって $B = O$ を得る．B の成分は，$d, -b, -c, a$ なので $a = b = c = d = 0$ となるが，これから $A = O$ となるので A が正則だという仮定に矛盾する．よって A は正則ではない．

問 13 を解説した．A の第 i 行の成分がすべて 0 だとすると，A の第 i 行と X の第 j 列の積は必ず 0 になる．よって AX の第 i 行の成分はすべて 0 になるので $AX = I$ となることはあり得ない．よって A は正則ではない．

定理 1.2 についてはテキストに補足することはない．

4. 行列の分割と分割乗法

行列を縦横に区切ることによっていくつかに分割する．これにより行列の演算を一つ一つのブロックがあたかも数であるかのように実行できる．これは特に積について重要であり，分割乗法と呼ぶ．

分割の仕方で重要なものは列ベクトルへの分割と行ベクトルへの分割だ．これについては前回の講義ですでに紹介している．16 ページの公式もすでに紹介したものである．もう一つ重要な分割に正方行列の対称分割がある．講義では問 15 に取り組んでもらったが，こういうものは計算を通じて理解してほしい．

5. 連立一次方程式と行列

   次回の予告を兼ねて 2.1 節を解説した．講義でも述べたことだが，この授業で考えることはあらゆる場合に有効な連立方程式の一般解法だ．特別な場合に解けるようになることを目標にしているのではない．詳しくは次回から解説する．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 行列 B の第 j 列の成分がすべて 0 であるとき，B は正則ではないことを示せ．

【ヒント】 行の場合に解説したのでそれをまねて証明してみよ．

課題 2 p.18 の 1.20

【ヒント】 分割乗法と逆行列の定義を組み合わせるだけだ．単なる計算問題．

提出締め切り　5 月 13 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (5 月 16 日)

前回のレポート課題

課題 1 行列 B の第 j 列の成分がすべて 0 であるとき，B は正則ではないことを示せ．

【解答例】 XB の (j, j) 成分は X の第 j 行と B の第 j 列の積だが，B の第 j 列は成分がすべて 0 なので (j, j) 成分は 0 になる．ゆえに $XB = I$ となる X は存在せず，B は正則ではない．

【コメント】

- 講義の解説をまねて考えよというヒントを出したが，形をまねるという意味ではない．真似るためには証明の意味を考えなくてはならない．意味を考えずに真似ることを猿真似 *1 という．

  講義では，A の第 i 行の成分がすべて 0 であるとして，A が正則ではないことを示した．この問題と比較して A を B に，A の第 i 行を B の第 j 列に置き換える程度の感覚は持ってほしい．
- B の第 j 列の成分がすべて 0 であること，行列の積 XY は X の行と Y の列の積を配列したものであることから，考えるのは XB である．B の行については何も仮定されていないので，BX の成分については何も言えない．
- B を 2 次とした解答があるが，これでは質問に答えたことにならない．

課題 2 p.18 の 1.20

【解答例】(1) は次の計算から確認できる．

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & O \\ O & B^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} = I$$

(2) も同様に

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & -CB^{-1} + CB^{-1} \\ O & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}C - A^{-1}C \\ O & B^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} = I$$

【コメント】

- $PP^{-1} = I$ および $P^{-1}P = I$ を示す必要がある．一方のみの人が多かったが正解とはみなされない．
- 解答例の程度の途中計算はしてほしい．これがないと，本当に計算して確かめたのが分からない．
- $\frac{1}{A}$ のような記法をする人が若干いた．行列では分数式は使わないので注意すること．また，2 次の行列の逆行列の表示をそのまま使う人もいるが，ここでの行列は正方行列を 4 つに分割しただけなので，各ブロックは行列になっている．このような計算は許されない．

本日の講義の要点

1. 基本行列

   定義は 22 ページに，具体的な行列としての表示は 23 ページに記述している．なお，24 ページの冒頭の主張は基本行列を行ベクトルに分割してみると分かりやすい．分割乗法（16 ページ網がけの (1)

*1 猿が人の動作をまねるように、考えもなく、むやみに他人の真似をすること。（デジタル大辞泉）

式)，基本行ベクトルを左からかけると第 i 行が出てくること（16 ページ下から 3 行目）を使う．

$$P_{ij}(c)A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_i + c\boldsymbol{e}'_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 A \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_i A + c\boldsymbol{e}'_j A \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_m A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_i + c\boldsymbol{a}'_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{bmatrix}$$

これから $P_{ij}(c)A$ は A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えた行列になる．

基本行列の正則性（定理 2）なども，計算というよりも，単位行列に操作を繰り返すと思ったほうが簡単だ．基本行列を左からかけることが基本変形であり，逆変形が逆行列に対応している．

2. 階段行列

   階段行列は 25 ページで (1)(2)(3) の三つの条件で定義される．条件は k（階段行列の階数）と，$1 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_k \leqq n$ という，k 個の番号の組で記述される．逆にこれらのデータを決めてやれば，階段行列の型が決まる．

   講義では，条件を指定して実際に階段行列を決定する作業をやってもらった．三つの条件を一つずつ丁寧に考えていくことが重要である．

3. 基本変形で階段行列にできること（変形定理）

   一般的な変形方針を 26 ページ，27 ページの記述に従って解説した．またその方針をなぞる形で 28 ページの例 2 を解説した．議論は入り組んでいるので大変だが，どんな行列でも基本変形で階段行列にできるということに納得がいくまで考えること．

   なお，一般的な変形方針を具体的な行列に適用すると計算が煩雑になってしまうことが良くある．例えば，(1-1) で第 i_1 行を $1/\alpha_1$ 倍しているが，これだと複雑な分数計算を迫られる可能性がある．基本変形で階段行列にするのが目標なのだから，変形方針にはない変形を行って，計算を簡単にすることも可能である．しかし，まずは教科書の方法がどんな行列にでも使えること，そしてその結果階段行列が登場することを納得してほしい．その後で計算を簡単にする工夫をおこなうようにしてほしい．

   基本変形で階段行列にすることは線形代数のもっとも基本的なテクニックなので，自ら進んで計算に取り組むこと．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 3×4 行列で，階数が 2 の階段行列の型をすべて調べよ．

【ヒント】列が 4 つで階数が 2 だから，$1 \leqq q_1 < q_2 \leqq 4$ なる $q_1, 1_2$ で階段行列の型は決定する．${}_4C_2 = 6$ 通りの階段行列がある．

課題 2 46 ページ，章末問題 2.1

【ヒント】 まずは，26 ページ，27 ページの方針をなぞる形で計算せよ．ただし，どのような基本行列をかけたかは考えなくてもよい．

提出締め切り　5 月 20 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (5 月 16 日)

前回のレポート課題

課題 1 3×4 行列で，階数が 2 の階段行列の型をすべて調べよ．

【解答例】 次の 6 通り

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【コメント】 ほとんどの人ができていた．間違えた人には赤で訂正しているので何故間違いなのか確認しておくこと．

課題 2 46 ページ，章末問題 2.1

【解答例】 以下のような基本変形を行えば階段行列になる．

(1)
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 + 4r_1 \\ r_3 - 6r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & -9 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/9)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_2 \\ r_3 + 9r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 + 7r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 - r_3}]{(1/9)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 + 2r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 + 7r_2 \\ r_4 - 5r_2}]{(1/2)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_4 - 5r_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{r_2 - r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 3r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_4 + 12r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/7)r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 7r_3 \\ r_2 + 3r_3 \\ r_4 + 22r_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + 3r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 - 3r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 4r_4 \\ r_2 + 3r_4 \\ r_3 - 2r_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
(6)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2 \\ r_4+3r_2}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{-(1/2)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+3r_3 \\ r_2-4r_3 \\ r_4+11r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

階数については (1) と (3) は 2，0(2)(4)(6) は 3，(5) は 4 である．

【コメント】

- テキスト 26〜27 ページの方法の通りに基本変形を行うと，分数が出てくるので計算が大変になる．掃き出す列を選ぶ方法はテキストのままでいいが，掃出しの軸をどこに選びどうやって 1 にするかはいろいろな方法がある．ここでは様々な工夫で分数を避けて計算している．どのような工夫が有効かは今後の授業の中で解説する．

  もっともテキストのような方法を行えば，どんな行列でも基本変形で階段行列になることが納得できるはずだ．ようするに普遍的な方法は計算しやすい方法ではなく，普遍的な方法と計算しやすい方法の両方を理解する必要がある．
- 変形の表し方はテキストよりもこの講義メモの形のほうが分かりやすいだろう．なお，$r_i + cr_j$ は「r_i と cr_j を加える」ではなく「r_i に cr_j を加える」と読むこと．
- 複数の基本変形を行う時には，変形の順序によって結果が変わることに注意すること．解答例では順序が変わるものをまとめて行う場合は，矢印の上下に分けて上から先に行う形で変形内容を記述している．掃出しについては，ある行の定数倍を他の行に加えていくので，加える順序は影響しない．解答例では同じところにまとめて記述している．
- $r_3 - r_4$ と $r_4 - r_3$ の変形は同時には行えない．r_3 に $-r_4$ を加えた時点で r_3 は変化してしまうので，次に r_4 に $-r_3$ を加えるときにはもはや最初の r_3 ではなくなっているのだ．このような計算を行った学生が数人いたがその解答には「要注意」と記載している．
- 基本変形で行列は変わっていくので = で結んではいけない．解答例のように矢印を使うこと．
- この例を通じて，階段行列が単純な形の行列であることを実感してほしい．また，(4) のように単位行列は階段行列である．

本日の講義の要点

1. 基本変形の方法について

   前回のレポート課題を題材に基本変形を実行する際の注意を与えた．この講義メモの「前回のレポート課題」の解説を読んでおくこと．
2. A, X が n 次正方行列の場合に $AX = I$ から $X = A^{-1}$ が分かること (29 ページ問 6)

   PA が階段行列になるように正則行列 P をとる．PA の階数が $n-1$ 以下とすると PA の第 n 行は 0 ベクトルになる．

$$
(PA)(XP^{-1}) = P(AX)P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I
$$

だが左辺の第 n 行は 0 ベクトルになるので矛盾が生じる．ゆえに PA の階数は n である．

ところが，n 次正方行列で階数 n の階段行列になるのは単位行列しかない．よって $PA = I$ である．$A = P^{-1}$ なので定理 1.2 より A は正則である．$AX = I$ であるから $X = A^{-1}$ を得る．

3. 連立一次方程式 (1) 階段行列への帰着

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について，行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ を基本変形により階段行列 $P\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & P\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ にする．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ は同値なので，階段行列に対応する連立一次方程式を解けばよい．

4. 連立一次方程式 (2) 階段行列に対応する連立方程式の考察 $\mathrm{rank} PA = k < \mathrm{rank} \begin{bmatrix} PA & P\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の場合

$\mathrm{rank} PA < \mathrm{rank} \begin{bmatrix} PA & P\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の第 $k+1$ 行は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．ゆえに $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ の第 $k+1$ 式は $0 = 1$ となる．よって $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ が成り立つような $\boldsymbol{x}$ は存在しない．解は存在しない．

5. 連立一次方程式 (3) 階段行列に対応する連立方程式の考察 $\mathrm{rank} PA = k = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} PA & P\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の場合

階段行列の条件から $1 \leqq i \leqq k$ について第 q_i 列（x_{q_i} の係数を並べたもの）は $\boldsymbol{e}_i$ である．すなわち x_{q_i} は第 i 式のみに現れる（他の式からは消去されている）．そこで

- $x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_k}$ 以外の $n - k$ 個の未知数は任意定数でおく（34 ページ 3 行目の注意）．
- 第 i 式が成り立つように x_{q_i} を定める．
- 以上から，第 k 式までは成立する．さらに第 $k+1$ 行以下はすべての成分が 0 なので対応する式は $0 = 0$ になる．これは無条件に成立している．よって $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ のすべての式が成立し，解となる．またこれ以外に解がないことは x_{q_i} の定め方から明らかである．

テキストでは表示を見やすくするために未知数の置き換えを行っている（30 ページ下から 5 行目）．ただし，講義ではこの方法を取らなかった．階段行列の性質 (3) を意識すればこのような置き換えは必要ないと思ったからだ．如何だろうか．

6. 連立一次方程式 (4) まとめ

どんな行列も基本変形で階段行列にできるので，上記の議論は連立一次方程式の解についての一般論を導く．結果は定理 2.3 と定理 2.4 にまとめられている．解の自由度は解の表示に現れる任意定数の個数であるが，次回，同次連立一次方程式の解説の中でもう少し詳しく扱う．

7. 連立一次方程式 (5) 具体例

p. 28 例 2 に対応する連立一次方程式の解を与えた．連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +2z & & = & -3 \\ 2x & +4y & +4z & +3w & = & 0 \\ -x & -y & +z & & = & 3 \\ & y & +3z & +2w & = & 4 \end{array} \right.$$

について，対応する行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

である．これを基本変形で階段行列にすれば

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，対応する連立一次方程式は

$$\begin{cases} x \quad -4z = -3 \\ \quad y \quad +3z = 0 \\ \qquad w = 2 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

x, y, w 以外の未知数 z を任意定数を使って $z = c$ とおけば，第 1 式から $x = 4c - 3$，第 2 式から $y = -3c$，第 3 式から $w = 2$ を得る．解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる．他にも問 9 の (2) を解説したがここでは省略する．

この方法はどんな連立一次方程式にも有効であり，非常に強力な手段を与える．しかし，一般論は階段行列に対する理解を必要とするので分かりづらいと感じた人も多いはずだ．しかし，具体例に取り組んでみれば，決して難しいことをしているわけではないことが分かるだろう．まずは具体的問題に数多く取り組んでほしい．

本日のレポート課題

47 ページの 2.3 を課題にする．計算量は多いが，それに取り組むうちに何をやっているかが明らかになると思う．

提出締め切り　5 月 27 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (5 月 30 日)

前回のレポート課題

章末問題 2.3 が課題だった．基本変形で階段行列にする操作は何をしているのか早くわかったほうが良いので変形方法も含めて記述しておく．解については階段行列に対応する連立方程式と解の表示のみ示す.

(1)
$$
\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -10 & 9 & 25 \\ 0 & -7 & 10 & 36 \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_2-3r_3]{2r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \\ 0 & -7 & 10 & 36 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1-3r_2 \\ r_3+7r_2}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 34 & 164 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \\ 0 & 0 & -74 & -370 \end{bmatrix}
$$
$$
\xrightarrow{-(1/74)r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 34 & 164 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1-34r_3 \\ r_2+12r_3}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} x \qquad\qquad = -6 \\ \qquad y \qquad = 2 \\ \qquad\qquad z = 5 \end{cases}, \qquad
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

(2)
$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2+2r_1}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} x \ -2y \ +z \ -3w = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases}, \qquad
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

(3)
$$
\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & 8 & 6 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{r_2-1r_1 \\ r_3+6r_1}]{(-1/3)r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} x \qquad -(5/3)z = 1 \\ \qquad y \ -(4/3)z = -1 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases}, \qquad
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{c}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

(4)
$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 11 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-r_1}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 & 12 \\ 0 & -4 & -28 & -4 & -32 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & -8 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2 \\ r_3+r_2}]{-(1/4)r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} x \qquad -5z \ +3w = -4 \\ \qquad y \ +7z \ \ +w = 8 \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 = 0 \end{cases}, \qquad
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

(5)
$$
\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & -18 \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 6 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -24 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2-6r_1}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 23 & 8 & 36 \\ 0 & 3 & 1 & -24 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1+r_3 \\ r_2-8r_3}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & -1 & 0 & 228 \\ 0 & 3 & 1 & -24 \end{bmatrix}
\xrightarrow[(-1)r_2]{r_3+3r_2}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & -228 \\ 0 & 0 & 1 & 660 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & -29 \\ & y & & = & -228 \\ & & z & = & 660 \end{array} \right. , \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 \\ -228 \\ 660 \end{bmatrix}$$

(6) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ -2 & 5 & -3 & 10 & -3 \\ 3 & -7 & 4 & -14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+2r_2 \\ r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1-9r_3 \\ r_2-3r_3}]{(-1/6)r_3}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & & -z & & = & 0 \\ & y & -z & 2w & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \end{array} \right. , \qquad \text{解は存在しない}$$

(7) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3+2r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 3 \\ 0 & -8 & 21 & -7 \\ 0 & 7 & -21 & 7 \\ 0 & -3 & 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+2r_2 \\ r_3+7r_2 \\ r_4-3r_2}]{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+8r_3 \\ r_4-9r_3}]{\substack{(-1)r_2 \\ (-1/21)r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 1/3 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & -1/3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. , \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

(8) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{\substack{r_1-2r_4 \\ r_2+2r_4 \\ r_3+r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & & -4z & +w & = & -2 \\ & y & +3z & +w & = & 5 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. , \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- 計算は概ねできている．しかし，階段行列になるまで変形していない人も多い．計算が煩雑になった段階で，連立方程式に戻して高校までの感覚で解を求めるというのも間違いではないが，とりあえずは階段行列になるまで変形するようにしてほしい．
- 解はテキストにあるようにベクトルとして表示するようにしてほしい．連立方程式の解とは，未知数の値の組であり，一つ一つの未知数の値ではない．値の組はベクトルとして表すべきだ．

本日の講義の要点

1. 同次連立一次方程式

連立一次方程式を解くという観点からは，新しいことはないが，同次連立一次方程式の考察を通じて行列 A の性質を調べることができる．詳しくは第 4 章で扱うことになる．今日の講義では自明な解について，また解と rank$A$ の関係（定理 2.5）のみ紹介した．注意する点を箇条書きしておく．

- 同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解く際には，$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ではなく，A を基本変形すればよい．右辺の定数はすべて 0 なので変化するはずがないからだ．
- 自明な解（$\mathbf{0}$）以外に解を持たないための必要十分条件は rank$A = n$ だ．ここで n は A の列の個数であり，未知数の個数である．

2. 正則性の判定

定理 2.6 を紹介した．なお (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明については同次連立一次方程式を利用した．A が正則な時，同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ しかないからだ．

この定理の副産物として，正則行列は基本行列の積となることが証明できる．38 ページの冒頭に証明されているので読んでおくように．

3. 逆行列の求め方

求め方と例についてはテキスト 38〜39 ページに従って解説した．基本変形で階段行列にするという普遍的な作業が，逆行列を求めることにどのように使われるかを確認しておくこと．

4. 行列の階数

行列 A を基本変形した時，その階数が基本変形によらず一定になることの証明を行った．今まで学習した様々な事項を駆使しており，少し難しいと思うが考えてみてほしい．

- $m \times n$ 型行列 A が基本変形により階数 k の階段行列 $B = PA$ に変形できたとする．
- 一般に基本行列を右からかけると列に対する基本変形ができる．（p．40）
- 列の入れ替えにより $BQ_1 = PAQ_1 = \begin{bmatrix} I_k & C \\ O & O \end{bmatrix}$ にできる．
- さらに $Q_2 = \begin{bmatrix} I_k & -C \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix}$ を右からかけることにより

$$BQ_1Q_2 = PAQ = \begin{bmatrix} I_k & C \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -C \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

  この行列をテキストでは標準形と呼んでいる．I_k の k は 階段行列 $B = PA$ の階数であることに注意せよ．なお，講義ではこの工程を列の基本変形による行の掃出し（行に対する基本変形で列が掃き出せる．右から基本行列をかける操作は列に対する基本変形なので行が掃き出せる）という形で説明した．どちらが分かりやすいのか悩むところだ．

- さて，A が二通りの階段行列 $P'A$, $P''A$ に変形されたとし，それぞれの階数を k, r とする．$k \leqq r$ としておく．標準形の議論により

$$P'AQ' = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}, \qquad P''AQ'' = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

  となる．$P''(P')^{-1} = P$, $(Q')^{-1}Q'' = Q$ とおくことにより

$$P\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}Q = P''(P')^{-1}\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}(Q')^{-1}Q'' = P''AQ'' = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

- P, Q を，左上のブロックが k 次正方行列になるように分割する．

$$P\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & R \end{bmatrix}$$

  最後は左辺と行列の分割の仕方が同じになるように分け方を修正している．$r = k$ なら $R = O$ だが $r > k$ のときは R の左上の成分は 1 である．

- 分割乗法を行えば

$$\begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & R \end{bmatrix}$$

  を得る．P_{11}, Q_{11} は k 次正方行列であるので $P_{11}Q_{11} = I_k$ より P_{11} は正則である．これと $P_{11}Q_{12} = O$ より $Q_{12} = O$ である．よって $P_{21}Q_{12} = R = O$ であり $r = k$ を得る．

基本変形を列に対して行ったり分割乗法を駆使したりと，混乱する人も多いだろうが，基本的には今まで学習した事項を少し拡張して考えるだけである．如何だろうか．なお，この話題は階段行列の階数が元の A で決まっていることを主張しているので，事実については覚えておいてほしい．

本日のレポート課題

章末問題 2.2（47 ページ）を課題にする．

提出締め切り　6 月 3 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

試験の実施について

今日の授業で第 2 章の内容を終える．なお，

- 基本変形において，具体的にどのような基本行列をかけたか書き下すこと
- 標準形を求めること
- 列基本変形の計算練習

等は講義では扱わなかった．関連する章末問題としては 2.5，2.6，2.7 があるが，これらはやらなくても構わない．さて，第 2 章までの範囲での試験を 6 月 13 日に実施する．この範囲での試験は今回だけなので，きちんと勉強しておいてほしい．

線形代数 I 講義メモ (6 月 6 日)

前回のレポート課題

章末問題 2.2 が課題だった．基本変形で階段行列にする操作は何をしているのか早くわかったほうが良いので変形方法も含めて記述しておく．

(1) $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 7r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 + 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2,\ (-1)r_3]{\substack{r_1 - 3r_3 \\ r_2 - 3r_3}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_1 - 3r_2 \\ r_3 + 2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 + 2r_3}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 - r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 - r_3}]{(1/7)r_3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/7 & -2/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 5/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & -2/7 & 5/7 \end{bmatrix}$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/7 & -2/7 & -2/7 \\ -2/7 & 5/7 & -2/7 \\ -2/7 & -2/7 & 5/7 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 - r_3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - 5r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

より $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -7 & 6 \\ -4 & 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

$$(6)\ \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&2&1&2&0&1&0&0\\1&1&3&1&0&0&1&0\\1&2&1&4&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&0&2&0&-1&0&1&0\\0&1&0&3&-1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&2&-1&0&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&0&2&0&-1&0&1&0\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{(1/2)r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&5/2&-1&-1/2&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1/2&0&1/2&0\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_4]{(1/2)r_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0&5/2&-1&-1/2&0\\0&1&0&0&-1&3/2&0&-1/2\\0&0&1&0&-1/2&0&1/2&0\\0&0&0&1&0&-1/2&0&1/2\end{bmatrix}\text{ より } A^{-1}=$$

$$\begin{bmatrix}5/2&-1&-1/2&0\\-1&3/2&0&-1/2\\-1/2&0&1/2&0\\0&-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

【コメント】 基本変形はほぼ理解できているように思えるが，若干コメントしておく．

- 一度に多くの変形を行って自滅している解答がある．慣れないうちは，一度に行うのは掃出し法のみにしたほうが良いだろう．
- 掃出し法の意識の希薄な解答がある．特に，こうすれば簡単じゃないかという思いでやってしまうと，結局遠回りなこともある．
- 一度掃き出した列が変わってしまうような変形をしている答案がある．これは重大なミスである．
- 基本変形の過程で，途中からある列が 0 ベクトルになってしまうことはあり得ない．基本変形は正則行列をかけることなので $P\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．
- より一般に $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}$ を何回か基本変形して得られる行列は，正則行列により $\begin{bmatrix}PA & P\end{bmatrix}$ と表せるのだから，後ろ半分は正則行列である．この列ベクトルや行ベクトルが 0 ベクトルになることはない．

本日の講義の要点

1. 階数と標準形についての注意と階数の基本性質（定理 2.12，2.13）

   行列の標準形は階段行列を経由して求めたが，基本変形をすることと正則行列をかけることは同値なので，

   $$A\text{ の標準形は}\begin{bmatrix}I_k & O\\O & O\end{bmatrix}\text{である}\iff PAQ=\begin{bmatrix}I_k & O\\O & O\end{bmatrix}\text{となる正則行列 }P,\ Q\text{ が存在する}$$

   と理解しなおすことができる．標準形の存在は基本変形を通じて，一意性は定理 2.9 で証明されている（前回の講義メモ 4）．この見方をすれば定理 2.12 と定理 2.13 は簡単に証明できる．例えば SAT が A の標準形であれば

   $$SAT=SP^{-1}PAQQ^{-1}T=(SP^{-1})(PAQ)(Q^{-1}T)=\begin{bmatrix}I_k & O\\O & O\end{bmatrix}$$

   と SP^{-1}, $Q^{-1}T$ の正則性から $\begin{bmatrix}I_k & O\\O & O\end{bmatrix}$ は PAQ の標準形でもある．同じ標準形なので階数も一致する．

   定理 2.13(2) の証明は若干難しいが，講義の証明とテキストの証明が同じなのでここには記述しない．
2. 行列式の定義

   53 ページ下から 8 行目の行列式の定義式を紹介した．見慣れぬ形なので注意事項をまとめておく．

- 行列式は n 次正方行列から定まる値であって行列ではない．また絶対値でもないので $|A|$ を A の絶対値と読まないように．
- 行列式は各行各列から一つずつ成分を選び（選び方は $n!$ 通り）掛け合わせたものに符号をつけて加え合わせたものである．$n!$ 個の項を持つ多項式である．
- 符号は順列の転倒数の偶奇でつける．テキストでは 52 ページから 53 ページにかけて詳細な解説があるが，講義ではあまり深入りしなかった．

$n = 2, 3$ の場合に定義式を具体的に書き下した．またその結果は右下がりに掛け合わせて $+$ をつけ，左下がりに掛け合わせて $-$ をつけ加え合わせるという形で簡単に覚えられる．講義でも解説したが 54 ページの例 6，例 7 にまとめられている．要は符号のつけ方を決定するだけである．

なお，4 次の行列式は 24 個の項を持つ．また簡便な覚え方もないので計算には様々な工夫が必要になる．

3. 行列式の基本性質

55 ページの定理 3.2（多重線形性）と 56 ページの定理 3.3（交代性）が行列式の基本性質だ．多重線形性は，行列式の各項が第 i 行の要素をちょうど 1 つだけ含んでいることによる．これは何故成り立つかも含めて納得してほしい．交代性は符号のつけ方が重要な役割を果たす．補題 3.1(53 ページ) を用いて証明される．とりあえずは結果だけ覚えてしまえばよい．

実は，多重線形性と交代性，そして単位行列の行列式の値を 1 とすれば行列式の定義式をそこから導くことが分かる．行列式をこの 2 種類の基本性質を満たすものと理解しても，本質的には問題ない．

本日のレポート課題

課題 1 75 ページ章末問題の 3.1
課題 2 4 次の行列式を定義式によって具体的に書き下せ．

来週は第 2 章までの試験なので，締め切りは再来週にします．試験が終わってから，この授業の復習（第 3 章部分）と課題に取り組んでください．なお，今日最初に扱った階数についての議論は試験範囲です．試験準備に含めてください．

提出締め切り　6 月 17 日 (月)13 時
提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (6 月 20 日)

前回のレポート課題

課題 1 75 ページ章末問題の 3.1

【解答例】(1) の順列の転倒の組は

$$(1,2)\ (1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,7),(5,7),(6,7)$$

の 14 組であり符号は正（1）である．

(2) の順列の転倒の組はすべてであり転倒数は ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である．n が偶数のときは $n = 2k$ とおくことにより転倒数は $k(2k-1)$ となる．転倒数の偶奇は k の偶奇と一致する．n が奇数のときは $n = 2k+1$ とおくことにより転倒数は $(2k+1)k$ になり，その偶奇は k の偶奇と一致する．よって $n = 4k,\ 4k+1$ の場合は転倒数は偶数であり符号は正（1），$n = 4k+2,\ 4k+3$ の場合は転倒数は奇数であり符号は負（-1）である．

(3) の転倒の組は $(1,2),(3,4),\dots,(2n-1,2n)$ なので転倒数は n である．符号は n が偶数のとき正（1），奇数のとき負（-1）である．

【コメント】

- 転倒数は逆順になっている番号の組の総数だ．解答例ではこれを転倒の組と呼んでいる．転倒の組の総数が転倒数である．
- $\dfrac{n(n-1)}{2}$ の偶奇の判定ができない人がいるが，これは初等的な問題だ．場合分けして考えれば簡単だろう．
- 符号は正負と述べてもいいし ±1 を使ってもいい．この講義では行列式の項の符号を決めるだけにしか使わない．

課題 2 4 次の行列式を定義式によって具体的に書き下せ．

【解答例】4 文字の順列をその作る 4 桁の数の小さいほうから順に並べて，それぞれの転倒数を調べる．

順列	転倒数	順列	転倒数	順列	転倒数	順列	転倒数
1234	0	2134	1	3124	2	4123	3
1243	1	2143	2	3142	3	4132	4
1324	1	2314	2	3214	3	4213	4
1342	2	2341	3	3241	4	4231	5
1423	2	2413	3	3412	4	4312	5
1432	3	2431	4	3421	5	4321	6

よって行列式の定義式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
&- a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}
\end{aligned}$$

【コメント】

- 順列をリストアップする際には一定の基準に従って並べること．ここでは 4 桁の数字の大きさの順に並べている．また 1234 を abcd で置き換えれば辞書での並び順である．すると符号について一定の規則性が見て取れる．これを怠ると，順列が抜け落ちたり重複したりする．
- サラスの方法で書き下した人が数人いる．要注意.

本日の講義の要点

今日はほぼテキストに沿う形で定理 3.4 から定理 3.17 まで解説した．ここではテキストを補う形でコメントしておく．

1. 定理 3.4

   多重線形性（スカラー倍）と交代性からの帰結である．(1) は行列式の項が各行各列から一つずつ成分をとってかけた形になっていることからも明らかである．なお，値が 0 になる行列式というタイトルがついているが，これらの形に該当しなくても値が 0 になることはある．あくまで値が 0 であることがすぐに分かる行列式という意味だ.

2. 定理 3.5

   行基本変形との関係をまとめた．ある行を定数倍することは多重線形性のスカラー倍の部分，二つの行を入れ替えることは交代性ですぐ分かる．ある行に他の行の定数倍を加えることは，多重線形性（和の部分）と定理 3.4 を組み合わせればよい.

   $$|P_i(c)A| = c|A|, \quad |P_{ij}A| = -|A|, \quad |P_{ij}(c)A| = |A|$$

   なお，この事実から行の操作による列の掃出しは行列式を変えない．この結果は高次の行列式の計算に使われる.

3. 定理 3.6

   次数下げの公式のもっとも基本的なものである．証明は行列式の定義式を考察することにより行う．今日の証明の中では一番わかりづらいかもしれない．テキストを読んで考えてほしい.

   この応用として，例 12（上三角行列の行列式)，例 13（掃出しと次数下げによる行列式の計算）を解説した．問 9 に取り組んでもらったがあまり難しくは感じなかったのではないか.

4. 定理 3.8（積の行列式）$|AB| = |A||B|$

   (1) A が基本行列の場合

   $$|P_i(c)A| = c|A|, \quad |P_{ij}A| = -|A|, \quad |P_{ij}(c)A| = |A|$$

   で $A = I$ とすれば $|I| = 1$ より

   $$|P_i(c)| = c, \quad |P_{ij}| = -1, \quad |P_{ij}(c)| = 1$$

   を得る．これから

   $$|P_i(c)A| = |P_i(c)||A|, \quad |P_{ij}A| = |P_{ij}||A|, \quad |P_{ij}(c)A| = |P_{ij}(c)||A|$$

   (2) A が正則行列の場合

   A は基本行列の積として表されるので $A = P_1P_2\cdots P_r$ とおく．基本行列の場合はすでに証明されたので

   $$|AB| = |P_1P_2\cdots P_rB| = |P_1||P_2|\cdots|P_r||B|$$

を得る．ここで $B = I$ とすれば

$$|A| = |P_1||P_2|\cdots|P_r|$$

だが，B が一般の場合には

$$|AB| = |P_1||P_2|\cdots|P_r||B| = |A||B|$$

が成り立つ．なお，基本行列の行列式は 0 でないので $|A| = |P_1||P_2|\cdots|P_r| =\neq 0$ である．

(3) A が正則でない場合

基本変形で階段行列 PA にしたとき階数は $n-1$ 以下だから第 n 行はすべての成分が 0 になる．よって $|PA| = 0$ である．$|PA| = |P||A| = 0$ と $|P| \neq 0$ から $|A| = 0$ を得る．また PAB の第 n 行もすべての成分が 0 なので，$|PAB| = |P||AB| = 0$ である．よって $|AB| = 0$ であり $|AB| = |A||B|(= 0)$ が成り立つ．

5. 定理 3.9

正則行列の行列式が 0 でないこと，正則でない行列の行列式が 0 であることが定理 3.8 の証明の中で示されているので当然なりたつ．

6. 定理 3.11（$|{}^tA| = |A|$）

(1) A が基本行列の場合

$${}^tP_i(c) = P_i(c), \quad {}^tP_{ij} = P_{ij}, {}^tP_{ij}(c) = P_{ji}(c)$$

と各基本行列の行列式の値を確認すればよい．

(2) A が正則行列の場合

A は基本行列の積として表されるので $A = P_1P_2\cdots P_r$ とおく．10 ページの定理 1.1 より

$${}^tA = {}^tP_r{}^tP_{r-1}\cdots{}^tP_2{}^tP_1$$

基本行列の場合はすでに証明されたので，これと積の行列式を組み合わせれば

$$|{}^tA| = |P_r||P_{r-1}|\cdots|P_2||P_1|$$

を得る．右辺はスカラーの積なのでかける順序によらない．よって

$$|{}^tA| = |P_1||P_2|\cdots|P_r| = |A|$$

(3) A が正則でない場合

12 ページ定理 1.2 より A が正則なら ${}^tA$ も正則である．よって ${}^tA$ が正則なら $A = {}^t({}^tA)$ も正則である．ゆえに A が正則でなければ ${}^tA$ も正則ではなく $|{}^tA| = |A|(= 0)$ が成り立つ．

こうして整理してみると定理 3.11 の証明と定理 3.8 の証明はまったく同じ方針で証明が行われていることに気づくだろう．

7. 行列式において行について成り立つ性質は列についても成り立つ．定理 3.12〜3.16

行についての対応する主張とちょうど 10 番ずつ離れているので分かりやすい．証明はテキストでは定理 3.12(1) について記述されている．講義では定理 3.13 について解説した．すべて同じ議論で証明できる．

8. 定理 3.17 と行列式の計算方法

一般の次数下げの公式である．掃出し法と組み合わせることによって行列式の次数を下げていくことができる．3 次になればサラスの方法が使えるので，計算できる．これを例 18 で具体的に解説した．なお，定理 3.17 の証明は時間が足りず次回に回す．

本日のレポート課題

章末問題 3.2（75 ページ）の (4)(5)(6)(7)(8) を課題にする．ヒントはなし．

提出締め切り　6 月 24 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (6 月 20 日)

前回のレポート課題

【解答例】 計算には様々な方法があり，これが正しいやり方というものはない．あえてこれと異なる方法をとり，計算のやりやすさなど比較してみるのもよい．

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

(5)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$
$$= -104 - 140 - 140 + 100 + 52 + 392 = 160$$

(6)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2+2c_1 \\ c_3-3c_1 \\ c_4+4c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & -10 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 18 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ 2 & -4 & 18 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\substack{r_2-5r_1 \\ r_3-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -8 & 0 & -22 \\ -4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -176 - 128 = -304$$

(7)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4 \\ c_1+c_5}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_5-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{上三角}}{=} 4(-1)^4 = 4$$

(8)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{定理 3.4}}{=} 0$$

【コメント】

- 行列式の基本変形では，行列式の値がどうなるか分かっているので等号 = を使わなくてはならない．
- (7) の解答例は如何だろうか．配列の規則性を利用すると簡単に計算できる．66 ページ例 19 を見てほしい．
- (8) では，第 1 行と第 5 行が等しいので何の操作もせずに 0 であることが分かる．なお，ある行（または列）の成分がすべて 0 になれば，その行列式の値は 0 である（定理 3.4(1)）．このことに気が付かずにさらに計算をつづけている人もいるが，理解不足と受け止める．
- 2 つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる．2 回入れ替えて正しい結論に至った答案もあるが，これは無論二重の間違いである．なお，掃出しの軸はどこでもいいので，入れ替えを行わなければならないような事情は何もない．行わないほうが良い．

- 順列の符号を調べて定義に従って計算する人がいるが，煩雑でありやめたほうが良い．もちろんミスが無ければ正しい答えに行きつくがたいてい一回はミスをしてしまう．この方法で 4 次の行列式の正しい値を求めるのは困難だろう．
- 4 次の行列式をサラスの方法で計算した人が一人だけいた．講義内容を理解しようとする努力を怠っているとしか思えない．

本日の講義の要点

1. 定理 3.17（次数を下げる一般公式）の証明

　行の入れ替えによって，定理 3.6，定理 3.16 に帰着する．なお，入れ替えで第 i 行，第 j 列以外の並び順を変えないようにする必要がある．例えば行については

$$r_i \leftrightarrow r_{i-1},\ r_{i-1} \leftrightarrow r_{i-2},\ \cdots r_3 \leftrightarrow r_2,\ r_2 \leftrightarrow r_1$$

という順序で $i-1$ 回の行の入れ替えを行えばよい．第 i 行を第 1 行に持っていくために $i-1$ 回の入れ替えを行い，第 j 列を第 1 列に持っていくために $j-1$ 回の入れ替えを行うので，符号は $i+j-2$ 回変わる．これが次数下げの公式の $(-1)^{i+j}$ のゆえんである．

2. 例 19

　行列式の計算は掃出しと次数下げの組み合わせで進めていくが，行列の配列の対称性を利用して簡単に計算できる場合もある．前回のレポート課題の (7) の計算はこの例を知っていたらもっと簡単にできただろう．テキストの説明とこのメモの解答例を比較すれば何をしているかは明らかだろう．

3. 余因子

　正方行列 A の (i,j) 余因子を定義した．(i,j) 余因子とは行列式の定義式における a_{ij} の係数であり，定理 3.18 が基本的である．テキストには行に関する展開の証明を，講義では列に関する展開の証明を与えた．余分かもしれないがここにも記述しておこう．$|A|$ の第 j 列を

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

と n 個のベクトルに分け定理 3.12(1) を使う．そして次数を下げる一般公式より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \text{第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 列を除いた行列の行列式} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} \end{aligned}$$

$\sum$ の中の行列式で A との違いは第 j 列だけであり，これから第 i 行と第 j 列を除いた行列は A から第 i 行と第 j 列を除いた行列と同じである．これから A の余因子が登場する．

4. 定理 3.19

   証明のポイントは A と B が一つの行（列）しか違わないとき，その行（列）を取り除く形で余因子をとると，同じになることだ．これが納得できれば証明は見やすいだろう．

5. 余因子行列と逆転公式

   (i, j) 成分が A の (j, i) 余因子になっている行列を $\tilde{A}$ と表し A の余因子行列と呼ぶ．前の添え字が列の番号になっていることに注意すること．定理 3.18(1) と定理 3.19(1) は $A\tilde{A} = |A|I$ を表し，定理 3.18(2) と定理 3.19(2) は $\tilde{A}A = |A|I$ を表す．A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ であるが（定理 3.9）このとき逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \qquad A^{-1} \text{の } (i, j) \text{ 成分} = \frac{\tilde{a}_{ji}}{|A|}$$

本日のレポート課題

章末問題 3.5（75 ページ）と 3.10(76 ページ) を課題にする．

提出締め切り　7 月 1 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (7 月 4 日)

前回のレポート課題

【解答例】3.5 テキストに解答があるので，ここでは余因子行列とその成分の計算式のみ記述しておく．

$$(1)\ \begin{bmatrix} 12-8 & -(12-16) & 3-6 \\ -(12-5) & 4-10 & -(1-6) \\ 24-15 & -(8-15) & 3-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ \begin{bmatrix} 6-3 & -(4-0) & 2-0 \\ -(2-1) & 6-0 & -(3-0) \\ 3-3 & -(9-2) & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

3.10 行列式を計算すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 1 + x^3 + x^3 - x^2 - x^2 - x^2 = 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1)$$

より正則になるための条件は行列式が 0 でないことなので，$x \neq 0$ かつ $x \neq -1/2$ であることが必要十分条件である．

【コメント】 いずれもやさしい問題であり良くできていたが若干コメントしておく．

- 余因子の計算は，配列を考えて行うと間違いが少ない．
- 行列式と行列が両方出てくるので記号を使い分ける必要がある．注意すること．
- 行列式の計算と行列の基本変形は，計算は内容は共通する部分が多いが本質的には異なるものである．意識して計算すること．
- 逆行列を基本変形を用いて（第 2 章で学習した方法）求めている人がいるが，この問題の趣旨は逆転公式を用いることだ．これでは解答にならない．
- 3 次方程式の解を調べるのに微分を利用してグラフの概形を書いて求めるという方法をとっている人がいた．間違いではないが感覚がおかしい．
- 3.10 の行列の行列式は 66 ページ例 19 のタイプの行列式だ．例 19 のように計算すると楽に計算できるが残念ながらそれに気づいた人はいなかった．

本日の講義の要点

1. Cramel の公式（定理 3.21）
   A が正則な場合，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は行列式を使って表示できる．証明はテキストにある通りなのでここでは記述しない．連立方程式の行列による表示については 29 ページを確認するとよい．A は正方行列なので，$m = n$ の場合に対応している．これを $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ の形に書き直しているが，各ベクトルの成分表示を考えれば当たり前であることが分かるだろう．なお，これは分割乗法（15〜17 ページ）の一種であり問 16 にも採用されている．
2. 2 次行列式と平行四辺形の面積
   テキストでは理由が省略されているので講義ではその部分も含めて説明した．内積を利用すれば

   $$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos \angle \mathrm{AOB}$$

   一方平行四辺形の面積は

   $$S = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \sin \angle \mathrm{AOB}$$

となり

$$S^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2$$

後はベクトルの大きさと内積を成分で表示すれば面積が行列式の絶対値に等しいことが分かる．

$$S^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = (ad - bc)^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

3. 3 次行列式と平行六面体の体積

平行六面体は平行四辺形に対応する空間図形である．6 つの平行四辺形に囲まれた図形である．74 ページの図を見ながらイメージを膨らませてほしい．

この体積と行列式を考えるために外積ベクトルを導入した．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

この定義から次が簡単に分かる．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

この式から $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平面 OAB に直交することが分かる．

平行六面体は（斜）角柱なので体積は底面積 × 高さである．底面を OAB の定める平行四辺形とみなせば底面積 S は

$$S^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

となる（成分を使って計算するだけなので省略）．すなわち外積ベクトルの大きさが平行四辺形の面積である．高さは C から下ろした垂線の長さなので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と平面 OAB の法線方向とのなす角を θ として $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta$ で表せる．よって体積 V は

$$V = Sh = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平面 OAB に直交するので，これと $\overrightarrow{\mathrm{OV}}$ のなす角は θ または $\pi - \theta$ である．ゆえに体積は内積で表示され

$$V = \pm(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となり，行列式と等しくなる．

行列式の正負についての図形的な意味についてはテキストの記述程度のことしか説明していない．ここでは省略する．

4. 行列式の計算（章末問題 3.8(3)）

$n+1$ 次の行列式についての等式

$$I_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

を証明した．まず

$$I_1 = \begin{vmatrix} x & a_1 \\ -1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0x + a_1$$

より $n = 1$ の場合は成立する．そこで

$$I_{n-1} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

が成り立つと仮定する．I_n の行列式を第 1 列について展開すれば

$$I_n = x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$= xI_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = xI_{n-1} + a_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

本日のレポート課題とヒント

章末問題 3.6(2)（75 ページ）と 3.12(76 ページ) を課題にする．

3.12 の (1) については $(1,1)$ 成分を軸に掃き出すとよい．これを左上のブロックがなくなるまで続ければ結果が得られる．(2) についてもまったく同じ考え方で (n,n) 成分を軸に掃き出していき，右下のブロックが消滅するまで続ける．ここまでは難しくない．(3) については D が正則な場合と正則でない場合に分けて考える．正則な場合は

$$\begin{bmatrix} A & K \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$$

が成り立つように K を選ぶとよい．後は (1)(2) の結果と定理 3.8 だ．

D が正則でない場合は $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ も正則でないことを言う．D のみの行基本変形が可能なので，階段行列の階数を考えれば分かるだろう．両辺がともに 0 になって等しくなる．

提出締め切り　7 月 8 日 (月)13 時

提出場所　全学教育棟 A 棟 4 階教養科目等事務室の前のレポート提出箱

締め切りに遅れた場合は，提出箱に入れず，研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．

線形代数 I 講義メモ (7 月 11 日)

前回のレポート課題

【解答例】3.6(2) 5 つの 4 次行列式を計算する．結果はテキストの解答にあるので省略する．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_2+3r_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 0 & 40 & 40 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+4r_2 \\ r_3-r_2 \\ r_4+3r_2}}{=} \begin{vmatrix} 19 & 5 & 17 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 17 & 5 & 17 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} 19 & 5 & 17 \\ 3 & 5 & -7 \\ 17 & 5 & 17 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-r_3 \\ r_2-r_3}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & -24 \\ 17 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 240$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & 11 & 9 \\ 0 & 11 & 7 & 13 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 11 & 7 & 13 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-c_1}}{=} \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 11 & -15 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 3 & 11 & 13 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_2+3r_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 0 & 32 & 40 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 11 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2+3r_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 0 & 40 & 32 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 96$$

【コメント】

- 一つ (二つ) 解を求めてからそれを代入して未知数の数を減らして高校までの方法で解くという人もいるが，この問題の趣旨はあくまで行列式だけで計算してほしいということだ．なお，こういうやり方が効果的なのはこの問題の解が簡単な分数になるように工夫してあるからだ．講義でも話したが，クラメルの公式を利用する方法においては，解の分母が大きくなっても計算量はあまり変わらない．解がきれいになるように工夫されていない連立方程式について，この方法は有効だ．その意味でテキストの問題は工夫し過ぎだと思う．
- 行列式の計算は面倒なので分子と分母を分けて計算したほうが分かりやすいと思う．
- 行列式の記号と行列の記号の区別がついていないもの，行列式の操作に = を使っていないものなど，基本的なルールを守っていない答案があるが注視してほしい．
- 軸の成分を 1 にするために行 (列) を -1 倍する人がいるが，行列式の場合はそのような操作は不要である．軸は -1 のままで掃き出したほうが良い．

【解答例】3.12

(1) 左上の単位行列 I の次数を r とすれば，$(1,1)$ 成分を軸とする次数下げにより

$$\begin{vmatrix} I_r & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{r-1} & B' \\ O & D \end{vmatrix}$$

を得る．同様な操作をさらに $r-1$ 回繰り返せば，$|D|$ になる．

(2) 右下の単位行列の次数を s とすれば，右下隅の成分を軸とする次数下げにより

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & I_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' \\ O & I_{s-1} \end{vmatrix}$$

を得る．同様な操作をさらに $s-1$ 回繰り返せば，$|A|$ になる．

(3) $\begin{bmatrix} I & O \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ より

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} \underset{\text{定理 3.8}}{=} \begin{vmatrix} I & O \\ O & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ O & I \end{vmatrix} \underset{(1),(2)}{=} |A||B|$$

【コメント】

- この行列式は 4 つのブロックに分けて表示されているが，一つ一つは行列である．このままの形で次数下げやサラスの方法などは使えない．理由の不明な議論が多かった．
- (3) については変なヒントをつけてしまって申し訳ない．テキストの解答欄にヒントがあったがそのほうが簡明だ．なお次を使ってもよい．

$$\begin{bmatrix} I & B \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$$

本日の講義の要点

今日は章末問題をいくつか解説した．テキストの解答ともあわせて考えておくとよい．

- 章末問題 3.8(4) Van der Monde の行列式

  $(1,1)$ 成分を軸とする掃出しではなく，順に $r_n - x_1 r_{n-1}$，$r_{n-1} - x_1 r_{n-2}, \cdots, r_2 - x_1 r_1$ を行っていく．もちろんこの操作で行列式の値は変わらない．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & {x_2}^2 - x_2 x_1 & {x_3}^2 - x_3 x_1 & \cdots & {x_n}^2 - x_n x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-1} - {x_2}^{n-2} x_1 & {x_3}^{n-1} - {x_3}^{n-2} x_1 & \cdots & {x_n}^{n-1} - {x_n}^{n-2} x_1 \end{vmatrix}$$

  この行列式を $(1,1)$ 成分を軸に次数下げすれば，各列から $(x_j - x_1)$ がくくり出せる．ゆえに

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ {x_2}^2 - x_2 x_1 & {x_3}^2 - x_3 x_1 & \cdots & {x_n}^2 - x_n x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_2}^{n-1} - {x_2}^{n-2} x_1 & {x_3}^{n-1} - {x_3}^{n-2} x_1 & \cdots & {x_n}^{n-1} - {x_n}^{n-2} x_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & {x_3}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$

  これは次数の一つ下がった Van der Monde の行列式なので後は帰納法を使えばよい．なお，テキストは $x_i - x_j$，$i < j$ の積にしているので符号がつく．講義では $x_j - x_i$，$i < j$ の積として表したので符号はいらない．また $\prod$ は積について $\sum$ 記号に対応する記号である．

- 3.13 次の積の計算と積の行列式，3.12 の結果を使えばよい．

$$\begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -I & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B & B \\ O & A + B \end{bmatrix}$$

- 3.15 成分が整数のぎょうれつの行列式，余因子はすべて整数であることに注意すればよい．p.169 の解答を見よ．
- 3.17 $A\tilde{A} = |A|I$（p.69 の一番下） を使う．A が正則でないときは別に考える必要があるが，テキストの解答に記述されている．
- 3.18 第 2 列に第 1 列の $-A^{-1}B$ を加えるという感覚で良い．

  $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

  3.19 はこの結果と $\tilde{A} = |A|A^{-1}$ を使えばよい．
- 3.20 基本的にテキストの解答欄の解説と同じ説明をした．OABC の作る平行六面体の体積（行列式）が四面体 OABC の体積の 6 倍であることを使う．
- 3.21 球面の方程式を $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ と表すとき，3 点 $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ を通ることは $\{p, q, r\}$ が連立一次方程式

  $$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{a_1}^2 - {a_2}^2 \\ -{b_1}^2 - {b_2}^2 \\ -{c_1}^2 - {c_2}^2 \end{bmatrix}$$

  の解であることを示している．このことからクラメルの公式による $\{p, q, r\}$ の表示と，問題で与えられた行列式の第 1 行に関する展開式を比較すればよい．

「線形代数 I」第 1 回試験（6 月 17 日実施）の解答例とコメント

問 1 次の行列を基本変形により階段行列にせよ．

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【解答例】

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 2r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)r_2]{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_3 + 3r_2 \\ r_4 - 2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 + 2r_3}]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - 3r_4 \\ r_2 + 3r_4 \\ r_3 + 2r_4}]{(-1)r_3, (1/5)r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- この章の基本となる問題，単に計算できるだけではなくどんな行列でも階段行列にできるという確信を持てなくてはならない．計算例では第 1 列，第 2 列，第 3 列，第 5 列の順で掃出しを行っているのが良くわかるだろう．
- 最後の第 5 列の掃出しを行わない人が目につく．これは階段行列とは何かを認識していないことなので，大きく減点した．
- 変形の過程を等号（=）で結ぶ人が数人いた．これは等しくないものを等しいと主張していることになり本質的な誤りである．ただし減点は 2 点にとどめた．また他の問題で同じ間違いをしていても減点は
- 1 列を基本ベクトルに変えていくということは分かっているが，掃出し法を使わずに思い付きで計算する人がいる．結局計算プロセスは長くなってしまう．思い付きでやっているうちは，最初に述べた「どんな行列でも階段行列にできる」という確信は持てないのではないか．
- 一度に多くの変形をやり過ぎて失敗している人がいる．計算例では最後の変形を除いてまったく変わらない行（位置は変わっているが）が一つはあることに注意してほしい．
- 基本変形で階段行列にする際にやってはいけないのはすでに掃き出した列が変わらないような変形を選ぶことである．この失敗は計算ミスとは言えない．
- 配点 20 点，平均点は 17.25 点

問 2　次の連立方程式が解をもつように a の値を定めよ．またその時の解を行列の基本変形により求めよ．

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & +2w & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & +8w & = & 8 \\ 3x & +y & +z & +8w & = & 6 \\ 4x & +y & -z & +4w & = & a \end{cases}$$

【解答例】 係数と右辺の定数を並べた行列を基本変形していく．

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & a \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{(1/2)r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & a \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -10 & -10 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -5 & -12 & a-16 \end{bmatrix}
\xrightarrow[(-1/2)r_3]{(-1/2)r_2}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -12 & a-16 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 3r_2}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & a-1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[(-1)r_3]{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ r_4 + r_3}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}
$$

最後の行列に対応する連立一次方程式の第 4 式は $0 = a - 3$ なので，解が存在するための条件は $a = 3$ である．$a = 3$ のときは最後の行列は階段行列であり，対応する連立方程式は

$$
x + 2w = 1, \quad y - w = 1, \quad z + 3w = 2, \quad 0 = 0
$$

となる．よって $w = c$ とおけば解は

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

【コメント】 基本変形に対するコメントは問 1 のコメントと重複するのでそれ以外を記述する．

- 解答例のように a の条件を求めることと解を求めることの計算は同時に行える．解が存在するための条件は基本変形で導かれた階段行列の形で記述されているのでこれは当然のことだ．a の条件を中学校以来の未知数消去の考えで求めようとする答案があるが，講義内容の理解不足だ．
- 基本変形の計算を失敗すれば，a の値によらず解が一通りに定まってしまうことが多い．その場合は，その結果の通りに解を記述すればよい．a についてのなにがしかの条件を記述した答案は間違えを重ねたことになる．
- 解の記述に w を記載しないもの，x, y, z を w の式に表しただけのものは，解の記述とは言えない．解は 4 つの未知数の値の組である．
- 右辺の定数を並べずに基本変形をしていく答案があった．この解答では連立方程式の解法を全く理解していないことになるので 0 点とした．
- 配点 25 点，平均点は 17.42 点

問 3　次の行列の逆行列を求めよ．

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}
$$

【解答例】 この行列と単位行列を並べた行列を基本変形する．

$$
\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1&0&0&0\\3&-2&2&6&0&1&0&0\\2&1&7&3&0&0&1&0\\4&-2&1&9&0&0&0&1\end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}}
\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1&0&0&0\\0&1&2&0&-3&1&0&0\\0&3&7&-1&-2&0&1&0\\0&2&1&1&-4&0&0&1\end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1+r_2\\ r_3-3r_2\\ r_4-2r_2}}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&0&2&2&-2&1&0&0\\0&1&2&0&-3&1&0&0\\0&0&1&-1&7&-3&1&0\\0&0&-3&1&2&-2&0&1\end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{r_1-2r_3\\ r_2-2r_3\\ r_4+3r_3}}
\begin{bmatrix}1&0&0&4&-16&7&-2&0\\0&1&0&2&-17&7&-2&0\\0&0&1&-1&7&-3&1&0\\0&0&0&-2&23&-11&3&1\end{bmatrix}
\xrightarrow[(-1/2)r_4]{\substack{r_1+2r_4\\ r_2+r_4}}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&0&0&0&30&-15&4&2\\0&1&0&0&6&-4&1&1\\0&0&1&-1&7&-3&1&0\\0&0&0&1&-23/2&11/2&-3/2&-1/2\end{bmatrix}
\xrightarrow{r_3+r_4}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&30&-15&4&2\\0&1&0&0&6&-4&1&1\\0&0&1&0&-9/2&5/2&-1/2&-1/2\\0&0&0&1&-23/2&11/2&-3/2&-1/2\end{bmatrix}
$$

より，逆行列は

$$
\begin{bmatrix}30&-15&4&2\\6&-4&1&1\\-9/2&5/2&-1/2&-1/2\\-23/2&11/2&-3/2&-1/2\end{bmatrix}
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}60&-30&8&4\\12&-8&2&2\\-9&5&-1&-1\\-23&11&-3&-1\end{bmatrix}
$$

【コメント】

- この基本変形の 4 回目の掃出しは分数を回避できない．すでに掃き出した列を変えないような変形しかできないので，4 行に定数をかけるか，4 行の定数倍を他の行に加えることしか行えない．
- 計算ミスである列の成分がすべて 0 になってしまった人がいる．逆行列は正則行列なので一つの列（行）がすべて 0 になることはあり得ない．
- 配点 25 点，平均点 21.58 点

問 4　次の等式について，正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(1) 二つの正方行列 A, B について $AB = BA$ が成り立つ．

(2) 二つの行列 A, B について，積 AB が定義できているものとする．このとき ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つ．

(3) P が正則な時，$\mathrm{rank}(AP) = \mathrm{rank}A$ が成り立つ．

【解答例】 (1) は間違いである．反例は様々だが，例えば次のようにすればよい．

$$
\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad
\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}
$$

(2) は正しい．A を $m\times n$ 型，B を $n\times p$ 型とすれば AB は $m\times p$ 型なので，${}^t(AB)$ は $p\times m$ 型である．また ${}^tB$ は $p\times n$ 型，${}^tA$ は $n\times m$ 型なので ${}^tB\,{}^tA$ も $p\times m$ 型である．よってこの等式の両辺の型は一致する．

次に，${}^t(AB)$ の (i,j) 成分は AB の (j,i) 成分なので A の第 j 行と B の第 i 列の積である．一方，${}^tB\,{}^tA$ の (i,j) 成分は ${}^tB$ の第 i 行と ${}^tA$ の第 j 列の積である．ここで ${}^tB$ の第 i 行は B の第 i 列を横にしたものであり，${}^tA$ の第 j 列は A の第 j 行を縦にしたものである．行ベクトルと列ベクトルの積の定義から ${}^tB$ の第 i 行と ${}^tA$ の第 j 列の積は A の第 j 行と B の第 i 列の積に一致する．よって ${}^t(AB)$ と ${}^tB\,{}^tA$ の対応する成分は等しく，二つの行列は一致する．

(3) も正しい．A の階数を k とすれば，正則行列 S, T を

$$SAT = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

となるようにとれる．P は正則なので

$$S(AP)(P^{-1}T) = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

となるが $P^{-1}T$ は正則なのでこれは AP の標準形が $\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$ であることを意味する．よって AP の階数も k である．

【コメント】

- (1) は良くできていたが，$AB \neq BA$ をきちんと示さなくてはならない．行列を具体的に書くだけでは不十分だ．ただし，積をすべて計算する必要はない．基本的には $(1, 1)$ 成分どおしを比較すればいいだろう．
- 一般的に文字でおいて AB と BA を計算するだけでは反例をあげたことにならない．反例は具体的に記述すべきである．
- A, B によっては $AB = BA$ になる場合もある．そのような場合があるからと言って $AB = BA$ が成り立つというわけではない．
- (2) の証明を 2 次の場合にやっても正解にはならない．また型が等しいことだけ示しても不十分だ．解答例では前半で型が等しいこと，後半で対応する成分が等しいことを示したが，本質は後半である．後半のみ示していても正解とする．
- (3) の正解はいなかった．階数を標準形から捉えなおさないと証明は難しい．試験の直前の講義で紹介し，6 月 6 日の講義メモの 1 で取り上げている．読んでおいてほしい．
- 配点各 10 点計 30 点，平均点は 10.04 点

「線形代数 I」第 2 回試験（7 月 25 日実施）の解答例とコメント

問 1 4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ と 4 項列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．ただし求めるのは未知数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 3 成分のみで良い．

(3) A は正則か否か答えよ．正則な場合は A^{-1} の $(2,3)$ 成分を求めよ．

【解答例】 (1) まず $(2,4)$ 成分を軸に 4 列の掃出しから始めてみる．

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+4r_2 \\ r_3+3r_2 \\ r_4+2r_2}}{=} \begin{vmatrix} 5 & -14 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 9 & -7 & 1 & 0 \\ 6 & -11 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} (-1)^{2+4}(-1) \begin{vmatrix} 5 & -14 & 5 \\ 9 & -7 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1-c_3 \\ c_2+3c_3}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -(160 + 1 + 20 - 40) = -141$$

(2) $|A| \neq 0$ なので連立方程式はクラメルの公式で解ける．第 3 成分なので第 3 列を右辺の定数でおきかえる．

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+4r_2 \\ r_3+3r_2 \\ r_4+2r_2}}{=} \begin{vmatrix} 5 & -14 & 11 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 9 & -7 & 4 & 0 \\ 6 & -11 & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{次数下げ}}{=} (-1)^{2+4}(-1) \begin{vmatrix} 5 & -14 & 11 \\ 9 & -7 & 4 \\ 6 & -11 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-r_2}}{=} - \begin{vmatrix} -13 & 0 & 3 \\ 9 & -7 & 4 \\ -12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(81 - 252 + 156) = 15$$

よって解の第 3 成分は $\dfrac{15}{-141} = -\dfrac{5}{47}$

(3) $|A| = -141 \neq 0$ なので A は正則である．よって逆転公式から A^{-1} の $(2,3)$ 成分は $(3,2)$ 余因子を $|A|$ で割ったものになる．

$$_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-6 + 24 - 2 - 9 - 4 - 8) = 5$$

より A^{-1} の $(2,3)$ 成分は $\dfrac{5}{-141} = -\dfrac{5}{141}$ である．【コメント】

- この章の基本となる問題である．解答例は背景となる事実も含めて記述しているので少し饒舌に過ぎる．あくまで学習の参考にするために書いたものである．
- 行列の基本変形と行列式の操作は，計算は似ているが内容はまったく異なる．行列式と行列の記号が区別できていないもの，操作を施すとき = ではなく $\longrightarrow$ を使ったものは若干減点している．行列式と行列の違いを理解してほしい．
- 行列式の操作においては掃出しはどこを軸にとっても構わない．$(1,1)$ 成分を 1 にしてからそこで掃き出すという計算を実行している人がいるが，無駄な労力である．なお，解答例では 4 列の掃出しを行ったが，これによって (1) と (2) の操作の内容が類似してくる．

- クラメルの公式を知らないで試験を受けている人の多さに驚いた．毎回のレポートではきちんと理解できているように感じたのだがあれは何だったのだろうか．残念である．
- 逆行列を基本変形で求めようとした人がいたが，解を見れば簡単には計算できないことが分かるだろう．なお，たとえ基本変形で解が得られたとしてもこの問題の解答としては不適切である．今回の試験が行列式の単元の試験であることを注意せよ．できればいいという態度ではいけない．
- 配点は (1)(2) がそれぞれ 15 点，(3) が 10 点の計 40 点である．平均点は 30.09 点だった．

問 2　n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ．また A が正則であるための条件を述べよ．

【解答例】 第 2 列から第 n 列までを第 1 列に加えてみれば，各行には a が 1 つ，b が $n-1$ 個ずつあるので

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

これを $(1,1)$ 成分を軸に第 1 列の掃出しを行えば上 3 各行列になるので行列式の値はすぐに求められる．

$$|A| = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n+1)b)\,(a-b)^{n-1}$$

よって A が正則であるための条件は $(a+(n+1)b)\,(a-b) \neq 0$ であり，$a \neq -(n+1)b$ かつ $a \neq b$ である．

【コメント】

- テキスト 66 ページ例 19 であり，6 月 27 日の講義で解説した．同様の問題は章末問題 3.2(7) にもあり，レポート課題にしたので解答例もつけている．印象深い方法なのでできてほしかった．
- この行列式を計算する方法は他にもある．意味のある方法には途中までであっても部分点をつけている．ただし，サラスの方法で計算するのは問題外だ．4 次以上の行列式はサラスの方法では計算できない．
- 配点 15 点，平均点は 5.44 点だった．

問 3　n 次行列式についての等式

$$|D_n| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

について左辺を第 1 列で展開せよ．またその結果を用いてがこの等式が成り立つことを示せ．

【解答例】 第 1 列は $(1,1)$ 成分と $(n,1)$ 成分以外は 0 なので，第 1 列で展開すると二つの項のみが残る．(i,j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と表せば

$$|D_n| = x\tilde{a}_{11} + a_n\tilde{a}_{n1} = x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

第 1 項の行列式は $|D_{n-1}|$ であり，第 2 項の行列式は下三角行列で値は $(-1)^{n-1}$ である．ゆえに

$$|D_n| = x|D_{n-1}| + a_n$$

を得る．よって $|D_{n-1}| = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$ が成り立てば

$$|D_n| = x\left(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\right) + a_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

となる．

$$|D_2| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1x + a_2$$

より，数学的帰納法でこの等式が証明された．

【コメント】

- 章末問題 3.8(3) と同様の問題であり証明の考えも基本的に同じである．
- 行列式の展開がほとんど理解できていなかったようだ．逆転公式の証明に重要な役割を果たしているのできちんと学習しておいてほしい．なお，具体的な数値による 4 次（あるいはそれ以上）の行列式を展開で計算するのは効率的ではない．展開は掃出しを使わないので文字を含んだ行列式を求めるのに有効である．その例として章末問題 3.8(3) を解説したのだが良くわからなかったようだ．
- 解答例は数学的帰納法を使っている．高校で学習したスタイルとは異なるが，数学的帰納法の論理で必要な要素は全て含んである．考えてほしい．
- 配点 15 点，平均点 2.04 点だった．

問 4　次の等式について，正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(1) n 次正方行列 A と実数 c について $|cA| = c|A|$ が成り立つ．

(2) n 次正方行列 A, B について $|AB| = |BA|$ が成り立つ．

(3) 上三角行列の行列式の値は対角成分の積である．

【解答例】 (1) は間違いである．反例は様々だが，例えば

$$|I_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad |2I_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 2|I_2|$$

(2) は積の行列式を使えば簡単に証明できる．

$$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$$

(3) は $(1, 1)$ 成分を軸にする次数下げを繰り返していけばよい．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$$

【コメント】

- 反例はできる限り単純なものをとるべきである．$|cA| = c^n|A|$ を示した答案は反例を出したとは言えないが正解として扱った．なお，$|A| = 0$ の場合は反例にはならない．示された例がこのような行列の場合は減点している．
- (2) は積の行列式の公式（定理 3.8）を使えばよい．この定理の証明は正則な場合と正則でない場合に分けて行ったが，それを利用する場合は分ける必要はない．まずは定理の意味を正確に理解したうえで証明を考えるべきだ．
- (3) で掃出しを繰り返すという表現をした人がいるが，解答例でも明らかなように掃出しは行っていない．すでに次数下げができる形の行列式になっているので次数下げを繰り返せばよい．16.53 点だった．