線形代数 II 講義メモ (10 月 3 日)

前期はベクトルを単なる数の並びとみて形式的な計算に重点を置いて講義を進めた．後期はそこにある種の図形的イメージを導入する．図形的と言っても次元が高いので一筋縄ではいかない．3 次元の場合をイメージしながら，代数的計算で一つ一つの概念を確認してほしい．

本日の講義の要点

1. 3 次元空間での座標変換

   $\mathbb{R}^n$ で n 項列ベクトル全体の集合を表す．$\mathbb{R}^1$ は数直線，$\mathbb{R}^2$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間である．$\mathbb{R}^3$ の座標を (x, y, z) で表し，新たに座標 (X, Y, Z) を考える．ただし原点は変えない．また座標軸の目盛の間隔やなす角は自由とする．

   X 軸の目盛 1 の点を元の座標で読んだ時の数ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする．同様に Y 軸の目盛 1 の点を $\boldsymbol{b}$，Z 軸の目盛 1 の点を $\boldsymbol{c}$ で表す．このとき新旧の座標の間には

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = X\boldsymbol{a} + Y\boldsymbol{b} + Z\boldsymbol{c}$$

   という関係がある．このとき (X, Y, Z) が新たな座標になることから少なくとも次の二つが成り立つ．

   - 各 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ について，必ず (X, Y, Z) 座標が決まる．すなわち

     $$\boldsymbol{p} = X\boldsymbol{a} + Y\boldsymbol{b} + Z\boldsymbol{c}$$

     を満たす X, Y, Z が存在する．
   - その X, Y, Z は一通りである．特に

     $$\boldsymbol{0} = X\boldsymbol{a} + Y\boldsymbol{b} + Z\boldsymbol{c}$$

     は $X = Y = Z = 0$ のときのみ成立する．

2. 1 次結合，1 次独立，一次従属

   定義はテキストに書いてあるので省略する．なお，1 次関係式という用語は講義では使わないが，テキストの問題等では使われているので注意しておくこと．これらの概念について要点を箇条書きしておく．

   - ベクトルの組についての概念である．組なので中括弧 { } を使って表すこと．テキストでは中括弧が省略されている場合もあるが好ましくない．
   - 1 次独立性と同次連立方程式の解の関係をしっかり理解しておくこと．これによって，具体的なベクトルの組の 1 次独立性等について，前期に学習した同次連立 1 次方程式の解法を利用して調べることが可能になる．

   なお，テキストには講義で扱わなかった例も記載されているので読んでおいてほしい．

3. 1 次独立なベクトルの組に，新たなベクトルを付け加えて 1 次独立にすること（定理 4.1）

   背理法を使って証明したがテキストの方法のほうが分かりやすいかもしれない．読んでおいてほしい．この定理は 4.4 節で利用される．今の段階では定理の証明さえ確認しておけばよい．

4. 部分空間

   部分空間を導入したが，今日の講義では $\mathbb{R}^3$ の部分空間がどのような集合になるかの説明にとどめた．

   - (S0) より $\boldsymbol{0} \in W$ である．逆に要素 1 個の集合 $W = \{\boldsymbol{0}\}$ は部分空間である．

- $\boldsymbol{a} \in W$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする．(S2) より W は $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{a}$ を結ぶ直線を含む．逆に原点を通る直線は部分空間である．
- W が $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{a}$ を結ぶ直線を含み，かつその直線上にない点 $\boldsymbol{b}$ を含んだとする．このとき (S1) および (S2) から W は $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を通る平面を含む．逆に原点を通る平面は部分空間である．
- さらに W がその平面以外の点を含むとき，W は空間全体 $\boldsymbol{R}^3$ に一致する．

よって $\mathbb{R}^3$ の部分空間はこれら 3 つの種類のみからなる．

テキストには 84 ページ 85 ページに $\mathbb{R}^2$ の具体的部分集合について部分空間か否かの考察が行われている．$\mathbb{R}^2$ の部分空間は，原点のみ，原点を通る直線，平面全体の 3 通りなので，結論は簡単に分かるはずだ．ただし，実際に部分空間の定義に照らし合わせて何故部分空間でないか具体的に示すことも重要だ．考えてみてほしい．

本日の提出課題

p. 83 の問 4 と p. 110 の章末問題 4.2 をレポート課題にする．同次連立方程式の議論に持ち込んで考えること．提出場所は前期と同じだが締め切りを 30 分繰り上げて火曜日 12 時半にする．締め切りに遅れた人は研究室に持ってくること．

線形代数 II 講義メモ (10 月 10 日)

前回のレポート課題について

いずれも与えられたベクトルの組から行列を作り，それを基本変形して階段行列にすればよい．しかし，階段行列への変形の仕方を忘れている者，変形した後の同次連立 1 次方程式が解けない者がいる．レポート課題に取り組む前にテキストでその部分を復習しておいて欲しかった．要点は次の 2 つである．

- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，基本変形で階段行列にしたとき次の形になることである．
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_r\end{bmatrix}$$
- 基本変形は正則行列 P によって
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r\end{bmatrix} \longrightarrow P\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P\boldsymbol{a}_1 & P\boldsymbol{a}_2 & \cdots & P\boldsymbol{a}_r\end{bmatrix}$$
と表せるので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ についての 1 次関係式と $\{P\boldsymbol{a}_1, P\boldsymbol{a}_2, \ldots, P\boldsymbol{a}_r\}$ についての 1 次関係式は同じ形としてよい．

2 番目は分かりづらいのでレポート課題の 4.2(4) で例示しておく．基本変形により

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & 2\\ 3 & 4 & 2 & -1\\ 5 & 6 & -4 & 3\\ 2 & 3 & 5 & -3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}P\boldsymbol{a} & P\boldsymbol{b} & P\boldsymbol{c} & P\boldsymbol{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -14 & 9\\ 0 & 1 & 11 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

であるが，階段行列を見れば $P\boldsymbol{c} = -14P\boldsymbol{a} + 11P\boldsymbol{b}$ および $P\boldsymbol{d} = 9P\boldsymbol{a} - 7P\boldsymbol{b}$ はすぐ分かるだろう．これに P^{-1} をかけて移項すれば

$$14\boldsymbol{a} - 11\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \qquad -9\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

の 2 つの 1 次関係式がすぐに得られる．

本日の講義の要点

1. 部分空間

部分空間の定義は前回紹介し，$\mathbb{R}^3$ の部分空間が，原点のみ，原点を通る直線，原点を通る平面，空間全体であることを解説した．議論が錯綜していて分かりづらかったとは思うが，部分空間とはいかに特殊な部分集合であるかは感じてほしい．

$\mathbb{R}^n$ の部分空間は直感では理解できない．まず原点のみの集合 $\{\boldsymbol{0}\}$ と，全体集合 $\mathbb{R}^n$ は部分空間であることに注意せよ．この 2 つを自明な部分空間（p.85 の最後の行）と呼ぶ．一般の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ については $\boldsymbol{0} \in W$ が成り立つ．すなわち

$$\{\boldsymbol{0}\} \subset W \subset \mathbb{R}^n$$

もう一つ，部分空間は要素ではなく集合だということを忘れないように．集合と要素の扱い方は慣れていない人が多いと思うので簡単にまとめておく．なお，要素が 1 個しかなくても集合である．上にある $\{\boldsymbol{0}\}$ は要素が $\boldsymbol{0}$ のみの集合を意味している．また要素のない集合も集合であり空集合と呼ぶ．空集合を $\emptyset$ という記号で表す．

記号	意味	関連記号
$\boldsymbol{a} \in W$	$\boldsymbol{a}$ は集合 W の要素である．（集合 W に属する）	$\ni$, $\notin$
$W \subset V$	W は V の部分集合である．	$\supset$, $\subsetneq$

2. 生成する部分空間

   部分空間を理解する上で最も重要なのは**生成する部分空間**（p. 86）である．記号の使い方と合わせてきちんと理解してほしい．まず生成する部分空間が部分空間であることの理由を述べた．部分空間のイメージがわかないので部分空間だと言われても考えようがないと思う人もいるだろうが，実際にやるのは定義における 3 つの条件をチェックすることだけだ．テキストにも証明 (p.86) として書いてあるので読んでみてほしい．

   生成する部分空間の意味を捉えるために $\boldsymbol{R}^3$ で考察した．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ について $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ は原点と $\boldsymbol{a}$ を結ぶ直線，$\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が同一直線上にない時，$\langle \boldsymbol{ab} \rangle$ は $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む平面であることは理解してほしい．ようするに $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ はたいてい直線，$\langle \boldsymbol{ab} \rangle$ はたいてい平面になる．だから $\mathbb{R}^n$ においても k 個のベクトルの組の生成する部分空間は，たいてい k 次元的広がりを持つと思われる．それを次の形で述べた．

   命題　$\mathbb{R}n$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立であればその生成する空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ は $\boldsymbol{R}^r$ ときれいに対応する．

   対応は $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ と $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r$ を対応させることによって行う．

   - すべての $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ のベクトルは

     $$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r$$

     の形に表せる．これは生成する部分空間の定義に他ならない．
   - しかも $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r$ という表し方はただ一通りである．すなわち

     $$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_r$$

     ならば $x_j = y_j,\ 1 \leqq j \leqq r$ が成り立つ．この証明は両辺の差をとって 1 次独立性に持ち込むだけだ．難しくはない．
   - 上の 2 つから $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ の点と $\mathbb{R}^r$ の点が 1 対 1 に対応する．これがこの命題の主張である．

3. 基底と次元

   基底と次元の定義を紹介した．前項で述べたことから r 次元部分空間とは $\mathbb{R}^r$ と同じ広がりを持った部分空間と言える．基底の存在など重要な事実は次回証明する．

4. 生成する部分空間に含まれる要素

   $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ について $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が W に入るための条件を考察した．方法は

   $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

   を基本変形で階段行列にすることにより，$\boldsymbol{b}$ が $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ の 1 次結合で書けるかどうかを判定すればよい．階段行列の使いやすさを味わってほしい．

本日の提出課題

章末問題の 4.3 と 4.4 を課題にする．4.3 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間はどういう集合か解説してあるので，それに沿って部分空間か否かを考えれば良い．4.4 は問題文に与えられている 4 つのベクトルを並べて 3×4 型行列を作り，それを基本変形で階段行列にしてみよ．授業の最後に解説したことと比較して考察せよ．

線形代数 II 講義メモ (10 月 17 日)

やはりこの章に入ってついていけない人も多いようだ．すべてを完全に理解しようとするとハードルが高くなりすぎるので，定理の証明はあまり気にせずに基本変形で得られる階段行列との関連を意識してみるといいと思う．n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合（部分空間）の扱いだが $\mathbb{R}^3$ での直感的理解と結び付けて考えてほしい．

前回のレポート課題について

かなり苦労している人も多いので 17 日の講義でも解説することにする．問題 4.3 については，集合に入る条件が式で与えられているので，その条件を満たす 2 つのベクトルの和，スカラー倍がやはり同じ条件を満たすことを見ればよい．例えば (3) について，条件を満たす 2 つのベクトルを $(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $(a_2,\ b_2,\ c_2)$ [*1] とおけば，条件は

$$3a_1 - c_1 = b_1 + 2c_1 = a_1 - b_1, \qquad 3a_2 - c_2 = b_2 + 2c_2 = a_2 - b_2$$

と表せる．ベクトルの和は $(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2)$ だが

$$3(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) = (3a_1 - c_1) + (3a_2 - c_2) = (b_1 + 2c_1) + (b_2 + 2c_2) = (b_1 + b_2) + 2(c_1 + c_2)$$

$$3(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) = (3a_1 - c_1) + (3a_2 - c_2) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$$

のように，和も与えられた条件を満たす．ゆえに和もこの集合に属している．スカラー倍についてはもっと簡単に分かるので (3) は部分空間であることが分かる．

自明でない部分空間は原点を含む直線または平面だという事実を使ってもよい．(1) は $z = c$ とおけば $x = 2c$ なのでこの条件を満たすベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2c \\ d \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である．これは 2 個のベクトルの生成する空間（原点を通る平面）であり部分空間である．

(2) は球面であり $\mathbf{0}$ を含まないので部分空間ではない．(4) は原点を通る平面 $x = y + z$ の x 軸の負の部分を含む側である．これは原点を通る平面でも，直線でも，また空間全体でもないので部分空間ではない．実際 $(-1, 0, 0)$ はこの集合に属しているがその -1 倍 $(1, 0, 0)$ は属さない．スカラー倍について閉じていないことが分かる．

【コメント】

- (1) を直線とする人が多い．座標平面で $x = 2y$ が直線を表すことから感覚的に判断してしまっているのだろうが，この問題では座標空間を扱っている．$x = 2z$ は (x, y, z) についての条件であり，条件式に y がないということは y については無条件ということを意味する．これを満たす点は $(2c, d, c)$ と 2 つのパラメーターで記述されるので平面である．

  より基本的には座標空間において $ax + by + cz = 0$ は原点を通る平面だということを覚えておいてほしい．$x - 2z = 0$ は平面を定める．
- 一方 (3) を平面とする人も多い．(1) は直線だから (3) は平面だとでも思ったのだろうか．条件式は 2 本の等式を 1 つにまとめたものであり

$$3x - z = y + 2z, \quad y + 2z = x - y, \qquad 3x - y - 3z = 0, \quad x - 2y - 2z = 0$$

[*1] 本来列ベクトルで書くべきだが，スペースをとるので行ベクトルで書いた．

の 2 本に分ければそれぞれが原点を通る平面なので，これはその交わりの直線になる．なお，$3x-z = x-y$ も出てくるが，これはここで挙げた 2 つの式から導かれるので考えなくてもよい．これが具体的にどんな直線かは連立方程式を解くことによって調べられる．前期に学習した事項だ．

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{bmatrix}$$

なので $x - (4/5)z = 0$, $y + (3/5)z = 0$ を解けばよいので $z = 5c$ とおけば $x = 4c$, $y = -3c$ を得る．解は $c(4, -3, 5)$ である．

- (4) は座標空間全体を平面 $x - y - z = 0$ で分けた一方の側である．これは和については閉じているが，負のスカラー倍をすると集合の外に出てしまう．スカラー倍について閉じていないので部分空間ではない．

問 4.4 については基本変形で階段行列にするという前期の講義で扱った基本事項を利用する．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ であり，$\boldsymbol{c} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ である．また $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ の間には自明でない 1 次関係式はなく $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合では表せない．ゆえに $\boldsymbol{d} \notin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ である．
【コメント】

- 変形を途中でやめてしまう人がいるが，基本変形で階段行列にするという話は覚えているだろうか．すべての行列は基本変形で階段行列にできるということは第 4 章を理解する上でも重要である．
- 証明の議論は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ の間に成り立つ 1 次関係式と $P\boldsymbol{a}$, $P\boldsymbol{b}$, $P\boldsymbol{c}$, $P\boldsymbol{d}$ の間に成り立つ 1 次関係式が共通だということを利用する．詳しくは前回の講義メモをみてほしい．

本日の講義の要点

1. $\mathbb{R}^n$ の部分空間に基底が存在すること（定理 4.5）

　基本的にテキストと同じ方法で証明をつけた．ただしテキストの「$\boldsymbol{a}_1$ は 1 次独立」という表現は好ましくない．1 次独立はベクトルの組に対する概念なので「$\{\boldsymbol{a}_1\}$ は 1 次独立」とすべきだろう．ここで $\{\boldsymbol{a}_1\}$ は 1 個のベクトルの組（日常的には組とは言わないかもしれないが受け入れてほしい．）であり，それが 1 次独立であるとは

$$c\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0} \iff c = 0$$

が成り立つことだ．これが $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ と同じことであることは分かるだろう．

　以後の証明では定理 4.1 が有効に使われる．1 次独立なベクトルの組にそれらの生成する空間にないベクトルを付け加えたら 1 次独立になるということだ．分かりづらい議論かもしれないが興味のある人は考えてみてほしい．

　もう一つこの議論を n 回繰り返すまでに基底に到達することを言わなくてはならない．これは $\mathbb{R}^n$ の $n + 1$ 個以上のベクトルの組が 1 次独立になれないことを言えばよい．これは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立であることと，それらを並べた行列が基本変形で

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_r \end{bmatrix}$$

という階段行列にできることが同値であることをみればよい．実際，これ以外の階段行列になったら自明でない 1 次関係式が出てくることは理解できるだろう．

- この定理から，$\mathbb{R}^n$ の部分空間は n 個以下の 1 次独立なベクトルの組の生成する空間であることが分かる．これを $\mathbb{R}^3$ で考えれば，部分空間は原点のみ，原点を通る直線，原点を通る平面，空間全体のいずれかであることが再度確認できる．
- 1 次独立なベクトルの組に，その 1 次結合で表せないベクトルの組を付け加えると，個数の 1 つ多い 1 次独立なベクトルの組が得られることは重要な考え方だ．証明ができなくてもこの事実は覚えておいてほしい．

2. 基底を構成するベクトルの個数が一定であること（定理 4.7）

W の基底として r 個のベクトルの組が取れるとき，W の基底はすべて r 個のベクトルの組になることがこの定理の主張だ．証明は定理 4.3 を使うが，講義での証明と定理 4.3 の証明は基本的に同じ内容だがテキストでは階数（rank）を使っているので分かりづらいかもしれない．講義の証明を記述しておこう．

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を W の基底とし，s 個の W に属するベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s\}$ を考える．ただし $s > r$ とする．$\boldsymbol{b}_j \in W$ なので，基底が W を生成することから

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\boldsymbol{a}_i = c_{1j}\boldsymbol{a}_1 + c_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{rj}\boldsymbol{a}_r$$

と表せる．これより行列を使って

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} \end{bmatrix}, \qquad B = AC$$

ここまではテキスト p. 91 の証明と同じ．テキストはここから階数の議論に行くが，講義では同次連立 1 次方程式の解を利用した．さて続けよう．

ここで $r < s$ より同次連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は無数の解を持つ（p. 35 問 11 をみよ）．ゆえに $\boldsymbol{d}$ をその $\boldsymbol{0}$ でない解とすれば

$$\boldsymbol{0} = A(C\boldsymbol{d}) = (AC)\boldsymbol{d} = B\boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + d_s\boldsymbol{b}_s$$

であり，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s\}$ についての自明でない 1 次関係式得られたので 1 次独立ではない．

3. 基底と座標

基底を一つ取ると，W に座標を入れることができる．p. 97 に記述されている．この話は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間 W に座標を入れることとして考えてみるとよい．W は平面なので，W の中で X, Y 軸を入れることになるが，その目盛 1 の点の組が W の基底である．基底は $\mathbb{R}^n$ の部分空間について，そこに座標を入れることを可能にする．

4. 共通部分，和空間，直和

p. 88 から p. 90 までにわたって記述されている話題だ．今回はその定義を確認しておくだけで良い．なお，2 つの部分空間の共通部分が，部分空間になることは手ごろな証明問題だ．これぐらいは答えられるようになってほしい．また 2 つの部分空間の合併が一般には部分空間にならないことも当たり前だと思えるようにしてほしい．$\mathbb{R}^3$ で考えれば分かるのではないか．

本日の提出課題

章末問題の 4.14 と 4.15(1) を課題にする．どちらも与えられたベクトルの組を並べて行列を作り，それを基本変形で階段行列にしてみるとよい．分かるだろうか．

線形代数 II 講義メモ (10 月 24 日)

前回のレポート課題について

4.14 については与えられた 5 つのベクトルを並べて 3×5 型の行列を作り，それを基本変形で階段行列にするだけだ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

これから 1 次独立なベクトルの組は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ で残りのベクトルは

$$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_5 = -2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$$

と表せる．

4.15(1) についても同様に

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が 1 次独立であり，$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ である．ゆえに $\dim W = 2$ であり，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が W の基底になる．

【コメント】

- 基本変形で階段行列にすること．それによって列ベクトルの関係が良くわかる．
- テキストでは連立方程式の解と結び付けているが，講義では階段行列の形をそのまま使っている．例えば例 5(p.82) で非自明な 1 次関係式を求めるとき，テキストでは連立 1 次方程式の解によって説明しているが，この講義の説明では基本変形

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  から直接 $\boldsymbol{c} = (1/2)\boldsymbol{a} - (1/2)\boldsymbol{b}$ を与えている．このほうが簡単だと思うが如何か．なお，この考え方が許される理由は基本変形で得られる行列が正則行列 P により $\begin{bmatrix} P\boldsymbol{a} & P\boldsymbol{b} & P\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ と表せること，そして $\{P\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b}, P\boldsymbol{c}\}$ の 1 次関係式に P^{-1} をかければ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が得られることだ．10 月 10 日の講義メモをみてほしい．
- 1 次独立，1 次従属はベクトルの組に対する概念だ．組なので必ず $\{\quad\}$ でくくってほしい．テキストでは 1 個のベクトルの組のときは「$\boldsymbol{a}$ は 1 次独立」というような書き方をしているが，この講義では必ず「$\{\boldsymbol{a}\}$ は 1 次独立」 と記述している．なお例 19 では

  $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$ なので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次従属

  と記述されているがこれをまねて

  $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$ なので，$\boldsymbol{a}_2$ は 1 次従属

  というような書き方をする人がいる．これは誤りだ．

本日の講義の要点

1. 具体的な列ベクトルの組についての扱い

1 次関係式，1 次独立，1 次従属，生成するなどの概念は，ベクトルの組に対する概念だ．なお，これらを具体的な列ベクトルの組（行列 A とみなす）で考察するとき，テキストでは同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と関係づけているが，講義では A を基本変形して得られる階段行列の形から直接考察している．先週の問題に対するコメントと 10 月 10 日の講義メモを参照してほしい．

2. 線形写像

集合 A から集合 B への対応を写像と呼び $f : A \longrightarrow B$ のように表す．B が数の集合のときは関数と呼ぶ．実数 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への対応が 1 変数関数であり，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への対応が 2 変数関数である．さて，写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ とは n 個の実数の組に対して，m 個の実数の組が定まることを意味する．ようするに n 個のデータを入力すると m 個のデータが出力されるという意味だ．まずこれを念頭に置いておくこと．線形写像の定義は p.98 に (L1)(L2) の 2 条件を満たす写像として記述されている．これから

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + k_r f(\boldsymbol{a}_r)$$

を得る．テキスト p.99 下から 12 行目の式だが，納得いくのではないか．

3. 行列の定める線形写像

p.99 に記述されている．講義でも同じように解説した．重要なことは線形写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は行列の定める線形写像になることだ．p.99 の下から 2 行目から p.100 の 9 行目までその議論が記述されているが，講義の説明も同一である．講義では言わなかったが，成分を使って書けば

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

となる．要するに $f(\boldsymbol{x})$ の各成分は x_j たちについて 1 次の項からのみなる多項式である．例 23，例 27，例 28 など，みな成分が 1 次の項からのみなること，例 24 がこの形になっていないことを見ておくように．

4. 線形写像の表現行列

線形写像はある行列の定める線形写像になっている．しかし，定義域と値域の座標を変えれば，対応する行列も変わってくる．これを基底に関する f の表現行列という．導入の仕方は p.100 下から 5 行目の線形写像の表現行列の項を見てほしい．ただしこの内容を講義では行列を前面に出す形で行った．テキストの記号を使いながら講義での解説を再現しておく．

- 線形写像は行列をかけることになるので $f(\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}$ と表しておく．P は $m \times n$ 型である．
- 基底はベクトルの組なので，それらを並べた正方行列とみなす．$\mathbb{R}^n$ の基底から n 次正方行列 A，$\mathbb{R}^m$ の基底から m 次正方行列 B を作る．同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解しか持たないので A は正則である．同様に B も正則である．
- p.100 の最後の式は行列を使って次のように表せる．

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} = BF$$

- この式の左辺は $f(\boldsymbol{a}_j) = P\boldsymbol{a}_j$ なので

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\boldsymbol{a}_1 & P\boldsymbol{a}_2 & \cdots & P\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = PA$$

である．よって表現行列 F は $F = B^{-1}PA$ と表せる．

テキストでは $f(\boldsymbol{a}_j)$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ の 1 次結合で表すとしているがこの作業は決してやさしくはない．とはいっても $B^{-1}PA$ の計算だって大変だという人もいるだろう．授業終了後に思いついた計算方法を紹介しておく．

問題により P, A, B は与えられているので $M \times (m+n)$ 型行列 $\begin{bmatrix} B & PA \end{bmatrix}$ を基本変形で階段行列にする．B は正則なのでその階段行列の左側は単位行列である．

$$\begin{bmatrix} B & PA \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QB & QPA \end{bmatrix}$$

Q は正則であり $QB = I_m$ なので，この右側の QPA は $B^{-1}PA$ であり求めるものになっている．今週のレポート課題で試してみてほしい．

5. 線形変換

$\mathbb{R}^n$ から自分自身への線形写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を線形変換と呼ぶ．$\mathbb{R}^n$ の基底を 1 つ定めると，定義域と値域の両方に使えるので表現行列が決まる．前項で $A = B$ の場合になるので表現行列は $A^{-1}PA$ である．

本日の提出課題とヒント

章末問題 4.8 と 4.9 を課題にする．具体的な計算方法はこの講義メモを参照してほしい．例えば 4.9(1) では

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

だ．線形変換なので定義域と値域の基底は共通にしているため　$A = B$ であることに注意せよ．ゆえに表現行列を求めるためには

$$\begin{bmatrix} A & PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

を基本変形で階段行列にすればよい．

線形代数 II 講義メモ (10 月 31 日)

前回のレポート課題について

4.8(1) は標準基底に関する表現行列を求める問題なので，線形写像 f がどんな行列をかけているかをみればよい．

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x+2y \\ -y \\ 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{より} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4.8(2) は $f(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ で P を定め，定義域の基底を並べた行列を A 値域の基底を並べた行列を B とすれば

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

$$PA = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 31 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

より次の行列を基本変形すればよい．

$$\begin{bmatrix} B & PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 27 & 31 \\ -1 & 1 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 17 & 19 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 22 & 25 \\ 0 & 1 & 5 & 17 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & B^{-1}PA \end{bmatrix}$$

ゆえに，求める表現行列は $\begin{bmatrix} 5 & 22 & 25 \\ 5 & 17 & 19 \end{bmatrix}$

4.9(1) はヒントで示しているが

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

である．よって

$$\begin{bmatrix} A & PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -6 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

から表現行列は $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ である．

4.9(2) についても同様に

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & PA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & A^{-1}PA \end{bmatrix}$$

となるので求める表現行列は $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

【コメント】

- 講義でやったように PA を求め，B^{-1} を計算してから $B^{-1}PA$ を求めた人が多かった．これでも OK だ．ただし解答例では $\begin{bmatrix} B & PA \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I & B^{-1}PA \end{bmatrix}$ という基本変形で行っている．なおこの右側の行列は階段行列なので，基本変形は階段行列にするための変形として行ってよい．
- テキストでは $f(\boldsymbol{a}_j)$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ の 1 次結合で表すことにより表現行列を求めている．ただし，1 次結合で表すには連立 1 次方程式を解かなくてはならない．この作業は一般には大変だ．例 28 では，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ が基本列ベクトルたちなので，1 次結合は簡単に分かる．あまりに特殊な例なので，これだけで一般の場合を考えるのは困難だろう．

本日の講義の要点

まず講義終了後に dim の意味について質問を受けた．次元を定義したときに $\dim V$ で V の次元を表すと言ったつもりだったがどうも忘れていたようだ．お詫びしておく．

1. 線形写像（線形変換）の表現行列

   定義と求め方について復習した．前回のレポート課題の解答例とコメントも参考にしてほしい．

   - $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるとき，それを並べてできる行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ は正則である（p. 83）．逆に A が正則であれば，その列ベクトルの組は $\mathbb{R}^n$ の基底である．
   - 線形写像は何かの行列をかける写像に他ならない（p. 100，前回解説済み）．だから $f(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ とおく．
   - 表現行列の定義式（p. 100 下から 1 行目）は

   $$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} = BF$$

   と表せる．左辺は PA と表せるので $F = B^{-1}PA$ である．

   - $B^{-1}PA$ は $\begin{bmatrix} B & PA \end{bmatrix}$ を基本変形で階段行列にすることにより得られる．

   なお，基底の取り方で線形写像の表現行列は変わるので，表現行列をできる限り簡単にするように基底をとることが重要になる．若干記号を変えてまとめておく．

   - 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について，$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ と，$\mathbb{R}^m$ の基底 $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_m\}$ をうまくとることにより，表現行列 $Q^{-1}AP$ をできるだけ簡単な行列にする．（p. 42 定理 2.8 行列の標準形）
   - 線形変換 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について，$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ をうまくとることにより，表現行列 $P^{-1}AP$ をできるだけ簡単な行列にする．（第 6 章 対角化）

2. 線形写像の像と核

   像と核の定義は p. 106 に記述されている．ここでは行列の基本変形で階段行列にすることと関連付けて解説した．

   - 像について

     $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とすれば，$A\boldsymbol{x}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ の 1 次結合に他ならないので，像は 1 次結合全体すなわち

     $$\mathrm{Im} f = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

である．この基底は A を階段行列にしたときの形から得られる（10 月 24 日の講義メモでの「前回のレポート課題について」を参照せよ）．ゆえに，$\mathrm{Im}f$ の次元は階段行列の階数に等しい．

- 核について

核は同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合に他ならない．求め方及び表し方は 35 ペー j から 37 ページにかけて記述されている．なお，p. 35 の最後の行にはすでに基底という言葉が使われている．もう一つ重要なのは $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}f$ は，1 次関係式

$$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

の係数に対応する．階段行列の形から分かる 1 次関係式が核の要素を定めるとともにそれらが核の基底になる．

核の次元は同次連立 1 次方程式の表示に使われる任意定数の個数なので，階段行列の階数が r のとき次元は $n - r$ である．

3. 次元定理（定理 4.15）

テキストの証明は難しいが，階段行列の階数と次元を結び付ければ簡単に証明できる．ただし，講義では像（生成する空間）の基底も，核（同次連立 1 次方程式の解空間）の基底も，具体例でしか扱っていない．証明は不完全だが現時点ではこの程度の理解で十分だろう．

4. 像と核の例（p. 36 例 6）

同次連立 1 次方程式の問題だが，この係数行列 A による線形写像の像と核を求める問題として扱う．まず基本変形の内容については p. 36 をみること

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -17 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段の形を決める列は $(q_1, q_2) = (1, 3)$ なので，第 1 列と第 3 列が像を生成する．像は $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ であり，2 次元である．

階段行列の第 2 列から $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1$，第 4 列から $\boldsymbol{a}_4 = -14\boldsymbol{a}_1 + 11\boldsymbol{a}_3$，第 5 列から $\boldsymbol{a}_5 = 9\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_3$ を得る．右辺を左辺に移項すれば自明でない 1 次関係式

$$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$14\boldsymbol{a}_1 - 11\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$$

$$-9\boldsymbol{a}_1 + 7\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$$

を得る．これらは核の要素

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対応する．これが核の基底になることは p. 37 の例 6 の結論と比べてほしい．

5. 線形変換の表現行列を簡単にする問題とテキストの定理 4.15 の証明

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について像と核の次元を $\dim \mathrm{Im}f = r$，$\dim \mathrm{Ker}f = s$ とおく．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s\}$ を核の基底とし，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ を像の基底とする．$\boldsymbol{b}_j = f(\boldsymbol{c}_j$ となるように，$\boldsymbol{c}_j \in \mathbb{R}^n$ をとる．

ここでテキストでは $\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_r, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になることを証明して $r + s = n$ を導いている（これについては次回証明します）．なお，この基底と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ からを p．92 系 4.6 によって得られる $\mathbb{R}^m$ の基底による表現行列は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{c}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{c}_r) & f(\boldsymbol{a}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{a}_s)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r & \boldsymbol{b}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{b}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}\end{aligned}$$

本日の提出課題とヒント

章末問題 4.10 を課題にする．具体的な計算方法はこの講義メモを参照してほしい．

線形代数 II 講義メモ (11 月 7 日)

前回のレポート課題について

(1) は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ をかける線形写像なのでこれを基本変形で階段行列にする．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ なので，$\mathrm{Im} f$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ で生成される．またこのベクトルの組は非自明な 1 次関係式を持たないので 1 次独立である．よって像は 2 次元で基底は

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

で与えられる．一方 $\boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ より非自明な 1 次関係式

$$3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

が得られる．非自明な 1 次関係式はこの定数倍以外存在しないこと，核の要素は 1 次関係式の係数の作るベクトルであることから核は 1 次元でその基底は

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ をかける線形写像なので同様に

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段行列の第 3 列より $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，第 4 列より $\boldsymbol{a}_4 = -\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ を得る．よって像は 2 次元でその基底は

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

で与えられる．核は非自明な 1 次関係式

$$-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$$

より 2 次元で基底は

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

【コメント】

- 面倒くさがらずにきちんと階段行列に変形して考察すること．この程度の行列ならだれでも計算できるはずだ．
- (2) で計算ミスをして，階数が 3 になってしまった人がいるが，その多くは正解（階数が 2）の場合に即した解を求めている．これでは計算ミスしたうえに，自分の計算結果に即した答えを出せなかったということになる．正解に近い解答であってもより質の悪い答案と評価される．

本日の講義の要点

1. 階段行列と像および核の基底

   前回のレポート課題 4.10(2) を題材に，基本変形で得られた階段行列と像および核の基底の関係を解説した．なお，以下の記述において，記号・計算はレポート課題の解答例を見るように．まず，像の基底について

   - 像とは $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$ 全体の集合であり，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3.\boldsymbol{a}_4\}$ の生成する空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3.\boldsymbol{a}_4\rangle$ に他ならない．
   - 階段行列の第 3 列と第 4 列から $\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ は $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$ に属する．ゆえに
   $$\mathrm{Im}f = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3.\boldsymbol{a}_4\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$$
   であり，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathrm{Im}f$ を生成する．
   - 階段行列の第 1 列と第 2 列の組は 1 次独立なので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ も 1 次独立である．
   - ゆえに $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathrm{Im}f$ の基底である．

   要するに階段行列の形を決める基本列ベクトル（テキスト p.27 の B においては第 q_j 列）に対応する A の列ベクトルの組が基底になる．このように理解しておくと階段行列から直接結論が得られる．次に核の基底だが

   - 核とは $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ 全体の集合である．すなわち同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合である．
   - $A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3.\boldsymbol{a}_4\}$ の 1 次関係式である．同次連立 1 次方程式の解はベクトルの組の 1 次関係式に対応する．
   - 同次連立 1 次方程式を解けば解は
   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a+b \\ -a+2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   である．これは解空間が，この 2 つのベクトルで生成されていることを意味する．また定数倍の和の第 3 成分は a，第 4 成分は b になっているので，これが $\boldsymbol{0}$ になるのは $a = b = 0$ に限る．すなわちこの 2 つのベクトルの組は 1 次独立であり，$\mathrm{Ker}f$ の基底である．

   要するに階段行列の型を決める基本列ベクトル以外の列（テキスト p.27 の例においては第 q_j 列以外の列）から出てくる 1 次関係式が核の基底を与える．階段行列の階数を r 列の数を n とすれば，像は r 次元，核は $n - r$ 次元である．

2. 内積の定義

   p.117 の内積の条件を満たすものが内積である．典型的な例として標準内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ があるが，高校で学習した内積が $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の標準内積であることに注意せよ．大学での内積はより一般化されていることに注意せよ．

3. 大きさと定理 5.1

 p.118 にベクトルの大きさが定義されている．大きさに関する性質が定理 5.1 にまとめられている，証明は講義でも与えたがテキストの証明と同一である．(2) については

$$\|k\boldsymbol{a}\|^2 = (k\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{a}) = k^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$$

として両辺の平方根をとればよい．簡単だ．

4. 角度と直交

 内積から角度が定義できる．その定義に Schwarz の不等式が使われていることに留意せよ．また $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき直交するという．

5. 正規直交系

 互いに直交し，大きさがすべて 1 のベクトルの組を正規直交系と呼ぶ．定理 5.2 は正規直交系が 1 次独立であることを主張している．なお，テキストの証明ではクロネッカーのデルタ δ_{ij} を使用している．この定義は 8 ページにあるので確認しておくこと．講義ではこの記号を使わなかったが内容としては同じである．

6. 正規直交化に向けて

 与えられた 1 次独立なベクトルの組から正規直交系を作る方法についてコメントした．鍵は垂線を下すことにある．詳細は次回解説するのでここでは気にしなくてよい．

本日の提出課題とヒント

 p．122 の問題 5.2 と 5.3 をレポート課題にする．5.3 については内積の条件（p．117）を一つずつ確認していくこと．

線形代数 II 講義メモ (11 月 14 日)

前回のレポート課題について

5.2 はやさしい．特に (1) は高校数学の範囲の問題と言ってもよい．(2) は $\mathbb{R}^5$ の話なので戸惑う人がいるかもしれないが

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{22}, \qquad \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{88}, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 22$$

より $\cos\theta = 1/2$ となるので，角度は $\pi/3$ である．

5.3 は内積の条件の 4 つを調べるだけなので，難しくはない．ただしその方法では煩雑だし見通しも悪い．ここでは行列を使った解法を説明しておこう．まず (1) については

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + b_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{a} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}$$

と整理してみる．内積の条件 (2)(3) は行列の積における演算法則 (p.6) から簡単に分かる．また内積の条件 (1) は，最後の式が 1×1 型行列で転置しても変わらないことを使って

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b} = {}^t\left({}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}\right) = {}^t\boldsymbol{b}\,{}^tA\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{b}A\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

から示される．${}^tA = A$ が成り立つこと（対称行列）が重要である．ただし，内積の条件 (4) は成り立たない．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ は成り立つが $a_1 + a_2 = 0$ のときは $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ になってしまい，(4) の後半の条件が成立しない．

5.3(2) についても同様に

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 2a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{a}B\boldsymbol{b}, \qquad {}^tB = B$$

と表せる．この表示から内積の条件 (1)(2)(3) は直ちに成り立つことが分かる．(4) については

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 2(a_1)^2 - 2a_1b_1 + 2(a_2)^2 = 2\left(a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)^2 + \frac{3}{2}(a_2)^2$$

より 0 以上であることと，0 になるのが $a_1 = a_2 = 0$ の場合に限ることが分かる．

【コメント】

- 角度を求める問題は特にコメントはない．内積による角度の定義（p.119）を使うだけだ．
- 5.3(1) は $a_1 + a_2 = 0$ のときに $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ であることを述べればよい．内積とは内積の条件 (1)(2)(3)(4) を満たすものというのがこの講義での定義なので，(4) が満たされないことを言えば，内積でないと言ってよい．
- 5.3(2) は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を示すのが重要だ．ここはきちんと書いてほしかった．なお

  $$2(a_1)^2 - 2a_1b_1 + 2(a_2)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2$$

  として結論を導いた人がいたが，これもいい答案だ．ただこういう工夫に頼りすぎるとうまくいかないケースもあり得る．解答例では平方完成という一般的な技法を使っており，より普遍的な考え方と言える．

本日の講義の要点

1. 内積の対称行列による表示

線形写像は写像の性質 (L1) および (L2) を満たす写像（p.98）として定義したが，このように性質で定義することにはなじめない人も多いと思う．一方線形写像は行列をかけること $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に他ならないことが p.100 にまとめてある．こちらの理解のほうがはるかに分かりやすいだろう．性質で定義することの重要性は，論理の組み立てにある．ただし，計算問題では行列をかけることと理解しておいたほうが楽だ．

さて，これと同じように内積を行列を使って表すことを考えた．

- 与えられた内積に対して $a_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ によって正方行列 $A = [a_{ij}]$ を定める．
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ と表せる．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_j y_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$$

- 逆に，対称行列 A について $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$ とおくと，内積の条件の (1)(2)(3) は成り立つ．例えば

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {}^t\left({}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}\right) = {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tA\,{}^t({}^t\boldsymbol{x})) = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = {}^t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})A\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{z})A\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{z}A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

- (4) については A によって個別に検討しなくてはならない．

2. グラム・シュミットの直交化法

1 次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ から互いに直交するベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ を作る方法を解説した．式は複雑だが $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_j$ から，$\left\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1} \right\rangle$ におろした垂線ベクトルである．次の 2 点を注意した．

- p.122 の $\boldsymbol{b}_r$ の定め方と，$\{\boldsymbol{b}_i,\ 1 \leqq i \leqq r-1\}$ たちが互いに直交することから $(\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_j) = 0,\ j \leqq r-1$ が成り立つことを暗算で確かめておくこと．これができれば少々の覚え違いは修正できる．
- $\boldsymbol{b}_j$ の成分は一般に分数になる．しかしこれを $c\boldsymbol{b}_j$ に置き換えて分母を払っても以降の $\boldsymbol{b}_k$ の計算には影響しない．例えば p.122 例 4 での $\boldsymbol{b}_2$ をその 2 倍の $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に置き換えても $\boldsymbol{b}_3$ は変わらない．知っておくと便利である．

3. 直交行列

直交行列の定義は p.126 を見ること．定理 5.6 で直交行列であることとその列ベクトルの組が正規直交基底であることの同値性が示されているが証明は易しい．ただし，ここでの内積は標準内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ である．定理に付け加えておくこと．

2 次元では正規直交基底は簡単に分かるので直交行列も簡単である．

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{（複号同順）}$$

上の複号をとった時は回転の行列，下の複号をとった時は線対称移動である．なお，下の複号をとった場合はテキストでは $m = \tan\dfrac{\theta}{2}$ として

$$\begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$$

と表している．

4. 直交変換

　直交行列をかけることによる線形変換を直交変換と呼ぶ．直交変換は内積を変えず（定理 5.7）したがって長さや角度も変えない．

　以上で第 5 章を終える．5.3 節の直交補空間と 5.5 節の複素内積は省略する．次回から第 6 章に入る．第 4 章，第 5 章の範囲で第 1 回の試験を 11 月 28 日に行う．計算問題を中心に簡単な証明問題をつける形で出題するので準備しておくこと．

本日の提出課題とヒント

　章末問題 5.7 の正規直交化の問題を課題とする．

線形代数 II 講義メモ (11 月 21 日)

前回のレポート課題について

グラム・シュミットの正規直交化の問題なので，形式的にあてはめるだけだ．レポート提出者は良くできていた．なお，解答例は $\boldsymbol{b}_k$ を定数倍して成分が整数になるようにしている．このほうが計算は簡単だと思う．
(1) については

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

なので，これを正規化すれば

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) については

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{7}{18}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{4}{9}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_4 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3)}{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

なのでこれらを正規化して

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- テキスト通りにやると $\boldsymbol{b}_k$ の成分は分数になる．それでも問題ないが計算は煩雑だ．このメモのやり方でも結果がまったく変わらないが理由を考えてみよ．
- ベクトルとスカラーは違うものなので記号の使い分けは徹底してほしい．どれがベクトルでどれがスカラー化をきちんと意識できていればいいのだが．

本日の講義の要点

1. 用語

   新しい用語がいくつか登場した．箇条書きしておこう．

- **固有値**　複素数 λ について $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するとき λ を A の固有値という．ここで $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を忘れないこと．
- **固有ベクトル**　上の式における $\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトルという．
- **固有多項式** $f_A(x) = |xI - A|$，テキストでは $|A - xI|$ としているが $|A - xI| = |-(xI - A)| = (-1)^n|xI - A|$ なので本質的には違いはない．なお，

$$f_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = x^n + \cdots + (-1)^n|A|$$

  このようにした理由は x に $-$ をつけたくないからだ．$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$ はすぐ分かるだろうが $(-x+3)(-x-2) = x^2 - x - 6$ はまごつくのではないか．
- **固有方程式**　n 次方程式 $f_A(x) = 0$ のこと．
- **固有空間**　固有値 λ について同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間を A の固有値 λ に対する固有空間と呼び W_λ と表す．

2. 計算法

　固有値，固有ベクトルの定義の $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

と整理すれば λ が固有値であることと $\lambda I - A$ が正則でないことは同値である．これは $|\lambda I - A| = 0$ と同値であり，固有値は固有方程式の解であることが分かる．

　固有空間は用語の定義にあるように同次連立 1 次方程式の解空間である．

3. 数を複素数で考えることについて

　一般に複素数の範囲で n 次方程式は解を持つ（代数学の基本定理：証明はしない）．この事実と因数定理を組み合わせれば n 次多項式は，複素数を利用すれば，n 個の 1 次式の積に因数分解できる．すなわち

$$f_A(x) = |xI - A| = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$$

と因数分解できる．ただし λ_j たちは互いに異なるものとしておく．ここでの n_j を λ_j の重複度という．複素数を考える最大の理由は，固有値が重複度を考慮すればちょうど n 個あることによる．実行列であっても，固有値は複素数になる場合があるので，実数のみ考えるのでは不十分だ．

　複素数の特徴は加減乗除が（0 で割ることを除いて）自由に行えることだ．基本変形で階段行列にすること，同次連立 1 次方程式の解き方，行列式の定義，正則性と行列式の関連など議論の基礎は加減乗除の演算法則だけなので複素数で考えても何の問題もない．部分空間の幾何学的理解は複素数では困難だが 1 次独立，生成するなどの概念は係数を複素数に変えても全く問題はない．部分空間と基底についても同様である．実際に計算するのは大変だが，議論が変わるわけではないことを忘れないでほしい．

本日の提出課題とヒント

　章末問題 6.1 を課題にする．固有値を求めるだけだが，興味があれば固有空間も調べてほしい．なお，来週は試験なのでレポート課題に取り組むのは試験終了後で構わない．締め切りは 12 月 3 日 12 時半とする．

線形代数 II 講義メモ (12 月 5 日)

前回のレポート課題について

章末問題 6.1 の固有値を求める問題をやってもらった．単に $|xI - A| = 0$ という方程式を解くだけで難しくはない．ただし 4 次の行列式をサラスの方法でやった答案はいただけない．4 次の行列式の計算にはサラスの方法のような簡便な計算方法はないことをきちんと意識しておくこと．なお，扱っている行列は 0 になる成分が多いので行列式は様々な工夫で簡単に計算できる．例えば (5) では 3 章の章末問題 3.12(3) の結果を使って

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix}$$
$$= \left((x-1)^2 - 1\right)\left((x-2)^2 - 4\right) = x^2(x-2)(x-4)$$

本日の講義の要点

1. 固有空間と次元

固有値 λ に対する固有空間 W_λ は同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間でありその次元は $n - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$ に等しい（定理 6.1）．なお，次元は第 4 章で導入した概念であり，そこでは実数のみを扱った．部分空間は $\mathbb{R}^n$ の中で考えていた．しかし A が実行列でもその固有値は一般に複素数になるので，ここでは数を複素数に広げて考えなくてはならない．n 項複素ベクトル全体の集合 $\mathbb{C}^n$ の中で第 4 章の定義を書き直す必要がある．ただし，1 次関係式，1 次独立，生成する，基底などベクトルの組に関する概念は基本変形で階段行列にすることが鍵だったので $\mathbb{C}^n$ でも問題なく定義できる．

$|\lambda I - A| = 0$ なので $A - \lambda I$ も行列式 0 であり正則ではない．ゆえに $\mathrm{rank}(A - \lambda I) \leqq n - 1$ であり $1 \leqq \dim W_\lambda$ である．

$\dim W_\lambda = k$ のとき，その基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k\}$ をとる．さらにこのベクトルの組を延長（系 4.6 p.92）して $\mathbb{R}^n$（実際には $\mathbb{C}^n$ ）の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ を作る．$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_k & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ は正則行列である．

$$AP = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & \cdots & A\boldsymbol{p}_k & A\boldsymbol{p}_{k+1} & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \lambda\boldsymbol{p}_k & A\boldsymbol{p}_{k+1} & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

と $P^{-1}\boldsymbol{p}_j$ が単位行列 $P^{-1}P$ の第 j 列，すなわち基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ であることから

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \lambda\boldsymbol{e}_k & P^{-1}A\boldsymbol{p}_{k+1} & \cdots & P^{-1}A\boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

であり

$$|xI - P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} (x-\lambda)I & -C \\ 0 & xI - B \end{vmatrix} = (x-\lambda)^k |xI - B|$$

となる．また左辺は

$$|xI - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}||xI - A||P| = |xI - A| = f_A(x)$$

なので A の固有多項式に一致する．（p.140 の冒頭）以上の議論から

定理 $\dim W_\lambda = k$ のとき，固有多項式 $f_A(x)$ は $(x-\lambda)^k$ で割り切れる．すなわち固有値の重複度（n 次方程式 $f_A(x) = 0$ の解としての重複度）を m とすれば固有空間の次元について次が成り立つ．

$$1 \leqq \dim W_\lambda = n - \mathrm{rank}(A - \lambda I) \leqq m$$

固有空間の次元が重複度を超えないことは，テキストでも使われているが明示されていないようだ．重要な事実として意識しておいてほしい．

2. 固有空間の基底から 1 次独立なベクトルの組を作ること

p.139 の性質 1 については講義では次のように扱った．

定理 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値とする．$\boldsymbol{x}_j \in W_{\lambda_j}$ について，

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ である．

証明は次のように行う． $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ の両辺に A をかけると

$$A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + A\boldsymbol{x}_r = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

さらに A をかけると

$$\lambda_1 A\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_r A\boldsymbol{x}_r = \lambda_1^2\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_r^2\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

以下，同様に A をかけていけば

$$\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2^k\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_r^k\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

を得る．$k \leqq r-1$ までの式を組み合わせれば

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^{r-1}\end{bmatrix} = O$$

を得る．ここで右側の行列の行列式は Vandermonde の行列式（p.76 3.8(4)）であり，$\lambda_i - \lambda_j$ たちの積である．固有値は互いに異なるものをとっているので行列式は 0 にはならず，右側の行列は正則である．右からその逆行列をかければ

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_r\end{bmatrix} = O$$

となる．よって $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$ である．

この定理を使えば p.139 の問 5 が証明できる．これも基本的な事実なので証明をつけておく．

定理 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値とする．$\dim W_{\lambda_j} = n_j$ とし，W_{λ_j} の基底を寄せ集めて作る $\sum n_j$ 個のベクトルの組は 1 次独立である．

$W(\lambda_j)$ の基底を $\{\boldsymbol{p}_{j1}, \boldsymbol{p}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{p}_{jn_j}\}$ とおこう．これらを寄せ集めたベクトルの組は

$$\{\boldsymbol{p}_{11}, \ldots, \boldsymbol{p}_{1n_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{j1}, \boldsymbol{p}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{p}_{jn_j}, \ldots, \boldsymbol{p}_{r1}, \boldsymbol{p}_{r2}, \ldots, \boldsymbol{p}_{rn_r}\}$$

と表せる（講義でこれを書くと移すのが大変なので日本語で説明を付けた）．これらの 1 次結合が $\boldsymbol{0}$ になるとは

$$\sum_{j=1}^{r}\left(c_{j1}\boldsymbol{p}_{j1} + c_{j2}\boldsymbol{p}_{j2} + \cdots + c_{jn_j}\boldsymbol{p}_{jn_j}\right) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことを言うが，

$$c_{j1}\boldsymbol{p}_{j1} + c_{j2}\boldsymbol{p}_{j2} + \cdots + c_{jn_j}\boldsymbol{p}_{jn_j} \in W_{\lambda_j}$$

なので，この前に証明した定理が適用でき

$$c_{j1}\boldsymbol{p}_{j1} + c_{j2}\boldsymbol{p}_{j2} + \cdots + c_{jn_j}\boldsymbol{p}_{jn_j} = \boldsymbol{0}$$

を得る．$\{\boldsymbol{p}_{j1}, \boldsymbol{p}_{j2}, \dots, \boldsymbol{p}_{jn_j}\}$ は W_{λ_j} の基底なので 1 次独立であり $c_{j1} = c_{j2} = \cdots = c_{jn_j} = 0$ となる．ゆえにすべての係数が 0 になるので 1 次独立である．

3. 対角化

数を複素数で考えれば，多項式は 1 次式の積として表せるので，固有値の重複度の和は n になる．しなわち相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とし，λ_j の重複度を m_j とすれば $\sum m_j = n$ である．$1 \leqq \dim W_{\lambda_j} \leqq m_j$ より，全ての固有値について $\dim W(\lambda_j) = m_j$ なら，W_{λ_j} の基底を集めることにより n 個の 1 次独立なベクトルを得る．これを並べた行列は n 次正方行列であり，正則行列になる．すなわち固有ベクトルを並べた正則行列 P が存在する．この P について $P^{-1}AP$ は対角行列になる．これが定理 6.5 である．すなわち

$$\text{すべての固有値について} \dim W_\lambda = m \Longrightarrow \text{対角化可能}$$

これが定理 6.5（の一部）である．この定理に従って p.148 の例 8 を解説した．例の解答では対角化可能性しか示していないが，講義では実際に対角化する P の構成まで行った．その部分だけ記述しておく．

W_{-1} は同次連立 1 次方程式 $(A + I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $x = 0,\ y - z = 0$ なので解空間は $W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である．W_1 は $(A - I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より階数が 1 なので固有空間の次元は 2 である．$x + y - 3z = 0$ であり，$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である．ゆえに W_1 と W_{-1} の基底を並べた行列は

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり $P^{-1}AP$ は固有値を並べた対角行列になる．

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

本日の提出課題とヒント

章末問題 6.2 を課題にする．固有空間と次元を求めるので対角化可能性までは簡単に分かるはずだ．締め切りは 12 月 10 日 12 時半とする．

線形代数 II 講義メモ (12 月 12 日)

前回のレポート課題について

章末問題 6.2 の固有空間の基底と次元を求める問題をやってもらった．固有値は固有方程式 $|xI - A| = 0$ の解であり，固有空間は同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間なので，実際の計算はすでに学習したものの組み合わせである．特にコメントはつけない．

本日の講義の要点

1. 対角化のまとめ

   A を対角化するとは $P^{-1}AP$ が対角行列になるように P を定め，かつ $P^{-1}AP$ を具体的に示すことを言う．固有値，固有空間，基底，などの議論が出てくるのでまずその一つ一つの意味を確認すること．

   - $P^{-1}AP$ が対角行列であることと P が A の固有ベクトルを並べた正則行列であることとは同値である．

     テキストでは補題 6.3 を使った説明があるが講義の説明方法は少し変えている．まず p.16 の分割乗法の結果から

     $$AP = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$$

     一方，対角行列の第 j 列は $\lambda_j \boldsymbol{e}_j$ と表せる（例 14（p.15）の基本ベクトル）ので対角行列に左から P をかけたものは $P\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{p}_j$（例 15 p.16） より

     $$P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{e}_1 & \lambda_2\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$$

     $P^{-1}AP$ が対角行列なら 2 つの行列は等しいので $\boldsymbol{p}_j$ は固有値 λ_j に対する固有ベクトルである．すなわち P の各列は固有ベクトルであり，P は固有ベクトルを並べた正則行列である．逆も簡単に分かる．

   - 固有値 λ_j に対する固有空間の次元は，固有値の重複度を m_j として $1 \leqq \dim W_{\lambda_j} \leqq m_j$ を満たす．証明は前回の講義メモの 1 に記述してある．
   - n 次正則行列とは n 個の 1 次独立なベクトルの組を並べたものに他ならない（p.83 の 1 次独立性と行列式の関係，および p.61 定理 3.9）．
   - 対角化できるための必要十分条件は n 個の固有ベクトルによる 1 次独立なベクトルの組が作れれば良い．
   - 各固有空間からはその次元の個数の 1 次独立なベクトルの組が取れるが，それらを寄せ集めたものは 1 次独立である（前回の講義メモ 2）．またこれ以上の個数の固有ベクトルが 1 次独立になることはない．
   - 各固有値の固有空間の次元の和は $\sum_j m_j = n$ を超えない．n になるのは各固有値について固有空間の次元と固有値の重複度が一致する場合である．
   - 以上の議論から対角化の必要十分条件として定理 6.5 が得られる．なお，重複度が 1 なら固有空間の次元は 1 になる．これから固有方程式が n 個の異なる解を持てば対角化可能である（定理 6.4）．
   - 一般にほとんどの方程式は重解を持たない．例えば 2 次方程式なら重解を持つのは判別式が 0 の場合だが，きわめて特殊な場合だと言える．また関数のグラフで考えても，重解を持つのは x 軸と

接する場合なので，少し上下に動かせば重解を持たないようにできる．要するにほとんどの正方行列は対角化できる．

具体的な対角化の例については前回の講義メモ 3 にもあるのでここでは書かない．自分で考えてほしい．

2. 多項式に行列を代入すること

多項式 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ について $f(A)$ を定めた．p.147 を確認せよ．

3. Cayley-Hamilton の定理（p.147）

残念ながらテキストの証明は間違っている．講義では対角化可能な場合に限って証明をつけた．ほとんどの行列について成立していることが分かるので，すべての A について成り立つことは $f_A(A)$ の各成分が A の成分 a_{ij} たちの多項式であることから分かる．ただこの講義では気にしなくてよい．証明には次の事実を使った．

- $f_A(x)$ に対角行列を代入すると，$f_A(\lambda_j)$ を成分とする対角行列になる．（p.148 の下から 2 行目からの式を参考にせよ）
- $f_A(P^{-1}AP) = P^{-1}f_A(A)P$ が成り立つ．（p.147 下から 6 行目）
- λ_j が固有値なので $f_A(\lambda_j) = 0$ である．よって $f_A(P^{-1}AP) = O$ である．
- $f_A(A) = Pf_A(P^{-1}AP)P^{-1} = O$ であり，Cayley-Hamilton の公式が示せた．

4. Cayley-Hamilton の定理を利用した行列の冪の計算

x^m を $f_A(x)$ で割って

$$x^m = q(x)f_A(x) + r(x) \qquad r(x) \text{ の次数} < n = f_A(x) \text{ の次数}$$

とし，A を代入すれば

$$A^m = q(A)f_A(A) + r(A) = r(A)$$

となるので，あまりを求めれば A^m が計算できることになる．余りの求め方は高校の剰余の定理（$f(x)$ を $x - a$ で割った余りは $f(a)$）の証明を参考に実行できる．例えば A が 2 次正方行列なら $f_A(x)$ は 2 次多項式なので余りは 1 次以下であり $px + q$ と記述できる．（講義では $Ax + B$ と書いてしまったが A は行列に使っているので避けるべきでした．いたずらに混乱させたと思うのでお詫びします．）

$$x^m = q(x)f_A(x) + px + q$$

で，$f_A(x) = 0$ の 2 つの解 α, β を代入すれば

$$\alpha^m = p\alpha + q, \quad \beta^m = p\beta + q$$

を得るのでこれを連立方程式として解けばよい．

$$p = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}, \qquad q = \frac{\alpha^m\beta - \beta^m\alpha}{\beta - \alpha}$$

ゆえに

$$A^m = pA + qI = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}A + \frac{\alpha^m\beta - \beta^m\alpha}{\beta - \alpha}I$$

テキストの例 10 では固有多項式が $f_A(x) = x^2 - x + 1$ であり，$(x + 1)f_A(x) = x^3 + 1$ を得る．

$$A^3 + I = (A + I)f_A(A) = O$$

なので $A^3 = -I$ であり，$A^{100} = A^{99}A = (-I)^{33}A = -A$ となる．授業では煩雑な説明になってしまったが一般論を意識してのことなので許してほしい．

5. 対角化の微分方程式への応用

n 個の未知関数の組 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ についての微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

を考える．ここで $P^{-1}AP$ が対角行列だったとして $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ とおく．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}(P\boldsymbol{X}) = P\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} = AP\boldsymbol{X}$$

より

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = P^{-1}AP\boldsymbol{X} \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}$$

であり $\dfrac{dX_j}{dt} = \lambda_j X_j$ と書き直せる．

3 次元の場合は，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ は固有ベクトルの方向に座標軸をとったことに対応する（10 月 3 日の講義メモ参照）．ここで取り上げた微分方程式は固有ベクトルの方向に座標軸をとれば，それぞれの成分関数の微分方程式に書き直せることが分かる．

本日の提出課題とヒント

章末問題 6.6 および 6.3 を課題にする．6.3 については Cayley-Hamilton の定理を使用する．例 10（p.148）を参考に取り組むこと．6.6 は必修課題である．対角化できるための必要十分条件と A を対角化する行列 P の作り方を考えること．

線形代数 II 講義メモ (12 月 19 日)

前回のレポート課題について

章末問題 6.3 は Cayley-Hamilton の定理を利用する問題だ．(1) の行列の固有多項式は $|xI - A| = x^2 + 1$ なので $A^2 + I = O$ である．$A^2 = -I$ より

$$A^{100} + 3A^{23} + A^{20} = (-I)^{50} + 3A(-I)^{11} + (-I)^{10} = I - 3A + I = 2I - 3A$$

以下の計算は省略する．同様に (2) の行列の固有多項式は $|xI - A| = x^3 - x$ なので $A^3 - A = O$ である．これについては x^{1000} を $x^3 - x$ で割った余りを $ax^2 + bx + c$ とおいて

$$x^{1000} = p(x)(x^3 - x) + ax^2 + bx + c$$

という式を作る．この両辺に $x^3 - x = 0$ の解である，$0, 1, -1$ を代入すると

$$0 = c, \quad 1 = a + b + c, \quad 1 = a - b + c$$

を得る．これを連立方程式として解けば $a = 1,\ b = c = 0$ であり，$x^{1000} = p(x)(x^3 - x) + x^2$ を得る（この証明は高校で学習した剰余の定理の証明と基本的に同じアイデアである）．

$$A^{1000} = p(A)(A^3 - A) + A^2 = p(A)O + A^2 = A^2$$

章末問題 6.4 は対角化の問題なので，きちんと計算過程も含めて記述しておく．前々回の講義メモ 3 も参考にすること．

(1) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3) - 2 = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

なので固有値は 1 と 4 である．固有値 1 に対する固有空間は

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

固有値 4 に対する固有空間は

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

固有値の重複度は 1 ずれも 1 なので対角化可能である．例えば次のようにすればよい．

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-5)(x-3) + 1 = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

なので固有値は 4（重複度 2）である．4 に対する固有空間は

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なので 1 次元であり，重複度の 2 より小さいので対角化不可能である．

(3) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = x(x-4) + 4 = (x-2)^2$$

なので固有値は 2（重複度 2）である．4 に対する固有空間は

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なので 1 次元であり，重複度の 2 より小さいので対角化不可能である．

(4) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -2 & x-4 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-2)^2(x-6)$$

なので固有値は 2（重複度 2）と 6 である．2 に対する固有空間は

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なので 2 次元であり，重複度の 2 と一致するので対角化可能である．固有値 6 に対する固有空間は

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なので，A は次のように対角化される．

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(5) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3)$$

なので固有値は 2（重複度 2）と 3 である．2 に対する固有空間は

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なので 1 次元であり，重複度の 2 より小さいので対角化不可能である．

(6) 固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -2 & x-3 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

なので固有値の重複度はすべて 1 なので対角化可能である．対角化をするために各固有値に対する固有空間を求める．

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A-2I=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$A-3I=\begin{bmatrix}-3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_3=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}\right\rangle$$

以上の計算から対角化は次のようになる．

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

【コメント】

- 計算ミスで $A-\alpha I$ が基本変形で単位行列になってしまう場合がある．すると同次連立 1 次方程式 $(A-\alpha I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解が $\mathbf{0}$ のみになってしまうが，これは α が固有値だということに矛盾する．固有ベクトルは $\mathbf{0}$ でない解であることに注意せよ．原因が計算ミスであっても，このミスは深刻なミスとみなされる．
- $W_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ というような記述をする人がいるが，左辺は固有空間（部分空間，集合）であり右辺は行列なので間違いである．解答例の記述の仕方を考えること．
- $P^{-1}AP$ を計算で求める人がいるが，これは好ましくない．論理をたどって直接結論を出してほしい．
- 対角化可能の条件は固有空間の次元が固有値の重複度と一致することだが，重複度が 1 の場合は固有空間の次元も 1 になり問題にならない．この部分を考える必要はない．(4) の解答例では対角化可能であることを確認してから，対角化するために 6 に対する固有空間 W_6 を求めている．(5) の解答例では W_2 の次元を調べた時点で対角化不可能であることが分かるので W_3 は求めていない．

本日の講義の要点

1. 対角化可能であるための必要十分条件
   固有ベクトルを並べた正則行列が存在することと対角化可能であることは同値である．前回の講義メモの 1 を見てほしい．
2. 3 次実正方行列の対角化（まとめ）
   章末問題 6.6 の (4) と (5) を題材に 3 次実正方行列の対角化のまとめを行った．論理の部分はすべて前回までの講義で解説している．さて，3 次行列の固有方程式は 3 次多項式である．3 次関数は $-\infty$ から ∞ まで変化するので，少なくとも一つの実数解を持つ．このことから固有値について場合分けを行いながら対角化についてまとめた．
   - 3 つの異なる実固有値を持つ場合
     それぞれの固有値に対する固有ベクトルを 1 つずつとって正方行列を作ればそれが固有ベクトルを並べた正則行列になる．対角化可能である．（定理 6.4）
   - 2 つの異なる実固有値を持つ場合，固有値を α,β で α の重複度を 2 とする．
     W_α が 2 次元なら対角化可能，1 次元なら対角化不可能である（定理 6.5）．対角化の行列は W_α の基底と W_β の基底を並べて作ればよい．
   - 1 つの実固有値と 2 つの虚数の固有値を持つ場合

複素数の範囲で考えれば 3 つの固有値を持つ場合と同じように対角化できる．

- 重複度 3 の 1 つの固有値のみを持つ場合

  対角化可能なら対角成分は α のみなので $P^{-1}AP = \alpha I$ である．よって $A = \alpha I$ である．対偶をとれば $A \neq \alpha I$ なら対角化不可能であることが分かる．

3. 講義では共役複素数について十分な説明ができなかったので，要点だけまとめておく．
   - 複素数 $z = a + ib$ について $\bar{z} = a - ib$ を z の共役複素数という．$z = \bar{z}$ と z が実数であることは同値である．
   - 成分が複素数の行列 A について $\bar{A}$ を A の各成分をその共役複素数に取り換えた行列とする．
   - 四則演算について $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$，$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ 等が成り立つ．
   - 行列の積についても上と同じことが成り立つ．$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ など．
   - $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

4. 実対称行列の固有値が実数であること（定理 6.6）．

   証明はテキストと同じであるが，講義では複素内積を扱っていないので若干記述方法が変わった．$A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ とし

$$ {}^t\boldsymbol{p}\overline{A\boldsymbol{p}} = {}^t\boldsymbol{p}\overline{\lambda\boldsymbol{p}} = {}^t\boldsymbol{p}\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{\lambda}\,{}^t\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{p}} $$

$$ {}^t\boldsymbol{p}\overline{A\boldsymbol{p}} = {}^t\boldsymbol{p}\bar{A}\bar{p} = {}^t\boldsymbol{p}\,{}^tA\bar{\boldsymbol{p}} = {}^t(A\boldsymbol{p})\bar{\boldsymbol{p}} = \lambda\,{}^t\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{p}} $$

   とすれば ${}^t\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{p}} > 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る．

5. 実対称行列が直交行列で対角化されること（定理 6.8）．

   テキストの証明は三角化を使っているが，直交行列により三角化が行えることについては，何の説明もない．テキストの証明が易しいというわけではない．いずれにしても難しい証明なので，聞き流すだけでも構わない．関心のある人は考えてほしい．まず直交行列について重要なことをまとめておく．
   - $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ が直交行列であることと，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ が正規直交基底であることは同値である．（p．126 定理 5.6）
   - P と Q が直交行列であればその積 PQ も直交行列である．なぜなら

$$ (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = {}^tQ\,{}^tP = {}^t(PQ) $$

   - P が $n-1$ 次直交行列であるとき，$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & P \end{bmatrix}$ は n 次直交行列である．なぜなら

$$ \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & P \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & P\,{}^tP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n $$

   さて，本題の証明に戻る．固有値はすべて実数なのでその一つを α_1 とし，固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ を大きさ 1 のベクトルとしてとる．$\boldsymbol{p}_1$ から初めて基底を作り，それを正規直交化すれば $\boldsymbol{p}_1$ を第 1 列とする直交行列が作れる．それを P とおく．P の第 1 列は固有ベクトルなので $P^{-1}AP$ の第 1 列は

$$ P^{-1}A\boldsymbol{p}_1 = P^{-1}(\alpha_1\boldsymbol{p}_1) = \alpha_1 P^{-1}\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 $$

   であり

$$ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} & B \end{bmatrix} $$

   となる．

次に $P^{-1} = {}^tP,\ {}^tA = A$ より

$$ {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP) = P^{-1}AP $$

なので $P^{-1}AP$ は対称行列であり次の表示を得る．

$$ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \qquad B \text{ は対称行列} $$

$n = 2$ の場合は右辺は対角行列であり，直交行列により対角化された．$n-1$ 次対称行列が直交行列によって対角化されるとすれば（数学的帰納法の仮定）$Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような $n-1$ 次直交行列が存在する．そこで

$$ R = P\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix} $$

とおけば，これは n 次直交行列であり，$R^{-1}AR$ は対角行列になる．

$$ R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} $$

6. 実対称行列の直交行列による対角化の計算

   p.151 の枠の中にまとめられている．要点は各固有空間ごとに正規直交基底をとることで，他は普通の対角化と変わらない．なお，直交行列で対角化することの意味は次の 2 次形式のところで解説する．

本日の提出課題とヒント

章末問題 6.5 を課題にする．対称行列が必ず対角化できることを感じてほしい．締め切りは 1 月 14 日（火）の 12 時半とする．

線形代数 II 講義メモ (1 月 16 日)

前回のレポート課題について

章末問題 6.5 は対称行列を対角化する直交行列を求める問題だが，対角化までやると良かった．レポートを提出していない人が多いので一部のみ解説し後は諸君の考察に委ねる．1 月 21 日を締め切りにするので，レポート課題として取り組んでほしい．

(1)(2)(3) は固有値の重複度がすべて 1 なのでそれぞれの固有ベクトルの大きさを 1 にすればよい．(3) により解説しよう．まず，固有値，固有空間を求めるまでは通常の対角化と同じである．まず

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ -2 & x-2 & 0 \\ -2 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)(x-4) - 4(x-2) - 4(x-4) = x(x-3)(x-6)$$

より固有値は $0, 3, 6$ である．各固有空間は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である．それぞれの固有空間は直交しており，大きさ（上の例では 3）で割ってやれば，固有ベクトルによる大きさ 1 の互いに直交するベクトルの組が得られる．直交行列とは大きさ 1 の互いに直交するベクトルを並べたものであること（定理 5.6），対角化する行列は固有ベクトルを並べた正則行列であることから

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(4)(5)(6) では重複固有値を持つので固有空間が 2 次元になる．直交行列で対角化するためには固有ベクトルを互いに直交するようにとる必要があるので対角化を行わなければならない．(4) で解説しよう．まず固有多項式は

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x-2 & 2 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-2)-4-4-4(x+1)-(x-2)-4(x+1) = x^3-12x-16 = (x+2)^2(x-4)$$

より固有値は -2（重複度 2）と 4 である．それぞれの固有値に対する固有空間は

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

この結果から互いに直交し大きさ 1 の固有ベクトルの組を作るには，W_4 からは単に大きさ 1 のベクトルをとるだけで良いが，W_{-2} では基底を正規直交化しなくてはならない．まず直交化するには，最初のベクトルは変えずに 2 番目のベクトルを

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に取り替えればよい．これを大きさ 1 にすれば正規直交基底が得られる．

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- P が直交行列であること，すなわちその各列ベクトルが互いに直交する大きさ 1 のベクトルであることを確認せよ．
- 解答例では固有ベクトルを階段行列に変形して求めているが，1 回掃き出しを行えば，一つの未知数を文字でおくことにより簡単に求められる．
- 固有空間が 2 次元の場合は，互いに直交する大きさ 1 のベクトルの組の取り方は様々である．例えば (4) の解答において，W_{-2} の基底の順序を入れ替えれば，テキストの解答例の結果が出てくる．どちらも正解である．

本日の講義の要点

1. 2 次形式

   n 変数の 2 次の項からのみなる多項式を 2 次形式と呼ぶ．

   $$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

   ここで x_ix_j の係数 a_{ij} と x_jx_i の係数 a_{ji} は同じ値にしているが同類項なので問題ないだろう．これによって 2 次形式は

   $$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}, \qquad {}^tA = A$$

   と表示できる．
2. 対称行列の直交行列による対角化と 2 次形式の値

   前回の講義で解説したように対称行列は直交行列 P によって対角化できる．2 次形式 $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ で変数変換すれば

   $${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{X})AP\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}\,{}^tPAP\boldsymbol{X}$$

   となるが P は直交行列なので ${}^tP = P^{-1}$ であり

   $${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{X}P^{-1}AP\boldsymbol{X} = \alpha_1{X_1}^2 + \alpha_2{X_2}^2 + \cdots + \alpha_n{X_n}^2$$

を得る．ここで α_j は A の固有値（A は対称行列なので固有値はすべて実数）であり，その最大を M 最小を m として

$$m({X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots {X_n}^2) \leqq {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq M({X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots {X_n}^2)$$

これから次の定理を得る．

定理　対称行列 A の固有値の最大を M 最小を m とするとき

$$m({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots {x_n}^2) \leqq f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq M({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots {x_n}^2)$$

証明は上の議論と ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots {x_n}^2 = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{X})P\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}{}^tPP\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X} = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots {X_n}^2$ による．

3. 極値問題への応用

C^2 級の n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{a}$ の周りで

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) \fallingdotseq f(\boldsymbol{a}) + \sum_j f_{x_j}(\boldsymbol{a})h_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a})h_i h_j$$

と 2 次多項式で近似できる．極値をとる点では $f_j(\boldsymbol{a}) = 0$ でなくてはならないが，そのとき $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{h}$ の 2 次形式で近似できる．これが常に正であれば極小，負であれば極大，正負いずれの値もとれば極値をとらないということが分かるが，2 次形式のとる値の考察が利用できる．

4. 正方行列の対角化と対称行列の直交行列による対角化

正方行列は線形変換の記述に利用される．正方行列の対角化は線形変換の表現行列をできる限り簡単にすることにつながる（10 月 31 日の講義メモを参照せよ）．これに対し対称行列の直交行列による対角化は，2 次形式の表現行列をできる限り簡単にするという問題につながる．応用の場面がまったく異なることに注意してほしい．

この講義メモの初めにレポート課題の解答を解説したが，単に対角化するだけなら各固有空間の基底をとって集めるだけで良い．ただし 2 次形式への応用を考えればそれでは不十分で，各固有空間から正規直交基底をとる必要がある．そこで Gram-Schmidt の正規直交化法が必要になる．解答例を読んでほしい．

今回はレポート課題は出題しない．対角化，対称行列の直交行列による対角化の問題をまだ提出していない人は，課題に取り組み提出してほしい．

線形代数 II 講義メモ (1 月 23 日)

前回のレポート課題について

　章末問題 6.5 について (3)(4) の解答例は前回の講義メモをみること．他の問題について，固有値の計算，固有空間の決定（基底をとること），正規直交化（次元が 1 の固有空間については大きさで割るだけなので省略），直交行列による対角化の順で計算のみ示す．なお，対角化の方法は様々であり，解答例のみが解答ではない．

(1)

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 4 = x(x-4)$$

より固有値は $0, 4$ である．各固有空間は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^3 - (x-2) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

より固有値は $1, 2, 3$ である．各固有空間は

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(5)

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & -1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x-4)^3 - 1 - 1 - 3(x-4) = (x-3)^2)(x-6)$$

より固有値は 3（重複度 2）と 6 である．それぞれの固有値に対する固有空間は

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A-6I=\begin{bmatrix}-2&-1&1\\-1&-2&-1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_6=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

W_3 は 2 次元なので基底を直交化する．

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_3=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&1&-\sqrt{2}\\0&2&\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

(6)

$$|xI-A|=\begin{vmatrix}x-1&-8&4\\-8&x-1&-4\\4&-4&x-7\end{vmatrix}=x^3-9x^2-81x+729=(x-9)^2(x+9)$$

より固有値は 9（重複度 2）と -9 である．それぞれの固有値に対する固有空間は

$$A-9I=\begin{bmatrix}-8&8&-4\\8&-8&4\\-4&4&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_9=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$A+9I=\begin{bmatrix}10&8&-4\\8&10&4\\-4&4&16\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_6=\left\langle\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

W_3 は 2 次元なので基底を直交化する．

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}\quad \text{より}\quad W_3=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$P=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3&-1&2\sqrt{2}\\3&1&-2\sqrt{2}\\0&4&\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&-9\end{bmatrix}$$

【コメント】

- P が直交行列であること，すなわちその各列ベクトルが互いに直交する大きさ 1 のベクトルであることを確認せよ．
- 解答例では固有ベクトルを階段行列に変形して求めているが，1 回掃き出しを行えば，一つの未知数を文字でおくことにより簡単に求められる．
- 固有空間が 2 次元の場合は，互いに直交する大きさ 1 のベクトルの組の取り方は様々である．例えば (4) の解答において，W_{-2} の基底の順序を入れ替えれば，テキストの解答例の結果が出てくる．どちらも正解である．

本日の講義の要点

前回までの講義で対角化および対称行列の直交行列による対角化の計算方法の解説は終えた．テキストの章末問題の解答は講義メモに計算過程も含めて記述しているので自分で学習しておくこと．今日の講義ではそれぞれの応用の場面を紹介した．対角化の重要性を感じてほしい．

1. 行列の対角化と線形微分方程式

　行列の対角化は行列を介在した様々な問題に応用される．ここでは線形微分方程式への応用を紹介した．

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$$

について，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ と変換すれば

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = P^{-1}AP\boldsymbol{X}$$

になる．ここで $P^{-1}AP$ が対角行列なら

$$\frac{d}{dt}X_j = \alpha_j X_j, \qquad 1 \leqq j \leqq n$$

と単純な微分方程式に分けることができる．この解は指数関数であり $X_j(t) = c_j e^{\alpha_j t}$ になる．元の微分方程式の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = P\begin{bmatrix} c_1 e^{\alpha_1 t} \\ c_2 e^{\alpha_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\alpha_n t} \end{bmatrix}$$

　$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ という変換は固有ベクトルの方向に座標軸をとることに対応する．

2. 対称行列の直交行列による対角化と 2 次式

　前回の講義では 2 次形式の値に注目したが，今回はより一般に 2 次式の考察に応用した．

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j + \sum_k b_k x_k + c = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c$$

なので A を対角化する直交行列を P として $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ と変換すれば

$${}^t\boldsymbol{X}\,{}^t\boldsymbol{P}AP\boldsymbol{X} + {}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{X} + c$$

となる．ここで P が直交行列なので ${}^tP = P^{-1}$ であり対角化に結びつく．

　この考え方は $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ のグラフの考察にも利用できる．直交行列を回転の行列にできるので座標軸の回転による変数変換を行ったことになる．回転なのでグラフの形と式の形の関係は通常の座標と変わらない．講義ではこの考えを利用して $xy = 1$ のグラフが実際に双曲線であることを紹介した．

　1 年間，線形代数を学んできたが如何だったろうか．基本的に数の四則演算しか使わなかったが，それからいかに精緻な論理体系が作られるのか感じていただけたら幸いだ．今後の学習の中で線形代数に出会うこともあると思うが，その際にこの講義で学習した知識が役立つことを願っている．

「線形代数 I」第 1 回試験（11 月 28 日実施）の解答例とコメント

言葉の意味を理解していない答案が多い．例えば 1 次独立や基底という用語はベクトルの組に対する概念だが，このこと自体曖昧になっているようだ．配点は問 1 が 30 点，問 2 が 25 点，問 3 が 20 点，問 4 が 25 点で計 100 点満点である．最高点は 96 点，最低点は 6 点，平均点は 55.32 点だった．なお，合格点は 40 点とする．第 2 回試験（2 月実施）と合わせて 2 回とも不合格になった場合は再試験の対象としないので注意してほしい．

問 1 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の列ベクトルの組からなる 1 次独立なベクトルの組で，最大個数のものの例を 1 つ作れ．

(2) A の列ベクトルの組についての自明でない 1 次関係式を求めよ．

(3) A の定める線形写像の像の基底を 1 組あげよ．

(4) A の定める線形写像の核の基底を 1 組あげよ．

【解答例】 A を基本変形で階段行列にすれば

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{\substack{r_1 - r_4 \\ r_2 - 2r_4 \\ r_3 + r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - 3r_3 \\ r_2 - r_3 \\ r_4 - 2r_3}]{(-1/3)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これから各問いに対する答えは以下のようになる．

(1) 階段行列の基本列ベクトルになった列は第 1 列，第 2 列および第 4 列なので $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ が 1 次独立である．他のベクトルはこれらの 1 次結合で表せるので，これ以上ベクトルを付け加えることはできない．

(2) 階段行列の第 3 列から $\boldsymbol{a}_3 = -2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$，第 5 列から $\boldsymbol{a}_5 = 3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_4$ を得る．これから次の 2 つの自明でない 1 次関係式を得る．

$$2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}, \quad -3\boldsymbol{a}_1 - 5\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$$

(3) 像は A の列ベクトルたちの生成する空間なので，(1) の結果から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ が基底になる．

(4) 核は 1 次関係式の係数の作るベクトルなので，(2) の結果から次が基底になる．

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

【コメント】

- 階段行列にすることに 10 点配点した．階段行列になっていないものは 3 点減点したうえに，さらに計算ミスの減点をした．
- 解答例では (1)(2)(3) について $\boldsymbol{a}_j$ のままにしているが，具体的なベクトル表示にしてもよい．ただし，(4) は A の列ベクトルではないので具体的に記述しなければならない．
- 基底を 1 つのベクトルにした答案が目につく．この問題では像の基底は 3 個のベクトルの組だし，核の基底は 2 個のベクトルの組だ．これが次元の概念に関係する．1 組あげよというのを 1 つのベクトルをあげよということだと勘違いしたのかもしれないが，1 組と 1 つは日常用語としても全く違う言葉だ．
- 自明でない 1 次関係式は，解答例の 2 つの 1 次関係式を組み合わせて

$$(2x-3y)\boldsymbol{a}_1 + (-3x-5y)\boldsymbol{a}_2 + x\boldsymbol{a}_3 + y\boldsymbol{a}_4 + y\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$$

  である．この形でも正解である．

問 2　次のベクトルの組を正規直交化せよ．

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

【解答例】 まず直交化する．

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{-2}{5}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}5\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{30}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}5\\5\\-10\\-10\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_4 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_3)}{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{0}{5}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{5}{30}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{-1}{10}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}8\\8\\-16\\24\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

よってこれらを正規化して結果を得る．

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

【コメント】

- 講義での $\boldsymbol{b}_j$ はテキストの $\boldsymbol{b}_j$ に適当に正数をかけて成分がすべて整数になるようにとった．講義でもそのほうが簡単であることを注意し，11 月 21 日の講義メモの前回のレポート課題の解説にも取り上げた．しかし，大多数の答案はテキストの方法をとった．講義よりもテキストのほうが大事だと思ってのことなら残念である．大学でのテキストは決して権威ではないのだが．

もちろん，テキストのようにやっても講義のようにやっても結果は変わらない．どちらの方法をとっても差し支えない．しかし，$\boldsymbol{b}_j$ の成分が分数になっていることで正規化に失敗した答案も複数ある．やはり講義の方法のほうが間違いが少ないと思う．

- 少数だが内積の定義を誤解している答案もあった．試験前に 1 度でも正規直交化の問題に取り組んでいればそんなミスを犯すはずがないのだが．

問 3　次の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について，指定された基底に関する表現行列を求めよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x+3y+2z \\ -2x-2y+z \\ 7y+2z \end{bmatrix}, \qquad \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

【解答例】線形写像 f は行列 $P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ をかける写像である．また基底を並べて行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ を作る．求める表現行列は $A^{-1}PA$ に他ならない．これを求めるためには

$$PA = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -17 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & PA \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & -1 & -17 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}PA \end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって求める表現行列は

$$A^{-1}PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- 解答例の文字の使い方はテキストに合わせたが少し気持ち悪い．第 6 章の対角化で，行列 A について $P^{-1}AP$ を対角行列にする問題を考えるからだ．まあ，文字の使い方は自由なのでどちらが正しいというつもりはない．ただしこの記号ではこの問題と対角化の問題の関連が見えづらくなる．
- 解答例は $\begin{bmatrix} A & PA \end{bmatrix}$ を基本変形する形で $A^{-1}PA$ を求めた．これを $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ を基本変形することで A^{-1} を求めた後，それを PA にかけるとした答案も多い．それでも正解だが，解答例のほうがより単純であることを確認してほしい．
- $f(\boldsymbol{a}_j)$ を求めても，それを指定された基底の 1 次結合で表すには連立方程式を解かなくてはならない．テキストの表現行列の解説は，それを一言で済ませてしまっている．テキストだけを読んでこの問題を解くのはかなり大変だと思うが如何だろうか．

問 4　ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 1 次独立であるとする．このとき次のベクトルの組について 1 次独立か否かを調べよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$　　(2) $\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\}$

【解答例】(1) の 3 つのベクトルの 1 次結合が $\boldsymbol{0}$ になったとしよう．

$$x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+z(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

この式を整理すれば

$$(x+z)\boldsymbol{a}+(x+y)\boldsymbol{b}+(y+z)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

を得るが，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は 1 次独立なので $x+z=x+y=y+z=0$ を得る．ゆえに $x=y=z=0$ であり，$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$ は 1 次独立である．

(2) の 3 つのベクトルを足すと

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

を得る．これはベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\}$ の非自明な 1 次関係式であり，これは 1 次従属である．

【コメント】

- 1 次独立の言葉の意味を理解できていなければこの問題は解けない．問 1 では計算方法に特化しているが，計算できることと意味を理解することの違いを感じてほしい．しかし意味を理解していればこの問題は問 1 よりはるかに易しいのだが．
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が 1 次独立であるとは，1 次結合

  $$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

  が成り立つのが $x=y=z=0$ のときに限ることを言う．これを理解する前提として
  - $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はベクトルである．
  - x, y, z はスカラーである．

  ことを意識しなくてはならない．記号の使い分けを行っていない答案も目につくがまずこれを意識しているだろうか．

  次に，2 つの式 (A) $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ と (B) $x=y=z=0$ を意味もなく眺めているのでは定義を理解できない．(A) が成り立つのは (B) が成り立つときに限るというのが定義だ．これを (B) のとき (A) が成り立つと書いてしまっては意味が変わる．数学といえども日本語で記述しているので，もう少し日本語の意味を大事にしてほしい．
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を具体的なベクトルにしてこの問題を解いても証明にはならない．別の例で結果が変わらないという保証がないからだ．
- $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が 1 次独立であることと，これを並べた行列が基本変形で

  $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

に変形できることは同値である．ただし，この事実は具体的なベクトルの組についての 1 次独立の判定のために紹介したのであって，この問題のような一般的な扱いでは使わないほうが良い．ただし，次のような議論は間違いとは言えない．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ただ，最初の変形の部分はその理由を述べる必要があるので正解とは扱わなかった．これについては次のように説明できる．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P\boldsymbol{a} & P\boldsymbol{b} & P\boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\end{bmatrix} &\longrightarrow P\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P\boldsymbol{a}+P\boldsymbol{b} & P\boldsymbol{b}+P\boldsymbol{c} & P\boldsymbol{c}+P\boldsymbol{a}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- ベクトルを 3 項列ベクトルにし，1 次独立を行列式が 0 でないこととらえた解答もあったが，これも一般的な解答とは言えない．なお

$$\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) = 2\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

を示さないと (1) の 1 次独立性は分からない．これを示した答案はなかった．

「線形代数 II」第 2 回試験（2 月 6 日実施）の解答例とコメント

問 1 と問 3 を 40 点，問 2 と問 4 を 10 点で採点した．大多数の人にとって，問 1 問 3 のみの 80 点満点の試験になってしまった．覚悟していたこととはいえ残念である．計算はできるが固有値，固有ベクトルの意味は殆んど分かっていないということだからだ．固有値固有ベクトルの定義は $A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ であることをもう一度思い返してほしい．問 2 と問 4 はその意識を明確に持っていれば難しくはない．

最高点は 92 点，最低点は 5 点，平均点は 60.96 点だった．一応 40 点以上を合格にした．

問 1 次の行列の固有値と固有空間を求めよ．また対角化可能なら対角化せよ．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

【解答例】 A の固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 2 \\ -2 & x+1 & -1 \\ 6 & 8 & x \end{vmatrix} = x^3 + 2x^2 + x + 18 - 32 + 8(x+1) - 6x - 12(x+1)$$
$$= x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x+2)(x-3)(x+3)$$

となるので固有値は $-2, 3, -3$ である．各固有値に対する固有空間は

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_{-3} = \left\langle \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -6 & -8 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_{3} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

よって A は対角化可能で

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- 固有値の計算はテキストでは $|A - xI| = 0$ を解いたが，講義では $|xI - A| = 0$ を解いた．このほうが x の係数が正なので計算しやすいと思ったからだ．もちろん，両方の方程式の左辺は符号が変わるだけなのでどちらを解いても同じことだ．
- 固有空間は同次連立 1 次方程式の解空間だが，この方程式がきちんと解けない人が目につく．前期の学習事項だが忘れてしまったのだろうか．特に，列についての変形を行う答案は残念である．連立方程式を解く場合の基本変形は行についてのみである．
- 固有ベクトルは 0 ベクトルではない．計算ミスで解が $\boldsymbol{0}$ のみになってしまう人がいるが，連立方程式を解く問題なら計算ミスだが，固有ベクトルを求める問題では，この事実を理解していない本質的なミスとなる．

- P は固有ベクトルを並べた正則行列だが，固有ベクトルの並べ方で対角行列 $P^{-1}AP$ は変わってくる．P が何か記述していない答案は間違いである．

問 2　A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とする．$P^{-1}AP$ の第 3 列が $-2\boldsymbol{e}_3$ であるとき，-2 は A の固有値，P の第 3 列は固有値 -2 に対する固有ベクトルであることを示せ．ただし $\boldsymbol{e}_3$ は第 3 基本列ベクトルである．

【解答例】 $P^{-1}AP$ の第 3 列は $P^{-1}AP\boldsymbol{e}_3$ である．ゆえにこの仮定は $P^{-1}AP\boldsymbol{e}_3 = -2\boldsymbol{e}_3$ と表せる．両辺に P をかければ

$$AP\boldsymbol{e}_3 = -2P\boldsymbol{e}_3$$

となるが $P\boldsymbol{e}_3$ は P の第 3 列 $\boldsymbol{p}_3$ なので $A\boldsymbol{p}_3 = -2\boldsymbol{p}_3$ と書ける．P は正則なのでその列ベクトルは $\mathbf{0}$ ではない．ゆえにこの式は -2 が A の固有値であり，$\boldsymbol{p}_3$ がその固有ベクトルであることを表している．

【コメント】

- ほとんどの人が $P^{-1}AP$ が対角行列だと思っていた．対角化とは $P^{-1}AP$ を対角行列になるように P をとることだが $P^{-1}AP$ が必ず対角行列というわけではない．当たり前のことだ．
- $\boldsymbol{e}_3$ は列ベクトルだ．そのためにわざわざボールド体で記述している．だから成分の位置に $\boldsymbol{e}_3$ と書くのは間違いだ．その他にも前期にあれだけ強調した記号の使い分けがまったくできていない．記号をいじっているだけでそれが何かを考えないから理解できないのだと思う．

問 3　次の対称行列を直交行列により対角化せよ．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

【解答例】 A の固有多項式は

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & -2 \\ 1 & x+2 & 2 \\ -2 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = (x+3)^2(x-3)$$

なので固有値は -3（重複度 2）と 3 である．それぞれの固有値に対する固有空間は

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad W_{-3} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である．対角化する直交行列を求めるためにそれぞれの固有空間の基底を正規直交化する．W_3 は 1 次元なので大きさで割って大きさ 1 のベクトルにするだけだ．W_{-3} は 2 次元なのでまず直交化しなくてはならない．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{として } \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

こうして得たベクトルから固有ベクトルからなる正規直交基底

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

が得られる．

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

【コメント】

- 問 1 とも重なるが，同次連立 1 次方程式をきちんと解けない人が多い．$2x = -2y = z$ から固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 等というような解答も見受けられる．意味を考えずに形で答えを出そうとするからこういうミスをする．
- 直交化せずにただ大きさで割る人がいるが，まったく無意味だ．まず直交化をきちんと行うこと．ただし，解答例のように各固有空間の基底の直交化を考えれば良い．W_3 のベクトルと W_{-3} のベクトルは直交している．
- W_{-3} が 2 次元だから A は対角化可能という記述があるが，A は対称行列なので，対角化できることは一般論として証明されている．この記述は不要だ．

問 4　n 次正方行列 A と多項式 $p(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$ について

$$p(A) = A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \cdots + c_1A + c_0I$$

と定める．$p(A) = O$ のとき，A の固有値は k 次方程式 $p(x) = 0$ の解であることを示せ．

【解答例】 A の固有値を α ，それに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすれば $A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}$ が成り立つ．この式にさらに左から A をかければ $A^2\boldsymbol{p} = \alpha A\boldsymbol{p} = \alpha^2\boldsymbol{p}$，さらに A をかけていくことにより $A^r\boldsymbol{p} = \alpha^r\boldsymbol{p}$ を得る．よって

$$p(A)\boldsymbol{p} = \alpha^k\boldsymbol{p} + c_{k-1}\alpha^{k-1}\boldsymbol{p} + \cdots + c_1\alpha\boldsymbol{p} + c_0\boldsymbol{p} = p(\alpha)\boldsymbol{p}$$

を得る．$p(A) = O$ より $p(\alpha)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ であるが $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ より $p(\alpha) = 0$ を得る．よって α は $p(x) = 0$ の解である．

【コメント】

- Cayley-Hamilton の定理は固有多項式 $f_A(x)$ について $f_A(A) = O$ を主張する．しかし，$p(x) = 0$ でも $p(x)$ は固有多項式というわけではない．
- 固有値の定義を $|xI - A| = 0$ の解としてしか理解していない人にはこの問題は解けない．