線形数学講義メモ (10 月 2 日)

線形数学では，1 年次の線形代数を踏まえ，その抽象化と論理化を行う．今日の講義ではまず線形数学の講義の進め方について簡単に解説した．配布資料をホームページに掲載しておくので，今日の授業を欠席した者は目を通しておいてほしい．

本日の講義の要点

1. 線形空間の公理と例

   辞書によれば公理とは「証明するまでもない自明な真理」とあるが，現代の数学では論理の出発点として仮定しておくことという意味合いで使う．線形空間の公理とは線形空間を考える際の議論の出発点である用語の意味・性質をまとめたものである．線形空間の例はいくつか与えたが，もちろんこれに限るわけではない．ただし，線形空間を考える際にはこの程度の例を意識すれば充分である．

2. 命題 1.1 と命題 1.2

   イメージはこの程度の例で充分としたが，論証においてはイメージを使ってはならず，公理に基づいて議論しなくてはならない．イメージは証明の方針を立てる際に有効になることはあるが，証明には使えない．この二つの命題の証明は，公理が論証に以下に使われているかを確認する題材として有効である．

   なお，公理は必要最低限のもので記述する．他の公理から導かれる事実は公理には含めない．$1\vec{x} = \vec{x}$ が公理なら，命題 1.2 の等式も公理にしてもいいのではないかと思う人がいるかもしれないが，これは証明できるので公理には含めない．ただし，線形空間一般に成り立つ事実なので，一度証明してしまえば当然の事実として使って構わない．一度証明した事実は次の事実を導く際に自由に使ってよい．

3. 1 次結合

   1 次結合の定義は基本的に 1 年次の定義と同じである．ただし，無限次元の線形空間も含めて考察しているので「無限個のベクトルの 1 次結合」も考慮する必要がある．ここで係数は有限個を除いてすべて 0 としているので実際には有限和に過ぎないことを注意しておくこと．無限個の 1 次結合の例としては $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の 1 次結合が多項式になることを見ればよい．

   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   で $c_n \neq 0$ となる n が有限個なら $c_n \neq 0$ となる n の最大が存在する．それを N とおけばこの 1 次結合は N 次多項式になる．

4. 1 次独立と 1 次従属

   定義は 1 年のときの定義（「教養の線形代数」p.82）と変わらない．比較しておくこと．なお，$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の場合には，1 次独立性の考察は同次連立 1 次方程式の考察に帰着される（「教養の線形代数」p.82）．1 年次では基本変形で階段行列に変形することを利用して議論したが，複素行列を対象にした場合でも，基本変形はまったく同じようにできることに注意すること（「教養の線形代数」p. 31）．

5. 命題 1.3

   1 次独立性を特徴づける条件を与えた．「教養の線形代数」p.84 定理 4.1 と見比べてみてもよい．なお，この証明で，ベクトルの等式での移項を行っているが，移項は両辺に逆元を加えることによって行うので，一般の線形空間でも自由に行える．

   命題 1.3 の表現で講義では $k = 1$ の場合と $k \geqq 2$ の場合に分けた．$\vec{v}_1 \notin \{\vec{0}\}$ は $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と同じ意味であ

ることに注意せよ．なお，テキストの証明は簡略化されているので，ここに詳しく書いておこう．じっくり考えてみてほしい．

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ が 1 次独立と仮定し，結論が成り立たなかったとする．すなわち $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と $\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle, 2 \leqq k \leqq n$ の n 個の主張のどれかが成り立たなかったとする．$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ が成り立たない場合は $\vec{v}_1 = \vec{0}$ なので

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{v}_1 = \vec{0}$$

である．これは 1 次独立性に矛盾する． $\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ が成り立たない場合には $\vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle$ なので

$$\vec{v}_k = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$

と表せる．左辺を右辺に移項すれば

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + (-1)\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

となるがこれも 1 次独立性に矛盾する．いずれにしても $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ の 1 次独立性に矛盾するので，結論が成り立たなかったという仮定は誤りである．すなわち $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ と $\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1} \rangle, 2 \leqq k \leqq n$ はすべて成り立つ．

逆の証明についてはテキストを見てほしい．

本日の提出課題とヒント

問題 1.1 $(-\alpha)\vec{x}$ が $\alpha\vec{x}$ の逆元であることを示す．逆元の定義に基づいて議論すること．命題 1.2 の後半の証明が参考になろう．

問題 1.3 スカラー倍を有理数の範囲で考えているので，$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ の 1 次結合は $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3},\ a, b, c \in \mathbb{Q}$ である．これが 0 になるときに $a = b = c = 0$ が成り立つことを言えばよい．1 次独立の言葉を使っているが，実質的な内容は無理数と有理数の扱いに過ぎない．

問題 1.4 与えられた関数の組の 1 次結合が 0 になるとき，係数がすべて 0 になれば 1 次独立である．ここで 1 次独立性を定義するための等式

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \vec{x}_\lambda = \vec{0}$$

の両辺は線形空間 V の要素であることに注意せよ．等号は V における等号である．であれば右辺の $\vec{0}$ は当然 V の 0 元である．さて，関数の世界における 0 元とは何を意味するのだろうか．それをきちんと考えれば，結果はおのずと見えてくるであろう．

今日の課題はいずれも証明問題である．苦手意識を持っている人の多いだろうが，証明のポイントは，何が仮定されているのか，言うべきことは何かを用語の定義に基づいて一つずつ確認していくことだ．分からなくなったらまず用語の定義を言葉で確認してほしい．

レポート課題（10 月 2 日出題）の解答例とコメント

解答例をまとめるとともに，期限内に提出されたレポートについて気付いた点をコメントとして箇条書きする．10 月 9 日の講義で返却するので自分の解答を見直してほしい．なお，解答例は理解すべきものであって覚えるべきものではない．理解できればいかに素直な考察に基づいているか分かるはずである．

問題 1.1 の解答例　$-(\alpha\vec{x}) = (-1)(\alpha\vec{x}) = ((-1)\alpha)\vec{x} = (-\alpha)\vec{x}$ とすればよい．

（別解）$\alpha\vec{x} + (-\alpha)\vec{x} = (\alpha + (-\alpha))\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$ より $(-\alpha)\vec{x}$ は $\alpha\vec{x}$ の逆元である．よって $(-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$ が成り立つ．

【コメント】

- 最初の解答は逆元が (-1) 倍であることと，スカラー倍の結合法則（公理の（II-2））を利用した．単純な議論である．別解では $(-\alpha)\vec{x}$ が $\alpha\vec{x}$ の逆元であることを (II-1) と命題 1.2 を用いて示している．逆元とはたして $\vec{0}$ になるものという定義に基づいた素朴な議論だ．この程度の証明は自分で記述できるようになってほしい．
- 間違った議論ではないが論理の流れが見えてこない答案も多い．おそらくあまり議論の流れを理解しないままただ記述していると思われる．たとえ正しい結論にたどり着いてとしてもそのような解答で満足してはいけない．正しい議論は一点の曇りもなく理解できるはずだ．例えば $\alpha\vec{x} = (\alpha + 0)\vec{x} = \alpha\vec{x} + 0\vec{x}$ という変形がしばしば見受けられる．これは $0\vec{x} = \vec{0}$ を示す時に使った議論だが，この証明では不要だ．学習した証明を考えずになぞるのでは，思考力は身につかない．
- $-\alpha\vec{x}$ は $-(\alpha\vec{x})$ のことか $(-\alpha)\vec{x}$ のことか分からない．この問題が証明されて意味を持つ式だ．この証明で使ってはいけない．
- $\vec{x} - \vec{y}$ はまだ定義していない．もちろん逆元を加えることとして定義するが，このような基本的事実の証明においては使わないほうが良い．

問題 1.3　係数を $\mathbb{Q}$ で考えているので一次結合 $a1 + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ における係数 $a, b.c$ は有理数である．ここで $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ とすれば $a = -b\sqrt{2} - c\sqrt{3}$ より $a^2 = 2b^2 - 2bc\sqrt{6} + 3c^2$ である．ここで $bc \neq 0$ なら $\sqrt{6} = (2b^2 + 3c^2 - a^2)/(2bc)$ となり右辺は有理数になる．$\sqrt{6}$ は無理数なので $bc = 0$ でなくてはならない．$b = 0$ のときは $a + c\sqrt{3} = 0$ だが $\sqrt{3}$ は無理数なので $a = c = 0$ である．$c = 0$ のときは $a + b\sqrt{2} = 0$ だが $\sqrt{2}$ も無理数なので $a = c = 0$ である．いずれの場合も $a = b = c = 0$ となり 1 次独立であることが示された．

【コメント】

- 一般に自然数 n について $\sqrt{n}$ が有理数になるのは n が平方数の場合に限る．この事実の証明はこの講義では扱わないが基本的事実として証明を理解しておいてほしい．教養科目の「数学の世界 C」では厳密な証明を与えているので，関心のある人はその講義ノートを読んでみよ．
- 2 つの無理数の和は無理数とは限らない．だから $b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ において b, c が有理数でも和が有理数とは言えない．もちろん正しい主張ではあるが本質的に示すべき内容と同じである．示すべき内容を使ってしまったら証明にならない．
- $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ となるのは $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{3})$ のスカラー倍とする解答があるが，これは誤りだ．未知数 3 つで式が 1 つなのだから，これを満たす (a, b, c) を表すには少なくとも 2 つの文字が必要だ．これは本質的に連立方程式の解がいくつの文字で表されるかということなので 1 年次の学習事項だ．
- $a = b = c = 0$ の否定は $a \neq b \neq c \neq 0$ ではない．a, b, c のすべてが 0 になるということの否定は

a, b, c の中に 0 でないものがあるということ，すなわち $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ のいずれかが成り立つということだ．このような間違いは，意味を考えずに式を弄んだ結果といえる．反省せよ．

問題 1.4　1 次結合 $a1 + b\cos x + c\sin x$ が 0 元であるとは 0 に値をとる定数関数であるということだ．この関数に $x = 0,\ \pi/2,\ \pi$ を代入すれば $a + b = 0,\ a + c = 0,\ a - b = 0$ を得るので $a = b = c = 0$ でなくてはならない．よって $\{1,\ \cos x,\ \sin x\}$ は 1 次独立である．

一方 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ より 1 次結合 $1 + (-1)\cos^2 x + (-1)\sin^2 x$ は 0 に値をとる定数関数になっている．よって $\{1,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x\}$ は 1 次従属である．

【コメント】

- $x = 0$ のときは $a + b = 0$ になるから $a = b = c = 0$ とは限らず 1 次従属だとする解答が目につくが，これは $a1 + b\cos x + c\sin x = 0$ を数値の等式とみている．1 次結合は線形空間での概念なので，等式も線形空間での等式であり，ここでは 2 つの関数の等式とみなくてはならない．
- 1 次独立の定義に基づく等式 $a + b\cos x + c\sin x = 0$ は関数の等式なので，解答例のように $x = 0,\ \pi/2,\ \pi$ を代入すれば数値の等式になる．こうして得られる 3 つの等式 $a + b = 0,\ a + c = 0,\ a - b = 0$ は $a + b\cos x + c\sin x = 0$ であるための必要条件である．しかし十分条件ではない．$a = b = c = 0$ が得られたので 1 次独立であることは示されるが，$a = b = c = 0$ 以外に解があったとしても 1 次従属とは言えない．
  例えば，後半の証明を前半と同じように $x = 0,\ \pi/2,\ \pi$ を代入した場合，証明としては間違いである．
- 単振動の合成を用いて $a + b\cos x + c\sin x = a + \sqrt{b^2 + c^2}\cos(x + \alpha)$ とすると，これが定数関数 0 になる必要十分条件として $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 0$ が得られる．これは解答例と違い必要十分条件による議論である．

線形数学講義メモ (10 月 9 日)

本日の講義の要点

1. 基底
　基底の定義は 1 年次に学習したものと基本的に同じである．ただしここでは無限次元の線形空間も扱っているので，無限個のベクトルの組が基底になることもある．例えば x についての多項式全体の集合において $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は基底である．ただしこの講義では基底は有限個のベクトルの組のみを扱う．
2. 命題 1.4
　V の基底として n 個のベクトルの組が取れるとき，V の $n+1$ 個以上のベクトルからなる組は 1 次独立にならない．これは未知数の数が式の数より大きい同次連立 1 次方程式の解が 1 つ以上の文字 (任意定数) を用いて表されることから証明できる．結果として V の基底をなすベクトルの個数は一定であることが示される．$n+1$ 個以上のベクトルの組は 1 次独立でないので基底にならないし，$n-1$ 個以下のベクトルで基底が作られたら，最初の n 個のベクトルの組が基底であることに矛盾してしまう．
3. V のベクトルの有限列 $\mathcal{P}$ と K^n から V への写像 $\Phi_{\mathcal{P}}$
　$\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ を V の要素を成分とする行ベクトルとみなせば 1 次結合は
$$\sum x_j \vec{p}_j = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$$
と表せる．そこで写像 $\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V$ を $(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ と定める．
　$\Phi_{\mathcal{P}}$ について次が成り立つ．
   - $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることと $\mathcal{P}$ が V を生成することは同値である．
   - $\Phi_{\mathcal{P}}$ が単射であることと $\mathcal{P}$ が 1 次独立であることは同値である．
   - $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全単射であることと $\mathcal{P}$ が V の基底であることは同値である．

   それぞれの証明は $\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ が $\mathcal{P}$ の 1 次結合であることを使う．証明は基本的なので考えておくように．
4. 有限次元線形空間の基底と座標（命題 1.5）
　$\mathcal{P}$ が基底のとき $\boldsymbol{x} = (\Phi_{\mathcal{P}})^{-1}(\vec{x})$ を $\vec{x}$ の基底 $\mathcal{P}$ に関する $\vec{x}$ の座標と呼ぶ．座標を定めることにより，1 年次で学習した線形代数の結果が使えるようになる．
　基底の変換と座標の変換について考察した．2 つの基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n\}$ と $\mathcal{Q} = q_1, \ldots, \vec{q}_n\}$ の変換の行列は
$$\vec{q}_j = \sum a_{ij} \vec{p}_i, \qquad \mathcal{Q} = \mathcal{P}A$$
と表示される．このとき $\mathcal{P}$ に関する $\vec{x}$ の座標を $\boldsymbol{x}$，$\mathcal{Q}$ に関する座標を $\boldsymbol{y}$ とすれば $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}$ が成り立つ．この関係は次のような式の変形で理解できる．
$$\vec{x} = \mathcal{Q}\boldsymbol{y} = \mathcal{P}A\boldsymbol{y} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$$
5. 部分空間
　線形空間 V の空でない部分集合が，和とスカラー倍の演算について閉じているとき部分空間という．V が有限次元のとき
   - $0 \leqq \dim W \leqq \dim V$

- $\dim W = 0 \Longleftrightarrow W = \{\vec{0}\}$，$\dim W = \dim V \longleftrightarrow W = V$

最初の不等式については W の $\dim V + 1$ 個以上のベクトルの組が 1 次従属になること（命題 1.4），次の等号条件については W の基底を延長して V の基底を作る操作を利用する．次元が等しければ付け加えられるべきベクトルはなく，W の基底がそのまま V の基底になる．

6. 共通部分，合併，和空間

　基本的に 1 年次の線形代数で学習したことだが，2 つの部分空間の共通部分はやはり部分空間になる．逆に合併集合については一般には部分空間にならない．そこで和空間が導入される．以下の詳しい議論は次回の講義で行おう．

本日の提出課題とヒント

問題 1.6，問題 1.8，問題 1.11（定理 1.6 を定理 1.7 に訂正する）を出題する．ヒントはなし．

レポート課題（10 月 9 日出題）の解答例とコメント

台風のために締め切りを遅らせた．ただし，締め切りを過ぎてもレポートを受け取らないわけではない．遅れても（このコメントを見る前なら）他の答案と同様にチェックする．レポートは評価の材料ではなく，あくまで君たちの家庭学習のためのものである．

テキストの訂正 6 ページ下から 6 行目の等式で，右側の等号は削除すること．正しくは

$$\begin{pmatrix}\vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

問題 1.6　複素数は実数 a, b により $a + bi$ と表せる．これは複素数が $\{1, i\}$ の実数上の 1 次結合として表されることを意味する．また複素数の定義により $a + bi = c + di$ は $a = c,\ b = d$ の場合のみに成り立つ．これは $\{1, i\}$ は 1 次独立であることを意味する．ゆえに $\{1, i\}$ は $\mathbb{C}$ の基底である．

【コメント】

- 複素数の定義が，そのまま $\{1, i\}$ の基底であることを確認してほしい．なお，$\mathbb{C}$ は複素数体上の線形空間としては 1 次元である．同じ集合であっても係数体をどうとるかによって次元は変わってくる．
- この問題では線形空間は $\mathbb{C}$ である．すなわち線形空間の要素（ベクトル）は複素数である．また係数体は実数である．ベクトルのスカラー倍とは複素数の実数倍を意味する．このように具体的な線形空間を考える際はベクトルは何かスカラーは何かまず考えておく必要がある．
  だから基底（ベクトルの組）を複素数の組として与えていない答案は基本の理解を欠いている．
- 何の議論もなく $\{1, i\}$ を基底とする解答があるが，この段階では正解とは扱わない．何故基底なのかをきちんと説明できるようになってほしい．

問題 1.8　$1 = \cos^2 x + \sin^2 x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \sin 2x = 2\cos x \sin x$ より V の要素は $\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ の 1 次結合で表せる．また

$$a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x = 0$$

とすれば $x = 0$ として $a = 0$，$x = \pi/2$ として $c = 0$ を得る．$b\cos x \sin x = 0$ となるので $b = 0$ も得る．よって 1 次独立であり V の基底をなす．基底の変換の行列は

$$\begin{pmatrix}\cos^2 x & \cos x \sin x & \sin^2 x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\cos 2x + 1}{2} & \frac{1}{2}\sin 2x & \frac{1 - \cos 2x}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \cos 2x & \sin 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

【コメント】

- 基底の変換の行列は，基底を V を要素とする行ベクトルと思うと分かりやすい．またこの行列の正則性をみれば問題 1.9 より一般に基底になることが示せる．
- 問題の趣旨から新しい基底 $\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ を 元の基底 $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ で表した．なお逆の変換の行列は，この逆行列である．確かめよ．

$$\begin{pmatrix}1 & \cos 2x & \sin 2x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2 x & \cos x \sin x & \sin^2 x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

- 基底を線形空間の要素を成分とする行ベクトルと捉えるとき，それにかける行列の成分はスカラー（実数または複素数）である．なお，関数の集合を線形空間と考えるときは，関数と関数の積の演算は行わない．線形空間ではあくまで和とスカラー倍の演算のみを考えること．
- 基底であることを言うには 1 次独立と生成することを言う．解答例のように一つずつきちんと議論すること．
- $\{\cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x\}$ を 元の基底 $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ で表すことはできるのに，行列をもとめられないひとがいるが，解答例のように行ベクトルと行列の積として理解すれば分かりやすいと思う．考えてみよ．

問題 1.11 （問題では定理 1.6 となっているが定理 1.7 の間違いである．）

$\vec{0} \in W_1$ かつ $\vec{0} \in W_2$ より $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ なので $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ である．$\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ とし $\alpha, \beta \in K$ をとれば

- $\vec{x}, \vec{y} \in W_1$ と W_1 が部分空間であることにより $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1$
- $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$ と W_2 が部分空間であることにより $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_2$

である．よって $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1 \cap W_2$ であり $W_1 \cap W_2$ は部分空間である．

【コメント】

- 部分空間の定義を確認すればよい．なお，この際に空集合にならないことを示す必要がある．これには部分空間の定義から $\vec{0}$ を必ず要素として含むことを使うと良い．
- 要素 1 個の部分空間 $\{\vec{0}\}$ と，空集合 $\emptyset$ はまったく別の集合である．$\emptyset$ と $\mathbf{0}$ の筆記体が似ているため誤解している人がいるようだ．注意せよ．

線形数学講義メモ (10 月 16 日)

本日の講義の要点

1. 注意事項，ベクトルとスカラーについて

   抽象的な線形空間では $\vec{x} \in V$ と $\alpha \in K$ という記号を使っている．そして和とスカラー倍が定義されている．しかし，具体例においてこのような記号の使い分けをすることは困難だ．その例において線形空間とはどういう集合か，線形空間の要素（ベクトル）とは何か，スカラーは何か意識しなくてはならない．例えば

   - 問題 1.3 においては，線形空間は $\mathbb{R}$ である．だからベクトルは実数のことに過ぎない．1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ はベクトルなのだ．ただしスカラーは有理数に取っている．一次結合は $a1 + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ である．
   - 問題 1.4 と問題 1.5 では，線形空間は連続関数全体の集合だ．だからベクトルは連続関数のことを言う．スカラーについては問題に明示されていないが，実数とするのが妥当だろう．もっとも連続関数を複素数に値をとる連続関数とし，スカラーを複素数とみなしても構わない．この問題において 1 次独立であるか否かは係数の取り方によらない．
   - 問題 1.6 では，線形空間は $\mathbb{C}$ である．ここでは複素数がベクトルである．ただし係数は $\mathbb{R}$ にしている．

   これらの例では数や関数がベクトルとして認識されているので，$\vec{x}$ のような書き方はかえって分かりづらい．複素数なら z，関数なら $f(x)$ のように書くのが普通である．

2. 注意事項，V のベクトルの組を V を成分とする行ベクトルと捉えることについて

   V における積は考えていないので（具体例では関数の積など考えることができるが，それは線形代数の対象ではない）標記の仕方は限定して扱うこと．講義では次の二つの場合のみを扱っている．

$$\mathcal{P}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{p}_j$$

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

   最初が 1 次結合であり，次が $\vec{q}_j$ を $\mathcal{P}$ の 1 次結合による表示をまとめたものである．各式の計算において，ベクトルのスカラー倍，およびそれらの和しか現れないので，問題なく定義されている．特に命題 1.4 の証明では

$$\mathcal{B}\boldsymbol{d} = \sum d_j \vec{b}_j, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A}C, \ (\vec{b}_j = \sum_i c_{ij}\vec{a}_i)$$

   という 2 つの表示から

$$\mathcal{B}\boldsymbol{d} = (\mathcal{A}C)\,\boldsymbol{d} = \mathcal{A}(C\boldsymbol{d}) = \vec{0}$$

   と結合法則を使ったに過ぎない．

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \vec{b}_j = \sum_{j=1}^{m} d_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} \vec{a}_i \right) = \sum_{i,j} c_{ij} d_j \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} d_j \right) \vec{a}_i$$

この変形と 1 年次の線形代数のテキスト 6 ページの，行列の積に関する結合法則の証明の類似性を確認せよ．

3. 定理 1.7 の証明

1 年次の線形代数テキストの 88〜89 ページと定理 4.10 を一般的な枠組みで記述しなおしただけ，証明も全く同じである．なお (1) と (2) は無限次元でも成り立つ．証明を見れば次元のことは何も使っていないことに気づくだろう．

4. 定理 1.8

r 個の部分空間の和が直和であることを記述する定理である．(1)(2)(3) の 3 つの主張が同値なのでどれを直和の定義としてもよい．しかし，直和を扱う時には，問題によって随時 (1)(2)(3) を使い分ける．どの主張も直和の定義として使えることを意識してほしい．

(1)(2)(3) の同値性の証明は難しくない．理解できるまで考えてほしい．これに対して有限次元の場合の (4) との同値性は難しい．W_i の基底を寄せ集めて $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ の基底を作るだけなのだが，きちんと式として記述しようとすると添え字の種類が多くなりすぎて厄介である．細かい添え字を板書で写すのは大変なので，ここに記述しておく．

- $\dim W_{\mathrm{k}} = s_k$ としてその基底を $\{\vec{p}_{1k}, \vec{p}_{2k}, \ldots, \vec{p}_{s_k k}\}$ とおく．
- これらをすべて集めたベクトルの組 $\{\vec{p}_{11}, \vec{p}_{21}, \ldots, \vec{p}_{s_1 1}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{22}, \ldots, \vec{p}_{s_2 2}, \ldots, \vec{p}_{1r}, \vec{p}_{2r}, \ldots, \vec{p}_{s_r r}\}$ を考える．
- $\vec{x} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ は $\vec{x}_k \in W_k$ の和として表せること，$\vec{x}_k \in W_k$ は $\{\vec{p}_{1k}, \vec{p}_{2k}, \ldots, \vec{p}_{s_k k}\}$ の 1 次結合で表せることから，$\vec{x}$ は $\{\vec{p}_{11}, \vec{p}_{21}, \ldots, \vec{p}_{s_1 1}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{22}, \ldots, \vec{p}_{s_2 2}, \ldots, \vec{p}_{1r}, \vec{p}_{2r}, \ldots, \vec{p}_{s_r r}\}$ の 1 次結合として表せる．よって $\{\vec{p}_{11}, \vec{p}_{21}, \ldots, \vec{p}_{s_1 1}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{22}, \ldots, \vec{p}_{s_2 2}, \ldots, \vec{p}_{1r}, \vec{p}_{2r}, \ldots, \vec{p}_{s_r r}\}$ は $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ を生成する．
- (4) が成り立てば個数が和空間の次元に等しい和空間を生成するベクトルの組が得られたことになるのでこれは和空間 $W_1 + \cdots + W_r$ の基底である．特に 1 次独立である．
- $\vec{0} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_r \in W_1 + \cdots + W_r$ と表し，これを $\{\vec{p}_{11}, \vec{p}_{21}, \ldots, \vec{p}_{s_1 1}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{22}, \ldots, \vec{p}_{s_2 2}, \ldots, \vec{p}_{1r}, \vec{p}_{2r}, \ldots, \vec{p}_{s_r r}\}$ の 1 次結合に書き直せば，基底であることから係数はすべて 0 になる．よって $\vec{x}_k \in W_k$ は $\vec{0}$ となり (2) が成り立つ．
- 逆に (2) が成り立つとし

  $$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{s_k} c_{j_k k} \vec{p}_{j_k k} = \vec{0}$$

  とおけば

  $$\sum_{j_k=1}^{s_k} c_{j_k k} \vec{p}_{j_k k} = \vec{0}, \quad 1 \leqq k \leqq r$$

  なので，$c_{j_k k} = 0$ である．よって $\{\vec{p}_{11}, \vec{p}_{21}, \ldots, \vec{p}_{s_1 1}, \vec{p}_{12}, \vec{p}_{22}, \ldots, \vec{p}_{s_2 2}, \ldots, \vec{p}_{1r}, \vec{p}_{2r}, \ldots, \vec{p}_{s_r r}\}$ は 1 次独立であり $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ の基底になるので (4) が成り立つ．

この議論で次元と等しい個数の V を生成するベクトルの組は基底であることを利用した．何故なら基底でなかったとすれば，それから次元以下の個数の基底が作れてしまい矛盾を生じるからだ．

5. 同値関係

数学のあらゆる分野で使われるもっとも基本的な概念である．商集合が分かりづらいので早く慣れるようにしてほしい．

今日の講義では同値関係の定義とその同値類の定義を与えた．ここまでは線形代数の議論ではない．来週は線形空間での基本的な同値関係の例を与えるとともに商空間を導入する．来週の講義で第 1 章を終える．1 週間空けて 11 月 6 日に第 1 章の試験を行う．

本日の提出課題とヒント

問題 1.12 と問題 1.13 を課題にする．問題 1.12 の (1) は $f(x) + f(-x)$ が偶関数であり $f(x) - f(-x)$ が奇関数であることを利用する．(2) では $A + {}^tA$ が対称行列で $A - {}^tA$ が交代行列であることを利用する．違う線形空間だが証明はほぼ同じような議論で行える．問題 1.13 は同値関係，同値類の定義に基づいて議論すること．今の段階ではつかみどころがないように感じるかもしれないが，基本事項なので腰を据えて考えてほしい．

レポート課題（10 月 16 日出題）の解答例とコメント

まだ数学の文章の意味が全く取れていない人が多い．数学の基本は論理であり，論理の展開は文章によって行われることに注意すべきだ．論理の理解のためにはその前提として数学で書かれた文章の意味を把握しなくてはならない．これをせずに形式的な式の変形のような形で論理を扱っているうちは，数学を身近なものにはできないだろう．

レポートを見るとそれなりに意味の把握できている人も少なからずいる．無理だとあきらめずに考え抜いてほしい．

問題 1.12 (1) 偶関数とは $f(-x) = f(x)$ を満たす関数であることを想起せよ．定数関数 0 は偶関数なので $W_1 \neq \emptyset$ である．$f, g \in W_1$ をとれば

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$$

より $\alpha f + \beta g \in W_1$ である．ゆえに W_1 は部分空間である．奇関数は $f(-x) = -f(x)$ を満たす関数なので W_2 が部分空間であることは同様に証明できる．ここでは省略する．

$f \in W_1 \cap W_2$ とすれば $f(-x) = f(x)$ と $f(-x) = -f(x)$ の 2 つが成り立たなければならないので $f(x) = -f(x)$ より $f(x) = 0$ である．これはすべての x について成り立つので $f = 0$ である．ゆえに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であり，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ である．また $f \in V$ について $g_1(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $g_2(x) = (f(x) - f(-x))/2$ とおけば g_1 は偶関数，g_2 は奇関数になる．$f = g_1 + g_2$ より $f \in W_1 \oplus W_2$ を得る．よって $V = W_1 \oplus W_2$ である．

(2) (1) とほぼ同様な議論で証明できる．零行列 O が対称行列かつ交代行列であること，対称行列（交代行列）の和とスカラー倍がやはり対称行列（交代行列）になること，対称行列かつ交代行列である行列は零行列 O に限ること，正方行列 A について $(A + {}^t\!A)/2$ は対称行列，$(A - {}^t\!A)/2$ は交代行列になること，以上が確認すべき事項である．どれも易しい．

【コメント】

- 偶関数，奇関数，対称行列，交代行列はいずれもすでに学習したものであり例も知っているはずだ．空集合でないことは言うまでもな．ただし解答例では 0 元が含まれることを述べてみた．これは部分空間が空でないことを言う場合の基本である．
- 関数を偶関数と奇関数の和として表すこと，また正方行列を対称行列と交代行列の和として表すことについてはヒントを出していたこともあり良くできていた．これを言わないと $V = W_1 + W_2$ であることを示せない．ヒントなしでも思いつくようにしてほしい．
- 空集合の記号は $\emptyset$ を使っている．これはノルウェー文字に由来するそうだ．ギリシャ文字の ϕ を使うこともあるが，使えるフォントが少なかった時代の代用のようだ．ただしボールド体の 0（0 に縦棒一本加えたもの）のように書かないこと．意識して区別してほしい．

  なお行列を $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ のようにボールド体で書く人がいるが，これはやめてほしい．1 年次の線形代数でも行列はローマ字の大文字を使って記述したはずでボールド体にはしていない．
- 集合は $\{$ 要素 $|$ 要素の満たすべき条件 $\}$ という形で記述する．$\{f(x) \mid F(x)$ は偶関数 $\}$ と書けば要素は関数 $f(x)$ だと分かるが $\{f(x)|x \in \mathbb{R}\}$ と書いたら x に条件を付けたので要素は $f(x)$（値）ということになる．すなわち x をいろいろとったときの $f(x)$ の集まりということになり $f(x)$ の像（値域）ということになってしまう．この問題では次のように記述すべきだろう．

$$V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続 }\}, \quad W_1 = \{f \in V \mid f \text{ は偶関数 }\}$$

- 同様に $W_1 \cap W_2 = \{f(x)\}$ と書くと $W_1 \cap W_2$ が要素 1 個（$f(x)$）の集合に思える．$f(x) \in W_1 \cap W_2$ とは意味が異なる．意味の違いは日本語として読むと分かるだろう．前者は「$W_1 \cap W_2$ は要素 $f(x)$ からなる集合である」，後者は $f(x)$ は $W_1 \cap W_2$ の要素である．前者は集合を定めているのに対し，後者は集合から要素をとったに過ぎない．
- 数学的に真偽を判断し得る文章を命題という．命題「P ならば Q」において，P と Q はそれぞれ命題でなくてはならない．「P が真であれば Q も真である」と読み換えてみれば，P，Q に真偽が定まる必要があることに気づくだろう．なお，命題は文章であり必ず動詞を伴う．「$x \in A$」は「x は A の要素である」という命題だが「$W_1 + W_2$」は「W_1 と W_2 の和空間」という意味であって命題ではない．

問題 1.13　$[x] = \{y \mid y \sim x\}$ である．すなわち $y \in [x] \Longleftrightarrow y \sim x$ に注意せよ．

(1) 反射律 $x \sim x$ より $x \in [x]$ である．これから $[x]$ に属する要素があるので $[x]$ は空集合ではない．

(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ なので $z \in [x] \cap [y]$ をとる．$z \sim x$ と $z \sim y$ が成り立つ．対称律により $x \sim z$ であり，$z \sim y$ と合わせて推移律から $x \sim y$ を得る．

$w \in [x]$ をとる．$w \sim x$ と $x \sim y$ から推移律により $w \sim y$ を得る．ゆえに $w \in [y]$ であり $[x] \subset [y]$ が成り立つ．逆に $u \in [y]$ をとる．$u \sim y$ と $x \sim y$ から対称律と推移律を使って $u \sim x$ を得る．$u \in [x]$ であり $[y] \subset [x]$ が成り立つ．よって $[x] = [y]$ である．

(3) $[x] = [y]$ ならば $x \in [x] = [y]$ より $x \sim y$ である．$x \sim y$ のとき $[x] = [y]$ になることは (2) の証明の後半で示している．

【コメント】

- $y \sim [x]$ を $y \sim x$ で定義したが対称律があるのでこの条件は $x \sim y$ と同値だ．都合のいいほうを使えばよい．
- $[x] = [y]$ は集合の相等なので解答例のように $z \in [x] \Longleftrightarrow z \in [y]$ の形で要素をとって示す必要がある．これをしないと議論が感覚的になってしまう．

線形数学講義メモ (10 月 23 日)

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題に関連して
   記号の使い方，集合の記述の仕方についてコメントした．具体的な内容は 16 日のレポート課題に対するコメントを見てほしい．
2. 商集合
   集合 X に同値関係が与えられたとき，X はその同値類によって類別される．すなわち X を互いに交わらない部分集合の合併として記述できる．例えば $X = \mathbb{Z}$ として
   $$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \text{ は 5 も倍数}$$
   とすれば，$a \in \mathbb{Z}$ は 5 で割った余りと同値になる．余りは $0, 1, 2, 3, 4$ の 5 通りなので同値類は 5 つである．すなわちこの同値関係によって $\mathbb{Z}$ は 5 つの部分集合に類別される．
   この同値類を 1 つの要素とみなして定まる集合を商集合と呼び $X/\sim$ と表す．$\mathbb{Z}$ に上の同値関係を入れた時の商集合は $\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ という 5 つの要素をもつ有限集合になる．
3. 商空間 V/W
   線形空間 V とその部分空間 W について $\vec{x} \sim \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in W$ によって V に同値関係を定める．この同値関係による商集合を V/W と表すと
   $$[\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{x} + \vec{y}], \qquad \alpha[\vec{x}] = [\alpha\vec{x}]$$
   によってこれは線形空間になる．これが定理 1.10 の主張だ．証明でもっとも重要なのは，和とスカラー倍の定義が代表元の取り方によらないことだ．代表元は $[\vec{x}]$ に属する要素なら何でも構わないので，特別な取り方というものがあるわけではない．だから和（スカラー倍）が代表元の取り方によって変わってしまったら，定義されたということはできない．この意味で代表元の取り方によらないとき定義は well-defined であるという．ちょうどよい日本語訳がないので，しばしば英語そのままで記述される．商集合の構造を考えるとき必ず出てくる表現なので覚えておくと良い．
   次元についての等式はテキストにもきちんと書いてあるのでここでは省略しよう．標準的な議論なので理解しておくように．
4. 線形写像の定義と例
   線形写像の定義はきちんと覚えておくこと．なお，0 元が 0 元に移ることは基本的である．例についてはテキストに記述したものを解説した．微分や積分が線形写像であることを理解しておいてほしい．

本日のレポート課題

問題 1.14 と問題 1.9 を課題にしておく．試験問題はレポート課題の問題よりも難しいものになることを覚悟しておいてほしい．レポート課題については毎回詳細な解答とコメントを掲載しているので，きちんｔｐ理解するようにしておくこと．

レポート課題（10 月 23 日出題）の解答例とコメント

問題 1.9　V の次元を n とおけば，基底の変換の行列 A は n 次正方行列である．$\mathcal{Q}$ は基底なので一次独立であり，1 次結合 $\mathcal{Q}\boldsymbol{x}$ が $\vec{0}$ になるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の時に限る．基底の変換 $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ について

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{x} = (\mathcal{P}A)\boldsymbol{x} = \mathcal{P}(A\boldsymbol{x})$$

となるが，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なら $\mathcal{Q}\boldsymbol{x} = \vec{0}$ であり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{0}$ のみであり，A の階数は n となる．すなわち A は正則である．

逆に A が正則であるとする．$\mathcal{Q}$ の 1 次結合 $\mathcal{Q}\boldsymbol{x}$ が $\vec{0}$ になったとすれば

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{x} = \mathcal{P}(A\boldsymbol{x}) = \vec{0}$$

であり $\mathcal{P}$ が 1 次独立であることから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．A は正則なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であり $\mathcal{Q}$ は 1 次独立である．$\mathcal{Q}$ の生成する空間は n 次元なので V と一致する．すなわち $\mathcal{Q}$ は V の基底である．

【コメント】

- 前半は $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ に変換する行列 $\mathcal{P} = \mathcal{Q}B$ を用いて

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}B = (\mathcal{P}A)B = \mathcal{P}(AB)$$

  より $AB = E$ としても良い．ただしこの式から $AB = E$ を導くためには $\mathcal{P}$ の一次独立性が必要である．例えば AB の第 j 列を $\boldsymbol{c}_j$ とすれば $\vec{p}_j$ は $\mathcal{P}$ の係数 $\boldsymbol{c}_j$ による 1 次結合である．1 次結合としての表し方は一通りなので $\boldsymbol{c}_j$ は第 j 基本列ベクトルでなくてはならない．このことから $AB = E$ を得る．
- 後半は $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ の 1 次独立性しか示していない答案がある．基底であることを示すには 1 次独立と生成するの 2 つを言う必要がある．
- テキスト 7 ページ 3 行目の図式は $\mathcal{Q} = \mathcal{P}A$ であれば成り立つ．$\mathcal{P}$ が基底であることと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全単射であることが同値（命題 1.5）であり，A が正則であることと A をかける線形写像が全単射であることは同値である．また全単射であることと逆写像をもつことも同値だ．以上から 3 つのうち 2 つが全単射なら残りの 1 つも全単射であるということが分かる．

問題 1.14　同値関係の定義から

$$[\boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in W\}$$

であるが $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in W$ とおくことにより

$$[\boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W\}$$

と表せる．これは平面 W を $\boldsymbol{x}$ だけ平行移動した平面になる．

【コメント】

- 座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内の話なので解答例のように図形的に考えてほしかった．同値類の定義を書いただけではつまらない．

線形数学講義メモ (10 月 30 日，11 月 6 日)

11 月 6 日は第 1 回試験を行ったので講義時間は実質 35 分程度だった．講義メモは新たに作成するのではなく，前回の講義メモに付加する形で作成する．すでに前回の講義メモを印刷した人は 3 ページのみ印刷すればよい．

本日の講義の要点

1. 線形写像による部分空間の像と逆像

   写像による部分集合の像と逆像は実数と論理の授業で習ったはずだ．この講義でもその定義から始めた．このような基本的な概念は複数の講義で異なる教員から説明を受けたほうが良いだろう．集合はそれに属するための要素の満たすべき条件で記述されるので，次が最も基本的だ．

$$\vec{w} \in f(V_1) \Longleftrightarrow \exists \vec{v} \in V_1 \text{ s.t.} \vec{w} = f(\vec{v})$$

$$\vec{v} \in f^{-1}(W_1) \Longleftrightarrow f(\vec{v}) \in W_1$$

   なお，記号は講義やテキスト（問題 2.1）と同じように使っているのでここでは繰り返さない．また V の要素を $\vec{v}$ で W の要素を $\vec{w}$ で表していることに注意せよ．

   テキストでは問題 2.1 としているが講義では解答を与えた．ここにも記述しておく．簡単なので完全に理解するようにしてほしい．

   (1) $f(V_1)$ が W の部分空間であることを示す．$f(\vec{0}_v) = \vec{0}_W$ と $\vec{0}_V \in V_1$ より $\vec{0}_W \in f(V_1)$ である．次に $\vec{w}_1,\ \vec{w}_2 \in f(V_1)$ をとれば $f(\vec{v}_1) = w_1,\ f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$ となる V_1 の要素 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_1$ が存在する．V_1 は部分空間なので $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in V_1$ である．また f は線形なので $f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ である．ゆえに $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in f(V_1)$ であり $f(V_1)$ は W の部分空間になる．

   (2) $f^{-1}(W_1)$ が V の部分空間であることを示す．$f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in W_1$ より $\vec{0}_V \in f^{-1}(W_1)$ である．次に $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ をとれば $f(\vec{v}_1),\ f(\vec{v}_2) \in W_1$ である．f の線形性から $f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2)$ でありこの右辺は W_1 が部分空間であることから W_1 の要素になる．ゆえに $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ であり，$f^{-1}(W_1)$ は V の部分空間になる．

2. 線形写像が単射になることと核が $\vec{0}$ のみになることの同値性

   単射ならば $f(\vec{v}) = f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ は $\vec{v} = \vec{0}_V$ のときのみ成立する．これは $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}_V\}$ を意味する．逆はテキストに記述してある．なお $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}_V\}$ なので $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker} f$ は $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_V$ すなわち $\vec{x} = \vec{y}$ を意味する．

3. $V/\mathrm{Ker} f$ からの写像

   講義では $\tilde{f} : V/\mathrm{Ker} f \longrightarrow W$ と表したが，テキストでは g で表していた．ここではテキストに合わせて g を使う．

   (1) g が well-defined であること

   $[\vec{x}]$ の別の代表元 $\vec{y}$ をとれば $\vec{x} \sim \vec{y}$ すなわち $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker} f$ である．ゆえに $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_W$ なので $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ である．よって $g([\vec{y}]) = f(\vec{y}) = f(\vec{x}) = g([\vec{x}])$ であり g は代表元の取り方によらない．

   (2) g が線形写像であること

$$g(\alpha[\vec{x}] + \beta[\vec{y}]) = g([\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}]) = f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) = \alpha g([\vec{x}]) + \beta g([\vec{y}])$$

   各等号の成り立つ理由は，順に $V/\mathrm{Ker} f$ での演算の定義，g の定義，f の線形性，g の定義である．

   (3) g が単射であること

$g([\vec{x}]) = \vec{0}_W$ とする．g の定義により $f(\vec{x}) = \vec{0}_W$ であり $\vec{x} \in \mathrm{Ker}f$ である．よって $\vec{x} \sim \vec{0}_V$ なので $[\vec{x}] = [\vec{0}_V]$ であり $\mathrm{Ker}g = \{[\vec{0}_V]\}$ を得る．よって g は単射である．

(4) $\mathrm{Im}g = \mathrm{Im}f$ であること

$\vec{w} \in \mathrm{Im}f$ なら $f(\vec{v}) = \vec{w}$ となる $\vec{v} \in V$ が存在する．$g([\vec{v}]) = f(\vec{v}) = \vec{w}$ より $\vec{w} \in \mathrm{Im}g$ である．逆に $\vec{w} \in \mathrm{Im}g$ ならば $g([\vec{v}]) = \vec{w}$ となる $[\vec{v}] \in V/\mathrm{Ker}f$ が存在する．$f(\vec{v}) = \vec{w}$ であり $\vec{w} \in \mathrm{Im}f$ である．

4. 線形同型写像，同型

線形写像 f が全単射の時，逆写像 f^{-1} も線形になる．テキストでは p.13 の 3 行目に結果のみ記述しているが，講義では証明を与えた．ここにも少し形を変えて記述する．

$f^{-1}(\vec{w}_1) = \vec{v}_1$, $f^{-1}(\vec{w}_2) = \vec{v}_2$ とおく．$f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1)+\beta f(\vec{v}_2) = \alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2$ より $f^{-1}(\alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2) = \alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2$ を得る．これと $\vec{v}_i$ の定め方から f^{-1} が線形写像であることが分かる．

V から W への線形同型写像が存在するとき V と W は同型であるという．特に定理 2.1 の (2) が分かる．

5. 線形写像の次元定理

2 つの有限次元線形空間が同型であればその次元は等しい．これについては来週のレポート課題にする．特に線形写像 $f : V \longrightarrow W$ について V が有限次元であれば

$$\dim \mathrm{Im}f = \dim V/\mathrm{Ker}f = \dim V - \dim \mathrm{Ker}f$$

が成り立つ．行列の定める線形写像の場合は 1 年次で学習した次元定理に他ならない．

6. 線形写像の表現行列

V, W が有限次元線形空間の時，線形写像 $f : V \longrightarrow W$ はそれぞれの基底をとることにより行列で表現される．p.14 の最初の記述を読んでほしい．表現行列は $f(\vec{p}_j)$ を W の基底 Q の 1 次結合で表すことにより定義されるが，基底の定める線形写像 $\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V$, $\Phi_Q : K^m \longrightarrow W$ を使っても理解できる．すなわち

$$(\Phi_Q)^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow K^m$$

は線形写像の合成なのでやはり線形写像であり，K^n から K^m への線形写像は成分を K にとる $m \times n$ 型行列をかけることによって表される．この行列が f の表現行列に他ならない．

7. 基底の取り換えと表現行列

　1 年次のテキスト p.105 に記載されている．ここで基底 $\mathcal{P}$ に対し線形同型写像 $\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V$ を考えることが重要だ．基底の変換と変換行列についての図式（p.7 3 行目）と，表現行列を定めるための図式（p.14 12 行目）を組み合わせて 15 行目の図式を作ればよい．なお，テキストでは $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$，$\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}'$ を逆に記述してしまった．訂正しておく．

8. 表現行列の簡略化

　表現行列は基底の取り方によって変わるので，それをどこまで簡略できるのかを考えることは線形写像の理解に有効である．これについて命題 2.2 を解説した．証明はテキストに書いてあるものと同じである．なお，$\{f(\vec{p}_1), \ldots, f(\vec{p}_k)\}$ が 1 次独立であることの証明を，テキストでは省略したのでここに記述しておく．なお記号はテキストの命題 2.2 の証明に合わせている．

　$\{f(\vec{p}_1), \ldots, f(\vec{p}_k)\}$ の 1 次結合が $\vec{0}_W$ になったとする．

$$\sum_{j=1}^{k} c_j f(\vec{p}_j) = f\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \vec{p}_j\right) = \vec{0}_W$$

　ゆえに $\sum_j c_j \vec{p}_j \in \mathrm{Ker} f$ であり，$\{\vec{p}_{k+1}, \ldots, \vec{p}_n\}$ が $\mathrm{Ker} f$ の基底であることから

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \vec{p}_j = \sum_{l=k+1}^{n} d_l \vec{p}_l, \qquad \sum_{j=1}^{k} c_j \vec{p}_j - \sum_{l=k+1}^{n} d_l \vec{p}_l = \vec{0}_V$$

　を得る．$\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n\}$ が V の基底であることから $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ であり，$\{f(\vec{p}_1), \ldots, f(\vec{p}_k)\}$ は 1 次独立である．

本日のレポート課題

　10 月 30 日の講義で与えた課題を明確にしておこう．

問題　n 次元線形空間 V と V から W への線形同型写像 $f : V \longrightarrow W$ が与えられたとする．V の基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ に対し，$f(\mathcal{P}) = \{f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \ldots, f(\vec{p}_n)\}$ は W の基底であることを示せ．

他に 11 月 6 日の講義では問題 2.3 と問題 2.6 を課題にした．なお $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ を示すには $\vec{q} \in \mathrm{Im} f \Longrightarrow \vec{q} \in \mathrm{Ker} f$ を示せばよい．要素をとって考えることにより明快な議論が可能になる．

レポート課題 (10 月 30 日，11 月 6 日出題) の解答例とコメント

問題 n 次元線形空間 V と V から W への線形同型写像 $f : V \longrightarrow W$ が与えられたとする．V の基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ に対し，$f(\mathcal{P}) = \{f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \ldots, f(\vec{p}_n)\}$ は W の基底であることを示せ．

【解答例】 f は全射なので任意の $\vec{w} \in W$ について $\vec{w} = f(\vec{v})$ を満たす $\vec{v} \in V$ が存在する．$\mathcal{P}$ は V の基底なので

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{p}_j$$

と表せる．ゆえに

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \vec{p}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\vec{p}_j)$$

であり，$f(\mathcal{P}) = \{f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \cdots, f(\vec{p}_n)\}$ は V を生成する．
$f(\mathcal{P})$ の 1 次結合が $\vec{0}_W$ になったとすると

$$\vec{0}_W = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\vec{p}_j) = f\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \vec{p}_j\right)$$

だが f は単射なので $\sum_j c_j \vec{p}_j = \vec{0}_V$ となる．$\mathcal{P}$ は基底であり 1 次独立なので $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ を得る．ゆえに $f(\mathcal{P})$ は 1 次独立であり，先ほどの結果と合わせて基底になる．

【コメント】

- $f(\mathcal{P}) = \{f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \ldots, f(\vec{p}_n)\}$ が W の基底であることを示すのだから，1 次独立であることと，W を生成することを個別に示せばよい．$\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ が基底であることから議論を始めると，分かりづらくなる．結論を示すには何を言えばよいかをまず考え，その後で仮定をどう使うかを考えるように．

問題 2.3 【解答例】$g \circ f = 0$ が成り立つとする．$\vec{w} \in \mathrm{Im} f$ をとれば $\vec{w} = f(\vec{v})$ と表せる．$g(\vec{w}) = g \circ f(\vec{v})$ だが $g \circ f = 0$ なので $g(\vec{w}) = \vec{0}_U$ である．ゆえに $\vec{w} \in \mathrm{Ker} g$ が成り立ち，$\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ を得る．

逆に $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ が成り立つとする．任意の $\vec{v} \in V$ について $f(\vec{v}) \in \mathrm{Im} f$ より $f(\vec{v}) \in \mathrm{Ker} g$ である．よって $g \circ f(\vec{v}) = \vec{0}_U$ であり，$g \circ f = 0$ を得る．

【コメント】

- 写像が $g \circ f = 0$ の 0 は $\vec{0}$ への定値写像を意味している．例 2(2) をみよ．このことは「すべての $\vec{v} \in V$ について $g \circ f(\vec{v}) = \vec{0}$」が成り立つことに他ならない．写像に関する等式は，定義域の要素をとってその写る先が等しいことを意味する．これは集合に関する等式・包含関係を調べるときと同様である．

問題 2.6 f の $\mathcal{P} = \{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ に関する表現行列 A は

$$f(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

f の $Q = \{\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x \sin x\}$ に関する表現行列 B は

$$\begin{aligned} f(Q) &= \begin{pmatrix} -2\cos x \sin x & 2\cos x \sin x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x & \cos x \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への基底の変換の行列 P は

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2x}{2} & \frac{1-\cos 2x}{2} & \frac{\sin 2x}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これから

$$AP = PB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり $B = P^{-1}AP$ であることが確認できた．

【コメント】

- $P^{-1}AP$ を計算するには P^{-1} を求める必要があるので大変だ．解答例のように $AP = PB$ を示せばよい．なお，P は基底の変換の行列なので正則であることは分かっている．

線形数学講義メモ (11 月 13 日)

本日の講義の要点

1. 記号の整理

   線形空間 V について，基底などそのベクトルの組を V のベクトルを成分とする行ベクトルとみなし
$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix}$$
と表す．$\mathcal{P}$ はカリグラフ体と言うフォントであって，ローマ字の筆記体を活字にしたものである．

   線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について
$$f(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} f(\vec{p}_1) & f(\vec{p}_2) & \cdots & f(\vec{p}_n) \end{pmatrix}$$
と定める．これも V のベクトルを成分とする行ベクトルである．

   この記号のもとに f の基底 $\mathcal{P}$ に関する表現行列は
$$\begin{pmatrix} f(\vec{p}_1) & f(\vec{p}_2) & \cdots & f(\vec{p}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}A$$
と表せる．講義では述べなかったが，この表示を使って基底の変換と表現行列の関係を調べることができる．

   $\mathcal{Q}$ を別の基底とし，基底の変換の行列を P とおく．すなわち $\mathcal{Q} = \mathcal{P}P$ が成り立つ．$\mathcal{Q}$ に関する f の表現行列を B とすれば $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}B$ が成り立つ．この二つの式を組み合わせれば
$$f(\mathcal{Q}) = f(\mathcal{P}P) = f(\mathcal{P})P = (\mathcal{P}A)P = \mathcal{P}(AP) = (\mathcal{Q}P^{-1})AP = \mathcal{Q}(P^{-1}AP) = \mathcal{Q}B$$
ここで 2 番目の等式は f の線形性による．結合法則の証明は行列の場合とまったく同様である．

2. 不変部分空間

   線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について，部分空間 $W \subset V$ が $f(W) \subset W$ を満たす時，f の不変部分空間という．また単に W は f 不変であるという．W が f 不変であることは次が成り立つことと同値である．
$$\vec{w} \in W \Longrightarrow f(\vec{w}) \in W$$
集合の条件式で覚えるだけでなく，要素についての条件式で理解しなくては論証には使えない．

   この条件を使って，f の核と像が f 不変であることを示した．証明はいずれもやさしいので考えてほしい．

3. V が不変部分空間の直和になる場合の表現行列

   線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ で各 W_j は $f-$ 不変であるとする． W_j の基底を $\mathcal{P}_j$（V のベクトルを成分とする n_j 項行ベクトル，$n_j = \dim W_j$）としそれらを並べて V の基底
$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \cdots & \mathcal{P}_r \end{pmatrix}, \qquad n = \sum_{j=1}^{r} n_j \text{項行ベクトル}$$
を作る．f の基底 $\mathcal{P}$ に関する表現行列は
$$f(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} f(\mathcal{P}_1) & f(\mathcal{P}_2) & \cdots & f(\mathcal{P}_r) \end{pmatrix} = \mathcal{P}A$$

で与えられる．

W_j は f 不変なので f を W_j に制限した写像は W_j の線形変換を定める．

$$f_{|W_j}: W_j \longrightarrow W_j$$

写像は f と同一なので $f_{|W_j}$ の基底 $\mathcal{P}_j$ に関する表現行列は $f(\mathcal{P}_j) = \mathcal{P}_j A_j$ で定義できる．

以上から，f の表現行列が直和行列になることが導かれる．

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}) &= \begin{pmatrix} f(\mathcal{P}_1) & f(\mathcal{P}_2) & \cdots & f(\mathcal{P}_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 A_1 & \mathcal{P}_2 A_2 & \cdots & \mathcal{P}_r A_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \cdots & \mathcal{P}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. 固有空間

固有値，固有ベクトル，固有空間の定義は，基本的に 1 年次のものと同じである．テキストにも記述してあるので確認しておくこと．なお固有空間は 1 次元以上の f 不変部分空間である．証明は命題 2.3 の証明の冒頭に記述されている．

異なる固有値に対する固有空間の和空間は直和である．これは定理 1.8 の (2) による直和の特徴づけを使って証明される．テクニカルだが面白い証明なので味わってほしい．

5. 半単純な線形変換

線形空間 V が有限次元であり，その線形変換 $f: V \longrightarrow V$ の相異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_r$ について

$$V = V(\alpha_1) \oplus V(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_r)$$

が成り立つとき f は半単純であるという．和空間が直和であることは示されているのでこれが成り立つには $\dim V = \sum_j \dim V(\alpha_j)$ が成り立てばよい（定理 1.8(4)）．

講義では半単純であることと，表現行列を対角行列に取れることが同値であることを示した．すなわち半単純線形変換の表現行列は対角化可能であることを示した．対角化可能性を線形変換の性質で捉えなおしたことになる．

- 半単純なら表現行列を対角行列に取れることについて

  V の基底は各 $V(\alpha_j)$ の基底を並べることによって作れる．$V(\alpha_j)$ の $\vec{0}$ 以外のベクトルは，α_j に対する固有ベクトルなので，f の固有ベクトルを並べた基底が存在することになる．このとき表現行列は対角行列である．

- 表現行列が対角行列なら f は半単純であることについて

  基底 $\mathcal{P}$ について f の表現行列が対角行列（対角成分を順に $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ とおく．）になったとする．このとき $f(\vec{p}_k) = \beta_k \vec{p}_k$ であり，基底は 1 次独立なのでそれを構成するベクトルは $\vec{0}$ ではない．すなわち β_k は固有値である．

  各 α_j について $\beta_k = \alpha_j$ となる k が m_j 個あったとすると，$V(\alpha_j)$ は 1 次独立な m_j 個のベクトルの組を持つことになるので $\dim V(\alpha_j) \geqq m_j$ である．また β_k は固有値なのでどれか 1 つの α_j と等しい．ゆえに $\sum m_j = n$ である．

$$n = \sum_j m_j \leqq \sum_j \dim V(\alpha_j) = \dim V(\alpha_1) \oplus V(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_r) \leqq \dim V = n$$

より直和と V の次元が一致するので

$$V = V(\alpha_1) \oplus V(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_r)$$

が成り立つ．すなわち f は半単純である．

6. 表現行列の固有ベクトルと f の固有ベクトルの関係について

f の基底 $\mathcal{P}$ に関する表現行列を A とするとき

$$A\boldsymbol{x} = (\Phi_{\mathcal{P}})^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ここで $\boldsymbol{x}$ を A の固有値 α に対する固有ベクトル，$\boldsymbol{x}$ を座標とする V のベクトルを $\vec{x} = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ とおけば

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} = (\Phi_{\mathcal{P}})^{-1}(f(\vec{x}))$$

となるが両辺を $\Phi_{\mathcal{P}}$ で移せば

$$\alpha\vec{x} = f(\vec{x})$$

を得る．すなわち $\vec{x}$ が f の固有ベクトルである．

表現行列は基底の取り方によって変わるのでその固有ベクトルも変わってくる．しかし f の固有ベクトルはもちろん基底の取り方とは無関係である．この対応はきちんと認識しておくこと．

本日のレポート課題とヒント

問題 2.8 と問題 2.11 をレポート課題にする．問題 2.8 は不変部分空間であることを示す問題なので，講義メモの要素による不変性の条件式を利用すること．なお (3) は g の固有空間が f 不変であることの証明に他ならない．要素の条件で記述されているのでこのまま示せばよい．

問題 2.11 の (1) は固有値が $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ で特徴づけられることを利用する．固有方程式の解という認識は役に立たない．論証には求め方よりも定義のほうが重要である．(2) は $V(1) + V(2) \supset V$ を示せばよい．要するに $\vec{v} \in V$ を 1 に対する固有ベクトルと 2 に対する固有ベクトルの和として表せばよい．条件をうまく利用すること．

レポート課題 (11 月 13 日出題) の解答例とコメント

問題 2.8　(1) $\vec{v} \in \mathrm{Ker} f$ をとる.

$$f\left(g(\vec{v})\right) = f \circ g(\vec{v}) = g \circ f(\vec{v}) = g\left(f(\vec{v})\right) = g(\vec{0}) = \vec{0}$$

より $g(\vec{v}) \in \mathrm{Ker} f$ である．ゆえに $\mathrm{Ker} f$ は g 不変である．

(2) $\vec{v} \in f(W)$ をとる．$\vec{w} \in W$ で $\vec{v} = f(\vec{w})$ を満たすものが存在する．

$$g(\vec{v}) = g \circ f(\vec{w}) = f \circ g(\vec{w}) = f\left(g(\vec{w})\right)$$

であるが W が g 不変なので $g(\vec{w}) \in W$ である．ゆえに $g(\vec{v}) \in f(W)$ であり $f(W)$ は g 不変である．

(3)

$$g\left(f(\vec{v})\right) = g \circ f(\vec{v}) = f \circ g(\vec{v}) = f\left(g(\vec{v})\right) = f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

【コメント】

- (1) は $\vec{v} \in \mathrm{Ker} f$ から $g(\vec{v}) \in \mathrm{Ker} f$ を導くのが課題だ．導くべき $g(\vec{v}) \in \mathrm{Ker} f$ は $f(g(\vec{v})) = \vec{0}$ ということなので，上のような議論になる．議論の自然さを感じてほしい．
- (2) は $g(f(W)) = (g \circ f)(W) = (f \circ g)(W) = f(g(W)) \subset f(W)$ としてもよい．ただしこのような集合をベースにした議論は危険を伴う．$(g \circ f)(W) = g(f(W))$ のような主張は決して自明ではない．集合と写像をめぐる議論においては，一見正しそうだが実は正しくないという主張はたくさんある．
- (3) は g の固有空間 $V_g(\alpha)$ が f 不変であることを述べている．この形で出したので易しかったと思う．

問題 2.11　α を f の固有値とし $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ とする．

$$(f^2 - 3f + 2I)(\vec{v}) = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

から $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ である．ゆえに $\alpha = 1, 2$ である．

以下 $V(1) = \mathrm{Ker}(f - I)$, $V(2) = \mathrm{Ker}(f - 2I)$ とおく．$(f - I) \circ (f - 2I) = 0$ より $\vec{v} \in V$ について $(f - 2I)(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f - I) = V(1)$ である．同様に $(f - 2I) \circ (f - I) = 0$ なので $(f - I)(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f - 2I) = V(2)$ である．ゆえに

$$\vec{v} = (f - I)(\vec{v}) - (f - 2I)(\vec{v}) \in V(2) + V(1) = V(2) \oplus V(1)$$

であり $V = V(2) \oplus V(1)$ が成り立つ．ゆえに半単純である．

【後半の別解】　$V(1) + V(2)$ は直和なので $\dim V(1) + \dim V(2) = \dim V = n$ を言えばよい．$(f - 2I) \circ (f - I) = f^2 - 3f + 2I = 0$ より $\mathrm{Im}(f - I) \subset \mathrm{Ker}(f - 2I)$ が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Im}(f - I) = n - \dim \mathrm{Ker}(f - I) \leqq \dim \mathrm{Ker}(f - 2I)$$

より $\dim V(1) + \dim V(2) \geqq= n$ である．一方，$V(1) \cap V(2) = \{\vec{0}\}$ なので $\dim V(1) + \dim V(2) = \dim V(1) + \dim V(2) \leqq \dim V = n$ なので $\dim V(1) + \dim V(2) = n$ が成り立つ．

【コメント】

- 前半は固有値の定義を使えば簡単だ．固有方程式の解と覚えていては役に立たない．
- 前半で固有値が 1 または 2 であることが示せたが，1 と 2 がともに固有値かどうかは分からない．$V(\alpha)$ は固有空間の記号として用意したので，固有値でない可能性も考慮し改めて定義しなおした．例えば 1 が固有値でない場合（固有値が 2 のみの場合）は $V(1) = \{\vec{0}\}$ である．

線形数学講義メモ (11 月 20 日)

本日の講義の要点

これから 2 回の講義を使って Jordan の標準形の解説をする．証明もかなり難しいのでじっくり考えてほしい．すぐに理解できるというものではないので，おおまかな流れをつかむだけで構わない．

1. Jordan の標準形までの議論の流れ

   V を n 次元複素線形空間とし，その上の線形変換 $f : V \longrightarrow V$ が与えられたとする．今回と次回でその表現行列をできる限り簡単にすることを考える．議論の流れは以下の通り．なお，I は線形空間の恒等変換，E は単位行列である．

   - f の固有多項式を $p(x)$ とおく．これは f の表現行列の固有多項式である．
     基底を変えると表現行列は変わるが，その固有多項式は変わらないことに注意せよ．（1 年次テキスト p.140 参照）
   - $p(x)$ は n 個の 1 次式の積としてただ一通りに表せる．それを次のようにおく．

     $$p(x) = \prod_{k=1}^{r}(x-\alpha_k)^{l_k}, \quad \sum l_k = n$$

     α_k たちは f の（互いに異なる）固有値であり，l_k を固有値 α_k の重複度という．
     この事実は代数学の基本定理と呼ぶ．この講義では証明はしないが，重要な定理なので覚えておいてほしい．
   - $W(\alpha_j) = \mathrm{Ker}(f-\alpha_j)^{l_j}$ を f の固有値 α_j に対する拡大固有空間という．
     拡大固有空間は固有空間 $V(\alpha_j)$ を含んでいることに注意せよ．
   - 拡大固有空間は f の不変部分空間である．また V は拡大固有空間の直和になる．

     $$V = W(\alpha_1) \oplus W(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_r)$$

   - 各拡大固有空間の基底を集めることによって V の基底を作れば f の表現行列は f を $W(\alpha_j)$ に制限した線形変換（$f_j : W(\alpha_j) \longrightarrow W(\alpha_j)$ と表すことにする）の表現行列の直和行列になる．（11 月 13 日の講義メモの 3 を見よ）
   - $T_j = T_j = f_j - \alpha_j I$ とおけば $(T_j)^{l_j} = 0$ である．このような変換を冪零変換と呼ぶ．f_j の表現行列は冪零変換 T_j の表現行列に $\alpha_j E$ を加えたものになる．

   今日のテーマは V が拡大固有空間の直和になること，来週が冪零変換の表現行列の簡略化の考察である．

2. 行列の多項式

   ここでは線形変換 f ではなくその表現行列 A を考察する．まず行列の多項式について 1 年次のテキスト p.147 に簡単に記されている．定数項に E をかけることに注意すること．以下の 2 点に注意すること．

   - Caley-Hamilton の定理 $p(A) = O$（1 年次のテキスト p.147）
   - 2 つの多項式 $q(x), r(x)$ について $q(A)r(A) = r(A)q(A)$
     簡単な多項式で試してみると良い．$A^kA^h = A^{k+h} = A^hA^k$ から多項式の積の計算とまったく同じになることに気付くはずだ．

3. 多項式についての一般論（テキスト p.33）より

決して難しい話題ではないので，読んでみてほしい．この講義では結果のみ利用する．固有値が 2 つ以上ある場合，$p_j(x)$ の定義の仕方から，それらは互いに素（すべての多項式に共通な因数が存在しない）であり命題 4.3 が使える．

$$p_1(x)h_1(x) + p_2(x)h_2(x) + \cdots + p_r(x)h_r(x) = 1$$

4. $\mathbb{C}^n$ が拡大固有空間の直和になること．
   $p_j(A)h_j(A) = B_j$ と定めてテキスト p.19 の 3 つの性質を示した．これから $\mathbb{C}^n$ が $W_j = \mathrm{Ker}(A - \alpha_j E)^{l_j}$ たちの直和になることもテキストに記述してあるのでここでは繰り返さない．テクニカルな証明であり，とても自分で思いつけるような証明ではないが，じっくり読んでみてほしい．
5. 固有値が 1 つのみの場合
   固有値が α のみの場合は $(A - \alpha E)^n = O$ になる．すなわち $W(\alpha) = \mathbb{C}^n$ なのでこの場合も全空間 $\mathbb{C}^n$ は拡大固有空間の直和になる．なお講義では $(A - \alpha E)^n = O$ を示すのに三角化を利用したがここはテキストにあるように，固有多項式が $p(x) = (x - \alpha)^n$ であることと Cayley-Hamilton の定理を組み合わせるだけでよかった．
6. 拡大固有空間が不変部分空間であること
   テキストの証明よりも講義で与えた証明のほうが分かりやすいと思うのでここに記述しておく．
   以下，添え字の j は省略する．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(A - \alpha E)^l = W(\alpha)$ をとる．

$$(A - \alpha E)^l (A\boldsymbol{x}) = A(A - \alpha E)^l \boldsymbol{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

   より $A\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(A - \alpha E)^l = W(\alpha)$ である．
7. f の拡大固有空間と A の拡大固有空間の関係
   講義で触れられなかったので簡単に補足しておく．基底 $\mathcal{P}$ について $\Phi_{\mathcal{P}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow V$ を単に Φ と表そう．A は $\mathbb{C}^n$ の線形変換として $A = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ と表せる．

$$\Phi^{-1} \circ (f - \alpha I) \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi - \alpha \Phi^{-1} \circ I \circ \Phi = A - \alpha E$$

   なので $(A - \alpha E)^l = \Phi^{-1} \circ (f - \alpha I)^l \circ \Phi$ である．Φ は同型写像なので

$$(A - \alpha E)^l \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow (f - \alpha I)^l (\Phi(\boldsymbol{x})) = \vec{0}$$

   であり，Φ は $\mathrm{Ker}(A - \alpha E)^l$ の要素を $\mathrm{Ker}(f - \alpha I)^l$ の要素に移す．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 次のような n 次正方行列 A（対角成分がすべて 0 の上三角行列） について $A^n = O$ であることを示せ．

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

課題 2 n 次正方行列 A_j は，上三角行列で (j, j) 成分が 0 だとする．$A_1 A_2 \ldots A_n = O$ であることを示せ．

課題 2 は 1 年次のテキストの Cayley-Hamilton の定理の証明（p.147）に利用されている．また課題 1 は課題 2 の特殊な場合（$A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ ）なので課題 2 だけ答えればよい．アイデアは

$$\mathbb{C}^k = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0 \}$$

とみなし，

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^k \Longrightarrow A_k \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{k-1}$$

であることを示す．分割乗法（1 年次のテキスト p.14）を使うと良い．

レポート課題 (11 月 20 日出題) の解答例とコメント

課題 1 次のような n 次正方行列 A（対角成分がすべて 0 の上三角行列） について $A^n = O$ であることを示せ．

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

課題 2 n 次正方行列 A_j は，上三角行列で (j, j) 成分が 0 だとする．$A_1A_2 \ldots A_n = O$ であることを示せ．

まず，課題 2 の解答例を示そう．A_j を行について第 $j-1$ 行と第 j 行の間で，列について第 j 列と第 $j+1$ 列の間で分割すると，

$$A_j = \begin{pmatrix} B_j & C_j \\ O & D_j \end{pmatrix}, \qquad B_j \text{は } (j-1) \times j \text{ 型}, \ O \text{ は } (n-j+1) \times j \text{ 型}$$

となる．なお，$A_n = \begin{pmatrix} B_n \\ O \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} O & D_1 \end{pmatrix}$ である．まず $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ について $A_n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} B_n\boldsymbol{x} \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_n\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n-1}$ である．また $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^j$ について

$$A_j\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} B_j & C_j \\ O & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_j\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad B_j\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{j-1}$$

となる．よって $B_2B_3 \cdots B_n\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^1$（要するにただの複素数）を z とおけば

$$A_2A_3 \cdots A_n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

でありさらに A_1 をかければ $\boldsymbol{0}$ になる．よって $A_1A_2 \cdots A_n = O$ が成り立つ．

課題 1 については, A はすべての j について A_j に課せられた条件を満たしているので $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ として課題 2 を適用すればよい．

【コメント】

- 解答例では分割乗法（1 年次のテキスト p.13–14）を使った．A_k の左下のブロック（$(n-k+1) \times k$ 型）が 0 行列になっていることしか使っていない．実際，三角行列でなくても左下のブロックが O なら成立している．
- 解答例の分割で，A_{k-1} の列の分割の仕方と A_k の行の分割の仕方がともに $k-1$ 番目と k 番目の間であることに注意せよ．AB を分割乗法で計算する際には，A の列の分け方と B の行の分け方が同じでなくてはならない．（1 年次テキスト p.14 のの 9 行目）
- 課題 1 は冪零行列の典型例を与えている．A を 1 回かけるたびに，斜めに並んだ 0 の範囲が 1 段ずつ上にずれていき，n 回目で 0 行列になる．このことは $\mathbb{C}^k = \{{}^t(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n\} \subset \mathbb{C}^n$ の了解のもとに

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^k \Longrightarrow A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{k-1}$$

であることを示せばよい．A をかけるたびに各列の 0 の個数が一つずつ増えていく．

線形数学講義メモ (11 月 27 日)

本日の講義の要点

1. ここまでの議論の復習

   前回，有限次元線形空間 V で定義された線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について，v が f の拡大固有空間の直和になることを証明した．それによって f を拡大固有空間 $W(\alpha_j)$ に制限した写像 f_j の表現行列の直和行列として f の表現行列が与えられる．（11 月 13 日の講義メモの 3 を参照せよ）このとき

   $$T_j = f_{|W(\alpha_j)} - \alpha_j I : W(\alpha_j) \longrightarrow W(\alpha_j)$$

   は $W(\alpha_j) = \mathrm{Ker}(f - \alpha_j I)^{l_j}$ なので $(T_j)^{l_j} = 0$ を満たす．このような変換を冪零変換と呼ぶ．

   f_j の表現行列は，冪零変換 T_j の表現行列に $\alpha_j E$ を加えればいいので f の表現行列を簡単にするという問題は冪零変換の表現行列をどこまで簡単にできるかという問題に帰着される．

2. 冪零変換

   冪零変換 $T : W \longrightarrow W$ については任意の $\vec{p} \in W$ についてレポート課題に出したような不変部分空間が作れる．ゆえに W はそのような部分空間の和空間として表せる．これを直和にできることを示せれば，T の表現行列がレポート課題の行列の直和になる．しかしその部分の証明は省略する．結果のみ使うことにする．

3. ジョルダン細胞とジョルダンの標準形

   レポート課題の行列に αE を加えたもの

   $$J(\alpha.k) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & O \\ & \alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \alpha & 1 \\ O & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

   をジョルダン細胞と呼ぶ．ただし k は正方行列の次数である．

   有限次元線形空間の線形変換は，基底をうまく取ることによってジョルダン細胞の直和行列にできる．これをジョルダンの標準形と呼ぶ．一つの固有値に対してジョルダン細胞は複数ある場合があるので，講義ではそれを

   $$J(\beta_1, r_1) \oplus J(\beta_2, r_2) \oplus \cdots J(\beta_m, r_m)$$

   と表した．$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ と表した場合は相異なる固有値を表しているが，$\beta_1, \ldots, \beta_m$ と表した場合は，ジョルダン細胞の個数だけ重複させて記述している．ただしいずれも f の固有値なので各 β_k に対して $\beta_k = \alpha_j$ となる j がただ 1 つぞんざいする．

4. ジョルダン標準形の決定

   ジョルダン標準形の形から各固有値 α_j に対して $\dim V(\alpha_j)$ は $\alpha_j = \beta_k$ となる k の個数になる．すなわち固有値 α_j に対するジョルダン細胞の個数である．これから 3 次の行列の場合は固有値の重複度と固有空間の次元からどのようなジョルダンの標準形になるか完全に決定できる．

   より一般の場合も，各固有値 α について $\mathrm{rank}(f - \alpha I)^k$ を調べることによってジョルダンの標準形の形を判定できる．

   $$\mathrm{rank}(J(0,k))^r = \begin{cases} k - r & r \leqq k \\ 0 & r > k \end{cases}$$

なので $\mathrm{rank}(f-\alpha I)^{k-1}-\mathrm{rank}(f-\alpha I)^{k}$ が $r \geqq k$ を満たすジョルダン細胞 $J(\alpha,k)$ の個数を表している．

この事情を問題 2.13 を題材に考察した．固有多項式が $(x-2)^4(x-3)^5$ であることから，固有値は 2 と 3 であり，2 に対するジョルダン細胞の次数の和は 4，3 に対するジョルダン細胞の次数の和は 5 である．

$$\dim V(2) = 9 - \mathrm{rank}(f-2I) = 9-7 = 2$$

より，固有値 2 に対するジョルダン細胞は 2 つある．同様に $\mathrm{rank}(f-3I)=7$ なので固有値 3 に対するジョルダン細胞も 2 つである．次に

$$\mathrm{rank}(f-2I)-\mathrm{rank}(f-2I)^2 = 7-6 = 1$$

なので次数 2 以上の固有値 2 に対するジョルダン細胞は 1 つである．ゆえに 1 つのジョルダン細胞の次数は 1 である．よって他方のジョルダン細胞の次数は 3 になる（次数の和が重複度 4 になることに注意せよ）．

一方

$$\mathrm{rank}(f-3I)-\mathrm{rank}(f-3I)^2 = 7-5 = 2$$

より，次数 2 以上の固有値 3 に対するジョルダン細胞は 2 個ある．次数の和は 5 なので，一方が 2，他方が 3 でなくてはならない．よってジョルダンの標準形は

$$J(2,1)\oplus J(2.3)\oplus J(3,2)\oplus J(3,3)$$

である．決して理解しやすいことではないがジョルダンの標準形の形は，階数の計算だけで決定できることを知っておいてほしい．なお，ジョルダンの標準形が決まったとして，$P^{-1}AP$ がジョルダンの標準形になるような A をどう決めればよいかについては次回話すことにしよう．

本日のレポート課題とヒント

線形変換 $T: W \longrightarrow W$ と自然数 k について，$\vec{p}\in W$ が $T^k(\vec{p})=\vec{0}$ かつ $T^{k-1}(\vec{p})\neq\vec{0}$ が成り立つ時次を示せ．

(1) $\mathcal{P}=\begin{pmatrix}T^{k-1}(\vec{p}) & T^{k-2}(\vec{p}) & \cdots & T(\vec{p}) & \vec{p}\end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathcal{P}$ の生成する空間 $W_0=\langle\mathcal{P}\rangle$ は T の不変部分空間であることを示せ．

(3) T を W_0 に制限した写像の基底 $\mathcal{P}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ O & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{k-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

(1) の 1 次独立であることについては，$\mathcal{P}$ の 1 次結合が $\vec{0}$ になるという式をたてる．

$$c_1T^{k-1}(\vec{p})+c_2T^{k-2}(\vec{p})+\cdots+c_{k-1}T(\vec{p})+c_k\vec{p}=\vec{0}$$

この両辺の T^{k-1} により移った先を考えれば $T^k=0$（したがって $m\geqq k$ について $T^m=0$）から

$$c_kT^{k-1}(\vec{p})=\vec{0}$$

となる．これから $c_k = 0$ である．以下，同様な工夫をしていけばいいが分かるだろうか．(2) は不変部分空間の定義を確認すること．W_0 の像が W_0 に含まれつことを言えばよい．(3) も表現行列を $T(\mathcal{P}) = \mathcal{P}A$ によって定めれば分かるはずだ．考えてみよ．

レポート課題 (11 月 20 日出題) の解答例とコメント

【課題】線形変換 $T : W \longrightarrow W$ と自然数 k について，$\vec{p} \in W$ が $T^k(\vec{p}) = \vec{0}$ かつ $T^{k-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ が成り立つ時次を示せ．

(1) $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} T^{k-1}(\vec{p}) & T^{k-2}(\vec{p}) & \cdots & T(\vec{p}) & \vec{p} \end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathcal{P}$ の生成する空間 $W_0 = \langle \mathcal{P} \rangle$ は T の不変部分空間であることを示せ．

(3) T を W_0 に制限した写像の基底 $\mathcal{P}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ O & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{k-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

【解答例】(1)$\mathcal{P}$ の 1 次結合が $\vec{0}$ になったとする．

$$c_1 T^{k-1}(\vec{p}) + c_2 T^{k-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} T(\vec{p}) + c_k \vec{p} = \vec{0}$$

両辺のベクトルを T^{k-1} により移せば，$l \geqq k$ について

$$T^l(\vec{p}) = T^{l-k} \circ T^k(\vec{p}) = T^{l-k}(\vec{0}) = \vec{0}$$

なので

$$c_k T^{k-1}(\vec{p}) = \vec{0}$$

を得る．これと $T^{k-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ より $c_k = 0$ を得る．ゆえに

$$c_1 T^{k-1}(\vec{p}) + c_2 T^{k-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} T(\vec{p}) = \vec{0}$$

である．この両辺のベクトルを T^{k-2} により移せば，同様に $c_{k-1} T^{k-1}(\vec{p}) = \vec{0}$ を得る．よって $c_{k-1} = 0$ である．以下同様の議論を繰り返せば，すべての係数が 0 になり，1 次独立であることが示される．

(2) $\vec{v} \in W_0$ は

$$\vec{v} = c_1 T^{k-1}(\vec{p}) + c_2 T^{k-2}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} T(\vec{p}) + c_k \vec{p}$$

と表せる．ゆえに

$$T(\vec{v}) = c_1 T^k(\vec{p}) + c_2 T^{k-1}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} T^2(\vec{p}) + c_k T(\vec{p}) = c_2 T^{k-1}(\vec{p}) + \cdots + c_{k-1} T^2(\vec{p}) + c_k T(\vec{p})$$

であり $T(\vec{v}) \in W_0$ が成り立つ．ゆえに W_0 は T 不変である．

(3) 表現行列は

$$T(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \vec{0} & T^{k-1}(\vec{p}) & \cdots & T^2(\vec{p}) & T(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{k-1}(\vec{p}) & T^{k-2}(\vec{p}) & \cdots & T(\vec{p}) & \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ O & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である．なおこれは Jordan 細胞 $J(0, k)$ に他ならない．

【コメント】

- どれも易しい問題であり，解答を読めば理解できるだろう．ただし提出者が 4 人と少なく残念である．
- (1) は同じ議論の繰り返しなので「同様に」として構わない．ただし，$c_k = 0$ が得られた時点で「同様に」とするのはまずいだろう．次の段階では T^{k-2} により移った先を考えるのであり，T の冪を 1 つずつ下げていくことが要点だからだ．

線形数学講義メモ (12 月 4 日)

本日の講義の要点

1. Jordan の標準形にする正則行列

   n 次正方行列 A について A がどのような Jordan の標準形になるかは命題 2.9 が役に立つ．固有値 α について $\dim V(\alpha)$ が Jordan 細胞の個数になるし，その次数の和が固有値の重複度になる．これから，固有空間の次元と重複度が等しければ，Jordan 細胞は $J(\alpha,1)$ のみになるし，固有空間の次元が重複度より 1 だけ少なければ，Jordan 細胞は $J(\alpha,2)$ が一つと残りは $J(\alpha,1)$ だ．

   固有空間の次元と重複度の差が 2 以上ある場合は，この情報だけでは分からないが $\mathrm{rank}(A-\alpha E)^k$ を調べることにより決定できる．この事情は前回の講義で問題 2.13 を使って具体的に解説した．分かりづらかったかもしれないが，考えてみてほしい．

2. Jordan の標準形にする行列を作ること

   一般論は 21 ページの下から 4 行目から 22 ページの前半にかけてまとめている．例 6 に具体例があるので見てほしい．要するに，Jordan 細胞 $J(\alpha,k)$ を与えるベクトルの組は
   - $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker}(A-\alpha E)^k \backslash \mathrm{Ker}(A-\alpha E)^{k-1}$ をとる．
   - ベクトルの組を $\{(A-\alpha E)^{k-1}\boldsymbol{p}, (A-\alpha E)^{k-2}\boldsymbol{p}, \ldots, (A-\alpha E)\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\}$ ととる．

   これらが 1 次独立であること，この生成する空間が $(A-\alpha E)$ で不変なこと，$A-\alpha E$ をこの空間に制限した写像の表現行列が $J(0,k)$ であることが前回のレポート課題に他ならない．

3. 双対空間

   体 K 上の線形空間 V について V から K への線形写像全体は体 K 上の線形空間になる．これを双対空間と呼ぶ．講義では次の例を紹介した．
   - V を n 項実列ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$ とするとき．V^* は n 項行列ベクトル全体の集合になる．
   - V を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体の集合とし，$a \in \mathbb{R}$ とする．$\delta_a : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\delta_a(f) = f(a)$ は V^* の要素である．

   双対空間について定理 2.10 を紹介した．証明の文脈での双対基底は有限次元線形空間の双対空間を考えるときの主要な道具である．きちんと覚えておくこと．

4. 計量線形空間

   内積の定義を与えた．1 年次は実の場合を学習したのでここでは複素係数での内積を紹介している．実にするには共役を無視すればいいので簡単だろう．例として p.25 の例 7 と例 8 を紹介した．$\mathbb{C}^n$ の標準内積と，周期 2π の関数における，積分による内積だ．内積を，内積の性質（公理）によって定義することは，このような異質なものを統一的に扱うことを可能にする．こういう思考方法は数学の基本的手法なのでじっくり考えておくこと．

本日のレポート課題とヒント

問題 2.14 と問題 2.16 を課題にする．これが第 2 章の最後のレポート課題だ．

レポート課題 (12 月 4 日出題) の解答例とコメント

【問題 2.14 の解答例】

左の行列（A とおく）について，固有多項式は

$$|xE-A| = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ -1 & x+4 & -2 \\ -4 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x^3+3x^2-9x-27 = (x-3)(x+3)^2$$

である．固有値 -3 に対する固有空間は

$$A+3E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より次元は 1 なので，固有値 -3 に対するジョルダン細胞は 1 つである．よってジョルダンの標準形は $J(3,1)\oplus J(-3,2)$ である．

ジョルダンの標準形にする行列は $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker}(A-3E) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ と $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Ker}(A+3E)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A+3E)$ をとって $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & (A+3E)\boldsymbol{q} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ と置けばよい．具体的には

$$A-3E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+3E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \\ 27 & 0 & 27 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

などと置いて

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & (A+3E)\boldsymbol{q} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

右の行列（B とおく）について，固有多項式は

$$|xE-B| = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & -1 \\ 2 & x-3 & 1 \\ 6 & -3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^3$$

なので固有値は 2 のみである．その固有空間は

$$B-2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より次元はであり，固有値 2 に対するジョルダン細胞は 2 つである．よってジョルダンの標準形は $J(2,1)\oplus J(2,2)$ である．

このジョルダンの標準形を与える行列を作るには次のようにする．まず $\mathrm{Ker}(B-2E)^2 \setminus \mathrm{Ker}(B-2E)$ からベクトル $\boldsymbol{q}$ をとる．$(A-2E)\boldsymbol{q} \in \mathrm{Ker}(B-2E) = V(2)$, $(B-2E)\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ と $\dim V(2) = 2$ より $\boldsymbol{p} \in V(2)$ を $\{\boldsymbol{p}, (B-2E)\boldsymbol{q}\}$ が $V(2)$ の基底になるようにとる．すると $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & (B-2E)\boldsymbol{q} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ によって $P^{-1}BP = J(2,1)\oplus J(2,2)$ となる．具体的には

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (B-2E)\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

【コメント】

- 固有値を求めること，固有空間を求めることは 1 年次の線形代数で学習済みだ．拡大固有空間の次元は固有値の重複度なのでこれも固有値を求めた時点で決定できる．3 次の場合は命題 2.9 によってジョルダンの標準形が決定される．重複固有値を α として，この事情を表にまとめておく．重複度が 2 の時はもう一つの固有値を β とする．

α の重複度	$V(\alpha)$ の次元	ジョルダンの標準形	備考
3	1	$J(\alpha,3)$	
3	2	$J(\alpha,1)\oplus J(\alpha,2)$	問題 2.14 の右
3	3	$J(\alpha,1)\oplus J(\alpha,1)\oplus J(\alpha,1)$	対角化可能
2	1	$J(\beta,1)\oplus J(\alpha,2)$	問題 2.14 の左
2	2	$J(\beta,1)\oplus J(\alpha,1)\oplus J(\alpha,1)$	対角化可能

  ジョルダン細胞の次数がすべて 1 の時が対角化である．対角化でないジョルダンの標準形が 3 種類あるが, そのうち二つについては問題 2.14 で出題した．ジョルダン標準形にする行列の求め方は, 解答例に記述した．ジョルダンの標準形が $J(\alpha,3)$ になる場合が残されたが，これは $\boldsymbol{p}\in\mathrm{Ker}(A-\alpha E)^3\setminus\mathrm{Ker}(A-\alpha E)^2$ をとって $P=\begin{pmatrix}(A-\alpha E)^2\boldsymbol{p} & (A-\alpha E)\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p}\end{pmatrix}$ とすればよい．
- B では $\mathrm{Ker}(B-2E)^2=\mathrm{Ker}O=\mathbb{C}^3$ なので $\boldsymbol{q}\in\mathrm{Ker}(B-2E)^2\setminus\mathrm{Ker}(B-2E)$ は $\boldsymbol{q}\notin\mathrm{Ker}(B-2E)$ と同値である．しかし A では $\mathrm{Ker}(A+3E)^2$ は 2 次元なので $\boldsymbol{q}\notin\mathrm{Ker}(A+3E)$ と取るだけではだめだ．
- $\boldsymbol{p}$ の取り方について A では固有値 3 に対する固有ベクトルを取ればよい．B では $V(2)$ の次元が 2 次元なので単に基底を取るではいけない．$(B-2E)\boldsymbol{q}\in\mathrm{Ker}(B-2E)=V(2)$ と合わせて $V(2)$ の基底になるように選ぶこと．

【問題 2.16 の解答例】

表現行列 $A=(a_{ij})$ は

$$f(\vec{p}_j)=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}\vec{q}_k$$

によって定義される．よって

$$\varphi_i\left(f(\vec{p}_j)\right)=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}\varphi_i(\vec{q}_k)=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}\delta_{ik}=a_{ij}$$

【コメント】

- 表現行列の定義と双対基底の定義を組み合わせるだけの問題，易しいと感じてほしい．

線形数学講義メモ (12 月 11 日)

本日の講義の要点

1. Cauchy-Schwarz の不等式（定理 3.1(1)）
   実の場合の証明は 1 年次のテキストに記述されている．複素の場合は若干煩雑になるが，基本的な方針は実の場合と同じで，2 次式が常に 0 以上であることと判別式が 0 以下であることの同値性を利用する．講義の証明はテキストに記述したものと同じなのでここでは省略する．
   この不等式は内積の絶対値がノルムの積よりも小さいことを言っているので高校数学での内積導入時の定義（長さの積になす角の余弦をかけたもの）という見方からは当たり前の式だ．しかし，内積の公理のみから証明できたので，すべての計量線形空間に共通に成り立つ不等式である．例 8 のような関数のなす計量線形空間でも成り立っていることに注意せよ．
2. 三角不等式（定理 3.1(2)）
   証明についてはテキストを見よ．Cauchy-Schwarz の不等式からの帰結である．なお，ユークリッド空間の場合と同じように $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の距離とみなせば，
$$\|\vec{a}-\vec{c}\| \leqq \|\vec{a}-\vec{b}\| + \|\vec{b}-\vec{c}\|$$
   という図形的な意味での三角不等式（三角形の辺の長さは他の 2 辺の長さの和より短い）を導く．内積を入れることの良さは，線形空間での幾何的考察を可能にする点にある．
3. 内積の表現行列
   V が有限次元計量線形空間の時，V の基底を取ることによって内積を行列で表示できる．
$$(\vec{x},\vec{y}) = {}^t\vec{x}A\bar{\vec{y}}$$
   この A について ${}^t\bar{A} = A$ が成り立つ（このような行列をエルミート行列という）．また A は正則である．このことはテキストに記述していないので証明を書いておく．
   A が正則でないとすれば $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ で $A\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ を満たすものが存在する．$\boldsymbol{y}$ を座標とするベクトルを $\vec{y}$ とおけば
$$(\vec{y},\vec{y}) = {}^t\boldsymbol{y}A\bar{\boldsymbol{y}} = 0$$
   となる．$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ すなわち $\vec{y} \neq \vec{0}$ に矛盾する．
4. 内積の定める双対空間への写像（命題 3.2）
   実計量線形空間において，内積を利用して V から V^* への写像が作れる．この写像は単射であり，V が有限次元の場合は同型写像になる．内積を利用して V と その双対空間 V^* を同一視できる．なお，無限次元の場合には一般には全射にはならない．その例を連続関数のなす線形空間において与えた．
   講義では例 9 から出発してデルタ関数に踏み込んだが，若干勇み足だった．聞き流してくれるとありがたい．
5. 垂線の足
   計量線形空間 V とその有限次元部分空間 W について $\vec{v}$ から W に垂線を下ろすことについて考察した．W の基底を決めれば垂線の足（垂線と W の交点）を求めることは内積の表現行列を係数行列とする連立方程式に帰着できる．表現行列は正則なので解はただ一通り存在する．
   $\vec{v}$ から W に下ろした垂線の足を $\vec{w}_0$ とおく．このとき $\vec{w}_0$ は $\vec{v}$ から最も近い W の点であることが次のように示せる．

命題 $\vec{w} \in W$ について $\|\vec{v}-\vec{w}\| \geqq \|\vec{v}-\vec{w}_0\|$ が成り立つ．また等号は $\vec{w} = \vec{w}_0$ の時に限り成り立つ．

証明 $\vec{v}-\vec{w}_0$ は W のベクトルと直交するので特に $\vec{w}_0-\vec{w}$ と直交する．ゆえに

$$\begin{aligned}\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 &= (\vec{v}-\vec{w}_0+\vec{w}_0-\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}_0+\vec{w}_0-\vec{w}) = (\vec{v}-\vec{w}_0, \vec{v}-\vec{w}_0) + (\vec{w}_0-\vec{w}, \vec{w}_0-\vec{w}) \\ &= \|\vec{v}-\vec{w}_0\|^2 + \|\vec{w}_0-\vec{w}\|^2 \geqq \|\vec{v}-\vec{w}_0\|^2\end{aligned}$$

となり命題の不等式を得る．等号条件は $\|\vec{w}_0-\vec{w}\| = 0$ すなわち $\vec{w}_0 = \vec{w}$ である．

$\vec{v}$, $\vec{w}_0$, $\vec{w}$ を直角三角形とみなせば，命題の証明の中での等式は三平方の定理に他ならない．ユークリッド空間では良く知られていることだが，一般の計量線形空間でも成立する事実だ．

6. 直交補空間

計量線形空間 V とその部分空間 W について，W のすべてのベクトルと直交するベクトル全体の集合を $W^\perp$ と表し W の直交補空間と呼ぶ．$W^\perp$ は V の部分空間である（このことに言及するのを失念していました．次回補足します．）．これについて $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ が成り立つことを示した．すなわち和空間は直和 $W \oplus W^\perp$ である．ここまでは W が無限次元の場合も成り立っている．

W が有限次元の場合は，垂線の足を利用して $V = W \oplus W^\perp$ を示せる．講義で与えた証明はテキストに記述したものと同じである． 以上が命題 3.3 である．

今回の講義では，計量を利用して幾何学的考察を行った．ユークリッド空間では当たり前な事実ばかりだが，関数空間などの計量線形空間でも成り立つ事実ばかりである．直観はユークリッド空間で考えてよい．しかし議論は直観を排して行うのですべての計量線形空間に共通に成り立つ事項であることが分かる．

さて，来週は第 2 章の試験を行う．レポート課題は出さないので第 2 章で扱った事項をしっかり学習しておいてほしい．

線形数学講義メモ (12 月 18 日)

本日の講義の要点

1. グラム・シュミットの直交化

   1 年次で学習した事項だが，この授業の立場で説明しなおした．カギとなるのは前回解説した有限次元部分空間に下ろした垂線の足である．

   - 計量線形空間 V の 1 次ベクトルなベクトルの組 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ をとる．これを次の手続きで直交化する．
   - 一次独立性から $k \geqq 2$ について $\vec{a}_k \notin \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ である．そこで $\vec{a}_k$ から $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ に垂線を下しその足を $\vec{c}_k$ とおく．$\vec{c}_k \in \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ であり，$\vec{b}_k = \vec{a}_k - \vec{c}_k$ は $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ に直交する．
   - $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ とおけば $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ は互いに直交する $\vec{0}$ でないベクトルの組である．

   1 年次のやり方と違い, この考え方なら一斉に $\vec{b}_k$ を定められる．$\vec{b}_k \neq \vec{0}$ についても $\vec{a}_k \notin \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ から簡単に導かれる．

2. 直交化で得られるベクトルの組の性質

   $1 \leqq k \leqq n$ について命題 (C_k) を

   (C_k) $\quad \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \rangle = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle, \quad \vec{b}_j (1 \leqq j \leqq k)$ たちは互いに直交する $\vec{0}$ でないベクトルの組である

   と定める．これらの命題を帰納的に証明した．

   - (C_1) は $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 \neq \vec{0}$ より成立する．
   - (C_{k-1}) が成立したとする．$\vec{a}_k = \vec{b}_k + \vec{c}_k$ と $\vec{c}_k \in \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1} \right\rangle$ より $\vec{a}_k \in \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$ である．ゆえに
   $$\vec{a}_k \in \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$$
   - 一方 $\vec{b}_k = \vec{a}_k - \vec{c}_k$ と $\vec{c}_k \in \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle$ より
   $$\vec{b}_k \in \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \rangle$$
   以上 2 つの結果から (C_k) の前半の主張 $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \rangle = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$ を得る．
   - $\vec{b}_k$ は $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \rangle = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \right\rangle$ と直交するので $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1}$ の各ベクトルと直交する．(C_{k-1}) の後半の主張と合わせて，(C_k) の後半の主張を得る．

3. グラム・シュミットの直交化の表示

   垂線の足を求める連立方程式は，基底が直交系なら係数行列（内積の表現行列）簡単が対角行列になる．このことから垂線の足 $\vec{c}_k$ は $\langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle = \left\langle \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1} \right\rangle$ の基底 $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1}\}$ を使って簡単に求められる（p.27 12 行目）．この式が 1 年次のグラム・シュミットの直交化の式である．

   直交化してから正規化（ノルムで割って大きさ 1 にすること）すれば，直交するという関係は変わらないので正規直交系（互いに直交し大きさ 1 のベクトルの組）になる．

4. 関数での直交系の例

   例 10 を解説した．これらの関数の組が直交系であることは積分計算で簡単に分かる．なお，周期 2π の複素数値関数を，これらの直交系の 1 次結合で近似することは関数のフーリエ展開に他ならない．関数の世界の内積は実用的にも重要だ．

本日のレポート課題

問題 3.2 と問題 3.6 を課題にする．締め切りを言い忘れていたが 1 月 9 日 (金)16 時とする．

レポート課題 (12 月 18 日出題) の解答例とコメント

【問題 3.2 の解答例】

基底 $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ と $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ について基底の変換の行列を P, $\mathcal{B} = \mathcal{A}P$ とおく．$\vec{x}$ の $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ による座標をそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{X}$，$\vec{y}$ の $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ による座標をそれぞれ $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{Y}$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{y} = P\boldsymbol{Y}$$

が成り立つ．よって

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t(P\boldsymbol{X})A\overline{(P\boldsymbol{Y})} = {}^t\boldsymbol{X}\,{}^tPA\overline{P}\overline{\boldsymbol{Y}}$$

であり，この内積の $\mathcal{B}$ による表現行列は ${}^tPA\overline{P}$ である．

【別解】

基底の変換行列の定義から P の第 j 列を $\boldsymbol{p}_j$ とおけば $\vec{b}_j = \mathcal{A}\boldsymbol{p}_j$ である．これは $\vec{b}_j$ の $\mathcal{A}$ による座標が $\boldsymbol{p}_j$ であることに他ならない．よって $\mathcal{B}$ に関する表現行列の (i, j) 成分は

$$(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = {}^t\boldsymbol{p}_i A\overline{\boldsymbol{p}_j}$$

である．これは ${}^tPA\overline{P}$ の (i, j) 成分である．

【コメント】

- 内積の表現行列の定め方と，基底の変換の行列に関する知識を組み合わせればよい．やさしい問題だ．
- 基底の変換に伴う表現行列の変化が，線形変換の場合と内積の場合で異なっていることに注意してほしい．特に基底を正規直交基底にとれば表現行列は単位行列になる．グラム・シュミットの正規直交化法は有限次元計量線形空間において，内積の表現行列を単位行列にすることが可能であることを示している．

【問題 3.6 の解答例】

(1) は積分計算から $k + h$ が奇数の時は $(x^k, x^h) = 0$，偶数の時は $(x^k, x^h) = 2/(k + h + 1)$ である．よって $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ にグラム・シュミットの直交化を適用して得られた関数を $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ とおけば，$f_1 = 1$，$f_2 = x$ であり

$$f_3 = x^2 - \frac{(f_1, x^2)}{(f_1, f_1)}f_1 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad f_4 = x^3 - \frac{f_2, x^3}{(f_2, f_2)}f_2 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$f_5 = x^4 - \frac{(f_1, x^4)}{(f_1, f_1)}f_1 - \frac{(f_3, x^4)}{(f_3, f_3)}f_3 = x^4 - \frac{1}{5} - \frac{\frac{2}{7} - \frac{2}{15}}{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}(x^2 - \frac{1}{3}) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

(2) は $\left((x^2 - 1)^n\right)^{(k)}$ が $k < n$ のとき $(x - 1)(x + 1)$ を因数に持つことを利用して部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m)} dx &= \left[\left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m-1)}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n+1)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m-1)} dx \\ &= -\int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n+1)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m-1)} dx\end{aligned}$$

$n < m$ として $n + 1$ 回部分積分を繰り返すと $2n$ 次多項式を $2n + 1$ 回微分すれば 0 になるので

$$\int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m)} dx = (-1)^{m+1} \int_{-1}^1 \left((x^2 - 1)^n\right)^{(2n+1)} \left((x^2 - 1)^m\right)^{(m-n-1)} dx = 0$$

である．ゆえに $n < m$ の場合（従って n^neqm の場合）$(p_n, p_m) = 0$ である．$n = m$ の場合は n 回部分積分を繰り返して

$$\int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n)} dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^n\right)^{(2n)} \left((x^2-1)^n\right) dx = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx$$

を得る．これを $(x+1)^n$ を積分し，$(x-1)^n$ を微分する形で部分積分を n 回繰り返すと

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

これらの式と p_n の定義を組み合わせて

$$(p_n, p_n) = \frac{1}{(2^n n!)^2} (2n)! \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

(3) は $p_n(x)$, $0 \leqq n \leqq 4$ を具体的に計算するだけなので省略する．

【コメント】

- 計算は少し厄介だが 1 変数関数の微分積分の範囲の問題である．微分積分の演習問題といえよう．
- $p_n(x)$ は $2n$ 次多項式を n 回微分した関数なので n 次多項式である．$p_n(x)$ は $\left\langle 1, x, \ldots, x^{n-2} \right\rangle$ に直交する n 次多項式なのでグラム・シュミットの直交化法で得られる多項式の定数倍になるはずだ．(3) はそれを実際に確認してもらう趣旨だ．

線形数学講義メモ (1 月 15 日)

本日の講義の要点

1. ユニタリ変換，エルミート変換

　複素計量線形空間 V の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ について，ユニタリ変換，（歪）エルミート変換であることの定義を紹介した．実の場合の対応する変換は直交変換，(歪) 対称変換（歪対称変換は交代変換ともいう）という．定義は単純なので覚えやすいだろう．

   V が有限次元の時，T の正規直交基底による表現行列を A とすれば

   - T がユニタリ変換であることと $A^* = A^{-1}$ が成り立つことは同値である．このような A をユニタリ行列という．
   - T がエルミート変換であることと $A^* = A$ が成り立つことは同値である．このような A をエルミート行列という．
   - T が歪エルミート変換であることと $A^* = -A$ が成り立つことは同値である．このような A を歪エルミート行列という．

   ただし $A^* = {}^t\overline{A}$ であって A の随伴行列という．これらの事実の証明は正規直交基底を $\mathcal{P}$ とおいて

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}, \qquad \vec{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{x},\ T(\vec{x}) = \mathcal{P}(A\boldsymbol{x})$$

   であることを使えばよい．なお

$$「\ \forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y};\ {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}B\overline{\boldsymbol{y}}」\Longleftrightarrow A = B$$

   を使うが，この事実は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を基本列ベクトルにとってみればすぐ分かるはずだ．

   これらの概念を実で考えた時直交行列，対称行列，歪対称行列（交代行列）というが，これは 1 年次の線形代数で学習している．

2. ユニタリ変換，エルミート変換の固有値

　ユニタリ変換の固有値が絶対値 1 の複素数であることを証明した．テキストにも記述しているし簡単な証明なので自分で考えること．同様な方法でエルミート変換の固有値が実数であること，歪エルミート変換の固有値が 0 または純虚数であることが証明できるが，これはレポート課題にした．

　もう一つ，エルミート変換の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを証明した．この証明も易しい．なお，実対称行列の固有値が実数であること，異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することは 1 年次の線形代数で学習している．この事実がその拡張であることに注意すること．

3. エルミート変換の例

　V を p.25 例 8 の計量線形空間とし $T : V \longrightarrow V$ を $T(f) = if'$ で定めれば T は

$$(T(f), g) = \int_0^{2\pi} if'(x)\overline{g(x)}dx = i\left[f(x)g(x)\right]_0^{2\pi} - i\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

   において，第 1 項が f, g が周期 2π であることから 0 になっているからだ．

   実際固有値の条件 $T(f) = \alpha f$ は $f' = -i\alpha f$ という微分方程式なので $f(x) = Ce^{-i\alpha x}$ であるがこれが周期 2π であるためには α は整数でなくてはならない．すなわち固有値はすべて実数である．また固有関数[*1] e^{-ikx} であるが，これらが互いに直交することは例 10 で紹介した．

[*1] V の要素は関数なので固有ベクトルではなく固有関数というほうが良い．抽象的に考えるときはベクトルというが，具体例では例に応じて用語を使い分けること．

4. 随伴変換

随伴変換の概念を導入した．一般に随伴変換が存在するかどうかは分からないが，存在すれば唯一であることは証明できる（命題 3.5）．また有限次元の場合は表現行列の随伴行列を使って随伴変換を与えることができる．

エルミート変換は定義から随伴変換をもち $T^* = T$ を満たす変換として定義できる．同様に歪エルミート変換は $T^* = -T$ を満たす変換である．この事実を利用して問題 3.9 が示せるが，これはレポート課題にする．なお，ユニタリ変換が逆変換を持てば $T^{-1} = T^*$ である．

5. 正規行列

$A^*A = AA^*$ を満たす行列を正規行列という．ユニタリ行列，エルミート行列，歪エルミート行列はいずれも正規行列である．従って直交行列，対称行列，交代行列も正規行列である．3.4 節の目標は正規行列がユニタリ行列で対角化されること（定理 3.6）である．この節では n 次行列を扱っていることに注意せよ．

今回の講義では定理 3.6 の証明の準備として以下の事実を解説した．

- $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^*)^* = A$
- ユニタリ行列の積はユニタリ行列である．
- ユニタリ行列の直和行列はユニタリ行列である．
- A が正規行列で P がユニタリ行列なら $P^{-1}AP = P^*AP$ は正規行列である．（命題 3.7）

最初の事実は ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ と $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ を使えばよい．2 番目と 3 番目はユニタリであることと $P^{-1} = P^*$ であることが同値であることを使う．4 番目の事実の証明はテキストに与えている．

次回は定理 3.6 の証明を行う．1 年次で学習した対称行列の直交行列による対角化の証明と比較してみてほしい．

本日のレポート課題

問題 3.7 と問題 3.9 を課題にする．

レポート課題 (1 月 15 日出題) の解答例とコメント

【問題 3.7】

T をエルミート変換とし，α をその固有値とする．$T(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ とおく．

$$(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\alpha\vec{p}, \vec{p}) = \alpha(\vec{p}, \vec{p}) = (\vec{p}, T(\vec{p})) = (\vec{p}, \alpha\vec{p}) = \overline{\alpha}(\vec{p}, \vec{p})$$

と $\vec{p} \neq \vec{0}$ より $(\vec{p}, \vec{p}) > 0$ なので $\alpha = \overline{\alpha}$ を得る．ゆえに α の虚部は 0 であり，α は実数である．

同様に T を歪エルミート変換とすれば，$\alpha = -\overline{\alpha}$ を得る．α の実部は 0 なので α は純虚数または 0 である．

- $\alpha = \overline{\alpha}$ を満たす複素数が実数であることは基本事項だ．ただし $\alpha = -\overline{\alpha}$ から α は純虚数であるとしてはいけない．
- 実は T が歪エルミート変換なら iT はエルミート変換になる．iT の固有値は T の固有値の i 倍なので i 倍が実数になるのは純虚数または 0 ということになる．

【問題 3.9】

随伴変換の定義から

$$(T^*(\vec{y}), \vec{x}) = (\vec{y}, T(\vec{x}))$$

が成り立つが，これは T が T^* の随伴変換であることを意味している．ゆえに $(T^*)^* = T$ である．

S, T を V の線形変換で随伴変換を持つものとする．

$$((T+S)(\vec{x}), \vec{y}) = (T(\vec{x}) + S(\vec{x}), \vec{y}) = (T(\vec{x}), \vec{y}) + (S(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, T^*(\vec{y})) + (\vec{x}, S^*(\vec{y})) = (\vec{x}, (T^* + S^*)(\vec{y}))$$

より $(T+S)^* = T^* + S^*$ が成り立つ．以上から

$$(T+T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T, \qquad (T-T^*)^* = T^* - (T^*)^* = T^* - T = -(T-T^*)$$

であり $T + T^*$ はエルミート変換，$T - T^*$ は歪エルミート変換である．特に $T = \frac{1}{2}(T+T^*) + \frac{1}{2}(T-T^*)$ より，T はエルミート変換と歪エルミート変換の和として表せる．

ここで $T = S_1 + S_2$ かつ S_1 はエルミート変換，S_2 は歪エルミート変換とする．

$$T = \frac{1}{2}(T+T^*) + \frac{1}{2}(T-T^*) = S_1 + S_2 \qquad \frac{1}{2}(T+T^*) - S_1 = -\frac{1}{2}(T-T^*) + S_2$$

と表せば，左辺はエルミート変換，右辺は歪エルミート変換である．右式の両辺を S とおけば，S はエルミート変換かつ歪エルミート変換なの d

$$(S(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, S(\vec{y})) = -(\vec{x}, S(\vec{y}))$$

が成り立つ．よって $(\vec{x}, S(\vec{y})) = 0$ が常に成り立つ．ここで $\vec{x} = S(\vec{y})$ とおけば $S(\vec{y}) = \vec{0}$ を得るが $\vec{y}$ は任意なので $S = 0$ である．よって

$$S_1 = \frac{1}{2}(T+T^*), \qquad S_2 = \frac{1}{2}(T-T^*)$$

であり，表し方は一意的である．

【コメント】

- 解答例は随伴変換の基本性質を示すことによって証明を与えた．もっと直接的な方法としては

$$\begin{aligned}((T+T^*)(\vec{x}), \vec{y}) &= (T(\vec{x}), \vec{y}) + (T^*(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, T^*(\vec{y})) + \overline{(\vec{y}, T^*(\vec{x}))} = (\vec{x}, T^*(\vec{y})) + \overline{(T(\vec{y}), \vec{x})} \\ &= (\vec{x}, T^*(\vec{y})) + (\vec{x}, T(\vec{y})) = (\vec{x}, (T+T^*)(\vec{y}))\end{aligned}$$

  これによって $T + T^*$ がエルミート変換であることが分かる．

- 表示の一意性は直和と関係がある．線形変換全体の集合は和とスカラー倍が定義されており線形空間である．エルミート変換全体と歪エルミート変換全体はそれぞれその部分空間である．問題の主張はこの和空間が直和であることを示せばよい．すなわち共通部分が 0 元だけということを示せばよい．

  証明の中で，エルミート変換かつ歪エルミート変換なら 0 写像であることを示しているがこれはまさに直和であることの証明である．

線形数学講義メモ (1 月 22 日)

本日の講義の要点

1. 正規行列のユニタリ行列による対角化（定理 3.6）
   テキストと同じ方法で証明した．ここではテキストの記述について若干補足しておく．
   - ユニタリ行列の定義は $P^*P = E$ であるがこの複素共役をとって ${}^t P\overline{P} = E$ と書き直しておく．P を列ベクトルに分割すれば左辺の (i, j) 成分は ${}^t\boldsymbol{p}_i\overline{\boldsymbol{p}_j}$ となり，列ベクトルたちの内積になる．ユニタリ行列は正規直交基底の列ベクトルを並べた行列である．
     これから証明の最初の P を作るには $\boldsymbol{p}_1$ を第 1 ベクトルとする基底を作り（基底の延長），それにグラム・シュミットの正規直交化法を施して正規直交基底を作ればよい．
   - $b_j = 0$ を示す時に，A が正規行列であることを使っている．命題 3.7 を利用していることに注意せよ．
   - 帰納法の議論を進めるときにユニタリ行列の性質を使った．問題 3.10 にしているが前回の講義で証明を与えている．概略は前回の講義メモに記述しているので自分で証明を考えてみるように．
   - この定理から対称行列の直交行列による対角化を導きことができる．対称行列（エルミート行列）の固有値は実数なので固有ベクトルも実ベクトルに取れること，正規直交基底も実ベクトルから作れることによる．

   正規行列のユニタリ行列による対角化を具体的に行うのは困難だ．実数の範囲で行おうとすると対称行列の直交行列による対角化になってしまう．これは 1 年次の学習事項なのでこの講義では省略する．
2. エルミート形式
   内積の定義から正値性を取り除いたものをエルミート形式と呼ぶことにする．V が有限次元の場合には基底を取ることによって行列で表示することができる．基底の変換によって表現行列がどう変わるかについては内積の場合と変わらない．問題 3.2 の解答例（12 月 18 日のレポート課題）を参考にしてほしい．
   表現行列の標準化については本質的に 2 段階に分けて行う．
   - 表現行列 A はエルミート行列なのでユニタリ行列で対角化できる．A を対角化するユニタリ行列を $\overline{P}$ とおき，P で変換した基底による表現行列を作れば対角行列になる．
   - エルミート行列の固有値はすべて実数なので実対角行列 Q を p.32 の 7 行目に従って作る．Q で基底を変換すれば標準形になる．

   標準化された表現行列を与える基底は
   $$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq i = j \leqq p \\ -1 & p+1 \leqq i = j \leqq p+q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
   という条件を満たす．内積の場合は正規直交基底に他ならない．
3. シルベスターの慣性法則
   エルミート形式の表現行列の固有値（すべて実数）は基底の取り方によって変わり得る．しかし，正固有値の個数，負固有値の個数，したがって 0 固有値の個数は基底の取り方によらず定まる．それが定理 3.8 の主張である．
   証明はテキストと同様な形で与えた．テキストの記述は簡略に過ぎるので補足しておこう．

- $p+q$ は A の階数に等しいので表現行列の取り方によらない．正則行列を右から（左から）かけても階数は変わらないからだ．
- 表現行列が $E_p \oplus E_q \oplus O_r$ となる基底 $\mathcal{P}$ と $E_s \oplus E_t \oplus O_r$ となる基底 Q を考える．$p > s$ と仮定して矛盾を導く．
- $\vec{v}$ の取り方は生成する空間の次元を考察することによる．ここはテキストに記述してある．
- $\vec{v} \in \left\langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_p \right\rangle$ から
$$(\vec{v}, \vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i \vec{p}_i, \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{p}_j \right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \overline{x_j}$$
であり，$\vec{v} \neq \vec{0}$ から $x_j \neq 0$ なる j があるのでこの値は正である．
- $\vec{v} \in \langle \vec{q}_{s+1}, \ldots, \vec{q}_n \rangle$ から
$$(\vec{v}, \vec{v}) = \left(\sum_{i=s+1}^{n} y_i \vec{q}_i, \sum_{j=s+1}^{n} y_j \vec{q}_j \right) = -\sum_{j=s+1}^{s+t} y_j \overline{y_j}$$
なのでこの値は 0 以下である．これは矛盾である．

$p = n, q = r = 0$ のとき正定値エルミート形式と呼ぶ．これは内積に他ならない．$q = 0$ のときは半正定値という．また $r = 0$ のとき非退化という．これらの概念については次回補足する．

本日のレポート課題

問題 3.12 を課題にする．加えて講義では次の問題を出した．

問題 1　計量線形空間の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ が随伴変換 T^* を持つとき $T \circ T^*$ はエルミート変換であることを示せ．また $T \circ T^*$ の固有値は 0 以上であることを示せ．

この主張は $T^* \circ T$ についても成立している．証明も全く同じなのでどちらを証明しても構わない．もう一つ，次の問題を補足しておく．正規行列がユニタリ行列で対角化できることを利用すれば簡単だ．

問題 2　正規行列 A の固有値がすべて絶対値 1 の複素数なら A はユニタリ行列であることを示せ．

以上 3 問を課題にする．提出締め切りは 1 月 27 日 10 時半としておきます．

レポート課題 (1 月 22 日出題) の解答例とコメント

【問題 3.12 の解答例】

エルミート形式の条件を一つずつチェックすればよい．

- $(\vec{v}, \vec{w})_T = (\vec{v}, T(\vec{w})) = \overline{(T(\vec{w}), \vec{v})} = \overline{(\vec{w}, T(\vec{v}))} = \overline{(\vec{w}, \vec{v})_T}$
- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w})_T = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, T(\vec{w})) = (\vec{v}_1, T(\vec{w})) + (\vec{v}_2, T(\vec{w})) = (\vec{v}_1, \vec{w})_T + (\vec{v}_2, \vec{w})_T$
- $(\alpha\vec{v}, \vec{w})_T = (\alpha\vec{v}, T(\vec{w})) = \alpha(\vec{v}, T(\vec{w})) = \alpha(\vec{v}, \vec{w})_T$

【コメント】

- エルミート形式の定義とエルミート変換の定義を組み合わせるだけなのでこの問題は迷いなく解けるようになってほしい．

【問題 1】　計量線形空間の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ が随伴変換 T^* を持つとき $T \circ T^*$ はエルミート変換であることを示せ．また $T \circ T^*$ の固有値は 0 以上であることを示せ．

【解答例】随伴変換の定義から $(T(\vec{v}), \vec{w}) = (\vec{v}, T^*(\vec{w}))$ が成り立つ．両辺の右と左を入れ替えれば複素共役になるのでやはり等しく $(T^*(\vec{w}), \vec{v}) = (\vec{w}, T(\vec{v}))$ が成り立つ．ゆえに

$$(T \circ T^*(\vec{v}), \vec{w}) = (T^*(\vec{v}), T^*(\vec{w}) = (\vec{v}, T \circ T^*(\vec{w}))$$

となるので $T \circ T^*$ はエルミート変換である．

α を $T \circ T^*$ の固有値，$\vec{v}$ を固有ベクトルとする．

$$\alpha(\vec{v}, \vec{v}) = (T \circ T^*(\vec{v}), \vec{v}) = (T^*(\vec{v}), T^*(\vec{v})) \geqq 0$$

と $\vec{v} \neq \vec{0}$ より $\alpha \geqq 0$ を得る．

【コメント】

- 一般に随伴変換を持つ線形変換について $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ が成り立つ．これは簡単なので証明してみると良い．この結果を使えば $(T \circ T^*)^* = (T^*)^* \circ T^* = T \circ T^*$ という形で主張が示せる．

【問題 2】　正規行列 A の固有値がすべて絶対値 1 の複素数なら A はユニタリ行列であることを示せ．

【解答例】A を対角化するユニタリ行列を P とし

$$P^{-1}AP = P^*AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad A = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}P^*$$

とおく．仮定より α_j の絶対値は 1 なので ${\alpha_j}^{-1} = \overline{\alpha_j}$ である．ゆえに

$$A^* = \left(P\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}P^*\right)^* = P\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}P^* = A^{-1}$$

となるので A はユニタリ行列である．

【コメント】

- 正規行列がユニタリ行列で対角化できることを使った．同様な議論で，固有値がすべて実数の正規行列はエルミート行列であることが示せる．考えてみると良い．

線形数学講義メモ (1 月 29 日)

本日の講義の要点

1. 正定値，半正定値，不定値，非退化

   これらの概念はエルミート形式の性質として無限次元の場合も含めて定義できる．一方，有限次元の場合は符号数とナリティーの条件として理解できる．非退化を除いて，2 つの定義の同値性は標準形を考えれば簡単に理解できる．

   一方ナリティーは表現行列の 0 固有値の重複度なので，非退化とは表現行列が正則だということに他ならない．非退化の
   $$\forall\vec{x} \neq \vec{0};\ \exists\vec{y};\ (\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$$
   という主張は表現行列と座標を使えば
   $$\forall\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0};\ \exists\boldsymbol{y};\ {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{y}} \neq 0$$
   となるが，A が正則なら ${}^t\boldsymbol{x}A \neq \boldsymbol{0}$ なのでこれを満たす $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y} = {}^t\!A\boldsymbol{x}$ とでも置けばよい．

2. $T \circ T^*$ が固有値 0 以上のエルミート変換であること

   前回のレポート課題として，証明は解答例として記述してある．T が随伴変換を持てば，T^* も随伴変換を持ち $(T^*)^* = T$ が成り立つことを使う．ここで随伴変換が存在すれば一通りであることを使っている．

3. 正規行列がユニタリ行列で対角化できることの応用

   A を正規行列としユニタリ行列 P で対角化されているとせよ．この時次が成り立つ．
   - A がエルミート行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値はすべて実数
   - A がユニタリ行列 $\Longleftrightarrow$ A の固有値の絶対値はすべて 1

   証明は A がエルミート (ユニタリ) であることと $P^{-1}AP = P^*AP$ がエルミート (ユニタリ) であることとの同値性，対角行列がエルミート (ユニタリ) であるための対角成分の条件を組み合わせればよい．

   なお，ユニタリ行列で対角化されることから正規行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することが分かる．ただしこの事実を正規行列の定義から直接証明することは難しい．興味があれば考えてみると良い．

今回の授業でこの講義は試験を残すのみになった．君たちにとっては難しく感じた部分も多かったかもしれないが，数学の論理の展開になれれば決して難しいものではないことに気付くはずだ．数学コースに進学する人は線形数学と実数と論理で扱った議論を，新年度が始まるまでにじっくり考えてみてほしい．単位は取れたが今一つ良くわからないという状況を放置すると，3 年次以降ますます大変になってしまう．

「線形数学」第 1 回試験（11 月 6 日実施）の解答例とコメント

採点をして，用語や記号の意味といったそもそもの出発点から理解していない人が多いことを実感した．単語の意味どころか，使っている文字が何を表しているかにも何の関心もないまま講義を受けているとしか思えない．しかし単語の意味や文字の感覚は難しいことではない．覚え，自分で使えば自ずとわかることだ．もっと言葉の意味や記号の意味を考えるようにしてほしい．そういう習慣なしに数学が分かるはずはない．

問 1　実線形空間 V とその n 個のベクトルの組 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ について，$\Phi_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ を $\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \sum_j x_j \vec{p}_j$ で定める．$\mathcal{P}$ が一次独立であることと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が単射であることは同値であることを示せ．また $\mathcal{P}$ が V を生成することと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることは同値であることを示せ．

【解答例】(1) $\mathcal{P}$ が 1 次独立であると仮定し，$\Phi_{\mathcal{P}}$ が単射であることを示す．

$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の成分を使って

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{p}_j$$

と表せる．左辺から右辺を引いたものは $\vec{0}$ になるので

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{p}_j - \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \vec{p}_j = \vec{0}$$

を得る．1 次独立の仮定から $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_n - y_n = 0$ であり，すべての j について $x_j = y_j$ である．ゆえに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となり $\Phi_{\mathcal{P}}$ は単射である．

(2) $\Phi_{\mathcal{P}}$ が単射であることを仮定し，$\mathcal{P}$ が 1 次独立であることを示す．

$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + \cdots + c_n\vec{p}_n = \vec{0}$ が成り立つと仮定する．これは $\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{c}) = \vec{0}$ と書き表せる．$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{0}) = 0\vec{p}_1 + 0\vec{p}_2 + \cdots + 0\vec{p}_n = \vec{0}$ なので $\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{c}) = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{0})$ であり，単射の仮定から $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ を得る．すなわち $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ であり $\mathcal{P}$ は 1 次独立である．

(3) $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることと，$\mathcal{P}$ が V を生成することの同値性を示す．

$\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であるとは，任意の $\vec{v} \in V$ について $\vec{v} = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを言う．すなわち $\vec{v} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が存在することを言う．これは $\mathcal{P}$ が V を生成していることに他ならない．

【コメント】

- この問題の記号は講義で何回も使っている．試験の直前の講義でも利用した．普通に勉強していれば意味が分からないはずはないと思うのだが．さて，記号の意味を整理しておく．この解答例を考える前にこれらをきちんと理解しておくこと．
  - $\vec{p}_j$ は線形空間 V の要素（ベクトル）である．ベクトルとは具体的に何かについては，どんな線形空間かが指定されていないので考える必要はない．というより考えてはならない．例えば，列ベクトルとしてしまったら，特殊な場合にのみ考えたことになり，正解とは言えなくなる．
  - $\mathcal{P}$ は V のベクトルの組である．計算においては V の要素（ベクトル）を成分とする行ベクトルとみなす．
  - $\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^n$ の要素，すなわち n 項列ベクトルである．
  - x_j は $\boldsymbol{x}$ の成分であり実数（スカラー）である．

$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n$ と書きながら $\Phi_{\mathcal{P}}(x_1)$ と書いてしまうひとは，$\Phi_{\mathcal{P}}$ が $\mathbb{R}^n$ からの写像であることを認識していないことになる．

- 単射の意味が分かっていない人がいる．「$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{y})$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$」が成り立つことだが，「$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{y}) = \vec{0}$ ならば」としてしまう人が散見する．「$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \vec{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」というのは線形写像なので間違いではないが，この章の試験問題の解答としては問題だ．
- 単射から 1 次独立性を導くのに，$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{y})$ から議論を始める答案が目につく．証明は結論を導くのに仮定をどう使うべきかを考えるのが基本だ．このように仮定から議論を始めてしまうと，論理が分かりづらくなる．上の解答例と比較してほしい．
- $\sharp V$ という記号を使う人がいる．これは通常集合の要素の数を表すが，どういう意味で使っているのだろうか．確かに $f : A \longrightarrow B$ が単射であれば $\sharp A \leqq \sharp B$ だが，それは有限集合の間の写像の場合だ．線形空間は $\{\vec{0}\}$ の場合を除いて無限集合なのでここでは意味を持たない．状況を考えずにただ何となく議論するという習慣から，こんなばかげた記述を平気でするようになるのではないか．
- $\mathcal{P}$ が V を生成することを $V = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n \rangle$ とするのは正しいが，この右辺の記号の意味が分からなければ何にもならない．記号を書いて覚えた気にならないこと．
- 解答例は 3 つの部分に分けて記述した．採点ではそれぞれを 5 点とし 15 点満点で採点した．平均点は 3.31 点だった．

問 2　線形空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 について $W_1 + W_2$ の定義を述べよ．またそれが V の部分空間であることを示せ．さらに W_1, W_2 がともに有限次元であるとき次が成り立つことを示せ．

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

【解答例】 (1) 和空間 $W_1 + W_2$ とは

$$\vec{v} \in W_1 + W_2 \Longleftrightarrow \exists \vec{x} \in W_1,\ \exists \vec{y} \in W_2 \text{ s.t. } \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$$

で定義される集合である．これは次のように簡単に表しても構わない．

$$W_1 + W_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \mid \vec{x}_1 \in W_1,\ \vec{x}_2 \in W_2\}$$

(2) 和空間が部分空間であることを示す．

$\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ より $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in W_1 + W_2$ である．ここで $W_1 + W_2$ から 2 つの要素 $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{y}_1 + \vec{y}_2$ をとる．ただし $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$ は W_1 の要素，$\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$ は W_2 の要素である．これらの 1 次結合を

$$a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + b(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = (a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1) + (a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2)$$

のように整理すれば，第 1 項は W_1 が部分空間であることから W_1 の要素，第 2 項は W_2 が部分空間であることから W_2 の要素である．ゆえに右辺は $W_1 + W_2$ の要素であり，和空間は部分空間である．

(3) 次元についての等式を示す．

$W_1 \cap W_2$ の基底 $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_l\}$ をとり，それを延長する形で W_1 の基底 $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_l, \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m\}$ と W_2 の基底 $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_l, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n\}$ をとる．ここで基底を構成するベクトルの個数から

$$\dim W_1 \cap W_2 = l, \quad \dim W_1 = l + m, \quad \dim W_2 = l + n$$

である．ゆえに $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_m,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n\}$ が W_1+W_2 の基底であることが言えれば，$\dim W_1+W_2=l+m+n$ となるので，結論を得る．

(3-1) W_1+W_2 を生成すること

W_1+W_2 の要素は W_1 の要素 $\vec{x}_1$ と W_2 の要素 $\vec{x}_2$ の和である．$\vec{x}_1$ は $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_m\}$ の 1 次結合と入して表せる．また $\vec{x}_2$ は $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n\}$ の 1 次結合で表せる．これから $\vec{x}1+\vec{x}_2\in W_1+W_2$ は $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_m,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n\}$ の 1 次結合で表せる．すなわち $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_m,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n\}$ は W_1+W_2 を生成する．

(3-2) 1 次独立であること

これらのベクトルの 1 次結合が $\vec{0}$ になると仮定する．すなわち

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\vec{p}_i+\sum_{j=1}^{m}b_j\vec{q}_j+\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{r}_k=\vec{0}$$

と仮定する．第 3 項を右辺に移項すれば

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\vec{p}_i+\sum_{j=1}^{m}b_j\vec{q}_j=-\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{r}_k$$

であるが，左辺は W_1 の要素，右辺は W_2 の要素なので，左辺の表すベクトル $\vec{v}$ は $W_1\cap W_2$ の要素であり，$\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l\}$ の 1 次結合で表せる．

$$\vec{v}=-\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{r}_k=\sum_{i=1}^{l}d_i\vec{p}_i$$

より

$$\sum_{i}d_i\vec{p}_i+\sum_{k}\vec{r}_k=\vec{0}$$

を得る．$\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n\}$ は W_2 の基底なので 1 次独立であり，この式の係数はすべて 0 である．特に $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ である．ゆえに

$$\sum_{i=1}^{l}a_i\vec{p}_i+\sum_{j=1}^{m}b_j\vec{q}_j=-\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{r}_k=\vec{0}$$

であり $\{\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_l,\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_m\}$ が基底であることから a_i, b_j たちもすべて 0 になる．よってすべての係数が 0 になるので 1 次独立である．

【コメント】

- 和空間の定義を書けない人の多さ（8 割）に唖然とした．数学の学習でまず定義を確認するという習慣がないせいだが，このような高校までの数学の勉強の癖を早く脱してほしい．
- 定義が書けないのに部分空間であることの証明はそれらしく記述している人がいる．本来なら定義が書けない以上間違いと扱うべきだろうが，本当は分かっているが表現できなかっただけと解釈し，採点した．なお
$$(a\vec{x}_1+b\vec{y}_1)+(a\vec{x}_2+b\vec{y}_2)=a(\vec{x}_1+\vec{x}_2)+b(\vec{y}_1+\vec{y}_2)\in W_1+W_2$$
という記述が多いのに驚いた．これでは論理の流れが崩れてしまう．部分空間であることを示すには $a(\vec{x}_1+\vec{x}_2)+b(\vec{y}_1+\vec{y}_2)\in W_1+W_2$ をいうことが必要だが，この式を $(a\vec{x}_1+b\vec{y}_1)+(a\vec{x}_2+b\vec{y}_2)$ と整理することにより W_1+W_2 の要素であることを示している．間違いとまでは言えないが感心しない．

- (3) の部分の証明では，$W_1 \cap W_2$ の基底をまずとり，それを延長して W_1, W_2 の基底を作る．その記述は不可欠であり，なんとなく上のような記述があったとしても正解にはならない．
- 解答例の (1)(2)(3) に対応する部分に，3 点，7 点，10 点を配点した．計 20 点満点で平均点は 4.58 点だった．

問 3 1 変数関数のなす線形空間において，次が 1 次独立か否か答えよ．

$$(1)\ \{1,\ \cos x,\ \cos(2x)\} \qquad (2)\ \{1,\ \cos^2 x,\ \cos(2x)\}$$

【解答例】(1) $a + b\cos x + c\cos(2x) = 0$ が成り立つとする．$x = 0, \pi/2, \pi$ を代入すれば順に

$$a + b + c = 0, \quad a - c = 0, \quad a - b + c = 0$$

を得る．これより $a = b = c = 0$ となるので 1 次独立である．
(2) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ より $1 + (-2)\cos^2 x + \cos(2x) = 0$ である．これより $\{1, \cos^2 x, \cos(2x)\}$ は 1 次独立ではない．
【コメント】

- (1) は 1 次結合を $\cos x$ の多項式 $(a - c) + b\cos x + 2c\cos^2 x = 0$ と整理して $a - c = b = 2c = 0$ としても良い．2 次方程式は高々 2 個の解しか持たないので，これがすべての $\cos x$ の値に成り立つには 0 でなくてはならないからだ．
- (2) は 1 次結合が 0 になるような例を具体的に与えるのが望ましい．$a + b\cos^2 x + c\cos(2x) = (a - c) + (b + 2c)\cos^2 x = 0$ として $a - c = b + 2c = 0$ の時に成り立つから 1 次従属とするのも間違いではないが，反例（1 次独立であることの反例）はできる限り具体的に与えるのが基本である．
- 1 次独立であることを示すには，いくつかの値を代入して（上の場合は a, b, c の）連立方程式を作り，解が 0 しかないことを示せばよい．しかし，1 次従属であることを示すのに，いくつかの値を代入して 0 以外の解があると主張しても不十分だ．例えば (2) で，$a + b\cos^2 x + c\cos(2x) = 0$ に $x = 0, \pi/2, \pi$ を代入して $a + b + c = 0$, $a - c = 0$, $a + b + c = 0$ とすれば $(a, b, c) = (t, -2t, t)$ という解を持つが，これだけでは 1 次従属とは言えない．$(a, b, c) = (t, -2t, t)$ のとき $x = 0, \pi/2, \pi$ では $a + b\cos^2 x + c\cos(2x) = 0$ が成り立つことは示しているが，すべての x について成り立つことは述べられていない．
- (1)(2) にそれぞれ 5 点配点した．平均点は 6.42 点だった．

45 点満点で平均点は 14.31 点だった．残念な結果である．問 3 は問題 1.4 の類題だし，和空間の定義やそれが部分空間であることも難しくはない．合格点は 15 点とする．平均点を上回ってはいるが，冒頭に述べたように基本的な事項を理解しないまま受験した結果なので受け入れてほしい．なお，満点の一人を含め，40 点以上の人が 3 人いる．難しすぎる問題を出しているわけではないことを理解するように．

毎回レポートを提出しているのに合格点に達しなかったという人が数人いる．おそらく数学の考え方，勉強の仕方に問題があるのだと思う．何が問題かは個別に話さないと伝えられない．一度答案と返却されたレポート課題を持参して面談を受けてほしい．

「線形数学」第 2 回試験（12 月 18 日実施）の解答例とコメント

各問 10 点，計 40 点満点で採点した．平均点は 17.79 点で前回を 3.5 点上回った．特筆すべきは満点が 5 人いたこと，35 点以上も 8 人おり授業内容の理解が進みつつあると感じた．一方で 0 点が 3 人，9 点未満が 16 人である．学習方法の見直しが必要だろう．合格点は 15 点とする．不合格者（14 点以下の者）は 29 人だった．

問 1　2 つの線形空間の間の線形写像 $f : V \longrightarrow W$ と W の部分空間 W_1 について $f^{-1}(W_1) = \left\{\vec{v} \mid f(\vec{v}) \in W_1\right\}$ は V の部分空間であることを示せ．

【解答を考えるための準備】

線形写像，部分空間および逆像の定義を確認すること．なお逆像の定義は問題文に記述されているが

$$\vec{v} \in f^{-1}(W_1) \Longleftrightarrow f(\vec{v}) \in W_1$$

という読み替えができなくてはいけない．この同値性は意味を考えれば当たり前のことだが，形式的な式の処理ばかりにとらわれていると混乱する可能性がある．さて，解答例を記述しよう．

【解答例】

線形写像の性質から $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in W_1$ なので $\vec{0}_V \in f^{-1}(W_1)$ である．特に $f^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ である．

$f^{-1}(W_1)$ の 2 つの要素 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ をとる．逆像の定義から $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)$ はともに W_1 の要素である．W_1 は部分空間なので，$\alpha, \beta \in K$ について

$$f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) \in W_1$$

であり $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ を得る．ゆえに $f^{-1}(W_1)$ は V の部分空間である．

【コメント】

- 部分空間をであることを示せとしているのに部分集合であることを示している答案がある．部分空間の定義を忘れてしまったためと思われるが，章が変わったからといって前の章で学んだ事項を忘れていいわけではない．基本的な定義は確実に覚えておくこと．
- 逆像 $f^{-1}(W_1)$ は逆写像の像というわけではない．問題では f^{-1} の存在は仮定されていないので，f^{-1} が存在すると考えた人は間違いだ．特に $\vec{v} \in f^{-1}(W_1)$ について $\vec{v} = f^{-1}(\vec{w})$ となる $\vec{w} \in W_1$ が存在するとしたら間違いだ．逆像の定義から $f(\vec{v}) \in W_1$ なのだから $\vec{w} = f(\vec{v}) \in W_1$ と置けばよい．
- 0 点 39 人，満点 14 人，平均点は 2.97 点だった．

問 2　線形変換 $f : V \longrightarrow V$ が $f^2 - 5f + 6I = 0$ を満たすとき f の固有値を求めよ．また V は f の固有空間の直和になることを示せ．ただし f は恒等変換のスカラー倍ではないとする．

【解答例】

$\vec{v} \in V$ について $(f^2 - 5f + 6I)(\vec{v}) = f(f(\vec{v})) - 5f(\vec{v}) + 6\vec{v} = 0(\vec{v}) = \vec{0}$ である．これを

$$f\left(f(\vec{v}) - 2\vec{v}\right) - 3(f(\vec{v}) - 2\vec{v}) = (f - 3I)\left(f(\vec{v}) - 2\vec{v}\right) = \vec{0}$$

と書き直せば $f(\vec{v}) - 2\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f - 3I)$ を得る．また

$$f\left(f(\vec{v}) - 3\vec{v}\right) - 2(f(\vec{v}) - 3\vec{v}) = (f - 2I)\left(f(\vec{v}) - 3\vec{v}\right) = \vec{0}$$

と書き直せば $f(\vec{v}) - 3\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f-2I)$ を得る．よって

$$\vec{v} = (f(\vec{v}) - 2\vec{v}) + (3\vec{v} - f(\vec{v})) \in \mathrm{Ker}(f-3I) + \mathrm{Ker}(f-2I)$$

であり，$V = \mathrm{Ker}(f-3I) + \mathrm{Ker}(f-2I)$ を得る．ここで f が恒等変換のスカラー倍ではないので $f-3I \neq 0$ であり $\mathrm{Ker}(f-3I) \subsetneqq V$ である．ゆえに $\mathrm{Ker}(f-2I) \neq \{\vec{0}\}$ であり 2 は f の固有値である．また $f-2I \neq 0$ から同様な議論で 3 は f の固有値である．よって固有空間 $V(2) = \mathrm{Ker}(f-2I)$, $V(3) = \mathrm{Ker}(f-3I)$ を使って

$$V = V(2) + V(3)$$

を得るが $V(2) \cap V(3) = \{\vec{0}\}$ よりこれは直和である．

【解答例：固有値が 2 と 3 であることの素朴な証明】

α を f の固有値，$\vec{p}$ を f の固有値 α に対する固有ベクトルとする．

$$(f^2 - 5f + 6I)(\vec{p}) = (\alpha^2 - 5\alpha + 6)\vec{p} = \vec{0}$$

と $\vec{p} \neq \vec{0}$ より $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ である．ゆえに固有値は 2 または 3 である．ここで 2 が固有値でなかったとすると $f^2 - 5f + 6I = (f-2I) \circ (f-3I) = 0$ より

$$\mathrm{Im}(f-3I) \subset \mathrm{Ker}(f-2I) = \{\vec{0}\}$$

となり，$f - 3I = 0$ を得る．これは f が恒等変換のスカラー倍でないことに矛盾する．よって 2 は固有値である．同様に 3 も固有値である．

【解答例：次元を使った証明】

$(f-3I) \circ (f-2I) = 0$ より $\mathrm{Im}(f-2I) \subset \mathrm{Ker}(f-3I)$ である．ゆえに

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f-2I) + \dim \mathrm{Im}(f-2I) \leqq \dim \mathrm{Ker}(f-2I) + \dim \mathrm{Ker}(f-3I) = \dim V(2) + \dim V(3)$$

固有空間の和空間は直和なので

$$\dim V = \dim V(2) + \dim V(3) = \dim V(2) \oplus \dim V(3) \leqq \dim V$$

ゆえに $\dim V = \dim V(2) \oplus \dim V(3)$ が成り立ち，$V = V(2) \oplus V(3)$ となる．

【コメント】

- 次元を使った証明は厳密には間違いだが正解として扱った．ただし次元を使わない証明も考えてほしい．線形代数の定理には有限次元では成り立つが無限次元では一般には成り立たないということがしばしばある．ここで示された問題は次元を使わずに証明できるので無限次元でも成り立っている．
- 固有値が 2 か 3 であることは簡単に示せる．しかし，それが実際に固有値になっていることを示すのは難しい．多くの人が実際に固有値になっているか調べようとしていないし，調べた人も正しい議論は行えなかった．結局この議論での減点は行わなかった．
- $f^2 - 5f + 6I = (f-2I)(f-3I) = 0$ より固有値は 2 または 3 という答案があるが，これは間違いとした．きちんと固有ベクトルをとって議論すべきである．なお，2 次方程式がきちんと解けない人が数人いた．驚きを禁じ得ない．
- $\mathrm{Im}(f-2I) \subset \mathrm{Ker}(f-3I)$ は $(f-3I) \circ (f-2I) = 0$ から導かれる．この記述のない答案や，順序が逆になっている答案は減点した．

- 集合，写像，ベクトルが議論の対象になるが，$\in =$ の記号をでたらめに使う人が目につく．集合とベクトルを $=$ で結んではいけないし，写像と集合の関係に $\in$ を使ってはいけない．このようなミスは，数式を意味のある文章として捉えていないためだ．不注意では済まされない．
- 0 点 20 人，満点 19 人，平均点は 4.73 点だった．

問 3　2 つの線形変換 $f : V \longrightarrow V$ と $g : V \longrightarrow V$ が $f \circ g = g \circ f$ を満たすとする．W が f の不変部分空間のとき，$g(W)$ も f で不変なことを示せ．

【解答を考えるための準備】

線形変換と合成写像の定義は大丈夫だと思う．W が f の不変部分空間（f で不変ともいう）の定義は $f(W) \subset W$ であるが，集合による定義は論理では使いづらい．これを

$$\vec{w} \in W \Longrightarrow f(\vec{w}) \in W$$

と書き換えて要素による条件に記述しなおす必要がある．W の要素の移った先が，やはり W に属しているという意味だ．上の集合による定義と同じことを言っていることにを理解せよ．

【解答例】

$\vec{v} \in g(W)$ をとる．$\vec{v} = g(\vec{w})$ を満たす W の要素 $\vec{w} \in W$ が存在する．

$$f(\vec{v}) = f(g(\vec{w})) = g(f(\vec{w}))$$

であるが W が f で不変なことから $f(\vec{w}) \in W$ である．ゆえに $g(f(\vec{w})) \in g(W)$ であり $f(\vec{v}) \in g(W)$ を得る．結局 $\vec{v} \in g(W)$ から $f(\vec{v}) \in g(W)$ が導かれたので $g(W)$ は f で不変である．

【解答例：集合だけを使う】

$f(W) \subset W$ より $g(f(W)) \subset g(W)$ である．$g(f(W)) = g \circ f(W) = f \circ g(W) = f(g(W))$ なので $f(g(W)) \subset g(W)$ を得る．よって $g(W)$ は f で不変である．

【コメント】

- 集合だけを使った解答は簡明ではあるがこのような証明ばかりに頼っていると思わぬ落とし穴に陥る．少なくとも $g \circ f(W) = g(f(W))$ について単に当たり前と思うのではなく明確な証明を付けられるようになってほしい．
- 解答例のように講義ではしばしば W の要素を $\vec{w}$ と表している．これによってどの集合の要素なのか分かりやすくしているつもりだ．しかし答案では w と書く人がおり，要素 $\vec{w}$ のつもりなのか集合 W のつもりなのか良くわからない．注意せよ．
- 0 点 29 人，満点 22 人，平均点は 4.34 点だった．

問 4 次の行列をジョルダンの標準形にせよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

【解答例】

固有多項式は

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 3 & x+5 & -1 \\ -6 & -2 & x+6 \end{vmatrix} = (x+4)^3$$

なので固有値は -4 のみでありその重複度は 3 である．固有空間 $V(-4)$ は

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $A + 4E$ の階数が 1 なので $\dim V(-4) = 2$ である．よって固有値 -4 に対するジョルダン細胞は 2 つであり，ジョルダンの標準形は

$$J(-4,2) \oplus J(-4,1) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

である．

ジョルダンの標準形にする行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とおけば $AP = P(J(-4,2) \oplus J(-4,1))$ より

$$A\boldsymbol{p}_1 = -4\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = -4\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_3 = -4\boldsymbol{p}_3,$$

でなくてはならない．$(A+4E)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0}$ から $\boldsymbol{p}_2$ として第 2 基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ をとってみる．すると $\boldsymbol{p}_1 = (A+4E)\boldsymbol{p}_2$ は $A + 4E$ の第 2 列である．この第 2 列と合わせて $V(-4)$ の基底を構成するようにベクトル $\boldsymbol{p}_3$ をとる．ここでは $\boldsymbol{p}_3 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置くことにする．以上からジョルダンの標準形を与える行列の例として次を得る．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【コメント】

- 固有値を求めるのに $|xE + A| = 0$ を解く人がいた．1 年次の線形代数のころからの基本事項なのでうっかりしたでは済まされない．
- ジョルダンの標準形の決定までは多くの人ができていた．なお，$V(-4)$ の次元を求めるのに基底を求めてやる人がいるが，固有空間は同次連立 1 次方程式の解空間なので階数を求めるだけで良い．
- P の列ベクトルの間の関係式を表示できる人はそれなりにいるが，それを P の決定に生かせない人がいた．$\boldsymbol{p}_1 = (A+4E)\boldsymbol{p}_2$ となっていないもの，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_3$ が 1 次独立になっていないものなどの間違いがあった．
- 0 点 5 人，満点 13 人，平均点は 5.76 点だった．

2 回の試験を終えたが 2 回とも合格したもの 19 人，第 1 回のみ合格した者 5 人（うち 1 人は 2 回目の試験を受けずていない），第 2 回のみ合格した者 15 人，2 回とも試験を受けたがまだ合格できていない者 24 人となった．24 人の人は第 3 回の試験に合格しない限り再試験の受験資格を失う．すでに第 3 章も 2 節まで解説を終えたが，きちんと復習しておくように．

「線形数学」第3回試験（2月5日実施）の解答例とコメント

各問 10 点，計 40 点満点で採点した．最高は 40 点，最低は 0 点平均点は 19.14 点だった．合格点は 15 点とし，41 人が合格した．これにより第 3 回試験の受験者 59 人のうち

- 3 回とも合格した者　19 人
- 第 1 回試験のみ不合格だった者　13 人
- 第 1 回と第 2 回が不合格だった者　9 人
- 第 1 回と第 3 回が不合格だった者　2 人
- 第 2 回と第 3 回が不合格だった者　3 人
- 3 回とも不合格だった者　13 人

だった．結局再試験対象者は 27 人である．再試験は 2 月 19 日の第 5 時限に行うので該当者は忘れないように．これが単位取得のための最後の機会である．

問 1　V を n 次複素正方行列全体の集合とする．$A, B \in V$ について $(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{B})$ は V 上の内積を定めることを示せ．ただし $\mathrm{Tr}(A)$ とは A のトレースとよばれ，A の対角成分の和を表す．また $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ は証明せずに使ってよい．

【解答例】

トレースについては 1 年次のテキストの 18 ページの問題 1.16 で扱われているが，本文ではないので学習していない人も多いだろう．ただし $\mathrm{Tr}(cA) = c\mathrm{Tr}(A)$, $\overline{\mathrm{Tr}(A)} = \mathrm{Tr}(\overline{A})$, $\mathrm{Tr}({}^t\!A) = \mathrm{Tr}(A)$ は定義から自明だ．これと問題文に記述した事実を使えば次のように証明できる．

- $\overline{(A, B)} = \overline{\mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{B})} = \overline{\mathrm{Tr}({}^t({}^t\!A\overline{B}))} = \overline{\mathrm{Tr}\,{}^t\overline{B}A} = \mathrm{Tr}({}^t\!B\overline{A}) = (B, A)$
- $(A + B, C) = \mathrm{Tr}({}^t(A + B)\overline{C}) = \mathrm{Tr}(({}^t\!A + {}^t\!B)\overline{C}) = \mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{C}) + \mathrm{Tr}({}^t\!B\overline{C}) = (A, C) + (B, C)$
- $(\alpha A, B) = \mathrm{Tr}({}^t(\alpha A)\overline{B}) = \alpha\mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{B}) = \alpha(A, B)$
- ${}^t\!A\overline{A}$ の (j, j) 成分は A の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ を転置した行ベクトルと $\overline{A}$ の第 j 列 $\overline{\boldsymbol{a}_j}$ の積だから $\boldsymbol{a}_j$ のノルムの 2 乗である．トレースは対角成分の総和なので $(A, A) \geqq 0$ を得る．$(A, A) = 0$ ならばすべての列ベクトルのノルムが 0 になるので $A = O$ である．

以上から (A, B) は内積を定める．

【解答例 2】

$A = (a_{ij})$, $B = (b_ij)$ とおけば ${}^t\!A\overline{B}$ の (j, j) 成分は $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$ である．ゆえに

$$(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{B}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

なのでこれは $V = \mathbb{C}^{n^2}$ の標準内積である．

【コメント】

- ヒントはミスリードだった．$\mathrm{Tr}({}^t\!A) = \mathrm{Tr}(A)$ を使ってよいとすればもう少しできたかもしれない．
- 行列の積を誤解している人がいるが，1 年次の線形代数からやり直してほしい．$\mathrm{Tr}({}^t\!A\overline{B}) = \sum_j a_{jj}\overline{b_{jj}}$ とする人が目についた．

- この内積の正値性は成分で記述するとよい．解答例では A の列ベクトルを使って説明したがそのほうが分かりやすいだろう．なお，成分による記述は解答例 2 で紹介している．これが $\mathbb{C}^{n^2}$ の通常の内積だということに気づいてほしい．
- 配点 10 点，平均 3.95 点

問 2　T を計量線形空間 V のエルミート変換とする．(1) T の固有値は実数であることを示せ．(2) T の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ．

【解答例】

(1) T の固有値を α，$\vec{p}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとすれば

$$(T(\vec{p}), \vec{p}) = (\alpha\vec{p}, \vec{p}) = \alpha(\vec{p}, \vec{p}), \quad (\vec{p}, T(\vec{p})) = (\vec{p}, \alpha\vec{p}) = \overline{\alpha}(\vec{p}, \vec{p})$$

が成り立つ．T はエルミート変換なので 2 つの式は等しく，$\vec{p} \neq \vec{0}$ より $(\vec{p}, \vec{p}) > 0$ である．ゆえに $\alpha = \overline{\alpha}$ であり α は実数である．

(2) T の別の固有値を β，$\vec{q}$ を固有値 β に対する固有ベクトルとすれば上の変形と同様に

$$(T(\vec{p}), \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q}), \quad (\vec{p}, T(\vec{q})) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \overline{\beta}(\vec{p}, \vec{q})$$

が成り立つ．T はエルミート変換なので 2 つの式の値は等しく，また β は実数なので $\alpha \neq \beta = \overline{\beta}$ より $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$ を得る．よって $\vec{p}$ と $\vec{q}$ は直交する．

【コメント】

- 非常によくできていた．分かりやすい証明なので理解しやすかったのではないか．
- 後半の証明では β が実数であることに言及すべきだ．右側のスカラー倍は共役をとって前に出るのであり，そのまま前に出るのではない．
- 配点 10 点，平均 7.66 点

問 3　複素正方行列 A が正規行列であるとする．このとき A の固有値の絶対値がすべて 1 であることは A がユニタリ行列であることと同値であることを示せ．

【解答例】

正規行列はユニタリ行列で対角化できるので A を対角化するユニタリ行列を P とおく．まず A の固有値がすべて絶対値 1 だとする．

$$(P^*AP)^*(P^*AP) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \alpha_1\overline{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n\overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = E$$

となるので $PP^* = P^*P = E$ より

$$A^*A = PP^*A^*PP^*APP^* = P(P^*AP)^*(P^*AP)P^* = PP^* = E$$

となり A はユニタリ行列である．

逆に A がユニタリ行列だとし，α を A の固有値，$\boldsymbol{p}$ を α に対する固有ベクトルとおけば $\mathbb{C}^n$ の標準内積について

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{p}, A\boldsymbol{p}) = (\alpha\boldsymbol{p}, \alpha\boldsymbol{p}) = \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})$$

となるので $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ を得る．ゆえに $|\alpha| = 1$ である．

【コメント】

- ユニタリ行列の固有値の絶対値が 1 であることは，より一般にユニタリ変換の固有値の絶対値が 1 であることから分かる．解答例ではその事実の証明を問題の状況に合わせて示している．
- 正規行列でなくても固有値の絶対値はすべて 1 になる場合がある．正規行列であることを使わなければユニタリ行列であることを示せるはずがない．固有値の絶対値が 1 なら固有ベクトルについて

$$^t\boldsymbol{p}\,^tA\overline{A}\overline{\boldsymbol{p}} = {}^t(A\boldsymbol{p})(\overline{A\boldsymbol{p}}) = {}^t(\alpha\boldsymbol{p})(\overline{\alpha\boldsymbol{p}}) = \alpha\overline{\alpha}\,^t\boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{p}} = {}^t\boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{p}}$$

  が成り立つが，固有ベクトルという特殊なベクトルについて言えただけなので ${}^tA\overline{A} = E$ は示せない．
- 配点 10 点，平均 2.39 点

問 4 計量線形空間 V とその部分空間 W について $W^{\perp} = \{\vec{x} \in V \mid \forall\vec{w} \in W;\ (\vec{x}, \vec{w}) = 0\}$ は V の部分空間であることを示せ．また $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ であることを示せ．

【解答例】

$\vec{0}$ はあらゆるベクトルと直交するので $\vec{0} \in W^{\perp}$ である．そこで $\vec{x}, \vec{y} \in W^{\perp}$ をとる．任意の $\vec{w} \in W$ について

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{w}) = (\vec{x}, \vec{w}) + (\vec{y}, \vec{w}) = 0$$

となるので $\vec{x} + \vec{y} \in W^{\perp}$ である．またスカラー α について

$$(\alpha\vec{x}, \vec{w}) = \alpha(\vec{x}, \vec{w}) = 0$$

となるので $\alpha\vec{x} \in W^{\perp}$ である．以上から $W^{\perp}$ は V の部分空間である．

次に $\vec{x} \in W \cap W^{\perp}$ をとる．$\vec{x}$ は W の各ベクトルと直交し，かつ $\vec{x} \in W$ なので，$(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ である．よって $\vec{x} = \vec{0}$ であり $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ が成り立つ．

【コメント】

- $\vec{0} \in W^{\perp}$ に言及していない答案が目立った．当たり前だと思って言わなかった人もいるかもしれないが，$\vec{0} \in W^{\perp}$ を示そうとして失敗している人もいるので減点せざるを得ない．
- 部分空間だということを示すときに，垂線の足などの議論を使っている人がいるがこれは見当外れだ．部分空間であることを示すには，部分空間の定義を確認すればよい．このようにたえず定義に戻って考えるのは数学の議論の基本だ．
- 配点 10 点平均 5.14 点