線形数学テキスト (2014 年度 井上尚夫)

この講義では 1 年次の線形代数の続編として抽象線形空間に関する一般論を扱う．基本的な計算問題の多くは 1 年次の線形代数で学習しているのでここでは繰り返さない．ただし，一般的な計算方法の理解[*1]は一般論の構築の基礎になるので，曖昧になっている人はきちんと復習しておくこと．

このテキストの傍注にはテキストを読む際に確認しておいてほしいことを記述した．何を確認しておくべきかは本来は自分で判断すべき事項であり，傍注は不要かもしれない．ただし，問題意識を持たずにテキストを読む人が多いのであえてこのような方式をとった．傍注のない空白スペースは自由に書き込んで利用してほしい．

目次

[*1] 個別の計算ができるということではなく，その方法があらゆる場合に使えるという認識，例えば基本変形で階段行列にする操作ができるだけではなく，どんな行列も基本変形で階段行列にできることを理解すること

1 線形空間

1.1 線形空間の公理と例

有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合のように四則演算（加減乗除）が自由に行える集合を**体**[*2]と呼ぶ．有理数体を $\mathbb{Q}$，実数体を $\mathbb{R}$，複素数体を $\mathbb{C}$ で表す．

集合 V が 体 K 上の**線形空間**であるとは，V は空集合ではなくかつ以下の性質（**線形空間の公理**）を満たすことを言う[*3]．$\mathbb{R}$ 上の線形空間を実線形空間，$\mathbb{C}$ 上の線形空間を複素線形空間と呼ぶ．なお，この講義では体は $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ の何れかとする．

(I) V の二つの元 $\vec{x}, \vec{y}$ に対して和と呼ばれる第 3 の元（$\vec{x}+\vec{y}$ と表す）が定まり次を満たす．
- (I-1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$（交換法則）
- (I-2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$（結合法則）
- (I-3) ある元（これを $\vec{0}$ と表し 0 元と呼ぶ）が存在し，全ての $\vec{x}\in V$ に対して $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ が成り立つ．（0 元の存在）
- (I-4) 全ての $\vec{x}\in V$ に対して，ある元（これを $-\vec{x}$ と表し $\vec{x}$ の逆元と呼ぶ）が存在し，$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ が成り立つ．（逆元の存在）

(II) $\vec{x}\in V$ と $\alpha\in K$ に対してスカラー倍と呼ばれる元（$\alpha\vec{x}$ と表す）が定まり次を満たす．
- (II-1) $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}, \quad \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$（分配法則）
- (II-2) $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$（結合法則）
- (II-3) $1\vec{x}=\vec{x}$（1 倍による不変性）

線形空間 V の要素を**ベクトル**と呼び $\vec{x}\in V$ のように表すことにする．

命題 1.1. 0 元の条件を満たす元は唯一つである．また各 $\vec{x}$ について逆元の条件を満たす元は唯一である．[*4]

証明. $\vec{n}$ が 0 元の条件を満たしたとする．

$$\vec{n} \underset{\vec{0}\text{ は 0 元}}{=} \vec{n}+\vec{0} \underset{\text{交換法則}}{=} \vec{0}+\vec{n} \underset{\vec{n}\text{ は 0 元}}{=} \vec{0}$$

より $\vec{n}=\vec{0}$ となるので 0 元の条件を満たす元は $\vec{0}$ のみである．

上の等式のように各等号の成り立つ理由を分析せよ．

$\vec{y}$ が $\vec{x}$ の逆元の条件を満たしたとする．

$$\vec{y}=\vec{y}+\vec{0}=\vec{y}+(\vec{x}+(-\vec{x}))=(\vec{y}+\vec{x})+(-\vec{x})=\vec{0}+(-\vec{x})=-\vec{x}$$

より $\vec{x}$ の逆元は $-\vec{x}$ のみである． □

命題 1.2. $0\vec{x}=\vec{0}, \quad (-1)\vec{x}=-\vec{x}$[*5]

[*2] もちろん 0 で割ることはできない．体にはこれ以外にも様々なものがあり，それを使った線形代数もまったく同じように構築できる．体についての一般論は代数学 I で扱う．

[*3] 「教養の線形代数」115 ページの研究と比較せよ．

[*4] 厳密にはこの命題が証明されて始めて，0 元を $\vec{0}$ で，逆元を $-\vec{x}$ で表すことが許される．

[*5] 左辺は $\vec{x}$ の -1 倍，右辺は $\vec{x}$ の逆元なのでこの二つが等しいことは証明すべき事項である．一般に公理に基づいて概念を定義するとき，公理はできるだけ少ない形で定める．公理から証明できる事実は命題・定理として証明を付ける．

証明. 1 倍による不変性と分配法則から $\vec{x} = 1\vec{x} = (1+0)\vec{x} = 1\vec{x} + 0\vec{x} = \vec{x} + 0\vec{x}$ を得るが，この両辺に $-\vec{x}$ を加えれば，公理 I の 4 つの性質を使って $\vec{0} = 0\vec{x}$ を得る．後半は $\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1\vec{x} + (-1)\vec{x} = (1-1)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$ より示される． □

問題 1.1. $\alpha\vec{x}$ の逆元 $-(\alpha\vec{x})$ は $(-\alpha)\vec{x}$ であることを示せ.

1.2　線形空間の例

線形空間の例では以下のものが基本的である．それぞれの例において，0 元，逆元が何を意味するかは 0 倍，–1 倍して考えればよい.

例 1. (1) n 項実列ベクトル全体の集合 $\mathbb{R}^n$ ，n 項複素列ベクトル全体の集合 $\mathbb{C}^n$ ．一般に体 K の要素を成分とする n 項列ベクトル全体の集合 K^n.

(2) $[0,1]$ 区間上の実（複素）数値連続関数全体の集合[*6]

(3) 実（複素）係数多項式全体の集合

単項式や 0 も多項式の一つととらえていることに注意せよ.

(4) 実（複素）数列全体の集合

(5) $m \times n$ 型行列全体の集合，$M_{m,n}(K)$.

線形空間の係数をどの体と考えるかはアプリオリに決められているわけではない．$\mathbb{C}^n$ を実線形空間と考えても差し支えないし，有理数体上の線形空間と思っても良い．ただし有理数体上の線形空間は直感ではつかみづらく，例えば $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形空間とみた場合無限次元になってしまう[*7].

1.3　一次結合に関する諸概念

$\mathbb{R}^n$ の場合と同様に次のように定義する．V のベクトルの組 $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ [*8]について

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \vec{x}_\lambda \qquad c_\lambda \in K$$

を $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の**一次結合**と呼ぶ．ここで Λ が無限集合の場合の一次結合は有限個の λ を除き $c_\lambda = 0$ であると仮定する．それによって和は有限和となる[*9] .

一次結合が $\vec{0}$ になるのが係数がすべて 0 の場合に限るとき，すなわち

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \vec{x}_\lambda = \vec{0} \Longrightarrow \text{すべての}\lambda\text{について } c_\lambda = 0$$

が成り立つとき，$\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は**一次独立**であると言う．一次独立でないときは**一次従**

[*6] このテキストでは線形空間の要素をベクトルと呼び $\vec{x}$ のような記号で表しているが，この例においては慣例に従って要素を関数と呼び $f(x)$ のように表す．具体的線形空間を扱う時には，一般的な表し方にこだわらないこと.

[*7] 一般に自然数全体の集合と 1 対 1 対応のつく集合を加算集合と呼ぶ．$\mathbb{Q}$ は可算集合であり，有限個の可算集合の直積集合も可算集合であることが知られている．$\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{Q}$ の n 個の直積集合なのでこれも可算集合になる．一方 $\mathbb{R}$ は可算集合にならない．これらの事実と以下で述べる基底と次元の定義（基本的には 1 年次で学習したことと変わらない）から有限次元ではありえないことが証明できる.

[*8] 無限個のベクトルの組（すなわち添え字集合 Λ が無限集合）でも差し支えない．なお添え字集合は要素の個数のみが意味を持つ．要素の個数が n 個の時は $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ ととるのが普通である．このとき $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ と表す.

[*9] 2 つの要素の和が定義できているので有限個の要素の和は定義されている．しかし，無限個の要素の和は定義されていない．無限和の定義には極限の概念が必要であり，線形空間の構造だけでは定義できない．これについては第 3 章の計量線形空間でもう一度注意する.

属という．$\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の一次結合全体の集合を，$\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の**生成する空間**と呼び $\langle \vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ と表す．有限個のベクトルの生成する空間は $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ とも表す．

一年次の線形代数との違いは，係数が実数だけではなく複素数全体の集合など一般の体で考えていること，そして抽象的な線形空間を扱っていることである．いくつか注意事項を箇条書きする．

- $\mathbb{C}^n$ における，k 個の列ベクトルの組が一次独立か否かは，それらを並べた $n \times k$ 型行列が基本変形により階数 k の階段行列 $\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}$ になるか否かで判定される．なお，基本変形で階段行列にする操作は実数でも複素数でもさらには一般の体でもまったく同じように議論できる．

基本変形の方針は四則演算が自由に行えることだけを使う．納得できるまで考えよ．

- 連続関数全体の集合において $\{f_n(x) = x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ の生成する空間は多項式関数全体の集合であり，$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ は含まれない．このように理解する理由は次の二つである．
  - 無限和とは部分和（第 n 項までの和）の極限である．これを定義するには，和の定義だけではなく極限の概念も必要になる．1.1 節で述べた線形空間の公理には極限は入っていないので，無限和は定義されていない．
  - $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の生成する空間とは $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を含む最も小さな線形空間という意味で使われる．多項式関数全体の集合は明らかに線形空間であり，$\{f_n(x) = x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ を含む．

命題 1.3. (1) 有限個のベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ が一次独立であることと次が成り立つことは同値である．

$$\vec{v}_k \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{k-1} \rangle, \quad 1 \leqq k \leqq n$$

ただし，$k = 1$ の場合の右辺は $\{\vec{0}\}$ とみなし，$\vec{v}_1 \notin \{\vec{0}\}$ すなわち $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ の意味である．
(2) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ が一次独立で $\vec{v}_{k+1} \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ であれば $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ も一次独立である．

証明. $\vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{k-1} \rangle$ となる k が存在すれば，$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ は一次従属である．従って $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ も一次従属である．逆に $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ が一次従属であれば

この議論が成立する理由を考察せよ．

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

となる $c_1, c_2, \ldots, c_n$ が存在する．ここで $c_j \neq 0$ となる最大の j を k とおけば

$$c_k\vec{v}_k = -c_1\vec{v}_1 - c_2\vec{v}_2 - \cdots - c_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$

よって $\vec{v}_k \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{k-1} \rangle$ である．

以上の同値性から後半は簡単に導かれる． □

このことを証明せよ．

問題 1.2. 1 年次のテキストに載っている一次独立性に関連する問題を解け．

問題 1.3. $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上の線形空間とみなすとき $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ は一次独立であることを示せ．

ヒント：$\mathbb{Q}$ 上なので，1 次結合 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ の係数は有理数だ．

問題 1.4. 一変数連続関数のなす線形空間において，$\{1, \sin x, \cos x\}$ および $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ が一次独立であるか否か調べよ．

ヒント：この線形空間の 0 元は 0 に値をとる定数関数だ．

問題 1.5. 連続関数全体の集合において $\{f_n(x) = x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ は一次独立であることを示せ．

1.4　基底と次元

線形空間 $V \neq \{\vec{0}\}$ に対して，V を生成しかつ一次独立なベクトルの組 $\{\vec{x}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を**基底**と呼ぶ．有限個のベクトルからなる基底を持つ線形空間を有限次元線形空間と呼ぶ．なお $V = \{\vec{0}\}$ も有限次元線形空間と考える．

命題 1.4. $\{\vec{0}\}$ ではない有限次元ベクトル空間 V について，基底を構成するベクトルの個数は一定である．

証明. V が n 個のベクトルからなる基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ を持つとする．V の $n+1$ 個以上のベクトルの組 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\}$ $(m > n)$ を考える．

V は $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ で生成されているので V のベクトル $\vec{b}_j$ は

$$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\vec{a}_i \qquad c_{ij} \in K$$

と表せるので，$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\}$ の一次結合は

$$\sum_{j=1}^{m} d_j\vec{b}_j = \sum_{ij} d_j c_{ij}\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_j\right)\vec{a}_i$$

となるのでこれが $\vec{0}$ になるのは $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ が一次独立であることから

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_j = 0, \qquad C\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}^{*10}$$

のときである．ここで $C = (c_{ij})$ は $n \times m$ 型の行列であり，$C\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ は同次連立一次方程式であるので C を基本変形することによってとける．C の行の数は n なので階数は n 以下であり，解は $m - n$ 個以上の文字を使って表せる．$\boldsymbol{0}$ 以外に解を持つので $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\}$ は一次独立ではない．

「教養の線形代数」(p.35 定理 2.5）を確認せよ．

n 個のベクトルからなる基底があれば $n+1$ 個以上のベクトルの組は一次独立にならず基底ではない．逆に $n-1$ 個以下のベクトルの組で基底を作れたとすると，n 個のベクトルの組である $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ は一次独立になれず矛盾が生じる．ゆえに V の基底はすべて n 個のベクトルからなる．　□

この命題から定まる基底を構成するベクトルの個数を V の**次元**と呼び $\dim V$ と表す．$V = \{\vec{0}\}$ の場合は $\dim V = 0$ と定める．有限次元でない場合は $\dim V = \infty$ とし，無限次元線形空間という．以上によりすべての線形空間 V に $\dim V$ が定義できる．

問題 1.6. 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を実数体上の線形空間と見るとき次元を求めよ．また基底の例を一組与えよ．

無限次元の線形空間についても基底を考えることができる．例えば多項式全体の集合において $\{f_n(x) = x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ は基底である．しかしこの講義では基底は有限次元空

一次独立であること，生成することについてその理由を考えよ

[*10] $\boldsymbol{d}$ は体 K 上の m 項列ベクトルであり，1 年次の線形代数のときと同様にボールド体で表記した．これに対し，線形空間の要素は列ベクトルとは限らないので $\vec{a}$ のように矢印をつけて記述する．記号の使い分けに注意して欲しい．なお，通常の線形代数のテキストでは抽象線形空間の要素もボールド体で記述することが多い．ただし慣れないうちは抽象線形空間の要素か列ベクトルかは意識したほうが良いので，この使い分けを使った．

間についてのみ考える．また係数体のとり方で次元は変わることに注意しておくこと．例えば $\mathbb{C}^n$ は複素線形空間と思えば n 次元だが，実線形空間と思えば $2n$ 次元である．この事情から $\dim_{\mathbb{R}} V$, $\dim_{\mathbb{C}} V$ などのようにあらわす場合がある．

線形空間 V の有限個のベクトルの列，$\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ について

$$\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V, \quad \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{p}_i$$

と定める．これは $\mathcal{P}$ を V の要素を成分とする行ベクトルと考えることにより

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示できる．$\Phi_{\mathcal{P}}$ が線形写像であることは簡単に確かめられる．これについて次が成り立つ．

このことを証明せよ．

命題 1.5. $\mathcal{P}$ が一次独立であることと，$\Phi_{\mathcal{P}}$ が単射であることは同値である．また $\mathcal{P}$ が V を生成することと $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全射であることは同値である．特に $\mathcal{P}$ が基底であることは $\Phi_{\mathcal{P}}$ が全単射であることと同値である．

証明. 一次独立の定義と単射の定義を比べてみるとよい．詳細は問題に残しておく． □

$\mathcal{P}$ が V の基底であるとき，$\Phi_{\mathcal{P}}$ は逆写像を持つ．$\vec{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} = (\Phi_{\mathcal{P}})^{-1}(\vec{x}) \in K^n$ を基底 $\mathcal{P}$ に関する $\vec{x}$ の**座標**と呼ぶ．$\vec{x}$ とその座標の間には

逆写像を持つことと全単射であることが同値であることを証明せよ．

$$\vec{x} = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$$

この表示により基底の変換と座標変換は次のように関係付けられる．

$\mathcal{Q} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n\}$ を V の別の基底とする．基底の変換を

$$\vec{q}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{p}_i, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P}A^{*11}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表す．ここで A は成分を K にとる n 次正方行列である．$\vec{x}$ の基底 $\mathcal{P}$ に関する座標を $\boldsymbol{x}$ 基底 $\mathcal{Q}$ に関する座標を $\boldsymbol{x}'$ と表せば

$$\vec{x} = \mathcal{Q}\boldsymbol{x}' = \mathcal{P}A\boldsymbol{x}' = \mathcal{P}\boldsymbol{x}, \quad \Phi_{\mathcal{P}}(A\boldsymbol{x}') = \Phi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x})$$

となる．最後の式と $\Phi_{\mathcal{P}}$ の単射性から

$$A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$$

*11 この表示も基底 $\mathcal{P}$ を V に値を持つ行ベクトル，$\mathcal{Q}$ を W に値を持つ行ベクトルとみなせば正当化される．

を得るがこれが基底の変換の定める座標変換である．これを次の図式でまとめると分かりやすい．

$$\begin{tikzcd} & V & \\ K^n \arrow[ur, "\Phi_Q"] \arrow[rr, "A"'] & & K^n \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{P}}"'] \end{tikzcd}$$ [*12]

問題 1.7. 命題 1.5 を証明せよ．

問題 1.8. V を $\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$ の一次結合全体の集合とする．これは問 1.3 より一次独立なので V は 3 次元線形空間である．このとき $\{\cos^2 x, \cos x \sin x, \sin^2 x\}$ も V の基底であることを示せ．またこの二つの基底の変換を表す行列を求めよ．

問題 1.9. 有限次元線形空間 V において，上で導入した基底の変換の行列 A は正則であることを示せ．逆に $\mathcal{P}$ が基底で A が正則行列なら $Q = \mathcal{P}A$ も基底であることを示せ．

ヒント：Φ_Q が全単射であることを言う．

1.5 線形部分空間

線形空間 V に対して，その部分集合 $W \subset V$ が（線形）**部分空間**であるとは，空集合ではなく

$$\vec{x}, \vec{y} \in W,\ \alpha, \beta \in K \Longrightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W$$

が成り立つことを言う．すなわち W のベクトルの一次結合が全て W に属することを言う．このとき W 自身線形空間になっている[*13]．

命題 1.6. V が有限次元線形空間のとき，その部分空間 W も有限次元であり，$0 \leqq \dim W \leqq \dim V$ が成り立つ．さらに W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r\}$ にいくつかベクトルを付け加えて V の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r, \vec{p}_{r+1}, \ldots, \vec{p}_s\}$ を作ることができる．

証明. $W = \{\vec{0}\}$ のときは $\dim W = 0$ であり，基底を考える必要はない．W の一次独立なベクトルの組 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s\}$ について，これらの一次結合は部分空間の定義からすべて W のベクトルになる．ゆえに

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s \rangle \subset W$$

この事実は当たり前と思えるまで考えておくこと．

である．この包含関係が $=$ のときは $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s\}$ は W の基底である．$\subsetneqq$ のときは

$$\vec{p}_{s+1} \in W - \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s \rangle$$

をとれば命題 1.3 より $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_{s+1}\}$ は W の一次独立なベクトルの組である．

$\dim V = n$ とすれば $s > n$ のときは $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_s\}$ が一次独立になることはないので，有限回の操作で W の基底を作ることができる．ゆえに W も有限次元線形空間であり，その次元は n 以下である．後半は W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r\}$ から同じ考えでベクトルを付け加えていきながら V の基底を作ればよい． □

このように W の基底から V の基底を作る操作を基底の**延長**という．

問題 1.10. 有限次元線形空間 V と，その部分空間 W について，$\dim W = \dim V$ ならば

ヒント：一般に W の基底を延長して V の基底を作れる．このことと仮定を合わせて考えよ．

[*12] 1 年次の線形代数では行列 A の表す線形写像を f_A と表したが，ここでは単に A と表している．記号の煩雑さを避けるためである．

[*13] 和とスカラー倍の演算に関する性質は V で満たされているのだから その部分集合である W でも当然満たされる．大事なのは和とスカラー倍の演算について閉じているということだけである．

$W = V$ であることを示せ．

定理 1.7. (1) V の二つの部分空間 W_1, W_2 について $W_1 \cap W_2$ も部分空間である．
(2) $W_1 + W_2 = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in W_1,\ \vec{y} \in W_2\}$ も部分空間である．これを**和空間**と呼ぶ．
(3) W_1, W_2 がともに有限次元であるとき，$W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ もともに有限次元で次が成り立つ．

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

証明. (1) は易しいので問題にまわす．(2) は $W_1 + W_2$ から二つの要素 $\vec{x}_1 + \vec{y}_1$, $\vec{x}_2 + \vec{y}_2$ をとって次の式から示される．

この式が成り立つ理由を考えよ．

$$\alpha(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \beta(\vec{x}_2 + \vec{y}_2) = (\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) + (\alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2) \in W_1 + W_2$$

(3) は $W_1 \cap W_2$ の基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$ をまずとり，それを延長する形で W_1 の基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_q\}$ および W_2 の基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_r\}$ を作る．そして $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_q, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_r\}$ が $W_1 + W_2$ の基底であることを示す．生成することは簡単である．一次独立性は

生成することを証明せよ．

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{a}_p + \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \cdots + \beta_q\vec{b}_q + \gamma_1\vec{c}_1 + \gamma_2\vec{c}_2 + \cdots + \gamma_r\vec{c}_r = \vec{0}$$

として

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{a}_p + \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \cdots + \beta_q\vec{b}_q = -\gamma_1\vec{c}_1 - \gamma_2\vec{c}_2 - \cdots - \gamma_r\vec{c}_r$$

とおけば第 1 の表示により $\vec{v}$ は W_1 のベクトル，第 2 の表示により $\vec{v}$ は W_2 のベクトルであり， $W_1 \cap W_2$ の要素になる．

$$\vec{v} = -\gamma_1\vec{c}_1 - \gamma_2\vec{c}_2 - \cdots - \gamma_r\vec{c}_r = \delta_1\vec{a}_1 + \delta_2\vec{a}_2 + \cdots + \delta_p\vec{a}_p$$

と表せるが $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_r\}$ は一次独立なので

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_r = 0$$

を得る．結局

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{a}_p + \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \cdots + \beta_q\vec{b}_q = \vec{0}$$

であるが，$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_q\}$ の一次独立性から全ての係数が 0 である． □

注意 1. 一般に $W_1 \cup W_2$ は部分空間にならない．$W_1 \cup W_2$ を含む最小の部分空間が $W_1 + W_2$ である．

問題 1.11. 定理 1.6(1) を証明せよ．

$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ のとき，和 $W_1 + W_2$ を**直和**と呼び $W_1 \oplus W_2$ と表す．有限次元の場合は

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

となり，$W_1 \oplus W_2$ の基底はそれぞれの基底を合わせることで得られる．直和は有限個の部分空間についても自然に定義されるが若干注意が必要である．

定理 1.8. 線形空間 V の r 個の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_r$ について次は同値である．

(1) $\vec{x} \in (W_1 + W_2 + \cdots + W_r)$ について

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r, \quad \vec{x}_k \in W_k (k = 1, 2, \ldots, r)$$

という表示は一通りである．

(2) $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r = \vec{0}, \vec{x}_k \in W_k(k = 1, 2, \ldots, r)$ は $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \cdots = \vec{x}_r = \vec{0}$ のときに限り成立する．

(3) すべての k について $W_k \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1} + W_{k+1} + \cdots + W_r) = \{\vec{0}\}$

さらに各 W_k が有限次元のときは次とも同値になる．

(4) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r$

証明. (2) は $\vec{0}$ の表示の一意性を述べているので (1) の特別な場合であり (1)$\Longrightarrow$(2) は成立する．

(2)$\Longrightarrow$(3) は背理法で示す．$W_k \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1} + W_{k+1} + \cdots + W_r) \supsetneqq \{\vec{0}\}$ なる k があったとし $\vec{x}_k \in W_k$ を

$$\vec{x}_k \in W_k \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1} + W_{k+1} + \cdots + W_r), \quad \vec{x}_k \neq \vec{0}$$

ととる．和空間の定義から

$$\vec{x}_k = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{k-1} + \vec{x}_{k+1} + \cdots + \vec{x}_r \qquad \vec{x}_j \in W_j$$

と表示されるが，これより

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{k-1} + (-\vec{x}_k) + \vec{x}_{k+1} + \cdots + \vec{x}_r = \vec{0}$$

を得る．$-\vec{x}_k \neq \vec{0}$ であり (2) に矛盾する．

(3)$\Longrightarrow$(1) については

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_r, \quad \vec{x}_k, \vec{y}_k \in W_k (k = 1, 2, \ldots, r)$$

とする．

$$\vec{y}_k - \vec{x}_k \in W_k \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1} + W_{k+1} + \cdots + W_r)$$

より $\vec{y}_k = \vec{x}_k$ を得る．表示は一通りである．以上で (1)(2)(3) の同値性が示される．

各 W_k が有限次元のとき，それぞれの基底を寄せ集めたものが $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ を生成することは和空間の定義より成立する．ゆえに

$$\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) \leqq \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r$$

を得る．よって (4) は各 W_k から基底 $\{\vec{p}_{1k}, \vec{p}_{2k}, \ldots, \vec{p}_{s_k k}\}$ をとって寄せ集めたベクトルの組 $\{\vec{p}_{ik} \mid 1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq i \leqq s_k\}$ [*14]が一次独立であることと同値である．(4)$\Longrightarrow$ (2) は

$$\vec{0} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r, \quad \vec{x}_k \in W_k$$

[*14] 各 k で次元が異なるので添え字 i の動く範囲は k ごとに異なる．結果としてこんなに複雑な表記になるが，要するに全ての基底を寄せ集めただけである．なお，$s_k = \dim W_k$ である．

と表すとき，各 $\vec{x}_k$ を W_k の基底で表示してみれば，$\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_r$ は $\{\vec{p}_{ik} \mid 1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq i \leqq s_k\}$ の一次結合になるので，その係数はすべて 0 になる．よって各 k について $\vec{x}_k=\vec{0}$ である．

逆は $\{\vec{p}_{ik} \mid 1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq i \leqq s_k\}$ の一次結合が $\vec{0}$ になったとして，それを W_k のベクトルの和として整理する．(2) によって $\{\vec{p}_{ik} \mid 1 \leqq i \leqq s_k\}$ の一次結合が $\vec{0}$ になるが，一次独立であることにより全ての係数が 0 になる．□

この定理の条件が成立するとき，$W_1+W_2+\cdots+W_r$ を**直和**と呼び，$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ と表す．[*15]各 W_k が有限次元の時には，直和空間 $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ の基底は 各 W_k の基底を寄せ集めることによって得られる．

問題 1.12. (1) V を $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体の集合とし，W_1 を V に属する偶関数全体の集合，W_2 を V に属する奇関数全体の集合とする．W_1, W_2 は V の部分空間であり $V=W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ．
(2) V を n 次実正方行列全体の集合とし，W_1 を実対称行列全体の集合，W_2 を実交代行列全体の集合とする．W_1, W_2 は V の部分空間であり $V=W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$f(x)+f(-x)$ は偶関数である．

1.6 商空間

集合 X に対して $E \subset X \times X$ が X の**同値関係**であるとは次が成り立つことを言う．ただし $(x,y) \in E$ を $x \sim y$ と記述している．

反射律 全ての $x \in X$ について $(x,x) \in E$，すなわち $x \sim x$ が成り立つ．
対称律 $(x,y) \in E$ ならば $(y,x) \in E$，すなわち $x \sim y$ ならば $y \sim x$ が成り立つ．
推移律 $(x,y) \in E$ かつ $(y,z) \in E$ ならば $(x,z) \in E$，すなわち $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ が成り立つ．

この記述のように同値関係は $\sim$ で表し，$x \sim y$ は x は y と同値であるというように表現する．x に同値な要素全体の集合を $[x]$ と表し，x の属する**同値類**という．同値類について次が成り立つ．

命題 1.9. (1) $x \in [x]$ 特に $[x] \neq \emptyset$
(2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ならば $[x]=[y]$
(3) $[x]=[y]$ は $x \sim y$ と同値

問題 1.13. この命題を証明せよ．

さて，この命題から X は互いに共通部分を持たない同値類たちの合併集合として表せる．そこで，一つ一つの同値類を要素とみなしてあらたな集合 $X/\sim$ を考える．これを同値関係 $\sim$ の定める**商集合**と呼ぶ．商集合の要素は同値類 $[x]$ のように $x \in X$ を使って表す．この x を同値類の**代表元**と呼ぶ．代表元と言っても何か特別の元ということではなく，仮に一つ決めたに過ぎない．$[x]$ の要素はすべて代表元になり得ことに注意すること．同値関係・商集合については，数学の多くの分野で利用する．ただしこの講義で扱うのは次の例に限られる．

[*15] 直和の定義は (1)(2)(3) のいずれを用いても良い．ただし，直和についての議論は，必要に応じて 4 つのいずれも利用される．どれか一つ覚えておけばよいというものではない．

体 K 上の線形空間 V とその部分空間 $W \subset V$ について，

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in W$$

と定めれば $\sim$ は V の同値関係になる．この同値関係による同値類は

反射律，対称律，推移律を確認せよ．

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \,|\vec{y} \sim \vec{x}\} = \{\vec{y} \mid \vec{y} - \vec{x} \in W\}$$

であるが $\vec{y} - \vec{x} = \vec{w} \in W$ とおくことにより

$$[\vec{x}] = \{\vec{x} + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\} = \vec{x} + W$$

と表せる．$[\vec{x}]$ は W を $\vec{x}$ だけ平行移動した集合と理解できる．

問題 1.14. $V = \mathbb{R}^3$ とし $W \subset V$ を原点を通る 2 次元平面とする．このとき上の同値関係による同値類はどのような集合になるか．

ヒント：一つの同値類は $\mathbb{R}^3$ の部分集合であるが，具体的にどのような集合か考えよ．

定理 1.10. 商集合 $V/\sim$ は次の演算で K 上の線形空間になる．これを**商空間**と呼び V/W と表す．

$$[\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{x} + \vec{y}], \quad \alpha[\vec{x}] = [\alpha\vec{x}]$$

V が有限次元の場合には次が成り立つ．

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

証明. (1) 和，スカラー倍が代表元のとり方によらないこと．[*16]

同値類 $[\vec{x}]$ 及び $[\vec{y}]$ の別の代表元をそれぞれ $\vec{u}$ 及び $\vec{v}$ とおく．$\vec{x} \sim \vec{u}$ 及び $\vec{y} \sim \vec{v}$ すなわち $\vec{x} - \vec{u} \in W$ 及び $\vec{y} - \vec{v} \in W$ が成り立つ．この和をとれば $(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{u} + \vec{v}) \in W$ を得るが，これは $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{u} + \vec{v}]$ を意味する．ゆえに第 1 式の右辺は代表元のとり方によらない．また $\alpha(\vec{x} - \vec{u}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{u} \in W$ より $[\alpha\vec{x}] = [\alpha\vec{u}]$ が成り立つが，これは第 2 式の右辺が代表元の取りかたによらないことを示している．

(2) 線形空間の公理を満たすこと．

$[\vec{x}] + [\vec{y}] = [\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{y} + \vec{x}] = [\vec{x}] + [\vec{y}]$ より和に関する交換法則が成り立つ．他の式も和とスカラー倍の定義式と V についての対応する性質から簡単に示すことができる．

実際に一つずつ示してみよ．

(3) 次元に関する等式について．

$\dim W = r$, $\dim V = s$ とする．W の基底を延長する形で V の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r, \vec{p}_{r+1}, \ldots, \vec{p}_s\}$ を作る．このとき $\{[\vec{p}_{r+1}], [\vec{p}_{r+2}], \ldots, [\vec{p}_s]\}$ が V/W の基底になることを示す．

まず，$[\vec{x}] = [\vec{0}] \Longleftrightarrow \vec{x} \in W$ である．ゆえに

$$[\vec{x}] = \left[\sum_{j=1}^{s} c_j \vec{p}_j\right] = \sum_{j=1}^{s} c_j [\vec{p}_j] = \sum_{j=r+1}^{s} c_j [\vec{p}_j]$$

となり V/W を生成していることが分かる． 次に

$$\sum_{j=r+1}^{s} c_j [\vec{p}_j] = \left[\sum_{j=r+1}^{s} c_j \vec{p}_j\right] = [\vec{0}]$$

[*16] これが証明されないと定義にならない．このような主張が成り立つとき，定義は well defined であるという．きちんと定義されているということだが，定まった簡潔な訳語はない．そのまま well defined ということが多い．

とすれば

$$\sum_{j=r+1}^{s} c_j \vec{p}_j \in W$$

となるので

$$\sum_{j=r+1}^{s} c_j \vec{p}_j = \sum_{i=1}^{r} d_i \vec{p}_i$$

と表せる．両辺の差（$\vec{0}$）は $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_r, \vec{p}_{r+1}, \ldots, \vec{p}_s\}$ の一次結合なので，係数は全て 0 になる．ゆえに $\{[\vec{p}_{r+1}], [\vec{p}_{r+2}], \ldots, [\vec{p}_s]\}$ は一次独立であり，V/W の基底になる． □

2 線形写像

2.1 線形写像の定義と例

体 K 上の二つの線形空間 V, W について，写像 $f : V \longrightarrow W$ が**線形写像**であるとは

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

が全ての $\vec{x}, \vec{y} \in V$ と $\alpha, \beta \in K$ について成り立つことを言う．$\alpha = \beta = 0$ を代入すれば $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ [*17]である．例をあげる．

例 2. (1) 行列の定める線形写像

(2) 恒等写像は線形写像である．これを I で表す．$\vec{0}_W$ への定値写像は線形写像である．これを 0 写像と呼び 0 と表す．なお，$\vec{0}_W$ 以外のベクトルへの定値写像は線形写像ではない．

(3) V を $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数全体の集合とするとき，$f \in V$ に導関数 f' を対応させる写像は線形写像である．より一般に与えられた $n+1$ 個の C^∞ 級関数 $a_0(x),\ a_1(x),\ \ldots, a_n(x)$ に対して $L(f) = a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x)$ は線形写像である．

(4) $[0, 1]$ 区間上の定積分は，積分可能関数全体の集合から $\mathbb{R}$ への線形写像である．

(5) $f(x)$ に対し $f(x-a)$ を対応させる写像（グラフの平行移動）は線形写像である．

(6) 数列 $\{a_n\}$ に対し番号を一つ前にずらした数列 $\{a_{n+1}\} = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ を対応させる写像は線形写像である．

定義域と値域が同じ線形写像 $f : V \longrightarrow V$ を**線形変換**[*18]と呼ぶ．値域が実数（または複素数）の線形写像を線形汎関数と呼ぶことがある．

線形写像 $f : V \longrightarrow W$ について部分空間 $V_1 \subset V$ の像

$$f(V_1) = \{\vec{w} \in W \mid f(\vec{v}) = \vec{w} \text{となる } V_1 \text{ の要素 } \vec{v} \text{ が存在する．}\} \subset W$$

は W の部分空間になる．また部分空間 $W_1 \subset W$ の逆像

$$f^{-1}(W_1) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) \in W_1\} \subset V$$

*17 V の 0 元と W の 0 元は一般に異なるものなので，V, W を添え字に使って区別した．

*18 線形変換という場合，全単射であることを仮定する場合もある．この講義では全単射であることは仮定しない．

は V の部分空間になる[19]．$f(V)$ を f の**像**と呼び $\mathrm{Im}f$，$f^{-1}(\{\vec{0}\})$ を f の**核**と呼び $\mathrm{Ker}f$ と表す．線形写像が全単射である時，f を**線形同型写像**と呼ぶ．このとき逆写像も線形同型写像になる．二つの線形空間 V と W の間に線形同型写像が存在するとき，V と W は**同型**であるという．

例 3. 例 2(2) の L について，核は微分方程式 $L(f) = 0$ の解の集合である．
例 2(4) の写像について，核は定数関数 0 （0 元）のみである．
例 2(5) の写像について，核は第 2 項以降が全て 0 の数列全体の集合である．

例 4. 有限次元線形空間 V とその基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ について，$\mathcal{P} : K^n \longrightarrow V$ は線形同型写像である．有限次元線形空間は次元が等しければ同型である．

問題 2.1. 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ と W の部分空間 W_1 について $f^{-1}(W_1)$ は V の部分空間になることを示せ．V の部分空間 V_1 について $f(V_1)$ は W の部分空間になることを示せ．

ヒント：部分空間の定義を満たすことを示せばよい．

問題 2.2. 線形変換 $f : V \longrightarrow V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき $V = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ となることを示せ．

ヒント：$\vec{v} - f(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}f$ を使う．$\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$ も示すこと．

問題 2.3. 線形写像 $f : V \longrightarrow W$, $g : W \longrightarrow U$ について $g \circ f = 0$ を満たすことと $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$ が成り立つこととは同値であることを示せ．

ヒント：$\vec{w} \in \mathrm{Im}f$ を仮定して $\vec{w} \in \mathrm{Ker}g$ を示す．

問題 2.4. $V = W_1 \oplus W_2$ について $f : W_2 \longrightarrow V/W_1$ を $f(\vec{x}) = [\vec{x}]$ で定義する．f は線形同型写像であることを示せ．

定理 2.1. 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ について
(1) f が単射 $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$
(2) 商空間 $V/\mathrm{Ker}f$ と $\mathrm{Im}f$ は同型である．
(3) V が有限次元のとき $\dim V = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f$

証明. (1) $\vec{0} \in \mathrm{Ker}f$ なので $\Longrightarrow$ は簡単に示せる．逆は

示してみよ．

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Longleftrightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}f$$

とし， $\mathrm{Ker}f = \{\vec{0}\}$ を使えばよい．
(2) $g : V/\mathrm{Ker}f \longrightarrow \mathrm{Im}f$ を $g([\vec{x}]) = f(\vec{x})$ と定めれば，右辺は $[\vec{x}]$ の代表元のとり方によらず g は well-defined である．また線形写像であることも簡単に分かる．さらに g は全単射になるので線形同型写像になる．

あらすじだけなので証明は自分でつけること．

(3) 同型な空間の次元は等しいことと商空間の次元についての定理から証明できる． □

V が有限次元のとき $\dim \mathrm{Im}f$ を f の**階数**と呼び $\mathrm{rank}f$ と表す．核の次元は $\dim V - \mathrm{rank}f$ である．

階数が行列の階数と同じ意味であることを確認せよ．

問題 2.5. V を $\mathbb{R}$ 上 C^1 級関数全体の集合，W を $\mathbb{R}$ 上連続関数全体の集合とする．線形写像 $T : V \longrightarrow W$ を $T(f) = f'$ で定めるとき $\mathrm{Ker}T$ を求めよ．また不定積分 $S(g) = \int f(x)dx$ は $S : W \longrightarrow V/\mathrm{Ker}T$ を定めることを示せ．ただし，連続関数が積分可能であることは既知とする．

[19] 像及び逆像の定義は実数と論理で学習する．これらの事実は簡単に証明できるので問題にする．

2.2　線形写像の表現行列

有限次元線形空間の間の線形写像 $f : V \longrightarrow W$ は基底を取ることによって行列によって表示できることを示そう．$\dim V = n$, $\dim W = m$ とし，V の基底 $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ と W の基底 $\mathcal{Q} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m\}$ をとる．

$$f(\vec{p}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{q}_i$$

とおけばこれは

$$f(\mathcal{P}) = (f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \ldots, f(\vec{p}_n)) = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m)\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \mathcal{Q}A$$

と表示できる．$\vec{x} \in V$ を $\vec{x} = \mathcal{P}\boldsymbol{x} = x_1\vec{p}_1 + \cdots + x_n\vec{p}_n$ とおけば f の線形性から

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{p}_1) + x_2 f(\vec{p}_2) + \cdots + x_n f(\vec{p}_n) = f(\mathcal{P})\boldsymbol{x} = \mathcal{Q}A\boldsymbol{x} = \Phi_{\mathcal{Q}}(A\boldsymbol{x})$$

を得るが，これは $f(\vec{x})$ の基底 $\mathcal{Q}$ に関する座標が $A\boldsymbol{x}$ であることを表している．行列 A を線形写像 f の基底 $\mathcal{P}$ 及び $\mathcal{Q}$ に関する**表現行列**と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{P}}"] \arrow[r, "A"'] & K^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{Q}}"']
\end{tikzcd}$$

基底の変換により表現行列がどう変化するかは，基底の変換と表現行列に関する図式を合わせてみれば理解できる．

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "B"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{P}}"] \arrow[dd, "P"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{Q}}"'] \arrow[dd, "Q"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{P}'}"'] \arrow[rrr, "A"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{Q}'}"]
\end{tikzcd}$$

V における座標変換の行列を P,　W における座標変換の行列を Q，f の表現行列は変換前を A 変換後を B とすれば $B = Q^{-1}AP$ である．

問題 2.6. $V = \langle 1,\ \cos 2x,\ \sin 2x \rangle = \{a + b\cos 2x + c\sin 2x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ とする．また $f : V \longrightarrow V$ を $f(\varphi) = \varphi'$ で定める．f の基底 $\{1,\ \cos 2x,\ \sin 2x\}$ に関する表現行列 A を求めよ．また基底 $\left\{\cos^2 x,\ \sin^2 x,\ \cos x \sin x\right\}$ に関する表現行列 B を求めよ．さらに $B = P^{-1}AP$ の関係が成り立つことを確認せよ．

線形写像 f に対して表現行列ができる限り簡単になるように基底を選ぶことは重要な問題である．さらに f が線形変換の場合には定義域と値域の基底は共通にする必要がある．これは行列に関する次の問題になる．

- $m \times n$ 型行列 A に対して，m 次正則行列 Q と n 次正則行列 P をうまく選ぶことにより，$Q^{-1}AP$ をできる限り簡単な行列にせよ．

- n 次正方行列 A に対して，n 次正則行列 P をうまく選ぶことにより $P^{-1}AP$ をできる限り簡単な行列にせよ．

前者の問題は行列の標準形の問題であり，1 年次の線形代数で学習している．ここでは基底をとることによって証明する．

教養の線形代数 p.42 定理 2.8

命題 2.2. 有限次元線形空間の間の線形写像 $f : V \longrightarrow W$ の階数が k であるとき，V の基底と W の基底をうまく選ぶことにより表現行列を次の形にできる．

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明. V の基底を $\mathrm{Ker} f$ の基底を延長する形で作る．ただし，付け加えるベクトルは $\mathrm{Ker} f$ の基底の前におく[*20]．

$$\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k, \vec{p}_{k+1}, \ldots, \vec{p}_n\} \qquad \vec{p}_{k+1}, \ldots, \vec{p}_n \in \mathrm{Ker} f$$

このとき $\{f(\vec{p}_1), f(\vec{p}_2), \ldots, f(\vec{p}_k)\}$ は一次独立になり，$\mathrm{Im} f$ の基底になる．これを延長する形で W の基底

このことを証明せよ．

$$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k, \vec{q}_{k+1}, \ldots, \vec{q}_m\} \qquad \vec{q}_j = f(\vec{p}_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

を作る．この基底による表現行列は

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

である． □

後者の問題の特別な場合が対角化であるが，対角化不可能な行列があるように一般的な議論は 1 年次では行えなかった．これを解決するのがジョルダンの標準形であるがこの章の残りでその概説を行う．

問題 2.7. 1 年次のテキストに載っている対角化の問題を解け．

2.3 不変部分空間

線形変換 $f : V \longrightarrow V$ について V の部分空間 W が $f(W) \subset W$ を満たすとき，f の**不変部分空間**と呼ぶ．f の像および核は不変部分空間のもっとも基本的な例である．$\dim V = n > \dim W = m \geqq 1$ のとき，V の基底を W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_m\}$ を延長することにより選べば $f(W) \subset W$ より $j \leqq r$ について

像および核が不変部分空間であることを確認せよ．

$$f(\vec{p}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{p}_i \in W$$

なので $a_{(m+1)j} = a_{(m+2)j} = \cdots = a_{nj} = 0$ である．すなわち表現行列は次のような形になる．

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

ここで左上のブロック A は f を W に制限した線形変換の表現行列である．V が f の不変部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_r$ の直和になっているときには，各 W_i の基底を集めることにより V の基底を作れば f の表現行列は

不変性とこの表現行列の形の関係を確認せよ．

*20 基底は並べ替えても基底なのでこのような扱いは問題ない．

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

の形になる．ここで A_j は f を W_j に制限した線形変換の表現行列である．この行列を $A_1, A_2, \ldots, A_r$ の**直和行列**と呼び

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$$

と表す．

問題 2.8. V の二つの線形変換 f, g が可換であるとき，すなわち $f \circ g = g \circ f$ が成り立つとき，

(1) $\mathrm{Ker} f$ は g 不変であることを示せ．
(2) W が g 不変なら $f(W)$ も g 不変であることを示せ．
(3) $g(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ ならば $g\left(f(\vec{v})\right) = \alpha f(\vec{v})$ であることを示せ．

α が線形変換 f の**固有値**であるとは $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x},\ \vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ が存在することを言う．またこのときの $\vec{x}$ を f の固有値 α に対する**固有ベクトル**という．

$$V(\alpha) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}\} = \mathrm{Ker}(f - \alpha I), \qquad I \text{ は恒等写像}$$

を f の固有値 α に対する**固有空間**という．$\vec{0}$ は固有ベクトルではないが固有空間には属している．また固有空間は線形写像の核として定義されているので部分空間である．

V が 1 次元以上の有限次元線形空間の場合[*21]は，V に基底を取ることにより f は正方行列 A で表現できる．α が f の固有値であるとき，α は A の固有値になり，方程式 $|xI - A| = 0$ の解になる．$|xI - P^{-1}AP| = |xI - A|$ よりこの左辺の多項式は基底の取り方に依存せず，f の**固有多項式**と呼ばれる．

線形変換 $f : V \longrightarrow V$ の固有値とその表現行列 A の固有値は同じ方程式の解なので同じである．基底を $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ とおくとき，

$$f(\vec{x}) = f(\mathcal{P}\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}A\boldsymbol{x}$$

であったので $\vec{x}$ が f の固有値 α に対する固有ベクトルであることと，その座標 $\boldsymbol{x}$ が A の固有ベクトルであることは同値である．$V_A(\alpha)$ を A の固有値 α に対する固有空間とすれば，この $\Phi_{\mathcal{P}} : K^n \longrightarrow V$ による像が f の固有空間 $V(\alpha)$ である．

以下，直和行列に関する基本性質を問題の形で与えておく．基本的に 1 年次の線形代数の演習問題である．

問題 2.9. 直和行列 $A \oplus B$ について次を示せ．

行列式については「教養の線形代数」定理 3.3.5

$$|A \oplus B| = |A||B|, \qquad \mathrm{rank}(A \oplus B) = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

問題 2.10. (1) 2 つの直和行列 $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_r$ と $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_r$ で各 j について P_j と Q_j の次数が等しいとき次が成り立つことを示せ．

ヒント：行列の分割乗法を使う．「教養の線形代数」p.12 例題 1.3.2

$$PQ = P_1Q_1 \oplus P_2Q_2 \oplus \cdots \oplus P_rQ_r$$

[*21] 無限次元の場合も固有値，固有空間は定義できるが固有多項式は定義できない．固有値は固有方程式の解という理解は有限次元でしか意味をなさない．

(2) $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_r$ が正則であるためには各 P_j がすべて正則であることが必要十分であることを示せ．また次が成り立つことを示せ．

$$P^{-1} = {P_1}^{-1} \oplus {P_2}^{-1} \oplus \cdots \oplus {P_r}^{-1}$$

命題 2.3. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を f の互いに異なる固有値とする．これらの固有空間は f で不変な部分空間であり，それらの和は直和である．

$$V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + \cdots + V(\alpha_r) = V(\alpha_1) \oplus V(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_r)$$

証明. $\vec{p} \in V(\alpha)$ について $f(\vec{p}) = \alpha\vec{p}$ が成り立つ．これを f で移せば

$$f(f(\vec{p})) = f(\alpha\vec{p}) = \alpha f(\vec{p})$$

となるので $f(\vec{p}) \in V(\alpha)$ である．すなわち固有空間 $V(\alpha)$ は f で不変である．

直和については定理 1.6 の (2) の性質を示す．$\vec{p}_j \in V(\alpha_j)$, $1 \leqq j \leqq r$ が

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_r = \vec{0}$$

を満たしたとする．両辺の f による像を考えれば

$$\alpha_1\vec{p}_1 + \alpha_2\vec{p}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{p}_r = \vec{0}$$

を得る．次々に f をかけて行けば

この議論は「教養の線形代数」p. 107 定理 5.4.1 の証明と基本的に同じである．

$${\alpha_1}^j\vec{p}_1 + {\alpha_2}^j\vec{p}_2 + \cdots + {\alpha_r}^j\vec{p}_r = \vec{0}$$

をえる．これは V のベクトルを成分とする行ベクトルと行列の積を使って，次のように表示できる．

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \cdots & {\alpha_1}^{r-1} \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 & \cdots & {\alpha_2}^{r-1} \\ 1 & \alpha_3 & {\alpha_3}^2 & \cdots & {\alpha_3}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_r & {\alpha_r}^2 & \cdots & {\alpha_r}^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \end{pmatrix}$$

ここで左辺の右側の行列の行列式はファン・デル・モンドの行列式[*22]であり $\Pi_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$ となる．よって α_j たちが互いに異なることから正則である．右から逆行列をかけて

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \end{pmatrix}$$

を得る． □

V が f の固有空間の直和になっているとき，すなわち固有空間の次元の和が $\dim V$ と一致するとき，f を**半単純**[*23]と呼ぶ．V が有限次元のときは f の表現行列が対角化可能であることに他ならない．

定理 2.4. V が有限次元のとき，V の線形変換 f が半単純であることと f の表現行列が対角化可能であることとは同値である．

*22 「教養の線形代数」p.60 例題 3.5.1

*23 単純とは f が恒等写像のスカラー倍のことを言う．半単純とはそれに準ずる扱いやすい単純な場合というニュアンスだが，はるかに普遍的な対象である．なお f は行列とは限らないので対角化可能という言葉は不適切だ．

証明. f が半単純であれば f の固有ベクトルを並べて V の基底を作ることができる．この基底に関する f の表現行列は対角行列である．よって他の基底に関する f の表現行列は，基底の変換行列を使って対角行列になる．

逆に f の基底 Q に関する表現行列 A が対角化可能とし，$P^{-1}AP$ を対角行列とする．P の各列ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ は A の固有ベクトルであり $A\boldsymbol{p}_j = \alpha_j\boldsymbol{p}_j$ が成り立つ．基底 Q に関して $\boldsymbol{p}_j$ を座標とするベクトル $\vec{v}_j = \Phi_Q\left(\boldsymbol{p}_j\right) \in V$ は

$$f(\vec{v}_j) = \Phi_Q\left(A\boldsymbol{p}_j\right) = \alpha_j\Phi_Q(\boldsymbol{p}_j) = \alpha_j\vec{v}_j$$

なので f の固有ベクトルになる．Q が基底なのでそれを正則行列 P で変換したベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ も基底である．よってあらゆるベクトルは固有ベクトルの一次結合で書けるので，固有空間の直和は V 全体と一致し，f は半単純である． □

問題 2.11. 有限次元線形空間で定義された線形変換 f について f と f の合成を $f^2 = f \circ f$ と表す．以下 $f^{k+1} = f \circ f^k$ と表す．$f^2 - 3f + 2I = 0$ のとき
(1) f の固有値は 1 と 2 に限ることを示せ．
(2) f は半単純であることを示せ．

ヒント：固有値の定義 $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ を利用する．後半は問題 2.3 の結果を利用する．

2.4 拡大固有空間

この節ではまず n 次複素正方行列 A の定める線形写像を考察する．複素係数 m 次多項式 $p(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ に対して $p(A)$ を

$$p(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

と定める．定義から 2 つの多項式について $p(A)$ と $q(A)$ は可換である．すなわち $p(A)q(A) = q(A)p(A)$ が成り立つ．次の命題はケイリー・ハミルトンの定理と呼ばれる．

何故可換かは少し例を考えてみれば分かるだろう．当たり前のことだ．

命題 2.5. A の固有多項式 $p(x) = |xI - A|$ について $p(A) = O$ が成り立つ．[*24]

証明. $p(P^{-1}AP) = P^{-1}p(A)P$ より A が対角化可能な場合は固有値が固有方程式の解であることに帰着される．一般の場合は n 次正方行列 $p(A)$ の各成分が n^2 個の文字 a_{ij} の多項式であること，対角化可能な行列は $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ の中で開集合を含む[*25]こと，一致の定理により開集合で 0 になる多項式は 0 多項式に限ることを使えば良い． □

対角化可能な場合の証明を考えよ．

以下，A は 2 つ以上の固有値を持つとし，その相異なる固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ として

$$p(x) = |xI - A| = (x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \ldots (x - \alpha_r)^{l_r}$$

と表す．また

$$p_j(x) = \frac{p(x)}{(x - \alpha_j)^{l_j}}, \qquad W_j = \mathrm{Ker}(A - \alpha_jI)^{l_j}$$

とおく．$p(x) = (x - \alpha_j)^{l_j}p_j(x)$ より $O = p(A) = (A - \alpha_jI)^{l_j}p_j(A)$ なので問題 2.3 の結果から $\mathrm{Im}\,p_j(A) \subset W_j$ が成り立つ．

[*24] 「教養の線形代数」p.101 定理 5.3.2 に完全な証明が記述されているが，テクニカルで分かりづらい．ここでは複素関数論で基本的な一致の定理を利用している．n^2 変数になっているが，一つの変数以外を固定すれば 1 変数の多項式関数でありもちろん正則である．

[*25] 固有値は行列によって連続に変化するので，固有値がすべて異なる行列の集合は開集合をなす．

命題 2.6. W_j は A の不変部分空間である．さらに

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

証明. 固有値が一つしかない場合は $p(x) = (x-\alpha)^n$ と $p(A) = (A-\alpha I)^n = O$ を得る．$W = \mathrm{Ker}(A-\alpha I)^n = \mathrm{Ker}O = \mathbb{C}^n$ なのでこの命題は成立している．

A が二つ以上の固有値を持つとする．$A(A-\alpha_j E)^{l_j} = (A-\alpha_j I)^{l_j}A$ より $W_j = \mathrm{Ker}(A-\alpha_j I)^{l_j}$ が A 不変であることは簡単に証明できる．

r 個の多項式 $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_r(x)$ は互いに素なので

$$p_1(x)h_1(x) + p_2(x)h_2(x) + \cdots + p_r(x)h_r(x) = 1$$

が成り立つように多項式 $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_r(x)$ をとることができる[*26]．よって

$$E = p_1(A)h_1(A) + p_2(A)h_2(A) + \cdots + p_r(A)h_r(A)$$

が成り立つ．$p_j(A)h_j(A) = B_j$ とおく．B_j について次が成り立つ．

- $i \neq j$ について $B_iB_j = 0$
  $(\because)$ $B_iB_j = p_i(A)h_i(A)p_j(A)h_j(A)$ だが $p_i(x)p_j(x)$ は $p(x)$ で割り切れるので $p(A) = O$ よりこれも 0 である．
- $(B_j)^2 = B_j$
  $(\because)$ $I = B_1 + B_2 + \cdots + B_r$ の両辺に B_j をかければ良い．
- $\mathrm{Im}B_j = W_j$
  $(\because)$ $(A-\alpha_j I)^{l_j}B_j = p(A)h_j(A) = O$ より $\mathrm{Im}B_j \subset W_j$ である．逆に $\boldsymbol{x} \in W_j$ をとる．$i \neq j$ について B_i の行列の積には $(A-\alpha_j I)^{l_j}$ が含まれるので $B_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．ゆえに

  $$\boldsymbol{x} = B_1\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{x} + \cdots + B_r\boldsymbol{x} = B_j\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}B_j$$

  なので $\mathrm{Im}B_j = W_j$ が成り立つ．

$\boldsymbol{x} = B_1\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{x} + \cdots + B_r\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ より

$$\mathbb{C}^n = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$$

が成り立つ．

次に $\boldsymbol{x} \in W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_r)$ をとる．

$$\boldsymbol{x} = B_j\boldsymbol{y}_j = B_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + B_{j-1}\boldsymbol{y}_{j-1} + B_{j+1}\boldsymbol{y}_{j+1} + \cdots + B_r\boldsymbol{y}_r$$

と表して，両辺に B_j をかければ右辺は $\boldsymbol{0}$ になるので

$$\boldsymbol{0} = B_j\boldsymbol{x} = (B_j)^2\boldsymbol{y}_j = B_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{x}$$

よってこの和は直和である． □

さて，有限次元複素線形空間 V の線形変換 f に戻ろう．f の表現行列の固有多項式は表現行列のとり方によらないので f の固有多項式と呼ぶ．f の固有値 α の固有多項式における重複度を l とし

$$W(\alpha) = \mathrm{Ker}(f-\alpha I)^l$$

[*26] 多項式の性質については付録にまとめておく．

と定め，固有値 α に対する**拡大固有空間**と呼ぶ．今までの議論をこの場合に適用すれば次が成り立つ．

定理 2.7. V を有限次元複素線形空間，$f: V \longrightarrow V$ を線形変換，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を f の互いに異なる固有値とする．拡大固有空間 $W(\alpha_i)$ は f の不変部分空間であり，さらに次が成り立つ．

$$V = W(\alpha_1) \oplus W(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_r)$$

2.5 ジョルダンの標準形

さて，有限次元複素線形空間 V で定義された線形変換 f の表現行列をできる限り単純なものにすることを考えよう．ただし厳密な証明は与えず，結論とそこから分かる事実を紹介するにとどめる．

まず**ジョルダン細胞**という r 次正方行列 $J(\alpha, r)$ を次で定める．$r \geqq 2$ については

$$J(\alpha, r) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_r + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{r-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

とし，$r = 1$ のときは $J(\alpha, 1)$ は 1 次正方行列（スカラー） α とする．

問題 2.12. $J(\alpha, r) - \alpha I = J(0, r)$ について

(1) $J(0, r)^{r-1} \neq O$ および $J(0, r)^r = O$ を示せ．
(2) $J(0, r)$ の階数は $r - 1$ であることを示せ．

表現行列を簡単にすることはジョルダン細胞を使って次のように記述できる[*27]．

定理 2.8. (1) n 次複素正方行列 A は正則行列 P をうまく取ることにより $P^{-1}AP$ をジョルダン細胞の直和にとして表せる．

$$P^{-1}AP = J(\alpha_1, r_1) \oplus J(\alpha_2, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, r_m)$$

この形はジョルダン細胞の並べ方を除いて一意であり，**ジョルダンの標準形**と呼ぶ．
(2) 線形変換は適当な基底を取ることにより表現行列をジョルダンの標準形にすることができる．

ジョルダンの標準形の重要性はどんな線形変換も表現行列をジョルダンの標準形にできるということだ．すなわち表現行列がジョルダンの標準形だと仮定しても一般性が失われない．そのため常微分方程式の停留点の安定性の議論などに応用できる．ただしこの定理の証明は煩雑なのでここでは省略する．ジョルダンの標準形の発見の仕方を解説し，常に可能だという感覚の助けにしたい．

さて，簡単な場合は次の命題からジョルダンの標準形を知ることができる．

[*27] ジョルダン細胞の次数がすべて 1 のときはジョルダンの標準形は対角行列である．対角化はジョルダンの標準形の特殊な場合である．

命題 2.9. (1) 拡大固有空間 $W(\alpha)$ の次元は $\alpha_k = \alpha$ を満たすジョルダン細胞の次数 r_k の総和に等しい．これは固有値の重複度である．
(2) 固有値 α について固有空間 $V(\alpha)$ の次元は $\alpha_k = \alpha$ を満たすジョルダン細胞の個数に等しい．

証明. (1) f がジョルダンの標準形

$$J(\alpha_1, r_1) \oplus J(\alpha_2, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, r_m)$$

で表現されたとすれば f の固有多項式は

$$(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \ldots (x - \alpha_m)^{r_m}$$

である．固有値 α の重複度は $\alpha = \alpha_k$ となる k について r_k たちを加え合わせたものである．それを l とおく．拡大固有空間 $W(\alpha)$ は $(f - \alpha I)^l$ の核だがこれは

$$J(\alpha_1 - \alpha, r_1)^l \oplus J(\alpha_2 - \alpha, r_2)^l \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m - \alpha, r_m)^l$$

で表現される．$\alpha_k \neq \alpha$ のときは $J(\alpha_k - \alpha, r_k)$ は正則なので l 乗しても階数は r_k である．$\alpha_k = \alpha$ のときは $J(0, r_k)$ となるので r_k 乗すれば O になる．$l \geqq r_k$ なので $J(0, r_k)^l = O$ である．よって，階数は $\alpha_k \neq \alpha$ となる k についての r_k の和であり，これは $n - l$ に他ならない．よって $\dim W(\alpha) = l$ である．

このことは 1 年次の線形代数で学習している．確認せよ．

直和行列の階数は各直和成分の階数の和である．これも 1 年次の学習事項だ．確認すること．

(2) $J(\alpha, r) - \alpha E = J(0, r)$ の階数は $r - 1$ なので

$$J(\alpha_1, r_1) \oplus J(\alpha_2, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, r_m) - \alpha I$$

の階数は n から $\alpha = \alpha_k$ となる k の個数を引いたものになる．ゆえに

$$\dim V(\alpha) = \alpha に対応するジョルダン細胞の個数$$

である． □

例 5. 固有値 α の重複度が 3 のとき，$\dim V(\alpha) = 1$ の場合は α に対するジョルダン細胞は $J(\alpha, 3)$，$\dim V(\alpha) = 2$ の場合は $J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 1)$，$\dim V(\alpha) = 3$ の場合は $J(\alpha, 1) \oplus J(\alpha, 1) \oplus J(\alpha, 1)$ である．固有空間の次元で完全に決定される．

固有値 α の重複度が 4 の場合は，$\dim V(\alpha) \neq 2$ の場合は，それぞれ一通りしかない．$\dim V(\alpha) = 2$ の場合は $J(\alpha, 3) \oplus J(\alpha, 1)$ の場合と $J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 2)$ の 2 通りの場合がある．この 2 つは $\mathrm{Ker}(f - \alpha I)^2$ の次元を考察することによって区別できる．

問題 2.13. 9 次元空間 V について，その線形変換 f の固有多項式が $(x - 2)^4(x - 3)^5$ であるとする．また $\mathrm{rank}(f - 2I) = 7$, $\mathrm{rank}(f - 2I)^2 = 6$, $\mathrm{rank}(f - 2I)^3 = 5$ および $\mathrm{rank}(f - 3I) = 7$, $\mathrm{rank}(f - 3I)^2 = 5$, $\mathrm{rank}(f - 2I)^3 = 4$ を満たすとする．f のジョルダンの標準形を求めよ．

ヒント：$\dim \mathrm{Ker}(f - \alpha I)^k = 9 - \mathrm{rank}(f - \alpha I)^k$ である．

さて，ジョルダンの標準形にする行列 P を得るために，ジョルダン細胞と P の列ベクトルの条件を考察する．[*28] k 番目のジョルダン細胞 $J(\alpha_k, r_k)$ は $P^{-1}AP$ の第 $r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-1} + 1$ 列から第 $r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-1} + r_k$ 列までに対応する．

$$AP = A(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = P\,(J(\alpha_1, r_1) \oplus J(\alpha_2, r_2) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, r_m))$$

[*28] 基本的には対角化する行列を得るための議論と同じである．対角成分の 1 つ上の 1 をどのように考えるかがポイントである．

として第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 列から第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k$ 列までを書き出すと

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1} &= \alpha_k \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1}\\
A\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+2} &= \alpha_k \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+2} + \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1}\\
A\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+3} &= \alpha_k \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+3} + \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+2}\\
&\cdots\\
A\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k} &= \alpha_k \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k} + \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k-1}
\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}
(A-\alpha_k I)\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1} &= \boldsymbol{0}\\
(A-\alpha_k I)\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+2} &= \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1}\\
(A-\alpha_k I)\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+3} &= \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+2}\\
&\cdots\\
(A-\alpha_k I)\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k} &= \boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k-1}
\end{aligned}$$

であり第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 列から第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k$ 列までは $W(\alpha_k)$ のベクトルである．またこれらのベクトルは $\boldsymbol{p}_{r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+r_k}$ に順に $(A-\alpha_k I)$ をかけていくことにより得られる．そこで

$$V(\alpha) = \mathrm{Ker}(A-\alpha I) \subsetneqq \mathrm{Ker}(A-\alpha I)^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathrm{Ker}(A-\alpha I)^k = W(\alpha)$$

となる k を求め，$\boldsymbol{p} \in W(\alpha) - \mathrm{Ker}(A-\alpha I)^{k-1}$ をとり

$$\{(A-\alpha I)^{k-1}\boldsymbol{p}, (A-\alpha I)^{k-2}\boldsymbol{p}, \ldots, (A-\alpha I)\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\}$$

を作れば，一つのジョルダン細胞に対応する一次独立なベクトルの組が得られる．以下の議論は煩雑になるので例によって説明することにする．

例 6. 次の行列をジョルダンの標準形にしてみよう．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

どちらの行列も固有値は 2（重複度 4）なので拡大固有空間 $W(2)$ は 4 次元であり全空間に一致する．そこでそれぞれから $2I_4$ を引いた行列を

$$(1)\ C = A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ D = B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．まず (1) について C の階数は 3 であり固有空間 $V(2)$ は 1 次元である．ゆえにジョルダン細胞は一つなので，ジョルダンの標準形は $J(2,4)$ である．ジョルダンの標準形にする行列を求めるには

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^4 = O$$

より，$W(2) - \mathrm{Ker}C^3$ から一つベクトルをとり $\boldsymbol{p}$ とおいて $\left\{C^3\boldsymbol{p}, C^2\boldsymbol{p}, C\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\right\}$ を並べた行列 P を作ればよい．例えば $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1$ とおけば $C^k\boldsymbol{p}$ は C^k の第 1 列になるから

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}CP = J(0,4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る．$P^{-1}AP = P^{-1}(C + 2I_4)P = P^{-1}CP + 2I_4 = J(2,4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(2) については D の階数が 1 なので固有空間 $V(2)$ の次元は 3 である．ジョルダン細胞は三つなので，ジョルダンの標準形は $J(2,2) \oplus J(2,1) \oplus J(2,1)$ である．ジョルダンの標準形にする行列を求めるには $D^2 = O$ なので，$W(2) - \mathrm{Ker} D$ からベクトル $\boldsymbol{p}$ を取ってくれば $\langle D\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle$ が D の不変部分空間である．ここで $D\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ker} D = V(2)$ であるが，$\mathrm{Ker} D = V(2)$ は 3 次元なので二つベクトルを付け加えて $V(2)$ の基底が作れる．具体的には例えば次のようにすれば良い．

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで $\{D\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ が $V(2)$ の基底になるように定めている．結局

$$P = (D\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J(0,2) \oplus J(0,1) \oplus J(0,1)$$

を得る．$P^{-1}BP = J(2,2) \oplus J(2,1) \oplus J(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

問題 2.14. 次の行列をジョルダンの標準形にせよ．

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

次の問題はジョルダン細胞を与える一次独立なベクトルの組の理解につながる．

問題 2.15. 線形変換 $f : V \longrightarrow V$ と $\vec{p} \in V$ について $f^r(\vec{p}) = \vec{0}$, $f^{r-1}(\vec{p}) \neq \vec{0}$ が成り立つとき r 個のベクトルの組 $\{f^{r-1}(\vec{p}), f^{r-2}(\vec{p}), \ldots, f^2(\vec{p}), f(\vec{p}), \vec{p}\}$ は一次独立であることを示せ．

ヒント：一次結合を作り，その f^{r-1} により移った先を考えよ．以下，f^k の k を 1 つずつ下げていって考察せよ．「教養の線形代数」問題 5.2 の 4

2.6 双対空間

体 K 上の線形空間 V に対して V から K への線形写像全体の集合を V の**双対空間**と呼び V^* と表す．

定理 2.10. V が有限次元のとき $\dim V^* = \dim V$ が成り立つ．

証明. V を n 次元線形空間とし，$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ を V の基底とし， $\omega_j : V \longrightarrow K$ を

$$\omega_j \in V^*, \quad \omega_j(\vec{a}_k) = \delta_{jk}{}^{*29} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

*29 この記号を**クロネッカーのデルタ**と呼ぶ．

と定める．$\rho \in V^*$ について

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} \rho(\vec{a}_j)\omega_j$$

が成り立つので，$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ は V^* を生成する．また一次独立性については

$\vec{x}$ を基底の一次結合で表し，代入してみれば簡単に確認できる．実行せよ．

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\omega_j\right)(\vec{a}_k) = c_k$$

を使えば良い．$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ は V^* の基底であり，$\dim V^* = \dim V$ が成り立つ．この基底を $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ の**双対基底**とよぶ． □

問題 2.16. 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ の V の基底 $\mathcal{P}$ と W の基底 $\mathcal{Q}$ に関する表現行列の (i, j) 成分は $\varphi_i(f(\vec{p}_j))$ であることを示せ．ただし $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ は $\mathcal{Q}$ の双対基底である．

3 計量線形空間

3.1 計量線形空間の定義と例

V を複素線形空間とする．V の任意の二つの要素 $\vec{a}, \vec{b}$ に対して複素数 $(\vec{a}, \vec{b})$ が定まり以下を満たすとき**内積**と呼ぶ．内積を定められた線形空間を**計量線形空間**と呼ぶ．

ここで係数を複素数として記述しているが実数の場合は複素共役を省くだけでよい．

実の場合の定義は「教養の線形代数」p.112 に記述されている．

(I) $(\vec{a}, \vec{b}) = \overline{(\vec{b}, \vec{a})}$

(II) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}), \quad (\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \bar{\alpha}\vec{b})$

(III) $(\vec{a}, \vec{a}) \geqq 0$

(IV) $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

計量線形空間において**ノルム**を

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \geqq 0$$

で定める[*30]．ノルムと内積について，次が成り立つ．

定理 3.1. (1) $\left|(\vec{a}, \vec{b})\right| \leqq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ （コーシー・シュワルツの不等式）
(2) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ （三角不等式）

証明. (1) 実数 t について

$$\left\|t\vec{a} + (\vec{a}, \vec{b})\vec{b}\right\|^2 \geqq 0$$

が成り立つ．左辺を内積を使って表し内積の性質を使えば不等式

$$\|\vec{a}\|^2 t^2 + 2\left|(\vec{a}, \vec{b})\right|^2 t + \left|(\vec{a}, \vec{b})\right|^2 \|\vec{b}\|^2 \geqq 0$$

を得る．これがすべての t について成り立つので $\vec{a} \neq \vec{0}$ の場合には判別式より

$$\left|(\vec{a}, \vec{b})\right|^4 - \left|(\vec{a}, \vec{b})\right|^2 \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \leqq 0$$

[*30] ノルムを内積から定めるのではなくノルムの公理から定める方法もある．ここでのノルムはノルムの定義というよりノルムの例の一つというほうが正確である．

を得る．$(\vec{a},\vec{b}) \neq 0$ の場合にはこの絶対値の 2 乗で割れば良い．やり残した場合は $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ の場合だが，この場合は不等式の左辺が 0 なので当然成り立つ．
(2) 左辺の二乗を計算すれば

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{a}) + \|\vec{b}\|^2$$

であるが第 2 項と第 3 項の和は

$$(\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{a}) = 2\mathrm{Re}(\vec{a},\vec{b}) \leqq 2\left|(\vec{a},\vec{b})\right| \leqq 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

である．ゆえに

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leqq \left(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\right)^2$$

を得る． □

例 7. $V = \mathbb{C}^n$ について，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum x_j\overline{y_j}$ は内積である．これを $\mathbb{C}^n$ の標準内積と呼ぶ．これを $\mathbb{R}^n$ に制限したものも標準内積と呼ぶ．

これが内積であることを確かめよ．

例 8. V を $\mathbb{R}$ 上定義された周期 2π の複素数値連続関数全体の集合 $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ は連続, $f(x+2\pi) = f(x)\}$ とする．

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad f,g \in V$$

は内積である．この場合 Cauchy-Schwarz の不等式は

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2 \leqq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx$$

となる．ここで $f(x)$ を $|f(x)|$ に置き換え，$g(x) = 1$（定数関数）とおけば次を得る．

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|dx\right)^2 \leqq 2\pi \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

問題 3.1. 例 8 の (f,g) が内積であることを示せ．

有限次元計量線形空間に基底 $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n\}$ を取ると

$$(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{a}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{a}_j\right) = \sum_{i,j} x_i\overline{y_j}\left(\vec{a}_i,\vec{a}_j\right) = {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{y}}$$

となる．$\boldsymbol{x}$ は $\vec{x}$ のこの基底に関する座標である．

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \left(\vec{a}_i,\vec{a}_j\right) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

を内積の基底 $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n\}$ に関する**表現行列**と呼ぶ．内積の性質から ${}^t\bar{A} = A$ が成り立つ．

問題 3.2. 基底を $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\}$ に取り替えたとき，内積の表現行列はどう変わるか．ただし基底の変換の行列を P とせよ．

実計量線形空間 V とその双対空間 V^* には次のような関係がある．

命題 3.2. V を実計量線形空間とする．$\vec{x} \in V$ に対し $\varphi_{\vec{x}} \in V^*$ を $\varphi_{\vec{x}}(\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$ で定める．このときこの写像は単射線形写像である．特に V が有限次元であれば同型である．

証明. $\varphi_{\vec{x}}$ が線形であることは内積の第 2 成分に関する線形性より示される．この写像自体の線形性は，内積の第 1 成分に関する線形性である．単射であることは $\vec{x} \neq \vec{0}$ について $\varphi_{\vec{x}}(\vec{x}) > 0$ より分かる．さらに V が有限次元であるとき，$\dim V^* = \dim V$ なので，単射線形写像は同型写像になる． □

例 9. V を $[0,1]$ 区間上の実連続関数全体の集合とし，内積を $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ で定める．$\delta_c \in V^*$ を $\delta_c(f) = f(c)$ で定めるとき $\varphi_g = \delta_c$ となる $g \in V$ は存在しない．上の命題での写像は全射ではない．

3.2 正規直交基底

複素内積では二つのベクトルの角度は定義されない．しかし，$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ により**直交**という概念は定義できる．2 点の距離も $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ で定義できる[*31]ので図形的な考察が可能になる．

そこで V の部分空間 W と W 外の一点 $\vec{v}$ について $\vec{v}$ から W に垂線を下すことを考えよう．これは W が有限次元の場合は次のような議論を行えばよい．

(1) W の基底 $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ をとる．
(2) $\vec{w}_0 = \sum c_j \vec{p}_j$ を $\vec{v}$ から W に下ろした垂線の足だとする．ベクトル $\vec{v} - \vec{w}_0$ は W のベクトルと直交するので $(\vec{v} - \vec{w}_0, \vec{p}_k) = (\vec{v}, \vec{p}_k) - (\vec{w}_0, \vec{p}_k) = 0$ である．
(3) $\vec{w}_0$ を基底により成分表示を使して

$$(\vec{v}, \vec{p}_k) - \sum_{j=1}^{n} c_j(\vec{p}_j, \vec{p}_k) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

となるが，これは $c_1, c_2, \ldots, c_n$ についての連立 1 次方程式である．
(4) 係数行列は V の内積を W に制限したものの表現行列なので，正則である．よってこの連立 1 次方程式は唯一の解を持つ．その解の定めるベクトルが垂線の足である．

計量線形空間 V の部分空間 W に対して

$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in \mid \text{すべての } \vec{y} \in W \text{ に対して } (\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$$

と定める．内積の双線形性から $W^{\perp}$ が V の部分空間になることが簡単に示せる．これを W の**直交補空間**とよぶ．

部分空間になることを証明せよ．

命題 3.3. 有限次元部分空間 W について $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つ．

証明. $\vec{v} \in V$ について $\vec{v}$ から W に下ろした垂線の足を $\vec{w}_0$ とおく．$\vec{v} - \vec{w}_0$ は W と直交するので

$$\vec{v} = \vec{w}_0 + (\vec{v} - \vec{w}_0) \quad \vec{w}_0 \in W,\ \vec{v} - \vec{w}_0 \in W^{\perp}$$

なので $V = W + W^{\perp}$ である．

[*31] 集合 X について $d(x,y)$ が距離であるとは (1) $d(x,y) = d(y,x)$ (2) $d(x,y) \geqq 0$ で等号は $x = y$ の時のみ成り立つ (3) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$ の三つの性質が成り立つことを言う．詳しくは幾何概論 I で学習する．

$\vec{w} \in W \cap W^\perp$ をとる．$(\vec{w}, \vec{w})$ は W のベクトルと $W^\perp$ のベクトルの内積と見ることができるので 0 である．ゆえに内積の性質により $\vec{w} = \vec{0}$ となり $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ を得る．よって和は直和であり $V = W \oplus W^\perp$ が成り立つ． □

V の一次独立なベクトルの組 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ について $k \geqq 2$ のとき $\vec{b}_k$ を

$$\vec{a}_k = \vec{c}_k + \vec{b}_k \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle \oplus \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1} \rangle^\perp$$

と定める．また $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ とおく．このとき，命題 1.3 より $\vec{b}_k \neq \vec{0}$ である．またすべての k について $\vec{b}_k = \vec{a}_k - \vec{c}_k \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle$ を満たす．ゆえに $\vec{b}_k$ たちは互いに直交するとともに，すべての k について $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \rangle = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \rangle$ が成り立つ（この部分は問題にしておく．）．

問題 3.3. 以上の記号のもとに $\vec{a}_k \in \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k \rangle$ を示せ．

これを具体的に求める計算法は**グラム・シュミットの直交化法**と呼ばれている．具体的には

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \qquad \vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\vec{a}_k, \vec{b}_j)}{\|\vec{b}_j\|^2} \vec{b}_j$$

と定めればよい．さらに $\vec{b}_j$ をそのノルムで割ればノルム 1 のベクトルを得る．これを正規化という．このとき互いに直交しているという性質は変わらない．ここまでの操作を正規直交化と呼ぶ．

問題 3.4. 1 年次のテキストに載っているグラムシュミットの直交化の問題を解け．

有限次元計量線形空間の基底を正規直交化すれば，**正規直交基底**（大きさが 1 で互いに直交するベクトルの組からなる基底）を作ることができる．正規直交基底による内積の表現行列は単位行列である．

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ を正規直交基底とするとき $\vec{x} \in V$ について

$$\vec{x} = (\vec{x}, \vec{a}_1)\vec{a}_1 + (\vec{x}, \vec{a}_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\vec{x}, \vec{a}_n)\vec{a}_n$$

が成り立つ．

問題 3.5. V を計量線形空間とし，W をその有限次元部分空間とする．W の基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ を正規直交基底としてとる．$\vec{x} \in V$ から W の点までの距離（差のノルム）を最小にする点は

$$(\vec{x}, \vec{a}_1)\vec{a}_1 + (\vec{x}, \vec{a}_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\vec{x}, \vec{a}_n)\vec{a}_n$$

で与えられることを示せ[*32]．

さらにこの点は $\vec{x}$ から W に下ろした垂線の足であること，すなわち

$$\vec{x} - \left((\vec{x}, \vec{a}_1)\vec{a}_1 + (\vec{x}, \vec{a}_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\vec{x}, \vec{a}_n)\vec{a}_n\right)$$

が W と直交することを示せ．

例 10. 例 8 において $\left\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ は直交系である．これらをノルムでわって

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

[*32] $\vec{x}$ は W のベクトルではないのでこの式は $\vec{x}$ とは一致しない．

は正規直交系になる．$f \in V$ について

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n}(f, f_k)f_k(x) \right\| = 0$$

はパーシバルの等式として知られている．V にはノルムによって距離が定められるが，この距離について

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(f, f_k)f_k$$

が成り立つことを意味する．$\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は代数的な意味では基底ではないが，距離を考慮すれば基底と同様に扱うことができる．この和を**フーリエ級数**と呼ぶ．

問題 3.6. V を区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数全体の集合とし，その内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

で定める．

(1) V の関数の組 $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ を直交化せよ．

(2) $p_n(x) = \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}/(2^n n!)$ とおく[*33]とき次を示せ．

$$(p_n, p_m) = \int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ヒント：$n \geqq m$ として n を下げ (積分) m を上げる (微分) する形で部分積分を n 回繰り返す．$(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ を k 回微分したもの（$k < n$）は $(x-1)(x+1)$ で割り切れることに注意せよ．

(3) (1) で得られた関数は $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ の定数倍になっていることを確認せよ．

ここで導入した多項式を**ルジャンドルの多項式**と呼ぶ．例 10 と合わせて直交関数系の重要な例である．

3.3　内積に関して定まる様々な変換

計量線形空間の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ が内積を保つとき，すなわち

$$(T(\vec{x}), T(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$$

を満たすとき，**ユニタリ変換**（**直交変換**）[*34]という．ユニタリ変換の正規直交基底に関する表現行列[*35]は

$$A{}^t\bar{A} = AA^* = E$$

を満たすがこれを**ユニタリ行列**（**直交行列**）という．ここで $A^* = {}^t\bar{A}$ であり A の**随伴行列**（**転置行列**）と呼ぶ．

このことを証明せよ．

計量線形空間の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ が

$$(T(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, T(\vec{y}))$$

を満たすとき**エルミート変換**（**対称変換**）という．また

$$(T(\vec{x}), \vec{y}) = -(\vec{x}, T(\vec{y}))$$

[*33] 右肩の (n) は n 回微分を表す．

[*34] 括弧内は実計量に関する対応する概念，以下同様．

[*35] これを考えられるのは V が有限次元の場合である．ユニタリ変換の定義は V が有限次元でない場合でも構わない．

を満たすとき**歪エルミート変換**（**歪対称変換**）という．（歪）エルミート変換の正規直交基底による表現行列は $A^* = A$ （$A^* = -A$）を満たす．これを**（歪）エルミート行列**（**対称行列**）という．

命題 3.4. (1) ユニタリ変換の固有値は絶対値 1 の複素数である．
(2) エルミート変換の固有値は実数である．
(3) 歪エルミート変換の固有値は 0 または純虚数である．

証明. α を T の固有値 $\vec{x}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとする．T がユニタリ変換のときは
$$(T(\vec{x}), T(\vec{x})) = (\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 (\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x})$$
より $|\alpha| = 1$ である．他の場合も同様に示せるので問題にしておく． □

問題 3.7. エルミート変換の固有値は実数であることを示せ．また歪エルミート変換の固有値は 0 または純虚数であることを示せ．

ヒント：$T(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$ として，$(T(\vec{x}), \vec{x})$ を考えよ．

問題 3.8. エルミート変換および歪エルミート変換の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

ヒント：$\vec{x}, \vec{y}$ を相異なる固有値に対する固有ベクトルとして $(T(\vec{x}), \vec{y})$ を考えよ．

例 11. V を周期 2π の複素数値 C^∞ 級関数全体の集合として，内積
$$V \ni f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + 2\pi) = f(x), \qquad (f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$
を入れておく．一回微分 $f \longmapsto f'$ は歪エルミート変換，２回微分 $f \longmapsto f''$ はエルミート変換である．２回微分の固有値は $\{-k^2 \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ であり，それぞれに対する固有空間は $V(-k^2) = \left\langle e^{ikx}, e^{-ikx} \right\rangle$ である．異なる固有値に対する固有空間は互いに直交する．

このことを確認せよ．

計量線形空間の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ に対して
$$(T(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, T^*(\vec{y}))$$
を満たす線形変換 $T^* : V \longrightarrow V$ を T の**随伴変換**と呼ぶ．

命題 3.5. 随伴変換は存在すれば唯一である．

証明. S_1 と S_2 を T の随伴変換とすると
$$(T(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, S_1(\vec{y})) = (\vec{x}, S_2(\vec{y}))$$
が成り立つ．ゆえに
$$(\vec{x}, (S_1 - S_2)(\vec{y})) = 0$$
である．ここで $\vec{x} = (S_1 - S_2)(\vec{y})$ とおけば内積の性質 (IV)) から
$$(S_1 - S_2)(\vec{y}) = \vec{0} \qquad S_1(\vec{y}) = S_2(\vec{y})$$
を得る．$\vec{y}$ は任意なので $S_1 = S_2$ を得る． □

V が有限次元のときには，T の正規直交基底による表現行列を A とおけば，T^* は $A^* = {}^t\bar{A}$ によって表現される線形変換になる．ゆえに随伴変換は必ず存在し，ユニタリ変換，エルミート変換，歪エルミート変換はそれぞれ $T^* = T^{-1}$，$T^* = T$，$T^* = -T$ を満たす変換として理解できる．

問題 3.9. 計量線形空間の線形変換 T とその随伴変換 T^* について $T+T^*$ はエルミート変換であることを示せ．また $T-T^*$ は歪エルミート変換であることを示せ．さらに，随伴変換をもつ線形変換はエルミート変換と歪エルミート変換の和として一意的に表されることを示せ．

3.4 正規行列のユニタリ行列による対角化

n 次正方行列が $A^*A = AA^*$ を満たすとき，**正規行列**と呼ぶ．ユニタリ行列，エルミート行列，歪エルミート行列はいずれも正規行列である．実対称行列の直交行列による対角化と同様な考えで次の定理を示すことができる．

定理 3.6. (1) 正規行列はユニタリ行列によって対角化できる．逆にユニタリ行列によって対角化される行列は正規行列である．
(2) 対称行列は直交行列によって対角化できる．逆に直交行列によって対角化される実行列は対称行列である．

まず次の命題を示そう．

命題 3.7. A を n 次正規行列，P を n 次ユニタリ行列とするとき，$P^{-1}AP = P^*AP$ は n 次正規行列である．

証明. まず $(AB)^* = B^*A^*$ および $(A^*)^* = A$ より

転置行列と複素共役の性質を使う．証明せよ．

$$(P^*AP)^* = P^*A^*(P^*)^* = P^*A^*P$$

が成り立つ．P はユニタリなので

$$(P^{-1}AP)^*P^{-1}AP = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = P^{-1}A^*AP$$

であるが，A が正規行列であることから $A^*A = AA^*$ である．以下の議論は省略する． □

やさしいことなので証明をつけてみよ．

さて定理の証明に戻ろう．議論は A の次数についての数学的帰納法である．

証明. A を正規行列，α を A の固有値[*36]，$\boldsymbol{p}_1$ を α に対するノルム 1 の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{p}_1$ にベクトルを $n-1$ 個付け加えて正規直交基底にする．それを並べた行列を P とおけば P はユニタリ行列である．さらに

$$P^{-1}AP = P^*AP = \begin{pmatrix} \alpha & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & B & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで A が正規行列で P がユニタリ行列であることから，P^*AP も正規行列になる．$P^*AP(P^*AP)^*$ と $(P^*AP)^*P^*AP$ の $(1,1)$ 成分どおしを比較すると，$z\bar{z} = |z|^2$ より

このことに証明をつけよ．

$$|\alpha|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 + \cdots + |b_n|^2 = |\alpha|^2$$

[*36] 体を複素数にとっているので n 次方程式は必ず解を持つ．すなわち固有値は存在する．

を得るので，$b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ となる．ゆえに

$$P^{-1}AP = P^*AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \alpha \oplus B^{*37}$$

ここで $n = 2$ の場合は B はスカラー（1 次正方行列）なので対角化された．一般の場合は B は $n - 1$ 次正規行列なので帰納法の仮定を使い $n - 1$ 次ユニタリ行列 Q により対角化できるとしてよい．

B が正規行列であることを証明せよ．

$$Q^{-1}BQ = Q^*BQ = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$R = P(1 \oplus Q)$ とおけば R はユニタリ行列で

$$R^*AR = (1 \oplus Q^*)P^*AP(1 \oplus Q) = (1 \oplus Q^*)(\alpha \oplus B)(1 \oplus Q) = \alpha \oplus (Q^*BQ)$$

を得る．これは対角行列でありユニタリ行列で対角化可能であることが証明された．

A が対称行列の場合は固有値が全て実数なので固有ベクトル $\vec{p}_1$ を実ベクトルからとることができる．すなわちこの証明における P をは実ユニタリ行列，すなわち直交行列としてとれる．ゆえに $n = 2$ の場合は直交行列で対角化された．後は同様に数学的帰納法を使えばよい． □

この証明で使った事実を問題にしておく．

問題 3.10. (1) ユニタリ行列の積はユニタリ行列であることを示せ．
(2) ユニタリ行列の直和行列はユニタリ行列であることを示せ．

正規行列（対称行列）のユニタリ行列（直交行列）による対角化は通常の対角化のように固有値固有ベクトルを求めれば良い．ただし，各固有ベクトルは各固有空間の正規直交基底にする必要があるので，必要に応じてグラム・シュミットの直交化法を使用する．なお，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交している．

問題 3.11. 1 年次のテキストに載っている対称行列の直交行列による対角化の問題を解け．

3.5　二次形式，エルミート形式

線形空間において内積の公理から正値性を除いたもの (,) を**エルミート形式**（実線形空間の場合は二次形式）とよぶ．有限次元線形空間のエルミート形式は基底を取ることによりエルミート行列 A により表現される．

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\bar{\boldsymbol{y}}$$

[37] この表示において α を 1 次正方行列とみなし B との直和行列としている．

ここで，基底を変換すれば表現行列は ${}^t\!PA\bar{P}$ に変わる．ゆえにエルミート行列 A をユニタリ行列 $\bar{P}$ によって対角化すれば，P による基底の変換で表現行列は

$$ {}^t\!PA\bar{P} = \bar{P}^{-1}A\bar{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} $$

となる．ここでエルミート行列の固有値は実数なので，最初の p 個の固有値は正，続く q 個の固有値は負，その後の $r = n - p - q$ 個の固有値は 0 になるように P をとる．対角行列 Q を

$$ Q = (q_{ij}), \qquad q_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1/\sqrt{\alpha_i} & (1 \leqq i = j \leqq p) \\ 1/\sqrt{-\alpha_i} & (p+1 \leqq i = j \leqq p+q) \\ 1 & (p+q+1 \leqq i = j \leqq n) \end{cases} $$

で定めれば，PQ による基底の変換によって

$$ {}^t(PQ)A\overline{PQ} = {}^t\!Q\,{}^t\!PA\overline{PQ} = \begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix} $$

となる．このときエルミート形式は

$$ (\vec{x}, \vec{y}) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_p\overline{y_p} - x_{p+1}\overline{y_{p+1}} - \cdots - x_{p+q}\overline{y_{p+q}} $$

と表示される．これをエルミート形式の標準形という．

定理 3.8 (Sylvester の慣性法則)**.** 有限次元線形空間におけるエルミート形式について標準形は一通りである．表示の (p, q) を符号数とよぶ．また q をエルミート形式の指数，r をエルミート形式のナリティーとよぶ．

証明. $\mathrm{rank}A = p + q$ より $p + q$ は一定である．そこで二通りの標準形を持ったとし，それぞれの符号を (p, q)，(s, t) とすれば $p + q = s + t$ である．$p > s$ と仮定する．またそれぞれの標準形を与える基底を $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n\}$，$\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n\}$ としておく．$p + n - s > n$ より

$$ \left\langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_p \right\rangle \cap \langle \vec{q}_{s+1}, \ldots, \vec{p}_n \rangle \neq \{\vec{0}\} $$

である．ゆえに，ここから $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{v}$ が取れる．$\vec{v} \in \left\langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_p \right\rangle$ より $(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ である．一方，$\vec{v} \in \langle \vec{q}_{s+1}, \ldots, \vec{q}_n \rangle$ より $(\vec{v}, \vec{v}) \leqq 0$ である．よって矛盾であり，(p, q) は一通りであることが分かる． □

エルミート形式が「すべての $\vec{a} \neq \vec{0}$ について $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$」という条件を満たす時，**正定値**という．「すべての $\vec{a}$ について $(\vec{a}, \vec{a}) \geqq 0$」という条件を満たす時は**半正定値**という．この不等号を逆にした条件を満たす時は負定値，半負定値という．半正定値でも半負定値でもない場合，すなわち $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ を満たす $\vec{a}$ が存在し，一方で $(\vec{b}, \vec{b}) < 0$ となる $\vec{b}$ が存在するときは**不定値**という．

エルミート形式が「各 $\vec{a} \neq \vec{0}$ について，$(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$ を満たす $\vec{b}$ が存在する．」という条件を満たす時，**非退化**という．

定理 3.9. 有限次元線形空間上のエルミート形式（2 次形式）のの符号数を (p,q) ナリティーを r とする．

(1) $(\ ,\ )$ が正定値 $\Longleftrightarrow q = r = 0$
(2) $(\ ,\ )$ が半正定値 $\Longleftrightarrow q = 0$
(3) $(\ ,\ )$ が非退化 $\Longleftrightarrow r = 0$

証明. (1)(2) は標準形の形を見ればよい．

(3) について $(\ ,\ )$ が非退化でないとしよう．このとき $\vec{a} \in V$ で，すべての $\vec{y}$ に対して $(\vec{a},\vec{y}) = 0$ となるものが存在する．ここで，V の基底を一つ取り，$\vec{a}$ の座標を $\boldsymbol{a}$ とおけば，

$$(\vec{a},\vec{y}) = {}^t\boldsymbol{a}A\bar{\boldsymbol{y}} = 0$$

であるが $\boldsymbol{y}$ は任意に取れるので，${}^t\boldsymbol{a}A = {}^t\boldsymbol{0}$ である．仮定より $\vec{a} \neq \vec{0}$ なので，これは A が正則でないことを意味する．A は固有値として 0 を持つので $r > 0$ である．逆も同様である．逆に $r > 0$ であれば，${}^t\boldsymbol{a}A = {}^t\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ が存在するので，$\boldsymbol{a}$ を座標とするベクトル $\vec{a}$ を取ればよい． □

問題 3.12. 計量線形空間 V と，そのエルミート変換 $T : V \longrightarrow V$ について

$$(\vec{v},\vec{w})_T = (\vec{v},T(\vec{w}))$$

はエルミート形式であることを示せ．

例 12. $\mathbb{R}^4$ に符号数 $(3,1)$ の二次形式

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

を「内積」として定めたものをミンコフスキー空間と呼ぶ．特殊相対性理論の記述に使われる．

4 多項式環（付録）

拡大固有空間の議論で使った複素係数多項式の集合の性質をまとめておく．代数概論などの講義でも扱うことになる．K を体とし $\mathcal{P}_K(x)$ を x についての K 係数多項式全体の集合とする．高校数学では単項式を多項式と区別するが，ここでは単項式も 0 も $\mathcal{P}_K(x)$ の要素とみなす．これによって多項式の和，差，積が自由に行えることになる．多項式の次数については既知である．ただし，定数 $\alpha \neq 0$ は 0 次多項式とする．多項式 f の次数を $\deg f$ と表し，定数 0 については $\deg 0 = -\infty$ と定める．これによって

$$\deg fg = \deg f + \deg g$$

が成り立つ．f,g の一方が定数の場合にもこの等式が成り立つことに注意せよ．

命題 4.1 (除法の原理)**.** 二つの多項式 $f,g \in \mathcal{P}_K(x)$ について $g \neq 0$ であれば

$$f = pg + r, \quad \deg r < \deg g$$

を満たす p, r が唯一つ存在する．

この命題で $r=0$ の場合に f は g の倍数，g は f の約数という．公約数で次数が最大のものを最大公約数というが，最大公約数はユークリッドの互除法で求められる．

多項式 f について，その約数 g は

$$0 \leqq \deg g \leqq \deg f$$

を満たす．$0=\deg g$ のとき g は 0 でない定数であり $\deg g=\deg f$ のとき g は f の 0 でない定数倍である．これらは明らかに約数であり，自明な約数と呼ぶ．自明な約数以外に約数を持たない多項式を素数と呼ぶ．

命題 4.2. $K=\mathbb{C}$ のとき素数は 1 次式のみである．$K=\mathbb{R}$ のとき素数は 1 次式と判別式負の 2 次式である．

証明. 複素係数の n 次方程式は複素数の範囲で解を持つ（代数学の基本定理）．これと因数定理を組み合わせれば 2 次以上の多項式は 1 次式の約数を持つので素数ではない．ゆえに素数は 1 次式に限られる．1 次式 f が素数であることは $0 \leqq \deg g \leqq \deg f = 1$ なる等式においてどちらか一方が等号になることから明らかである．

実係数の 2 次以上の方程式が実数解を持てば，対応する多項式は素数ではない．複素数解 $\alpha+i\beta$ を持てばその共役複素数 $\alpha-i\beta$ も解になるので対応する多項式は $(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ を約数にもつ．よって 3 次以上の多項式は素数ではない．結局素数は 1 次式と判別式負の 2 次式に限られる． □

有限個の多項式 $f_1,\ f_2,\ldots,f_n$ が互いに素であるとはすべてに共通な約数が定数に限ることを言う．

命題 4.3. $f_1,\ f_2,\ldots,f_n$ が互いに素であることと

$$h_1f_1+h_2f_2+\cdots+h_nf_n=1$$

を満たす多項式 $h_1,\ h_2,\ldots,h_n$ が存在することとは同値である．

証明. $Z\subset\mathcal{P}_K(x)$ を $h_1f_1+h_2f_2+\cdots+h_nf_n$ の形で表される多項式全体の集合とする．Z は和と多項式倍について閉じた集合になっている．$f_1,\ f_2,\ldots,f_n$ が互いに素であるとき，$g\in Z$ を次数が 1 次以上の多項式とすると，$f_1,f_2,\ldots,f_n$ のいずれかは g を約数に持たない．必要なら番号を取り換えて f_1 が g の倍数でないとし，$f_1=pg+q$ $0\leqq\deg q<\deg g$ とすれば $q=f_1-pg\in Z$ より Z は g より次数の低い 0 でない多項式を含む．結局 0 次多項式を含むことになり，特に 1 を含む．

逆に $h_1f_1+h_2f_2+\cdots+h_nf_n=1$ が成り立てば $f_1,\ f_2,\ldots,f_n$ の共通な約数は 1 の約数になる．よって次数は 0 であり定数に限る． □

命題 4.4 (多項式環における素因数分解の一意性)**.** 1 次以上の多項式は素数の積として本質的に一通りに表せる．ただしここで素数 p とその 0 でない定数倍は同じ素数とみなしている．

証明. まず係数を複素数として議論する．数学的帰納法による．1 次多項式はそれ自身が素数なので素数の積として表せている．またその一意性も（$x-\alpha$ と $cx-c\alpha$ を同じ素数とみなすことにより）明らかである．$n-1$ 次多項式までがすべて素数の積としてただ一通りに表せたとし n 次多項式 f を考える．代数学の基本定理により $f(x)=0$ は解を持つのでそれを α とおく．$f=(x-\alpha)g$ と因数分解すれば g は $n-1$ 次多項式なので素数の

積としてただ一通りに表せる．よって f も素数の積として表せる．f が別に素因数分解 $f = p_1p_2\cdots p_n$ できたとすると $f(\alpha) = p_1(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha) = 0$ より $p_j(\alpha) = 0$ となる j が存在する．必要なら番号を付け替えて $j = n$ とし，$p_n = (x-\alpha)$ とする．$g = p_1p_2\cdots p_{n-1}$ だが，g の素因数分解の一意性から，これは最初に作った f の素因数分解と一致する．よって f の素因数分解は一通りである．

実係数の場合は，まず複素係数として素因数分解し，$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ を判別式負の 2 次式に置き換えていくことによって，素因数分解ができる．一意性も自動的に成り立つ．

より一般の体の場合にも成り立つがその証明は省略する． □

この命題を使えば 1 年次の微分積分で学習した有理関数の部分分数展開の証明ができる．$f(x)$ を相異なる素数の冪の積 $f = p_1p_2\cdots p_r$ として表せば $\{\dfrac{f}{p_j},\ 1 \leqq j \leqq r\}$ は互いに素である．そこで

$$h_1\frac{f}{p_1} + h_2\frac{f}{p_2} + \cdots h_r\frac{f}{p_r} = 1$$

となるように $h_j,\ 1 \leqq j \leqq r$ をとる．よって

$$\frac{g}{f} = \frac{h_1g}{p_1} + \frac{h_2g}{p_2} + \cdots + \frac{h_rg}{p_r}$$

であるが p_j は 素数 p の冪 p^k なので h_jg を p で割っていくことにより

$$\frac{h_jg}{p_j} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \cdots + \frac{q_k}{p^k} + q_0$$

と表せる．これは具体的に考察したほうが分かりやすい．

例 13. $\dfrac{g(x)}{(x^2+1)^3}$ について $g(x) = g_1(x)(x^2+1) + Ax + B$ とおけば（余りは 1 次式）

$$\frac{g(x)}{(x^2+1)^3} = \frac{g_1(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3}$$

である．ここで $g_1(x) = g_2(x)(x^2+1) + Cx + D$ とおけば

$$\frac{g(x)}{(x^2+1)^3} = \frac{g_2(x)}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3}$$

さらに $g_2(x) = g_3(x)(x^2+1) + Ex + F$ として

$$\frac{g(x)}{(x^2+1)^3} = g_3(x) + \frac{Ex+F}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3}$$

を得る．ここで $\deg g < \deg(x^2+1)^3 = 6$ とすれば $x \to \infty$ で分数式はすべて 0 に収束する． $g(x)$ は多項式であり $x \to \infty$ で 0 に収束するので 0 である．よって

$$\frac{g(x)}{(x^2+1)^3} = \frac{Ex+F}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3}$$

索引