微分積分 I 講義メモ (4 月 10 日)

今日の講義では 1.1 節と 1.2 節を解説した．高校での学習内容と重なる部分が多いので簡単な説明に止めたことも多い．以下，本日の講義の要点を箇条書きしておく．

本日の講義の要点

1. 有界

   有界という言葉はあまり定着していないようだ．ここでは「有界な区間」「有界な集合」「有界な数列」「有界な関数」を例をあげて解説した．まずはこれらの例を通じて理解を深めてほしい．

   厳密な定義は，有界な関数については次のように与える．

   > $f(x)$ が有界であるとは，すべての $N \leqq f(x) \leqq M$ が常に成り立つような実数 M, N が存在することを言う．

   ようするに $f(x) \in [N, M]$ が成り立つことであり，$f(x)$ の値が有界な区間に含まれていることを言う．

2. 実数の連続性

   実数は数直線の点と同一視できるので，実数は一つながりの集合として理解できる．この一つながりをどういう性質として捉えればいいのかが重要である．テキストでは 3 ページに

   > 単調増加で上に有界な数列は収束する．

   という形で連続性を記述した．分かりづらいと思うが，公理なので議論の出発点として捉えること．実数の連続性を利用した議論をいくつか紹介した．

   - 無限小数に対して，小数点以下第 n 位で切り捨てた有限小数の列 $\{a_n\}$ を考える．この数列は単調増加上に有界なので収束する．この極限が無限小数の表す実数である．
   - 無限小数 $0.999\cdots$ について，この方法を適用すればこの小数の表す実数は

     $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1$$

     である．すなわち $1 = 0.999\cdots$ が成り立つ．

     この結果に驚く人がいるかもしれないが，無限小数は実数の表記法に過ぎないので複数の表記を持つ実数があったとしても問題はない．無限小数は実数の実体ではなく表記法に過ぎないと思うこと．また，仮に 1 と $0.999\cdots$ が違う数だとするとその間には何があるのか分からなくなる．実数が一つながりの集合なら，そのような切れ目は存在してはならない．
   - 例題 1.1.1 のネピアの数 e の導入にも実数の連続性公理が使われている．テキストの証明は丁寧に書いてあるので読んでおくこと．

3. 数列の極限と四則演算

   定理 1.1.1 にまとめられている．高校でも扱ったことなので深入りしない．なお，証明は感覚的で厳密なものではない．厳密に扱うには 20 ページの ε 論法によって極限を定義しなおす必要がある．この講義では扱わない．

4. 連続関数

   関数の極限については既知とする．関数の極限と四則演算（定理 1.2.1）も高校で学習している．連続関数の定義は 11 ページに書いてある．きちんと覚えておくこと．

   連続関数の定義と定理 1.2.1 を組み合わせると連続関数の加減乗除で与えられる関数は定義できる範囲（分母が 0 にならない範囲）で連続であること（定理 1.2.2）が示せる．講義では積の場合に解説したが，他も同様なので考えてみるとよい．

合成関数の連続性（定理 1.2.3）も同様だが，若干難しい部分がある．補足と問題 1．2-7 は理解しがたいだろう．これもきちんと定義を書けば説明しやすいのだが，それを省略したために舌足らずな説明になってしまった．難しい部分なので分からなくても気にしなくてよい．結果だけ覚えておいてほしい．

5. 具体的な関数の連続性の確認

例題 1.2.3 を解説した．$\sin x^2$ は $z = \sin y$ と $y = x^2$ の合成関数なので，定理 1.2.3 により連続である．$x^2 + 2$ はいたるところ 0 にならない連続関数なので，$\dfrac{\sin x^2}{x^2 + 2}$ は定理 1.2.2 により連続である．

6. その他

6 ページの上限，下限は難しい概念なので必要が生じた時点で解説する．13 ページの中間値定理と最大最小の存在定理は授業の中で結果のみ利用する．

本日の課題

高校の数学 III の範囲の基本的な問題を解いてもらった．この講義の理解にはこの程度の計算は不可欠なので復習しておいてほしい．

なお，積分の問題で誤って微分している人が多い．特に $\tan x$ の不定積分を微分してしまう人が多い．積分と微分はまったく異なる計算なのできちんと意識して取り組むように．

なお，1 問 10 点の 60 点満点で採点した．満点が 16 人，ほぼ満点とみなせる 55 点が 5 人だった．40 点に満たない人が 7 人いたが高校の教科書をもう一度学習しておくように．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 2/n + 1/n^2}{1 + 1/n^2} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}, \qquad \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)' = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x; 1)^2}$$

$$\int \tan x dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\log|\cos x| + C, \qquad \int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

微分積分 I 講義メモ (4 月 17 日)

本日の講義の要点

1. 逆三角関数（p.16）

   三角関数の逆関数を導入した．定義とグラフについてはテキストを見ること．なおこの記号はテキストによって異なるので注意が必要である．定義として次の形で理解しておくこと．

$$y = \mathrm{Cos}^{-1}x \Longleftrightarrow x = \cos y \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq y \leqq \pi$$

$$y = \mathrm{Sin}^{-1}x \Longleftrightarrow x = \sin y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \Longleftrightarrow x = \tan y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

   講義ではこの定義を使って $\mathrm{Cos}^{-1}x + \mathrm{Sin}^{-1}x = \pi/2$ という等式を証明した．講義の方法を少し変えて証明の概略を箇条書きしておこう．

   - $y = \pi/2 - \mathrm{Cos}^{-1}x$ とおく．$0 \leqq \mathrm{Cos}^{-1}x \leqq \pi$ より $-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2$ である．
   - $\sin y = \sin(\pi/2 - \mathrm{Cos}^{-1}x) = \cos(\mathrm{Cos}^{-1}x) = x$ が成り立つ．
   - 上記二つの式から $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ である．ゆえに $\mathrm{Sin}^{-1}x = \pi/2 - \mathrm{Cos}^{-1}x$ であり求める式が導かれた．

2. 初等関数

   不思議なことにテキストには初等関数というタイトルの節はあるが初等関数の意味については記述されていない．これについて講義では次のように表現した．

   べき関数 x^α，指数関数 e^x，対数関数 $\log x$，三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$，逆三角関数 $\mathrm{Cos}^{-1}x, \mathrm{Sin}^{-1}x, \mathrm{Tan}^{-1}x$ たちから和差積商と合成で表される関数を初等関数という．

   基本となる関数はすべて定義域で連続なので定理 1.2.2 と定理 1.2.3 より初等関数は定義域で連続であることが分かる．ただし，定義域が実数全体でない関数も多いので合成した関数の定義域には注意をはらう必要がある．$f(g(x))$ が定義できるためには $g(x)$ が f の定義域に入っていなければならない．

3. 微分と微分計算

   2.1 節の冒頭（p.24）に微分可能の定義が記述されている．微分可能の定義を答えられない学生は多いが，これが定義であることを肝に銘じておくこと．微分の定義をもとに導関数を求めることも可能（講義では例 3 を扱った）だが通常はそのような方法はとらない．和差積商と合成の微分法則（定理 2.1.3 と定理 2.1.4）を利用する．

   基本となる初等関数の導関数については逆三角関数以外は高校で学習している．逆三角関数の導関数については p.29 の例 12 と例 13 に記述されている．またすべての基本的な初等関数の導関数についてはテキスト p.30 にまとめられている．以上から初等関数の導関数はいつでも微分計算によって求めることができる．

4. 初等関数の微分可能性

   ただし，初等関数には定義域に微分不可能な点を含むものがある．この点が影響を及ぼす場合は微分可能になるとは言えない．ただしこういう特殊な点を除いて初等関数は微分可能である．

$z = \sqrt{x^2}$ は 2 つの初等関数 $z = \sqrt{y}$ と $y = x^2$ の合成であり，$y = x^2 \geqq 0$ なので y は $\sqrt{y}$ の定義域に属している．よってこの関数の定義域は実数全体であり連続関数である．しかし，$x = 0$ のときは $y = 0$ であり $z = \sqrt{y}$ の微分不可能な点になってしまう．よって合成関数も $x = 0$ で微分可能とは言えない．実際 $z = |x|$ なので $x = 0$ で微分不可能である．

定義域に微分不可能な点を含む基本的な初等関数をリストアップしておく．

- x^α, $0 < \alpha < 1$　$x = 0$ で定義できるが微分は不可能.
- $\mathrm{Cos}^{-1} x$, $\mathrm{Sin}^{-1} x$　$x = \pm 1$ で定義できるが微分は不可能.

5. 初等関数でない場合の扱い

　初等関数でない関数については微分法則は使えない．微分の定義に立ち返って考えることが必要だ．講義では p.31 の問題 2.1 4(1) の関数を利用して，この事情について解説した．

　$x \neq 0$ の点では初等関数になっているので導関数は微分計算で求められる．

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$x = 0$ での微分は定義を使う．

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h}$$

ここで sin の取る値は絶対値 1 以下なので

$$-|h| \leqq h \sin\frac{1}{h} \leqq |h|$$

が成り立つ．よって挟み撃ちによりこの極限は 0 に収束するので $f'(0) = 0$ を得る．

6. 対数微分法

　対数をとって微分すると簡単に計算できる場合がしばしばある．講義では例題 2．1.1 の (2) によりその事情を解説した．テキストを読んでおいてほしい．

本日の課題とヒント

問題 2.1（p．31）の 1(1)〜(15) までを課題にする．大変なら奇数番目の問題に絞ってやってみてもよい．締め切りは 4 月 22 日火曜日の 13 時，提出場所は全学教育棟 A 棟 4 階の教養科目等事務室前の提出 BOX である．時間に遅れた場合は提出 BOX に入れずに直接研究室（理学部 3 号館 D416）に届けること．用紙のサイズは指定しなかったが A4 用紙を利用してほしい．若干ヒントを与えておく．

- べきを利用した関数は底を e に書き換えることが有効だ．これにより冪も加減乗除と合成で表されることになる．

$$a^b = e^{\log a^b} = e^{b \log a} \text{ より } x^x = e^{x \log x}$$

- 整数冪は展開せずに合成関数の微分を使ったほうが簡単だ．同様に根号も分数冪で考えたほうが良い．両方の方法で試してみよ．商も負冪を使って積とみなして計算したらいかがか．

微分積分 I 講義メモ (4 月 24 日)

前回のレポート課題

単なる微分計算の問題だが，高校数学のレベルより難しい．微分法則を着実に使っていくこと．

$$\left((x^2+1)^5(x^3-2)^3\right)' = 5(x^2+1)^4(x^3-2)^3 2x + 3(x^2+1)^5(x^3-2)^2 3x^2 = (x^3+1)^4(x^3-2)^2(19x^4+9x^2-20x)$$

$$(\log(\log x))' = \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}$$

$$(2^x)' = \left(e^{x\log 2}\right)' = e^{x\log 2}\log 2 = 2^x\log 2$$

$$\left(x^3(x^2+1)^{3/2}\right)' = 3x^2(x^2+1)^{3/2} + x^3\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}2x = 3x^2(x^2+1)^{1/2}(2x^2+1)$$

$$\left(e^{x^x}\right)' = e^{x^x}(x^x)' = e^{x^x}x^x(\log x+1)$$

$$((\sin x)^{\cos x})' = \left(e^{\cos x\log(\sin x)}\right)' = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}(x^3+1)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{(-x^3)(x^3+2)}}$$

$$\left(\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{2+2x^4} = -\frac{2x}{1+x^4}$$

$$(\sqrt{1+2\log x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+2\log x}}\frac{2}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1+2\log x}}$$

$$\left(e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}\right)' = e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right)' == \sqrt{a^2-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - x(1+x^2)^{-3/2}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(2\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)' = -2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x+1}{2}}}\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-1/2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

あとの 2 問は微分すべき式を y とおいて $\log y$ を微分しよう．（対数微分法）

$$\log y = \frac{1}{2}(\log(x-1)+\log(x-2)-\log(x-3)-\log(x-4))$$

より

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$

$$\log y = \frac{1}{3}\left(\log(x^2+1)-2\log(x-1)\right)$$

より

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right)\sqrt[3]{\frac{(x^2+1)}{(x-1)^2}}$$

【コメント】

- 逆三角関数の微分は公式として覚えておくこと．(7) で $\sin y = x^3+1$ として微分する人がいるが 30 ページの基本的な関数の導関数については積極的に利用してほしい．
- 対数微分を行うときは，微分する前に対数の公式を適用しておくこと．例えば

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}, \qquad \log y = \frac{1}{3}(\log(x^2+1) - 2\log(x-1))$$

  として微分すること．
- 対数微分を行うときには，対数の中身（真数）が正でなくてはならない．例えば (1) で対数微分を行おうとすると

$$\log\left((x^2+1)^5(x^3-2)^3\right) = 5\log(x^2+1) + 3\log(x^3-2)$$

  は $x^3-2>0$ でないと使えない．しかし，導関数が 1 つの式で記述されることは明らかなので，$x^3-2>0$ の場合に成り立つ式は $x^3-2 \leqq 0$ の場合でも成り立つはずだ．
- 初等関数の微分においては式によって x の範囲が制限される．例えば (7) においては $-1 \leqq 1+x^3 \leqq 1$ なので $-\sqrt[3]{2} \leqq x \leqq 0$ だ．解答において $\sqrt{(-x^3)(x^3+2)}$ とあるが，根号の中身は正である．
- 合成関数の微分において中身の微分を落とす人がいるが，これは単なる不注意とはいいがたい．このようなミスは行わないように．
- 解答結果をどこまで整理すべきかについては別に規則があるわけではない．解の表示の仕方は様々であり，この解答例の形のみが正しいわけではない．提出されたレポートについては間違えた個所はチェックしているし，正しい解答には丸を付けている．確認してほしい．

本日の講義の要点

1. 平均値の定理（定理 2.2.3）にいたる論理の流れ

   平均値の定理は高校の時にも学習しているはずだ．しかし，事実として知っているだけでは不十分であり，どのような議論に基づいて導き出されるのか，知っておくようにしてほしい．

   (1) 閉区間上の連続関数は最大値および最小値を持つ（定理 1.2.5）．

   この論理の出発点だ．当たり前に思えるかもしれないが証明をつけるのはこの講義のレベルを超える．覚えておいてほしい．

   (2) 内部の点 c で最大（最小）をとれば $f'(c)=0$（定理 2.2.1）．

   もちろん，考えている区間の端の点ではこの事実は成り立たない．c が内部にあることが重要である．証明は c における微分係数の定義を利用する．講義で与えた証明はテキスト 31 ページの証明と同じなのでここでは省略する．

   (3) ロルの定理（定理 2.2.2）

   $f(a)=f(b)$ を利用して最大または最小となる点の少なくとも一つは内部にあることを言う．ロルの定理の主張は定理 2.2.1 より従う．

   (4) 平均値の定理

この段階までくれば平均値の定理は関数を少し変形してロルの定理が使えるようにするだけだ．

2. 平均値定理の応用

平均値定理を使えば，導関数の正負の条件から関数の増減状態を知ることができる．定理 2.2.4 と定理 2.2.5 の証明に平均値定理がどう使われているか考えておいてほしい．この事実からグラフの概形や不等式の証明に応用されるが，高校で学習しているのでここでは詳しく述べない．

3. ロピタルの定理

極限計算のために非常に強力な手段を与える定理だがいくつかコメントしておく．

- コーシーの平均値定理を使ったが，この講義でコーシーの平均値定理が登場するのはここだけである．証明は眺めておくべきだが覚える必要はない．
- ロピタルの定理の証明は 0/0 型不定形の場合にのみ紹介した．∞/∞ 型の不定形の場合にも成立するが証明ははるかに難しい．また $x \to a$ での極限としているが $x \to \infty$ への極限や，$x \to a+0$ のような片側極限についても成立する．
- $\lim_{x\to+0} x^x$ は 0^0 型不定形なのでこのままではロピタルは使えない．そこで対数をとって考察した．(例題 2.2.4)
- ロピタルの定理を使う時に不定形であることのチェックは必須である．これをおろそかにすると大きな誤りを起こすので注意してほしい．
- 講義での極限計算例

  $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$ についてこれは 0/0 型の不定形なので分子分母をそれぞれ微分した関数の極限を調べる．

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\log 5\cdot 5^x-\log 3\cdot 3^x}{2x}$$

  この極限は分母は 0 に近づくが分子は $\log 5-\log 3$ に収束する．これは不定形ではなく

  $$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\log 5\cdot 5^x-\log 3\cdot 3^x}{2x}=\pm\infty$$

  を得る．ロピタルの定理は，∞ に発散する場合も使えるので

  $$\lim_{x\to\pm 0}\frac{5^x-3^x}{x^2}=\pm\infty$$

  を得る．二つの複号は同じ順で選ぶ．

本日の課題とヒント

問題 2.2 の 4 の (1)(3)(5)(7)(9) を課題にする．なお，指数で表されている極限は対数をとって考えるとよい．なお，解答において不定形のチェックは明示すること．来週の火曜日は祝日（昭和の日）なのでレポートの締め切りを 4 月 28 日 (月) の 16 時 10 分にする．これに遅れた場合には研究室まで直接持ってきてほしい．

微分積分 I 講義メモ (5 月 1 日)

前回のレポート課題

極限計算の問題だが，ロピタルの定理が役に立つ．しかし，あまりそれに頼りすぎるとかえって大変になる場合もある．またロピタルの定理が適用できるための条件は 0/0 型または ∞/∞ 型不定形であることだがそのチェックを怠ってはならない．ロピタルの定理が適用できる問題ばかりやっていると，いつでも使えるような錯覚に陥る．これは数学を扱う上で厳に戒めるべきことだ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ は 0/0 型不定形でなので，ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\log x}$ は 0/0 型不定形なのでロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\log x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1/x}=1$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x-x\cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\cos x+x\sin x}$ はいずれも 0/0 型不定形なのでロピタルの定理により，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x(1-x^2)^{-3/2}}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)^{-3/2}}{2(\sin x)/x+\cos x}=-\frac{1}{3}$$

(7) 対数をとって極限を考えれば $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log x^{\frac{x}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x}{1-x}$ となるがこれは (3) で求めたものと基本的に変わらない．

$$\lim_{x\to 1}\log x^{\frac{x}{1-x}}=-\lim_{x\to 1}x\frac{\log x}{x-1}=-1$$

より $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{x}{1-x}}=\frac{1}{e}$ である．

(9) この問題も対数をとって

$$x^2\log\left(1+\frac{a}{x^2+x}\right)=\frac{\log\left(1+\dfrac{a}{x^2+x}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}$$

とすれば $x\to\infty$ での極限は 0/0 型不定形になる．そこでこの分子分母をそれぞれ微分した極限を考えれば，それは有理式（多項式による分数式）として整理できる．

$$\frac{\left(1+\dfrac{a}{x^2+x}\right)^{-1}\left(-\dfrac{a(2x+1)}{(x^2+x)^2}\right)}{-2\dfrac{1}{x^3}}=\frac{x^3}{2}\frac{a(2x+1)}{(x^2+x)^2+a(x^2+x)}=\frac{2ax^4+ax^3}{2x^4+4x^3+(2+2a)x^2+2ax}$$

この関数の $x\to\infty$ での極限は a である．よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x^2+x}\right)^{x^2}=e^a$ である．

(9) 別解 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ を用いて次のように答えてもよい．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x^2+x}\right)^{(x^2+x)/a}\right)^{ax/(x+1)}=e^a$$

なおここで指数に関する極限の公式（定理 1.2.1 参照参照）

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,\ \lim_{x\to a} g(x) = m > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x)^{f(x)} = m^l$$

を使っている．べきは対数関数と指数関数で表されるので，論理的には必要ないが，知っておくと便利だろう．

【コメント】

- 2 割弱の学生が不定形であることに言及していない．正しい答えが出たとしても正解とはみなさない．
- (1) と (3) は比較的やさしいのでよくできていた．ロピタルの定理の使いやすさを感じられる問題だ．
- (5) の解答例では分子分母をそれぞれ 2 回微分したものについて，分子分母を x で割った極限を考えた．さらに微分した人も多かったが，計算はかなり面倒だ．
- (7) で対数をとった時，(3) と基本的に同じ問題だということに気付いた人はいなかった．まあ簡単な問題なのでどちらでもいいが．(5) でも言えることだがロピタルの定理を使う前にこの極限の値が何かを少し考えるようにしてほしい．
- (9) は対数をとってロピタルの定理を使うという考えは多く見られた．なおその際，分母に $1/x^2$ を持ってくるとうまくいく．分子の微分において log が消えるからだ．これ以外の方法だとうまくいかない．
- 有理式の極限は一般論として理解しておくべき事項だ．分子分母とも 4 次式なので，極限は 4 次の項の係数の比になる．
- (9) について別解のような解答が一人あった．優れた解答である．

本日の講義の要点

1. n 次導関数
   用語の意味は 2 次導関数などの延長としてすぐ理解できるだろう．ここでは記号 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$ を覚えておくこと．
2. n 次導関数の計算
   さて，初等関数の微分はやはり初等関数であった．これから初等関数の n 次導関数も（微分できなくなる点を除き）やはり初等関数になる．しかし，実際にその一般的な表示を得ようとすると困難に直面する．できることを箇条書きしておく．
   - 基本的な関数の微分

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

この式は α が自然数で n が $\alpha+1$ 以上の自然数の場合は 0 と理解すること．

$$(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

この計算において $1/x$ のように分数を使うと計算結果が見づらい．分母におくのではなく冪の表示を使うのが基本だ．

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases}(-1)^m \sin x & (n=2m)\\ (-1)^m \cos x & (n=2m+1)\end{cases} \qquad (\cos x)^{(n)} = \begin{cases}(-1)^m \cos x & (n=2m)\\ (-1)^{m-1} \sin x & (n=2m+1)\end{cases}$$

この式は次のように場合分けせずに書くこともできる．簡単なので考えてみるとよい．

$$(\sin x)^n = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\cos x)^n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

- n 次導関数の微分公式
  - 和と差の微分 $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
  - 1 次式との合成関数の微分 $(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$
    この式で左辺は合成関数 $f(ax+b)$ の n 次導関数，右辺は $f(x)$ の n 次導関数に $ax+b$ を代入したものだ．意味の違いを的確に押さえておくこと．なおこの応用として例 4 を述べた．
    $$(a^x)^{(n)} = (e^{x\log a})^{(n)} = (\log a)^n e^{x\log a} = (\log a)^n a^x$$
  - 積の微分（ライプニッツの公式 定理 2.4.3）
    この式の証明は 2 項定理の証明とまったく同じだ．それが分かれば係数に組合せ ${}_nC_k$ が現れるのにも納得がいくだろう．証明の骨格の部分だけ紹介しておく．
    $$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)' &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\end{aligned}$$
    この公式の応用例として例題 2.3.2 を解説した．積の一方が 2 次式なので，ライプニッツの公式の項は 3 つしか残らない．

3. C^n 級関数

テキスト p.40 に記述されている．しかしその後の例 6 は 2 回微分可能でない関数の例なので，C^n 級という概念の必要性を示す例になっていない．講義では p.31 の問題 2.1 4(1) の関数を使って解説した．なおこの関数については 4 月 17 日の講義で解説しており，$f'(0) = 0$ であることを示している（講義メモ (4 月 17 日) の 5 を参照せよ）．

これは微分可能な関数だが
$$f'(0) = 0, \qquad f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^n$$
なので 0 で連続ではない．すなわち 0 を含む区間で微分可能だが C^1 級ではない．さらに
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
とおくと，微分可能であり $g'(0) = 1/2 > 0$ であるが，0 の周りで単調増加とは言えない関数が作れる．$g'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \frac{1}{2} - 1 < 0$ だからだ．

微分可能の条件だけではこういう不思議な状況が起こり得る．C^1 級という概念はそのような現象を排除する．なお，ここで紹介した例は微分可能だが C^1 級でない関数の例だ．この関数を $n-1$ 回積分すれば，n 回微分可能だが C^n 級でない関数が得られる．

4. ニュートン近似

定理 2.3.3 を解説した．数値計算上重要なテクニックであるが，手計算で利用するのはやはり大変だ．例題 2.3.1 を解説したので考えてみてほしい．

本日の課題とヒント

問題 2.3 の 1（(8) を除く）を課題とする．基本関数の微分と，1 次関数との合成，ライプニッツの公式を利用せよ．なお (7) は分母が 1 次式の 2 つの分数式に分けること．高校では不定積分の基本テクニックとして活用していたと思う．

微分積分 I 講義メモ (5 月 8 日)

前回のレポート課題については，まだ点検作業が終わっていない．返却は来週の授業の際に今回のレポート課題の返却と合わせて行う．レポート課題の解説は次回の講義メモにまわす．

本日の講義の要点

1. テイラーの定理，有限テイラー展開，有限マクローリン展開（定理 2.4.1，2，3）

p.47 から p.49 までにかけて記述されている 3 つの定理をまとめて解説した．証明すべきは定理 2.4.1 のみで他はその簡単な書き換えだ．ただし，徐々に主張の意味内容が明確になってくる．この事情を感じ取ってほしい．

テイラーの定理で b を変数 x に置き換えたのが有限テイラー展開（定理 2.4.2）だ．ただしその際，x と a の間にある数を c と書くのではなく $a+\theta(x-a)$ とおいている．これによって x と a の大小関係によらず $0<\theta<1$ と記述できる．

さらに $a=0$ とおくと有限マクローリン展開（定理 2.4.3）を得る．ここまでくると $f(x)$ が $n-1$ 次多項式と $f^{(n)}(\theta x)$ を含んだ式の和になることが分かる．なお， θ は x によって変化する．定数だと思わないように．

2. 有限マクローリン展開の具体的関数への適用

$f^{(k)}(x)$ が具体的に計算できる関数については，有限マクローリン展開を具体的に記述することができる．その際，級数の一般項が $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ であることに注意すること．

- $f(x)=e^x$ について（例 2）

  $f^{(k)}(x)=e^x$ より $f^{(k)}(0)=1$ なので

$$e^x=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

  この式でさらに $n=7$ とした式が例題 2．4.1 の解答の 2 行目に記述されている．テキストではこれを 6 次多項式と誤差とみて e の近似値を求めている．このように有限テイラー展開の具体例は近似値の計算に応用できる．

- $f(x)=\sin x$ について（例 3）

  例 3 では $n=2m$ としているが講義では $n=2m+1$ として表示を与えた．ここでは高次導関数は偶数の場合と奇数の場合に分けて $f^{(2l)}(x)=(-1)^l\sin x$，$f^{(2l+1)}(x)=(-1)^l\cos x$ と表した．これにより 0 での値は $f^{(2l)}(0)=0$，$f^{(2l+1)}(0)x=(-1)^l$ となる．

$$\sin x=\sum_{k=0}^{2m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(2m+1)}(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

- $f(x)=\cos x$ について

  $\sin x$ の場合と議論は殆んど同じである．上の議論をまねて自分で考えてほしい．ここでは解答のみ与えておく．

$$\cos x=\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(2m)}(\theta x)}{(2m)!}x^{2m}=\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m)!}x^{2m}$$

- $f(x)=(1+x)^\alpha$ について

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)}$ より有限マクローリン展開の一般項は

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k = \binom{\alpha}{k}x^k$$

と表示できる．$\binom{\alpha}{k}$ は一般化された二項係数と呼ぶ．記号についてはテキスト p.5 も見ておくこと．さて，有限マクローリン展開の表示を与えておく．

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n$$

ここで α を自然数とし n を α と等しくとれば（α を n と書きかえる）

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k + \binom{n}{n}(1+\theta x)^{n-n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

を得る．これは二項定理に他ならない．テイラーの定理から二項定理の別証明ができたことになる．

- $f(x) = \sqrt{1+x}$ について

  一般化された二項係数はなじみがないので具体的に記述しておく．まず最初の数項は

$$\binom{\alpha}{0} = 1(\text{約束}), \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

  である．$\alpha = 1/2$ のときは

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \binom{1/2}{5} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!} = -\frac{5}{128}$$

  この形と二項係数の定義式を比較して意味を確認しておくこと．

3. テイラーの定理の証明 (p.47)

   テキストではまず A を決めることから始めているが，講義では A を使って $F(x)$ を定め，「$F(a) = 0$ となるように A を定める」と説明した．実質的に同じことであるが，どちらの説明が分かりやすいだろうか．この定め方から $F(x)$ にロルの定理を使うというのが証明のアイデアである．$F'(x)$ の計算ではほとんどの項が打ち消しあうことを確認できれば証明は理解できるはずだ．考えておくこと．

本日の課題とヒント

問題 2.4 からいくつか選んだが，まとめて記述しておく．

レポート課題 次の関数の有限マクローリン展開を求めよ．ただし (4) は $n = 4$ の場合のみ答えればよい．

$$(1)\ e^{2x}, \quad (2)\ \log(1+x), \quad (3)\ \frac{1}{1-x}, \quad (4)\ \sqrt{1+x}$$

微分積分 I 講義メモ (5 月 15 日)

前々回のレポート課題について

答えはテキストに書いてあるのでここでは省略しコメントのみを箇条書きしておこう．

- 何回か微分してから一般的な等式を表記する解答が多いが，単に推測しているだけではきちんとした数学の議論とは言えない．例えば (1) について

  $$\Big((1+x)^{-1}\Big)' = (-1)(1+x)^{-2}, \quad \Big((1+x)^{-1}\Big)'' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad \Big((1+x)^{-1}\Big)''' = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

  と記述していれば

  $$\Big((1+x)^{-1}\Big)^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

  は明白だ．しかしこれを

  $$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{1}{1+x}\right)'' = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \left(\frac{1}{1+x}\right)''' = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

  としてしまったら結果は感覚的にしか分からない．これから正しい結論を導く人もいるが，正しい議論による結論とは受け止められない．最初のいくつかから結果を予想するということは高校数学でもよく行われているが，根拠のない予想は数学の力に結びつかない．
- (4)(5)(6) についてはライプニッツの公式を適用すること．公式を使っていることが使わってこない解答があるが好ましくない．
- (3) の $(1+x)^\alpha$ の α は実数だ．自然数とは限らないので，$n > \alpha$ でも必ずしも 0 にはならない．なお，α が自然数で $n > \alpha$ の場合は $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ は，掛け合わせる数の一つが 0 になるので 0 である．この場合でも (3) の解答の表示は成立している．

前回のレポート課題について

5 月 8 日の講義メモにある出題順で解答例を記述する．

(1) $f(x) = e^{2x}$ なので $f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ である．ゆえに

$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}x^k + \frac{2^n e^{\theta x}}{n!}x^n$$

(2) $f(x) = \log(1+x)$ より $n \geqq 1$ について $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ である．ゆえに

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(1+\theta x)^{-n}}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}\end{aligned}$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ なので $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}$ である．ゆえに

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{k!}x^k + \frac{n!(1-\theta x)^{-n-1}}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$$

(4) $f(x)=\sqrt{1+x}$ なので $f^{(k)}(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{1/2-k}$ である．ゆえに

$$\sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{1/2}{k}x^k+\binom{1/2}{n}(1+\theta x)^{1/2-n}x^n$$

である．これを $n=4$ として具体的に書き直せば

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{128}(1+\theta x)^{-7/2}$$

【コメント】

- この程度の関数は $f^{(k)}(x)$ の具体的表示を使ってほしい．単に覚えるのではなく，計算の内容を意識して等式を納得して記述するように．
- 有限マクローリン展開において，最後の項以外は x の多項式である．係数が x の式になっている答案があるがこれは基本的な認識不足である．
- $(k-1)!/k!=1/k$ の処理をしていない答案がある．この程度の計算はするべきであり間違いとは言えないが好ましくはない．
- $k!$ は 0 以上の整数にしか定義できない．二項係数 $\binom{\alpha}{k}$ を $\alpha!/((\alpha-k)!k!)$ のように書き直してはいけない．また ${}_{\alpha}C_k$ という記号も使ってはいけない．組合せ ${}_nC_k$ は n が自然数のときにしか使わない．

本日の講義の要点

1. 関数の 有限テイラー展開の応用

   講義では有限マクローリン展開も有限テイラー展開とよんで解説した．0 での展開か否かということだけなので，区別せずに解説する．さて，前回のレポート課題で有限テイラー展開の具体的関数での書き下しをやってもらったが，n 次導関数を求めるのがポイントなので解答例を見て確認すること．

   講義ではまず $f(x)=\log(1+x)$ を題材に有限テイラー展開

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

   の応用を紹介した．

   - 近似値

     最後の項の大きさを調べることにより関数の近似値を求めることができる．$n=4, x=0.1$ とすれば

$$\log 1.1=0.1-\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}-\frac{0.0001}{4(1+\theta 0.1)^4}$$

     を得る．最後の項を R とおけば $1+0.1\theta>1$ なので $0<R<0.000025$ を得る．第 1 項から第 3 項までを具体的に計算すれば $0.095333\cdots$ これと R の取り得る値の範囲を組み合わせれば

$$0.095308333\cdots<\log 1.1<0.095333$$

     となるので $log 1.1$ の近似値として 0.0953 が得られる．

   - 級数（テキストにはない）

     $x>0$ のとき $1+\theta x>1$ である．また $0<x\leqq 1$ のとき $x^n\leqq 1$ である．このことから有限テイラー展開における最後の項は

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}\right|\leqq\frac{1}{n}$$

であり，$n \to \infty$ で 0 に収束する．有限テイラー展開の左辺は n によらないので

$$\log(1+x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \cdots \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

通常，この式をテイラー展開と呼ぶ．ここで特に $x = 1$ とおけば次の興味深い等式が得られる．

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

- 不等式（テキストにはない）

  n を偶数とすれば $-1 < x,\ x \neq 0$ で $x^n > 0, (1+\theta x) > 0, (-1)^{n-1} = -1$ より有限テイラー展開の最後の項は負である．ゆえにこれを取り去れば大きくなるので

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

  という不等式が得られる．（講義では $x > 0$ としたが $x > -1, x \neq 0$ で良い．なお，$x \leqq -1$ のときは $\log(1+x)$ は定義できない．）

これらの議論はいずれも有限テイラー展開の最後の項の形を利用している．$f^{(n)}(x)$ が計算できる関数については共通に使える議論である．

2. n 次近似多項式

$p(x)$ が関数 $f(x)$ の $x = 0$ における n 次近似多項式であるとは

(1) $p(x)$ は n 次以下の多項式である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^n} = 0$

が成り立つことを言う．n 次近似多項式は存在すれば唯一つに限られることが次のように示せる．

$q(x)$ を（別の）n 次近似多項式とする．(1) より $p(x) - q(x)$ は n 次以下の多項式であり，(2) から

$$\frac{p(x)-q(x)}{x^n} = -\frac{f(x)-p(x)}{x^n} + \frac{f(x)-q(x)}{x^n} \to 0$$

これが成り立つのは $p(x) - q(x) = 0$ の場合しかあり得ない．

定理 2．4.5 は C^n 級関数の n 次近似多項式を与えている．講義の証明はテキストと同じである．

3. ランダウの記号

テキスト p.49 では一般の設定で定義しているが，実際に使うのは $o(x^n)$ のみであり，講義ではこれに限定して解説した．分かりづらいが慣れるととても便利なものなので積極的に使ってほしい．まずランダウの記号の入った式の意味をまとめておく．= が通常の等式と若干異なる意味で使われている．

- $f(x) = o(x^n)$ は $x \to 0$ のとき $f(x)/x^n \to 0$ となることを表している．すなわち右辺の $o(x^n)$ は関数に対する条件であり，左辺の関数がその条件を満たすという意味で用いている．

  n 次近似多項式 $p(x)$ の (2) の条件は $f(x) - p(x) = o(x^n)$ と表せる．これを $f(x) = p(x) + o(x^n)$ とも表す．

- $m \leqq n$ のとき $f(x) = o(x^n)$ なら $f(x) = o(x^m)$ でもある．これを $o(x^n) = o(x^m)$ と表す．左辺の条件を満たす関数は右辺の条件を満たしている．

  しかし，$f(x) = o(x^m)$ であっても $f(x) = o(x^n)$ とは言えない．$o(x^m) = o(x^n)$ は間違いである（p. 50 例 9）．ランダウの記号を含む等式は両辺が等しいという意味ではなく，左辺の条件から右辺の条件が出てくることを言っている．

- $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$ もそのように考えれば納得できるはずだ．左辺は条件 $o(x^n)$ を満たす関数に x^m をかけたものだ．これを $x^m f(x)$ とおけば $\dfrac{x^m f(x)}{x^{m+n}} = \dfrac{f(x)}{x^n} \to 0$ だ．
- $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$ も条件 $o(x^n)$ を満たす関数 $f(x)$ と，条件 $o(x^m)$ を満たす関数 $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ が $o(x^{n+m})$ を満たすことを述べている．これは

$$\frac{f(x)g(x)}{x^{m+n}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^m} \to 0$$

から明らかだ．
- $m \leqq n$ のとき $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$ も同様に考えられる．テキストでは定理 2.4.4 において，上記三つの等式を $o(x^n)$ があたかもある関数であるかのように計算しているが，一度このように関数を介在させて考えたほうが納得がいくと思う．

テキストでは定理 2.4.5 において，関数を近似多項式とランダウの記号で表した式を漸近展開と呼んでいる．ただしこの表現は標準的な数学の用語とかけ離れている．この講義では使わないが，テキストを学習する際には意味を確認しておいてほしい．

4. ランダウの記号による計算例

ランダウの記号の良さは，関数がある種の条件を満たすことを記述しているのに，それがあたかもある関数であるかのように計算できる点にある．基本的な等式は有限テイラー展開から得られるのでそれを利用して計算していく．

- $\cos x$ の有限テイラー展開を利用して

$$\cos x = 1 + o(x),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

何次の近似多項式を使うかによって様々な表示が得られる．
- $(\cos x)e^x$ の 3 次近似多項式は，次のように計算できる．

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 + x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

形式的には展開により 15 個の項が生じるが定理 2.4.4 の等式を使えば，それらはすべて $o(x^3)$ に組み込める．

5. ランダウの記号による極限，極値の判定

例題 2.4.2 例題 2.4.3 を解説した．これについては次回さらに解説を付けることにする．

本日の課題とヒント

問題 2.4 の 3 と 6 を出題する．3(4) は 3 次導関数の 0 での値を調べればよい．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

だ．他は $(\cos x)e^x$ の 3 次近似多項式を求めたときと同様に考えてほしい．

6(2) については $\log(1 + x) - \log(1 - x)$ としてそれぞれの有限マクローリン展開を考えること．θ はそれぞれで異なるが，近似値の誤差を考える上では支障はない．

微分積分 I 講義メモ (5 月 22 日)

前回のレポート課題について

3 については既知の近似多項式を利用する．

(1) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ より

$$(1 + x^2)\cos x = (1 + x^2)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

(2) $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$ （1(2) 参照）より

$$(2 - x)\sqrt{1 + x} = (2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right) = 2 - \frac{3}{4}x^2 + +\frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$$

(3) $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ と $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ より

$$e^{2x}\sin x = \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

(4) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ を微分していけば $f'(x) = (1 + x^2)^{-1}$ $f''(x) = -(1 + x^2)^{-2}(2x)$ $f'''(x) = -2(1 + x^2)^{-2} + 2(1 + x^2)^{-3}(2x)^2$ である．ゆえに $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2$ なので

$$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

【コメント】

- 3 次近似多項式を求めるので $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ を求めればよい．(4) はこの考え方で解答を示した．ただそれ以外の関数については既知の近似多項式を利用したほうが簡単だ．問題の関数の選び方を見ても，そのほうが著者の意図にあう解答だ．解答例のような計算を行えるようにしてほしい．
- $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の微分は基本公式なので自由に使えるようにしてほしい．$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ より $\tan y = x$ という表現も散見するが見当違いである．

6 については $n = 6$ の有限テイラー展開を利用する．

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}e^{\theta x}$ より $x = 1/2$ とおけば

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{288} + \frac{1}{3840} + \frac{1}{46080}e^{\theta/2}$$

この最初の 6 項から近似値として 1.6493 を，第 7 項から誤差が 0.00004 以下であることが分かる．小数点以下第 4 桁までの近似値が得られたことになる．

(2) $\log(1 + x)$ と $\log(1 - x)$ のぞれぞれの有限テイラー展開を利用して

$$\begin{aligned}\log\frac{1 + x}{1 - x} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6(1 + \theta_1 x)^6} - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6(1 - \theta_2 x)^6}\right)\\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} - \frac{x^6}{6(1 + \theta_1 x)^6} + \frac{x^6}{6(1 - \theta_2 x)^6}\end{aligned}$$

この式に $x = 1/3$ を代入すれば

$$\log 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} - \frac{1}{6(3 + \theta_1)^6} + \frac{1}{6(3 - \theta_2)^6}$$

最初の 3 つの項から近似値として 0.693 を，後半の二つの項から誤差が 1/384 = 0.0026 より小さいことが分かる．これから近似値として 0.69 を得る．テキストでは $1/(6\cdot 3^6)$ で評価できるとしているがそれはこの情報では無理だ．

(3) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720}\sin(\theta x)$ に $x = 0.1$ を代入する．

$$\sin 0.1 = 0.1 - \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001}{120} - \frac{0.000001}{720}\sin(0.1\theta)$$

最初の 3 項から近似値 0.0998334166 を最後の項から誤差が 0.000000000139 より小さいことが分かる．

【コメント】

- 誤差を $o(x^5)$ と書いてしまったら誤差の評価はできない．有限テイラー展開での最後の項の表示を利用すること．なお，問題が x^5 の項まで計算して誤差を評価せよということなので
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!}x^6$$
という形を利用して解答例を記述した．ただし (2)(3) では $f^{(6)}(0) = 0$ なので，x^7 の項の係数を θx で表すようにしたほうが良い評価が得られる．
- 近似多項式の係数は定数である．ここに x の式が入っている人がいるが，基本的な理解不足である．
- θ は $f^{(n)}(\theta x)$ の形で登場する．(2) で $\log\frac{1+\theta x}{1-\theta x}$ という形の解答を見受けるが基本的な間違いだ．
- 関数を多項式で近似する場合，多項式と θ を含んだ式の和にする方法（有限テイラー展開）と，$o(x^n)$ を付ける方法（テキストでは漸近展開）がある．しかしこれらの最後の項を省略しては元の関数に等しくならない．どちらかを必ず記述するように．

本日の講義の要点

1. 有限テイラー展開と漸近展開

通常，漸近展開やテイラー展開は無限級数についての言葉である．この用語はテキスト独特の表現なので今後，専門でこれらの概念を利用する際には用語の意味に注意しなくてはならない．有限テイラー展開においても漸近展開においても多項式部分は同一である．これは関数の近似多項式である．

有限テイラー展開においては，誤差を $f^{(n)}(\theta x)$ を使って表す．n 階導関数を使うので一般には難しい．一方漸近展開では誤差はランダウの記号 $o(x^n)$ を用いて表される．ランダウの記号による計算（定理 2.4.4）を利用すれば，基本的な漸近展開から様々な漸近展開を得る．2 つの違いをきちんと認識しておくこと．

2. 漸近展開の求め方

章末問題の 3 であり，具体的な計算については前回のレポート課題の解説を読むこと．有限テイラー展開を求めるよりはるかに楽であることが分かるだろう．なお，基本的な漸近展開を箇条書きしておく．覚えておくとよい．

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$

定理 2.4.5 で $n = 2m$ として適用すれば誤差は $o(x^{2m})$ である．しかし $n = 2m+1$ として適用すれば $f^{(2m+1)}(0) = 0$ なので近似多項式の部分は変わらず，誤差のみが $o(x^{2m+1})$ に変わる．このほうがより強力なので，ここでは後者の表示を与えた．

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$
- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$

3. 近似値の求め方

近似多項式だけでは誤差は分からない．近似値を求めるためには有限テイラー展開を利用しなくてはならない．近似多項式から近似値を，最後の項から誤差の大きさを調べる．具体的な計算内容については前回のレポート課題の解説を読むこと．

4. 極限への応用

漸近展開は極限に利用できる．例題 2.4.2 は前回解説したので，今回は問題 2.4 の 4 を解いた．講義でやっていない問題も含めて解答を記述しておく．

(1) 分母が x^2 なので分子は $o(x^2)$ を使って表す．

$$(1+x)\sin x = (1+x)(x+o(x^2)) = x + x^2 + o(x^2),\ x\cos x = x(1+o(x)) = x + o(x^2)$$

よって $(1+x)\sin x - x\cos x = x^2 + o(x^2)$ であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2} = 1$$

(2) 分母は $x\sin x = x(x+o(x^2)) = x^2 + o(x^3)$ であり，x^2 とほぼ同じ大きさなので分子は $o(x^2)$ を用いて表せばよい．まず $e^x = 1 + x + o(x)$ より $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ である．また $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ なので

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(3/2)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{3}{2}$$

(3) 分母は $x(\cos x - 1) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$ なので x^3 と同程度の大きさである．そこで分子を $o(x^3)$ を用いて表す．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2}{x(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6} - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + x^2 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{4}{3}$$

(4) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{4x^2}{4} + o(x^2)$ なので 通分してまとめた時の分母 $x^2\sin^2 x$ は x^4 と同程度の大きさになる．よって分子 $x^2 - \sin^2 x$ を $o(x^4)$ を用いて表す．

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = x^2 - \frac{8}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3}$$

5. 極値への応用

前回例題 2.4.3 を解説した．ここでは問題 2.4 の 5 を解説しておこう．

(1) $f(x) = x^2\sin x - x^3e^x = x^2(x+o(x^2)) - x^3(1+x+o(x)) = x^3 - x^3 - x^4 + o(x^4) = -x^4 + o(x^4)$

関数は $y = -x^4$ で近似できるので極大としてもよい．より詳しくは x^4 で割った時の極限が -1 に収束することを使って 0 の周りで分子が負になっていることを述べればよい．

(2) $f(x) = x^2 \sin x - x\sin^2 x = x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^5) - x^3 + \frac{1}{3}x^5 + o(x^5) = \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$
関数は $x^5/6$ で近似できるので極値をとらない．より厳密には $f(x)/x^5$ が $1/6$ に収束するので全体が正であること，すなわち $f(x)$ が x^5 と同符号（x と同符号）になることから分かる．

(3) $f(x) = x^2 - x^2\cos x = x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$
これは 0 の近くで $f(x) > 0$ となるので極小である．

(4) $x = 1$ での極値について考えるので $x = 1 + u$ とおいて $u = 0$ での極値を吟味する．
$f(x) = (x-1)^2\log x - (x-1)^3 = u^2\log(1+u) - u^3 = u^3 - u^4/2 - u^3 + o(u^4) = -u^4/2 + o(u^4)$ より $u = 0$ すなわち $x = 1$ で極大である．

来週は微分の範囲の試験なので，今回はレポート課題はありません．今までの問題を参考に試験勉強しておいてください．

微分積分 I 講義メモ (6 月 5 日)

本日の講義の要点

1. 基本的な関数の不定積分

 微分においては和と差だけではなく積，商，合成についても微分法則が存在した．それによって初等関数の微分は必ず計算できることが分かった．しかし，積分では関数の積，商，合成の積分は一般には分からない．置換積分や部分積分を駆使しながら，少しずつ積分できる関数を増やしていかなければならない．要するに積分計算には一般論は存在しない．何ができて何ができないのかをきちんと意識する必要がある．

 講義ではテキスト 60 ページの表にまとめられている関数について解説した．右辺を微分すれば左辺の積分の中身が得られることを確認しておくこと．

2. 部分積分の利用

 高校で部分積分を学習したとき，それによって $\log x$ の原始関数を求めたはずだ．それと同じアイデアで逆三角関数の積分を行った．

$$\int \mathrm{Tan}^{-1} x dx = x\mathrm{Tan}^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx, \quad \int \mathrm{Sin}^{-1} x dx = x\mathrm{Sin}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

右辺の積分は分母を u とでもおいて置換積分すると計算できる．$\mathrm{Tan}^{-1} x$ については結果のみ書いておくので各自計算せよ．

$$\int \mathrm{Tan}^{-1} x dx = x\mathrm{Tan}^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$\mathrm{Sin}^{-1} x$ の式では $\sqrt{1-x^2} = u$ と置換積分すれば $1-x^2 = u^2$ を得る．これから $-2xdx = 2udu$ となるので $xdx = -udu$ である．

$$\int \mathrm{Sin}^{-1} x dx = x\mathrm{Sin}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\mathrm{Sin}^{-1} x - \frac{-udu}{u} = x\mathrm{Sin}^{-1} x + u = x\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

この式の右辺は第 1 回試験の問 1(3) の問題である．

 もう一つこの手の部分積分のアイデアを使って

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = x\sqrt{a^2+x} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

これから p.60 の表の 4 番目の式を利用して整理すればこの表の 6 番目の式を得る．

$$2\int \sqrt{x^2+a}dx = x\sqrt{x^2+a} - a\log|x+\sqrt{x^2+a}|$$

3. 有理式の部分分数展開

 有理式の部分分数展開については p.62 に簡単に記述されているが，これでは具体的にどうするのかが分からない．講義では一般的な解説と具体例を 2 つ紹介したので，ここにもまとめておく．重要事項なのできちんと理解するように．

(1) 有理式を $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ とおく．まず分子分母に共通因数がある場合は約分しておく．

 当たり前のことなので講義では注意しなかったが，一般論とするためには一言断る必要があるだろう．

(2)「$p(x)$ の次数 $\geqq q(x)$ の次数」の場合は割り算により分子の次数を下げる．具体的には $p(x) \div q(x) = r(x) \cdots s(x)$ として

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)} \qquad s(x) \text{ の次数} < q(x) \text{ の次数}$$

このプロセスに必要な知識は多項式の割り算のみだ．

(3) 分母 $q(x)$ を 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解する．1 次式の因数 $x+a$ は $q(x)=0$ の実数解 $-a$ に対応し，判別式負の 2 次式の因数 $x^2+2bx+c$ は $q(x)=0$ の虚数解 $-b+i\sqrt{c-b^2}$ に対応する．n 次方程式は複素数の範囲で重複度を含めてちょうど n 個の解を持つことが知られているので，このような因数分解は必ず存在する．

　このような因数分解は一般には実行できない．因数分解の存在は分かっているが，それを具体的に求めることはできない．そこでこの講義では，すでに因数分解されているか，あるいは簡単に因数分解できるようなもののみを扱う．

(4) 以上の準備から $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ は多項式 $r(x)$ と次のような有理式の和として表せる．

- 因数 $(x+a)^k$ については

$$\frac{A_1}{(x+a)} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+a)^k}$$

- 因数 $(x^2+2bx+c)^l$ については

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+2bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+2bx+c)^l}$$

(5) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ をこのような有理式の和として表し，両辺に $q(x)$ をかけて右辺を整理する．すると両辺の各項の係数を比較することにより $q(x)$ の次数の個数の未知数による連立 1 次方程式が得られる．この連立 1 次方程式は必ずただ一組の解を持つことが証明されている．

4. 部分分数展開による積分計算の具体例

以上の一般論を確認しながら次の例を考えてほしい．まず $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ について

- 分子の次数は 2 で分母の次数 4 より小さい．よって割り算は不要だ．次の因数分解についてもすでに因数分解された形で与えられているので不要だ．よって準備作業なしに部分分数展開に入る．
- 分母の因数は $(x+1)^2$ と (x^2+1) だ．3(4) の置き方に従えば

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

- 両辺に $(x+1)^2(x^2+1)$ をかければ

$$\begin{aligned} 3x^2-x+1 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 \\ &= (A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + (A+B+D) \end{aligned}$$

- 各項の係数を比較して連立方程式を作れば $A=-1,\ B=5/2,\ C=1,\ D=-1/2$ を得る．よって

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx &= \int \frac{-1}{x+1} + \frac{5/2}{(x+1)^2} + \frac{x-1/2}{x^2+1}dx \\ &= -\log|x+1| - \frac{5}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x \end{aligned}$$

次に $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+1}{(x+1)(x+2)^2}dx$ について

- 分子の次数は 2 で分母の次数 3 より小さい．よって割り算は不要だ．次の因数分解についてもすでに因数分解された形で与えられているので不要だ．よって準備作業なしに部分分数展開に入る．
- 分母の因数は $(x+1)$ と $(x+2)^2$ だ．3(4) の置き方に従えば

$$\frac{3x^2+x+1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

- 両辺に $(x+1)(x+2)^2$ をかければ

$$\begin{aligned} 3x^2+x+1 &= A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1) \\ &= (A+B)x^2 + (4A+3B+C)x + (4A+2B+C) \end{aligned}$$

- 各項の係数を比較して連立方程式を作れば $A=3,\ B=0,\ C=-11$ を得る．よって

$$\int \frac{3x^2+x+1}{(x+1)(x+2)^2}dx = \int \frac{3}{x+1} - \frac{11}{(x+2)^2}dx = 3\log|x+1| + \frac{11}{x+2}$$

今回のレポート課題とヒント

問 3.1 の 1 から (5)(6)(12)，および問 3.2 の 1 を出題する．問 3.1 の 1(5) については $1+x^2=u$ とでもおくと良い．(6) は分母を平方完成して考察する．

問 3.2 の 1 については部分分数展開を行う．なお，展開する前に分母の次数と分子の次数を比較すること．分子の次数が小さくなっていない場合は，割り算によって分子の次数を下げる必要がある．

微分積分 I 講義メモ (6 月 12 日)

前回のレポート課題について

問題 3.1 の 1

(5) $1+x^2=u$ で置換積分すれば $2xdx=du$ なので

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = \int \frac{du}{2u^3} = -\frac{u^{-2}}{4} = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + C$$

(6) 平方完成により $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ として $x+1=u$ とおく．

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \mathrm{Tan}^{-1}u = \mathrm{Tan}^{-1}(x+1) + C$$

(12) $x+2=u$ とおけば

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx = \int \frac{u-2}{\sqrt{1-u^2}}du = -\sqrt{1-u^2} - 2\mathrm{Sin}^{-1}u = -\sqrt{1-(x+2)^2} - 2\mathrm{Sin}^{-1}(x+2) + C$$

問題 3.2 の 1

(1) 分子分母とも 2 次式なのでまず割り算を行い $\dfrac{x^2}{x^2-x-6} = 1 + \dfrac{x+6}{(x-3)(x+2)}$ と変形する．第 2 項を部分分数展開すると

$$\frac{x+6}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \quad \text{より} \quad x+6 = A(x+2) + B(x-3)$$

なので $A+B=1,\ 2A-3B=6$ を得る．よって $A=9/5, B=-4/5$ である．

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-6}dx = \int 1 + \frac{9}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{4}{5}\frac{1}{x+2}dx = x + \frac{9}{5}\log|x-3| - \frac{4}{5}\log|x+2| + C$$

(2) 部分分数展開すれば

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{より} \quad 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$$

から $A=1, B=C=-1$ を得る．

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \mathrm{Tan}^{-1}x + C$$

(3) これは部分分数展開するよりも $x-2=u$ とおいたほうが簡単だろう．

$$\int \frac{x-1}{(2-x)^3}dx = \int \frac{u+1}{-u^3}du = \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} = \frac{2u+1}{2u^2} = \frac{2x-3}{2(x-2)^2} + C$$

(4) これは基本的な部分分数展開を利用する問題

$$\frac{2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \quad \text{より} \quad 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$$

この式に $x=0$ を代入すると $2=2A$，$x=1$ を代入すると $2=-B$，$x=2$ を代入すると $2=2C$ を得る．ゆえに $A=C=1,\ B=-2$ である．

$$\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}dx = \log|x| - 2\log|x-1| + \log|x-2| = \log\frac{|x(x-2)|}{(x-1)^2} + C$$

(5) 部分分数展開するときには $(x-1)^2$ という因数に気を付けること．

$$\frac{5x+3}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

これから $A=-1/2,\ B=1/2,\ C=4$ を得る．よって

$$\int \frac{5x+3}{(x+1)(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{4}{x-1} + C$$

(6) 分母が 4 次なので部分分数展開における未知数は 4 つ必要になる．

$$\frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

より $(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)=2x$ を得るので $A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=-1$ である．

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x-1} - \mathrm{Tan}^{-1}x + C$$

【コメント】

- 問 3.1 1(12) の積分で部分積分を次のように 2 度繰り返す人が目立つ．

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx &= x\mathrm{Sin}^{-1}(x+2) - \int \mathrm{Sin}^{-1}(x+2)dx \\ &= x\mathrm{Sin}^{-1}(x+2) - (x+2)\mathrm{Sin}^{-1}(x+2) + \int \frac{x+2}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx\end{aligned}$$

  ただ，これは最初の部分積分で $\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$ を積分して $\mathrm{Sin}^{-1}(x+2)$ にし，次の部分積分で微分して元に戻したに過ぎない．このような部分積分の繰り返し方は基本的に非効率だ．確かにこの計算の効果として分子が x から $x+2$ になった．しかしそれだけなら部分積分などしなくても

$$\frac{x}{\sqrt{1-(x+2)^2}} = \frac{x+2}{\sqrt{1-(x+2)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$$

  とすればよい．

- テキストには部分分数展開をきちんと記述してないので，問題も思い付きで展開できるような簡単なものも多い．しかし，思い付きで解いているうちは，必ず計算できるという確信を持てるはずはない．このような問題についても，前回の講義で解説した一般的な方針に基づいて部分分数展開してほしい．
- 問 3.1 1(1) で $\dfrac{x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{Ax}{x-3} + \dfrac{Bx}{x+2}$ とおいて計算する人が何人かいた．$\dfrac{x}{x^2-x-6} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+2}$ に x をかけたものと思っているのであれば良いのだが，何となく置いたのであれば好ましくない．適当において，うまくいかなかったら別の方法でやろうというつもりなら，うまくいった経験はむしろ害悪だ．数学は論理で理解して深めていくものであり，経験則で対応するものではない．
- 例年あるパターンだが $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2x}\log(1+x^2)$ としてしまう解答がある．これは $1+x^2$ を一つのものと思って積分し，中身の微分で割っているのだと思う．ちょうど合成関数の微分に対応するものであり，混乱するのも分からないでもない．ただし，このやり方は 1 次関数との合成にしか使えない．高校での置換積分は基本的に $f(ax+b)$ の積分しか扱わないので，そのような考えで計算してしまうのかもしれないが，これは絶対にやってはいけないことだ．

本日の講義の要点

1. 有理式の積分のまとめ

　部分分数展開のやり方について再度解説したが，内容は前回の講義メモに記述してあるのでここでは繰り返さない．分子の次数を分母の次数より小さくすること，分母を 1 次式と判別式負の 2 次式に因数分解することが部分分数展開のための下準備であり，後は前回の講義メモに記した考えで分数式を用意すること．

　さて，部分分数展開で現れる分数式のうち，1 次式に対応するものの積分は簡単である．

$$\int \frac{1}{(x+a)^k}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)(x+a)^{k-1}} & (k \geqq 2) \\ \log|x+a| & (k=1) \end{cases}$$

2 次式 $x^2+2bx+c$, $(b^2-c<0)$ に対応するものは，平方完成 $x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)$ を参考に $x+b=\sqrt{c-b^2}u$ とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+2bx+c)^h}dx &= \int \frac{A\sqrt{c-b^2}u-Ab+B}{(c-b^2)^h(u^2+1)^h}\sqrt{c-b^2}du \\ &= \frac{A}{(c-b^2)^{h-1}}\int \frac{u}{(1+u^2)^h}du + \frac{(B-Ab)\sqrt{c-b^2}}{(c-b^2)^h}\int \frac{1}{(u^2+1)^h}du\end{aligned}$$

第 1 項の積分は $u^2+1=y$ とでもおけば簡単に計算できる．

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^h}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-h)(u^2+1)^{h-1}} & (h \geqq 2) \\ \dfrac{1}{2}\log(u^2+1) & (k=1) \end{cases}$$

第 2 項の積分は p.66 の問題 3.2 の 6 で取り上げられており，漸化式を利用して求める．

$$\begin{aligned}I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int x\frac{x}{(x^2+1)^n} \\ &= I_{n-1} - x\frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}\end{aligned}$$

を得るので，$I_1 = \mathrm{Tan}^{-1}x$ と合わせて，I_n を順次求めて行くことができる．参考までに

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x + \frac{x}{2(x^2+1)}, \quad I_3 = \frac{3}{8}\mathrm{Tan}^{-1}x + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2}$$

　以上の考察から有理式の積分は多項式，有理式， log，Tan^{-1} を用いて表されることが分かった．

2. 有理式の積分についての一般的なアプローチの方法を学んだので，次は置換積分である種の積分を有理式の積分に直すことを考える．以下，$f(x,y)$ は 2 変数 x,y の有理式（多項式を多項式で割ったもの）である．

(1) $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ は $u=\sqrt[n]{ax+b}$ と置換する．このとき

$$x = \frac{u^n-b}{a}, \quad dx = \frac{nu^{n-1}}{a}du \quad \text{より}$$

$$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int f\left(\frac{u^n-b}{a}, u\right)\frac{nu^{n-1}}{a}du$$

(2) $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ a>0$ は $\sqrt{ax^2+bx+c} = u - \sqrt{a}x$ と置換する．この両辺を 2 乗すれば $bx+c = u^2 - 2\sqrt{a}xu$ なので

$$x = \frac{u^2-c}{b+2\sqrt{a}u}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}u^2+bu+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}u}, \quad dx = \frac{2\sqrt{a}u^2+2bu+2c\sqrt{a}}{(b+2\sqrt{a}u)^2}du$$

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int f\left(\frac{u^2-c}{b+2\sqrt{a}u}, \frac{\sqrt{a}u^2+bu+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}u}\right)\frac{2\sqrt{a}u^2+2bu+2c\sqrt{a}}{(b+2\sqrt{a}u)^2}du$$

(3) $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ a<0$ については，定義できるのは $ax^2+bx+c=0$ の解の間である（虚数を値に取る関数は扱っていない）．そこで解を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とおいて $u = \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ と置換する．$u^2(x-\alpha) = a(x-\beta)$ より

$$x = \frac{\alpha u^2 - a\beta}{u^2-a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)u = \frac{a(\alpha-\beta)u}{u^2-a}, \quad dx = \frac{2a(\beta-\alpha)u}{(u^2-a)^2}du$$

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int f\left(\frac{\alpha u^2-a\beta}{u^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)u}{u^2-a}\right)\frac{2a(\beta-\alpha)u}{(u^2-a)^2}du$$

(4) $\int f(\cos x, \sin x)dx$ について $\tan\dfrac{x}{2} = u$ と置換する．

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int f(\cos x, \sin x)dx = \int f\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

講義ではきちんとした式を記述しなかったがここには念のため書き下しておいた．ただし，計算ミスは残されているかもしれない．大事なのは細かい係数の決定ではなく，u の有理式になっていることを確認することだ．いずれも $f(x,y)$ の x, y に u の有理式を入れた形になっており，全体として u の有理式になることは分かるだろう．

今回のレポート課題とヒント

問題 3.2（p.66）の 2(3)(4)，3(2)(4)(6) を課題にする．思い付きで計算するのではなく今日学習した置換の技法を使って求めてほしい．どの置換を使うかは簡単なのでここでは述べない．

微分積分 I 講義メモ (6 月 19 日)

前回のレポート課題について

相変わらず積分計算を思い付きでやっている人が多い．講義で紹介した置換積分の方法もただの面倒なテクニックという認識なのかもしれない．しかし，前回の講義で強調したことはある種の形の不定積分について，この置換で有理関数の積分にすることができるということだ．有理関数の積分の方法は前々回に学習したので，組合せれば積分計算に適用できる．問題によっては作業は面倒になるが，確実に解答に近づく強力な方法だ．レポート課題に取り組む際にはまず講義内容の理解に努めてからにしてほしい．高校以来の方法で偶然解けたとしても，講義内容が理解できたことにはならない．

もう一つ，全く同じ内容の答案が少なくない．しかも同じ間違いや同じ特殊な方法など，皆がきちんと理解して解答を作成したとは思えないものだ．レポート課題に取り組んでもらうのは講義内容を理解してもらいたいからだ．分からないまま適当にレポートにまとめて提出されても何の意味もない．

問題 3.2 の 2

(3) $\sqrt{x^2+1} = u - x$ で置換積分する（前回の講義メモ 2(2)）．両辺を 2 乗すれば $1 = u^2 - 2ux$ となるので

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \quad dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2}\right)du, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{(u^2-1)^2}{4u^2}\frac{2u}{u^2+1}\frac{u^2+1}{2u^2}du = \int \frac{u^4-2u^2+1}{4u^3}du = \frac{u^2}{8} - \frac{1}{2}\log|u| - \frac{1}{8u^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u^2+1}{2u}\frac{u^2-1}{2u} - \frac{1}{2}\log u = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = u$ とおく（前回の講義メモ 2(3)）．$1 - x = (1+x)u^2$ から

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2} - 1, \quad dx = \frac{-4u}{(u^2+1)^2}du, \quad \sqrt{1-x^2} = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{2u}{u^2+1} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{(1+u^2)^2}{4}\frac{u^2+1}{2u}\frac{-4u}{(u^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int u^2+1du \\ &= -\frac{1}{6}(u^3+3u) = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1-x}{1+x}+3\right) = -\frac{1}{3}\frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C\end{aligned}$$

問題 3.2 の 3

(2) $\tan\dfrac{x}{2} = u$ とおく（前回の講義メモ 2(4)）．

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du \quad \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2du}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

(4) これは分母の微分が分子になっているので一般的な置換の方法はとらないでいいだろう．

$$\int \frac{\cos x}{4+5\sin x}dx = \frac{1}{5}\log|4+5\sin x| + C$$

$\tan\dfrac{x}{2} = u$ とおくと次のようになる．

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{4+5\sin x}dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{4+5\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{1-u^2}{(2u^2+5u+2)(u^2+1)}du \\
&= \int \frac{2}{5}\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{u+2} - \frac{2}{5}\frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{5}\log|2u+1| + \frac{1}{5}\log|u+2| - \frac{1}{5}\log(u^2+1) \\
&= \frac{1}{5}\log\left|\frac{2u^2+5u+2}{u^2+1}\right| = \frac{1}{5}\log\left|2\sin^2\frac{x}{2} + 5\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}\right| \\
&= \frac{1}{5}\log|4+5\sin x| + C
\end{aligned}$$

(6) $\tan\dfrac{x}{2} = u$ とおく（前回の講義メモ 2(4)）．

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{1}{u^2+u}du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}du \\
&= \log|u| - \log|1+u| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| = \log\left|\frac{\sin x+\cos x-1}{\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

【コメント】

- 積分計算には一般的な計算法というものはない．関数の形に合わせて試行錯誤で工夫していくしかない．それでもある種の形の積分計算では，より一般的な方法がある．前回の講義で学習したのはまさにそのような置換積分のテクニックだ．今回のレポート課題の解答例では，そのような置換積分の方法を利用して与えている（問題 3.2 の 3(4) は別だが）．この置換積分の方法をまず身につけてほしい．

  例えば 2(3) で $\sqrt{x^2+1} = u$ とおくと

  $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{u^2-1}{u}\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}} = \int \sqrt{u^2-1}du$$

  となる．また部分積分を利用して

  $$\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx$$

  とすることもできる．両方とも $\int \sqrt{x^2+A}dx$ の形なので基本的な不定積分のリスト（p.60）に入っているのでそれを使えばよい．しかし，それは単に運が良かっただけだ．こういう思い付きの方法でも解ける問題が出題されているに過ぎない．

  2(4) はそのような問題ではないので $\sqrt{1-x^2} = u$ とおいた人は失敗している．前回の講義で解説した置換の技法を理解するようにしてほしい．試験では思い付きの方法で解けるような問題は出題しない．

- 前回の講義メモで，置換積分の方法について被積分関数を 2 変数の有理式 $f(x,y)$ を使って表した．しかし，具体的な積分計算では $f(x,y)$ に相当するところは具体的な式になっているので，f を使ってはいけない．例えば 2(3) では $f(x,y) = x^2/y$ であり，被積分関数は $f(x,\sqrt{x^2+1}) = x^2/\sqrt{x^2+1}$ になっている．

- 2(4) で $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ という置換積分を行った人で $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1-u^2}{u^2+1}\right)^2}$ と計算する人がいる．x を u の式で置きなおせばいいという感覚は分かるが，$\sqrt{1-x^2}=(1+x)u=\frac{2}{u^2+1}$ というように計算してほしい．前回の講義メモの 2(3) を参照すること．
- 2(4) において

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=-(1+x)\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'$$

といった変形を行う人が少なからずいる．どうやって思いついたのだろうか．不思議でならない．ただこういう特殊な方法を，この講義で学習した方法と同列に扱ってほしくはない．

本日の講義の要点

今回の講義では，定積分の定義から高校での積分の扱いに至る議論の流れを解説した．あまり細かい点にこだわらずに，積分の理論の全体像をつかむ第一歩にしてほしい．

1. 定積分とはリーマン和の極限である．

閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ に対して次の和をリーマン和と呼ぶ（定理 3.4.2 参照）．

$$S(f,\varDelta,\{c_i\})=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1}),\qquad \varDelta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ x_{i-1}\leqq c_i\leqq x_i$$

$\varDelta$ は区間の分割であり，c_i は分割による小区間 $[x_{i-1},x_i]$ 内の点である．

小区間の幅の最大を分割の幅と呼び $|\varDelta|$ で表す．$f(x)$ が $[a,b]$ 上　積分可能であるとは，$|\varDelta|\longrightarrow 0$ のときに　リーマン和が一定の値に収束することを言う．すなわち定積分とはリーマン和の極限である．

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\varDelta|\longrightarrow 0}S(f,\varDelta,\{c_i\})$$

2. この定義から積分の理論がどのように展開されるかを概説する．

(I) 定数関数の積分

$f(x)$ が c を値とする定数関数であれば $f(c_i)=c$ で一定である．リーマン和は $S(f,\varDelta,\{c_i\})=\sum_{i=1}^{n}c(x_i-x_{i-1})=c(b-a)$ であり，一定なので当然積分可能であり $\int_a^b cdx=c(b-a)$ である．

(II) $[a,b]$ 上連続関数は $[a,b]$ 上積分可能である．

テキスト 74 ページに証明が記述されているが講義では省略する．この事実が証明できるということだけ知っておいてほしい．なお，高校方式の定義ではこの事実は証明できない．

(III) 関数の和，定数倍の定積分（p.57 定理 3.1.2）

和については $S(f+g,\varDelta,\{c_i\})=S(f,\varDelta,\{c_i\})+S(g,\varDelta,\{c_i\})$ より簡単に得られる．定数倍についても同様．

(IV) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（積分域に関する加法性，p.563 行目）

$[a,c]$ の分割 $\varDelta_1$ と $[c,b]$ の分割 $\varDelta_2$ を合わせて $[a,b]$ の分割 $\varDelta$ を作れば $S(f,\varDelta,\{c_i\})=S(f,\varDelta_1,\{c_i\})+S(f,\varDelta_2,\{c_i\})$ となる．ここで分割の幅を細かくした極限を考えれば良い．

(V) $f(x)\leqq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b g(x)dx$

リーマン和のレベルで $S(f,\varDelta,\{c_i\})\leqq S(g,\varDelta,\{c_i\})$ が成り立つのでその極限にも同じ大小関係がある．なお $-|f(x)|\leqq f(x)\leqq|f(x)|$ より次の不等式を得る．

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqq\int_a^b|f(x)|dx$$

(VI) 積分の平均値定理

$[a,b]$ 上連続な関数 $f(x)$ について次を満たす $c \in (a,b)$ が存在する．

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

証明は次のように行う．$f(x)$ は閉区間上の連続関数なので最大値 M と最小値 m を持つ．$m \leqq f(x) \leqq M$ より

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a)$$

が成り立つので

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq M$$

を得る． $f(x)$ は連続なので，中間値の定理により最大値と最小値の間の値は $f(x)$ の取る値になっている．

(VII) 微分積分学の基本定理（定理 3.1.1 参照）

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

とおけば，$F(x)$ は微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

証明は次のように行う．まず積分の平均値定理より

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

となる．ただし c は x と $x+h$ の間の点である．ゆえに $h \to 0$ とすれば $f(c)$ は $f(x)$ に収束する．よって $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

(VIII) 微分積分学の基本公式（定理 3.1.3 参照）

ここでようやく高校での定積分の定義に到達した．以下は高校数学と同じである．定積分の定義である「リーマン和の極限」から一つずつ議論を積み重ねてきたことを感じてほしい．

(IX) 定積分の置換積分，部分積分

3. 広義積分へ

関数が ∞ に発散するような点を持つとき，リーマン和は $\{c_i\}$ の取り方によっていくらでも大きくなる．すなわちリーマン和の極限は存在しない．しかし，積分域を狭めてからその極限をとるという考えで積分の意味を広げてやることが可能になる．これを広義積分という．広義積分については次回解説する．

今回のレポート課題とヒント

次の不定積分を求めよ．なお，(2) については有理関数の積分に直すところまでで良いです．

$$(1)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (2)\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (3)\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$(4)\int \frac{dx}{\sin x} \qquad (5)\int \frac{dx}{a+b\tan x} \qquad (6)\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

前回解説した置換積分の方法で計算してほしい．ただし (5) は $\tan x = u$ とおくと良い．

微分積分 I 講義メモ (6 月 26 日)

前回のレポート課題について

【解答例】

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$

$\sqrt{x^2+a^2}=u-x$ と置換積分する．$a^2=u^2-2ux$ なので

$$x=\frac{u^2-a^2}{2u},\quad \sqrt{x^2+a^2}=u-x=\frac{u^2+a^2}{2u},\quad dx=\frac{u^2+a^2}{2u^2}du \quad \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{2u}{u^2-a^2}\frac{2u}{u^2+a^2}\frac{u^2+a^2}{2u^2}du=\int \frac{2}{u^2-a^2}du=\frac{1}{a}\int \frac{1}{u-a}-\frac{1}{u+a}du$$
$$=\frac{1}{a}\log\left|\frac{u-a}{u+a}\right|=\frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x-a}{\sqrt{x^2+a^2}+x+a}\right|=\frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}\right|+C$$

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}=u$ と置換積分する．$(a-x)=u^2(a+x)$ なので

$$x=\frac{a(1-u^2)}{1+u^2},\quad dx=\frac{-4au}{(1+u^2)^2}du,\quad \sqrt{a^2-x^2}=(a+x)u=\frac{2au}{1+u^2}\quad \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a^2(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}\frac{2au}{1+u^2}\frac{-4au}{(1+u^2)^2}du=-8a^4\int \frac{u^2(1-u^2)^2}{(1+u^2)^5}du$$

この有理関数の積分は大変なのでレポート課題から除外する．なおこの積分は部分分数展開により

$$\int \frac{u^2(1-u^2)^2}{(1+u^2)^5}du=\int \frac{1}{(1+u^2)^2}-\frac{5}{(1+u^2)^3}+\frac{8}{(1+u^2)^4}-\frac{4}{(1+u^2)^5}du$$

となるので積分の漸化式（p.66 問題 3.2 の 6）を使って計算できる．大変ではあるが，不可能というわけではない．

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

$\sqrt{x^2+1}=u-x$ と置換積分する．$1=u^2-2ux$ なので

$$x=\frac{u^2-1}{2u},\quad \sqrt{x^2+1}=u-x=\frac{u^2+1}{2u},\quad dx=\frac{u^2+1}{2u^2}\quad \text{より}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{3/2}}=\int \frac{(u^2-1)^2}{4u^2}\frac{8u^3}{(u^2+1)^3}\frac{u^2+1}{2u^2}du=\int \frac{(u^2-1)^2}{u(u^2+1)^2}du$$
$$=\int \frac{1}{u}-\frac{4u}{(u^2+1)^2}du=\log|u|+\frac{2}{u^2+1}=-\log\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|+\frac{1}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}+C$$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ $\quad \tan\frac{x}{2}=u$ と置換積分する．

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}\quad \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2}=\int \frac{1}{u}du=\log|u|=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\tan x}$

この積分は $\tan x = u$ とおくのが良い．$x = \mathrm{Tan}^{-1}u$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a+b\tan x} &= \int \frac{1}{a+bu}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b^2}{a+bu} + \frac{-bu+a}{1+u^2}du \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\log|a+bu| - \frac{b}{2}\log(1+u^2) + a\mathrm{Tan}^{-1}u\right) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\log|a\cos x + b\sin x| + ax\right) + C\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$\sqrt{\dfrac{2-x}{x}} = u$ とおく．$u^2x = 2-x$ より

$$x = \frac{2}{u^2+1},\quad dx = \frac{-4u}{(u^2+1)^2}du,\quad \sqrt{2x-x^2} = xu = \frac{2u}{u^2+1}\quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx &= \int \frac{u^2+3}{u^2+1}\frac{u^2+1}{2u}\frac{-4u}{(u^2+1)^2}du = \int \frac{-2u^2-6}{(u^2+1)^2}du = \int \frac{-2}{u^2+1} + \frac{-4}{(u^2+1)^2}du \\ &= -2\mathrm{Tan}^{-1}u - \frac{2u}{u^2+1} - 2\mathrm{Tan}^{-1}u = -4\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \sqrt{2x-x^2} + C\end{aligned}$$

なお，最後の積分ではテキスト p.66 の 6 を $n=1$ とおいて使っている．

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x$$

【コメント】

- この問題は正しい計算ができることではなく，講義で紹介した置換積分の方法が使えるようになることを目的としている．方針にのっとって置換を行い，有理式の積分にできればまずは合格だ．有理式になれば部分分数展開で積分計算できる．計算の実行は大変だが (2) を除いて，この程度の計算は行えるようになってほしい．なお，不定積分においては最後の結果は x の式の形に戻さなくてはならない．注意すること．

  なお，提出された解答の中に，講義で紹介した置換を行わず思い付きで計算している人もいる．残念だ．

- 置換積分した後，元の変数 x が残っている人がいるが，x が u の関数であるとの認識があれば間違いとまでは言えない．ただし，混乱しやすいので避けるべきだ．さらに x を u と無関係な変数と思っているのであれば本質的な重大な誤りだ．

  解答例では置換積分の計算の前に置換によって x，dx および $\sqrt{\text{二次式}}$ をそれぞれ u の式に書き直している．そしてその後で置換積分を実行している．計算内容を確認してほしい．なお (6) で $\sqrt{2x-x^2}$ に $x = \frac{2}{u^2+1}$ を代入する人がいるが，これは煩雑だ．

  $$\sqrt{2x-x^2} = x\sqrt{\frac{2-x}{x}} = xu,\qquad \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha|\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}} = \frac{|a(\alpha-\beta)|}{|t^2-a|}t$$

  を利用してほしい．右の記号はテキスト p.63 中ほどの (b) の記号と置換に基づいて記述している．

- 講義で学習した置換積分の方法は，易しく計算できる方法というわけではない．例えば (2) については次のように部分積分を利用して計算できる．

$$\int x\left(x\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = x\left(-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right)+\frac{1}{3}\int(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}dx$$
$$= -\frac{x}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2-x^2}dx-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

最後の項を右辺に移項すれば

$$\frac{4}{3}\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{x}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+\frac{a^2}{6}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

また $x = a\sin u$ とおくのも有効だ．試してみると良い．

- この講義では実数値の関数のみを扱っている．式に平方根が含まれる場合はその中身が正であることが前提になっている．それゆえ (2) では $-a \leqq x \leqq a$，(6) では $0 < x < 2$ が仮定されている．これに矛盾するようなおき方は許されない．

本日の講義の要点

1. 広義積分の意味と計算法

   $f(x)$ を $[a,b)$ で定義された連続関数とする．$b=\infty$ のとき，または $x \to b-0$ で $f(x)$ が無限大に発散するときは通常の定積分は定義できない．そこで極限と組合せて

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(t)dt = \lim_{t\to b-0}(F(t)-F(a)) = \left(\lim_{t\to b-0}F(t)\right)-F(a)$$

   と定める．これを広義積分と呼ぶ．

   こうしてみると広義積分においても，微分積分学の基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

   は使ってよいことになる．ただし，$F(b)$ が定義できない場合には $\lim_{t\to b-0}F(t)$ のことだとみなす．置換積分，部分積分は微分積分学の基本公式からから導かれるので広義積分についても成り立つ．不定積分に基づいて積分計算をする場合にはことさら広義積分であることを意識しなくてもよい．

2. 基本的な広義積分例

   p.64 の例 4 と例 5 は基本的である．計算内容を確認しておくとともに，結果は覚えておいてほしい．

3. 広義積分の収束判定

   広義積分が収束するか否かを調べるのは大変である．講義では定理 3.3.1 を紹介し，例 8 と例 11 のガンマ関数を解説した．ガンマ関数は初等関数ではないので具体的な式で記述することはできない．ただし，応用上も重要な関数なので，専門の授業でお目にかかることもあると思う．

   いずれにしても定理 3.3.1 を応用する形での収束判定は難しい話題である．分からなくてもあまり気にしなくてもよい．

今回のレポート課題とヒント

p.72 の問題 3.3 から 1 の (2)(4)(6)(8)(10) および 2 の (1)(2) を課題にする．いずれも原始関数を求めることができるので微分積分学の基本公式を利用してほしい．なお，(10) は積分域の中に分母が 0 になる点が 2 つ

ある．三つの範囲に分けて考えること．絶対値の中身の 2 次式の正負を考えれば，それぞれの範囲で絶対値を使わない形に直せる．なお置換は $x^2 - 3x + 2 = u$ などとおくと良い．$(2x - 3)dx = du$ なので簡単な積分に直せるはずだ．

微分積分 I 講義メモ (7 月 3 日)

前回のレポート課題について

【解答例】

1(2)　$\sin x = u$ とおけば

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_0^1 = 2$$

1(4)　原始関数は $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ なので

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

ここで最後の等式は ∞ を代入しているのではなく $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$ を用いている．

1(6)　x を積分，$\log x$ を微分する形で部分積分する．

$$\int_0^1 x \log x dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2} dx = -\frac{1}{4}$$

部分積分して出てくる積分は通常の積分である．ただし，第 1 項に 0 を代入することはできず，$x \to +0$ での極限を考えなくてはならない．この積分は次のように ∞/∞ 型の不定形に直してロピタルの定理を使う．

$$\lim_{x\to+0} x^2 \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/x^2} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\lim_{x\to+0} \frac{x^2}{2} = 0$$

1(8)　この関数は $\sqrt{x^2-1} = u$ とおいても有理式の積分になる．$x^2 - 1 = u^2$ より $xdx = udu$ なので

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{udu}{(u^2+1)u} = \left[\mathrm{Tan}^{-1} u\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

最初の積分は $x \to +1$ で被積分関数が無限大に発散しているが，置換積分した積分の被積分関数は $u = 0$ で連続である．なお，$\lim_{u\to\infty} \mathrm{Tan}^{-1} u = \frac{\pi}{2}$ である．

1(10)　$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ なので，積分の絶対値を外すには積分域を 3 つに分けなくてはならない．

$$\int_0^3 \frac{2x-3}{\sqrt{|x^2-3x+2|}} dx = \int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx + \int_1^2 \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx + \int_2^3 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx$$

平方根の中身の微分が分子にあることに注意すれば，第 1 項と第 3 項の原始関数は $2\sqrt{x^2-3x+2}$，第 2 項の原始関数は $-2\sqrt{-x^2+3x-2}$ であり，いずれも連続関数になる．よって

$$\int_0^3 \frac{2x-3}{\sqrt{|x^2-3x+2|}} dx = \left[2\sqrt{x^2-3x+2}\right]_0^1 + \left[-2\sqrt{-x^2+3x-2}\right]_1^2 + \left[2\sqrt{x^2-3x+2}\right]_2^3 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$$

2(1)　$\log x$ の原始関数は $x\log x - x$ であること，$x \to +0$ のとき $x \log x \to 0$ であることから

$$\int_0^1 \log x dx = [x\log x - x]_0^1 = -1$$

2(2)　$\frac{1}{\sin x}$ の原始関数は $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$（前回のレポート課題）なので

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \left[\log\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \infty$$

【コメント】

- 1(2) の積分は $\tan(x/2) = u$ とおいても有理式の積分にならない．p.64 の 1 行目に「三角関数の有理式の積分は」とあるが有理式とは加減乗除で表される式という意味だ．平方根は有理式とは言わない．1(2)1(10) で共通に言えることだが，置換積分の公式は

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du, \qquad \varphi(x) = u$$

という形で使うことが多い．1(2) で $\sin x = u$ とおいたり，1(10) で $x^2 - 3x + 2 = u$ とおいたりするのは，自然な置換だ．

- 合成関数の微分 $f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ は $\varphi(x)$ を一つの文字と思って微分してから中身の微分 $\varphi'(x)$ をかける．これは問題ない．しかし積分を同じ様にやると間違いになる．例えば $\int e^{-x^2}dx$ を計算するときに $-x^2$ を一つのものと思って積分し，中身の微分で割るとすると $-\frac{1}{2x}e^{-x^2}$ となるが，これが原始関数にならないことは微分してみればすぐにわかる．このようなやり方による積分計算は計算ミスとは言わない．積分計算の理解ができていないということだ．
- 1(6) の積分を x を微分，$\log x$ を積分する形で部分積分する人がいる．確かにそれでもできるが，解答例のほうが簡単だ．どちらが簡単か頭の中で考えるようにしてほしい．
- 1(8) の積分で，基本的な置換積分の方法に従って $\sqrt{x^2-1} = u - x$ とおいても良い．

$$x = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2-1}{2u^2}du, \qquad \sqrt{x^2-1} = u - \frac{u^2+1}{2u} = \frac{u^2-1}{2u} \qquad \text{より}$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int_1^\infty \frac{2u}{u^2+1}\frac{2u}{u^2-1}\frac{u^2-1}{2u^2}du = \int_1^\infty \frac{2du}{u^2+1} \\ &= \left[2\mathrm{Tan}^{-1}u\right]_1^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

なおこの置換で間違いやすいのは $\sqrt{x^2-1}$ を u の式として表すことだ．これを u とおいてしまって間違えた人も複数いた．

- 2(2) の広義積分が発散することは $[0, \pi/2]$ で $x \geqq \sin x \geqq 0$ が成り立つことから定理 3.3.1 を使えばよい．$\frac{1}{\sin x} \geqq \frac{1}{x}$ であり $\frac{1}{x}$ の広義積分は無限大に発散する．

本日の講義の要点

1. 積分の応用と区分求積法

　長さ，面積，体積などの量を求める際に，(1) 対象を細かく分割する (2) 一つ一つの部分をその量の扱いやすいもので近似する (3) 近似した量の和をとる (4) 分割を細かくしたときの極限を求めるという方法を区分求積法と呼ぶ．ここで極限を求めることは一般には難しい．しかし，近似した量の和がなにがしかの関数のリーマン和になっていれば，積分の定義（リーマン和の極限）から極限は定積分で求められる．これが積分の応用の基本的考え方である．

　例えば 2 つの連続関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが $a \leqq x \leqq b$ の範囲で囲む部分の面積を求めるには

(1) 区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ によって求める図形を帯状の n 個の部分に分割する．

(2) $x_{i-1} \leqq c_i \leqq x_i$ をとり，各部分を巾 $x_i - x_{i-1}$，長さ $|f(c_i) - g(c_i)|$ の帯で近似する．

(3) 帯の面積の和は次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n} |f(c_i) - g(c_i)|(x_i - x_{i-1})$$

ここまでが区分求積法による考察である．ところが最後の和を見ると $|f(x) - g(x)|$ のリーマン和になっている．これから面積（分割を細かくしていった時の極限）は次の積分計算により求められる．

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2. 極座標による面積

　連続関数による極方程式 $r = f(\theta)$ のグラフと原点が $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ の範囲で囲む部分の面積を求めよう．

(1) 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$ によって求める図形を扇形状の n 個の部分に分割する．

(2) $\theta_{i-1} \leqq c_i \leqq \theta_i$ をとり，各部分を頂角 $\theta_i - \theta_{i-1}$，半径 $f(c_i)$ の扇形で近似する．

(3) 扇形の面積の和は次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (f(c_i))^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$$

最後の和は $\frac{1}{2} (f(\theta))^2$ のリーマン和になっているので極限は定積分で求められる．すなわち

$$\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 \, d\theta$$

で面積を求めることができる．

3. 曲線の長さ

　C^1 級関数 $y = f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さを求めよう．

(1) 区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ によって曲線を n 個の断片に分割する．

(2) 各部分を $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ と $(x_i, f(x_i))$ を結ぶ線分で近似する．

(3) 線分の長さの和は次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} (x_i - x_{i-1})$$

平均値の定理により $x_{i-1} < c_i < x_i$ を $f'(c_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ となるようにとれば，右辺は $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ のリーマン和になる．曲線の長さは次の積分で求められる（定理 3．4.3）．

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

4. パラメーター表示による曲線の長さ

　$x = x(t)$, $y = y(t)$ を座標平面内の点の運動と考えよう．2 つの関数がともに C^1 級であれば運動は滑らかであり速度ベクトルは $(x'(t), y'(t))$ となる．この点の $a \leqq t \leqq b$ での移動距離（曲線の長さ）を考えよう．

(1) 区間 $[a, b]$ を $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ と分割する．

(2) $t_{i-1} \leqq c_i \leqq t_i$ をとり，各部分の運動を速度 $\sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2}$ の等速度運動で近似する．

(3) 移動距離は速度と時間をかければよいので

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1})$$

この和は $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ のリーマン和なので，分割を細かくしていったときの極限は次の積分で与えられる（定理 3.4.4）.

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

なおこの考察で分かるように求めたのは点の運動の移動距離である．これが曲線の長さになるためには同じところをだぶって通らないことが必要であり，注意を要する．

今回のレポート課題とヒント

p.78 の問題 3.4 の 1 と 2 を課題にする．また追加の課題として

問題 極座標による曲線 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ が $-\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ の範囲で囲む部分の面積を求めよ．

を出題する．今回やった積分の応用に基づいて定積分で結果を求めること．

微分積分 I 講義メモ (7 月 17 日)

前回のレポート課題について

【解答例】

問題 3.4 の 1　いずれも $y = f(x)$ の定める曲線の長さなので定理 3.4.3 を使う．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+(1/4)}dx$ なので p.60 の積分公式から

$$= \left[x\sqrt{x^2+1/4} + \frac{1}{4}\log(x+\sqrt{x^2+1/4})\right]_0^1 = \sqrt{5/4} + \frac{1}{4}\log\frac{1+\sqrt{5/4}}{\sqrt{1/4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$$

(2)　$\displaystyle\int_1^a \sqrt{1+(1/x)^2} = \int_1^a \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ を計算すればいいが，これは今日の講義で述べたように $\sqrt{1+x^2} = u$ とおくほうが簡単に計算できる．$x^2 = u^2 - 1$，$xdx = udu$ より

$$\int_1^a \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_1^a \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{u}{u^2-1}udu = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} 1 + \frac{1/2}{u-1} + \frac{-1/2}{u+1}du$$

$$= \left[u + \frac{1}{2}\log\left|\log\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a(\sqrt{2}-1)}$$

(3)　$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$ を求める．この積分は $\tan(x/2) = u$ と置換すれば求められるが，被積分関数が $\dfrac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ であることに注意して $\sin x = u$ とおけば簡単に求められる．

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \log(\sqrt{2}+1)$$

(4)　$(1+(y')^2) = 1 + \dfrac{\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)^2}{4} = \dfrac{\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)^2}{4}$ に注意せよ．

$$\int_0^b \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^b \frac{\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)}{2}dx = \frac{a}{2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]_0^b = \frac{a}{2}\left(e^{b/a}-e^{-b/a}\right)$$

問題 3.4 の 2　パラメーター表示された曲線の長さなので定理 3．4.4 を使う．

(1)　$(x')^2 + (y')^2 = 1 + 1/t^2$ より，長さを求める積分の被積分関数は 1(2) と同じである．$\sqrt{1+t^2} = u$ と置換して

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}du = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

(2)　$(x')^2 + (y')^2 = 36t^2 + 9(1-t^2)^2 = 9(1+t^2)^2$ より

$$\int_0^2 3(1+t^2)dt = \left[3t+t^3\right]_0^2 = 14$$

追加の問題　極座標による曲線 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ が $-\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ の範囲で囲む部分の面積を求めよ．

面積は $r^2/2$ を $-\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ の範囲で積分すればいいので

$$\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\sin 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

【コメント】

- いずれも公式を適用する問題．公式の適用の仕方については確実に覚えておくこと．
- 1(2) と 2(1) では同じ形の積分が現れる．もちろんこの積分を $\sqrt{1+x^2} = u - x$ という置換で実行してもよい．計算は大変になるが．また 1(3) も $\tan(x/2) = u$ という置換で計算できる．なおこの場合 $\tan\pi/8 = \sqrt{2} - 1$ を使う必要がある．
- 1(4) は解答例の冒頭に記述した等式に気づく必要がある．$4 - (x - 1/x)^2 = (x + 1/x)^2$ ということだが，平方を展開したときの中央の項が $2x(1/x) = 2$ であることに注意せよ．

本日の講義の要点

1. 積分の講義内容の総まとめ
   講義項目は大きく分けて以下のとおりである．
   - 部分分数展開と有理関数の不定積分
   - 特殊な置換積分の技法（p.63，p.64）
   - 積分の定義（リーマン和の極限）から高校での積分の定義（微分の逆）に至る議論の流れ
   - 広義積分
   - 積分の応用（区分求積法とリーマン和）
2. p.65 例題 3.2.1
   部分積分と漸化式の組み合わせなので分かりやすいと思う．$n!!$ という記号に注意すること．
3. ガンマ関数（問題 3.3 の 3）
   ガンマ関数は広義積分で定義されるが $s > 0$ において広義積分が収束することは以前解説した．問題 3.3 の 3 は部分積分が広義積分にも使えることを利用して

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx = \left[-e^{-x}x^s\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = s\Gamma(s)$$

   講義では $\Gamma(s)$ から e^{-x} を微分する形で部分積分を行った．上の議論のほうが分かりやすいだろう．なお $\Gamma(1) = 1$ と上の結果から自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ が得られる．ガンマ関数は応用上も重要な関数なので心に留めておくと良い．

今回で 1 変数の微分積分を終える．後期は 2 変数関数を中心に多変数関数の微分積分を解説する．

理系基礎科目「微分積分 I」（工学部情報 1 組）第 1 回試験（5 月 29 日実施）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ の定義域，値域，グラフを書け．

(2) $f(x) = x^{\mathrm{Tan}^{-1} x}$ とするとき $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x) = x\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ とするとき $f'(x)$ を求めよ．

(4) $f(x) = x^2 e^{ax}$ とするとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(5) ロピタルの定理を利用して極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{\sin x}$ を求めよ．

【解答例】(1) 定義域は $[-1, 1]$，値域は $[-\pi/2, \pi/2]$ グラフは省略（テキスト p.16 参照）

(2) $\log f(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x \log x$ より，両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2} \log x + \mathrm{Tan}^{-1} x \frac{1}{x} \quad \text{より} \quad f'(x) = \frac{x^{\mathrm{Tan}^{-1} x} \log x}{1+x^2} + (\mathrm{Tan}^{-1} x) x^{\mathrm{Tan}^{-1} x - 1}$$

(3)

$$f'(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x + x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1} x$$

(4) $(e^{ax})^{(k)} = a^k e^{ax}$ とライプニッツの公式により

$$(x^2 e^{ax})^{(n)} = x^2 (e^{ax})^{(n)} + n(x^2)'(e^{ax})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^{ax})^{(n-2)} = \left(x^2 a^n + 2nxa^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}\right) e^{ax}$$

(5) 0/0 型不定形なのでロピタルの定理により分母分子とも微分した極限を考える．

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3^x \log 3 - 2^x \log 2}{\cos x} = \log 3 - \log 2 = \log(3/2)$$

【コメント】

- (1) のできが予想外に悪かった．定義域と値域の意味（高校数学で学習したはずだ）を理解していない人も少なからずいた．またそもそも $\mathrm{Sin}^{-1} x$ とはどういう関数なのかの認識がない人が多すぎる．大学で初めて学習した関数は逆三角関数だけなので，勉強不足としか言いようがない．形式的な微分計算ができるだけでは意味はない．

  対して，(2)(4)(5) のできは非常に良い．高校の延長での計算問題なので取り組みやすいのだろうが，数学の勉強が計算問題を解くことに特化しているように感じる．確かに計算問題の解き方を訓練すれば，それなりの点数を取ることができるようになる．しかし，それでは数学が専門で利用される背景を知ることはできない．背景を知らなければ専門分野の深い理解はできるはずがない．問題を解くだけなら機械が簡単に答えてくれるではないか．
- (4) ではライプニッツの公式を使う必要がある．3 回微分したというだけでは，評価の対象にならない．ただし，3 回までの微分から正しい結果を得る場合もある．しかし，それは予想であって論理的結論ではない．何らかの形での証明がなければ正解とは言えない．
- (5) でロピタルの定理を利用する場合は不定形のチェックをしなくてはならない．これを明記していない答案は減点した．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$ の $x = 0$ における $n = 3$ の場合の有限テイラー展開を記述せよ．
(2) 上式を利用して $\sqrt[4]{1.04}$ の近似値を求めよ．また誤差についても考察せよ．

【解答例】(1) k 次の導関数は

$$\left((1+x)^{1/4}\right)^{(k)} = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{11}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-k+1\right)(1+x)^{(1/4)-k}$$

である．この係数を $k!$ で割ったものが広義の 2 項係数

$$\binom{1/4}{k} = \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{11}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}$$

である．これを $k = 1, 2, 3$ について具体的に計算すれば $\binom{1/4}{1} = \frac{1}{4}$, $\binom{1/4}{2} = -\frac{3}{32}$, $\binom{1/4}{3} = \frac{21/64}{6} = \frac{7}{128}$ となるので

$$\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}(1+\theta x)^{-11/4}x^3$$

(2) $x = 0.04$ を上式に代入する．

$$\sqrt[4]{1.04} = 1 + 0.01 - \frac{3}{2}0.0001 + \frac{7}{2}0.000001(1+\theta 0.04)^{-11/4} = 1.00985 + R, \quad 0 < R < 0.0000035$$

これから $\sqrt[4]{1.04}$ を小数点第 6 位で四捨五入すれば 1.00985 になることが分かる．

【コメント】

- (1) では $(1+\theta x)^{-11/4}$ が記述されていることがポイントだ．有限テイラー展開において，一般項は $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$，最後の項は $\dfrac{f^{(k)}(\theta x)}{k!}x^k$ なので，関数に 0 を代入するか θx を代入するかの違いしかない．違いを意識することは式を理解するうえで重要なポイントといえる．

  $n = 4$ の場合の式を書いた人もいたが，それも正解にした．3 次多項式と最後の項と考えると，$n = 4$ と考えるのも自然かもしれない．
- (2) において，近似値は通常小数で表す．分数で書いても間違いとは言えないかもしれないが，8/13 の近似値のように分数自体が近似値を考える対象になる．やはり小数とすべきだろう．

  採点して計算能力の低下を痛感する．社会生活の中で計算する機会が減ったのも大きいかもしれない．なお，この問題では分母がすべて 2 のべきであり，割り切れるので手計算でも簡単なはずだ．0 はたくさんつくがこの程度の 0 の個数は問題なく扱えるようになってほしい．

  驚くのは $\sqrt[4]{1.04}$ と $\sqrt[4]{1+x}$ で $x = 0.4$ とする人が少なくないことだ．$1 + 0.4 = 1.04$ と思っているのだろうか．このミスはありがちなミスなのだろうか．
- (2) で誤差の評価が雑な人が多い．結果的に近似多項式の 3 次の項 $\dfrac{7}{128}x^3$ に 0.04 を代入したもので抑えられることになるが，それでは誤差の評価の根拠にならない．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 漸近展開を利用して次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

【解答例】 通分すれば分母は $x^2\sin^2 x = x^2(x+o(x^2))^2 = x^4+o(x^4)$ である．分子 $x^2-\sin x^2$ を $o(x^4)$ を用いて表せば

$$x^2-\sin^2 x = x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 = x^2-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{3}$$

【コメント】

- 漸近展開とは関数 $f(x)$ をその n 次近似多項式に $o(x^n)$ をつけた形で記述することだ．近似多項式の次数は必要に応じて自由にとってよい．例えば $\sin x$ について $\sin x = x+o(x)$ としても良いし $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ としても良い．後者のほうが情報量は多いが，項の数が多くなるので扱いは大変になる．

  なお，$x^2 = x^2+o(x^2)$ と書いた人がいるが，これでは情報量を少なくしかつ項を増やして煩雑にしている．
- 漸近展開の求め方（近似多項式の求め方）の基本は $f^{(k)}(0)$ を求めることだ．しかし，ランダウの o の計算を利用して，多項式の計算のように求めることもできる．例えば $f(x)=\sin^2 x$ についても以下のような方法がある．
  - $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=-8$ より

    $$\sin^2 x = \sum_{k=0}^{4}\frac{x^k}{k!}+o(x^4)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

  - $\sin x$ の漸近展開を利用して

    $$\sin^2 x = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

    ここで 3 項目以下は何故 $\frac{x^6}{36}+2xo(x^3)-\frac{x^3}{3}o(x^3)+o(x^3)o(x^3)$ と書かないのかと疑問を持つ人もいるだろう．最初の項は x^6 なので x^4 で割ってもなお 0 に収束する．2 番目の項は $xo(x^3)=o(x^4)$ に過ぎない．以下の項も，すべて 4 次以上であり $o(x^4)$ というゴミ箱に捨てることができる．捨てられることが分かった時点でそれ以上の計算は行わないのがランダウの o を使うポイントだ．
- 分母の $\sin x$ は $x+o(x)$ とおけばよいが，分子の $\sin x$ を $x+o(x)$ とおいてしまうと失敗する．$x^2-\sin^2 x = x^2-x^2+o(x^2)=o(x^2)$ になってしまい

  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^4+o(x^4)}$$

  を求めることになるがこの極限は分からない．近似多項式を作る際に情報量を少なくしすぎたのだ．
- 次のような解答もあった．分かりやすいので記述しておく．

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x+o(x))(x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2(x+o(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{3}$$

4 $f(x)$ が C^n 級の時次が成り立つことを示せ．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

【解答例】 n 回微分可能なので有限テイラー展開により

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \qquad 0 < \theta < 1$$

である．よって

$$f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

この右辺を $g(x)$ とおけば，$f^{(n)}(x)$ の連続性より

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to 0}\left(f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)\right) = 0$$

である．これは $g(x) = o(x^n)$ を意味しており，$g(x)$ を $o(x^n)$ で置き換えて

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

【コメント】

- 問題を作成したときに予想していたことではあるが，結果は惨憺たるものだった．何故，このような結果になったのかもはっきりしている．問題が難しいからではなく，基本的な用語の意味を考えずに学習してきたことのつけである．関数が C^n 級であることの定義を理解していると思えるものはほとんどない．$o(x^n)$ の意味を理解しているものも少ない．用語の意味を理解することが数学の勉強の出発点であるはずなのに，多くの人が多くの人がある種の問題の解き方を知ることのみが勉強だと勘違いしている．
- 関数 $f(x)$ が C^n 級であるとは単に n 回微分できるという意味ではない．n 回微分できるとともにそこから得られる n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続だということを意味する．この事実を使わなければ問題の証明は不可能だ．
- $g(x) = o(x^n)$ とは $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n} = 0$ が成り立つことを意味する．だから示すべきことは

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)}{x^n} = 0$$

  だ．証明のアイデアはこの分子の $f(x)$ を有限テイラー展開の式で置き換えることだ．難しいことは何もない．
- 感覚のいい人は，証明すべきことが

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

  であることに気付いたようだ．ただし $o(x^n)$ の意味が曖昧なためにこれ以上進めなかった．
- $n+1$ の場合の有限テイラー展開を使って $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = o(x^n)$ であることをいおうとした人がいた．この感覚も悪くないが $n+1$ 次導関数が存在するとは言っていないので間違いである．

理系基礎科目「微分積分 I」（工学部情報 1 組）第 2 回試験（7 月 31 日実施）

100 点満点で採点し，最高点は 72 点，最低点は 2 点，平均点は 37.75 点と残念な結果だった．数学の勉強は公式を覚えそれを利用して問題を解くことだと勘違いしている人が多いと感じている．論理の部分は最初から分からないとあきらめ無視している人が多いのではないだろうか．

授業でも言ったが計算方法だけなら今はコンピューターがすべてやってくれる．意味も分からないまま公式を覚え使う練習をするのでは，何の意味もない．難しいと感じても意味の部分を考えるようにしてほしい．それが分かればこの授業内容が決して難しいものではないことに気付くはずだ．

30 点以下の 20 名を不合格にした．うち 3 名は第 1 回試験も不合格なので再試験の対象にしない．残り 17 名と第 1 回試験不合格で第 2 回試験に合格した 2 名について再試験を行う．

1 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x+\sin x}$　(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

【解答例】(1) 分母と分子の次数が等しいので割り算をして $\frac{x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1}$ としてから部分分数展開する．

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

これから与式は次の 4 つの項の積分に分けられる．

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}dx = \int 1dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

第 2 項と第 3 項は分母の微分が分子になっているので，59 ページの例 9 を使えばよい．最後の項は分母を平方完成すると $(x^2-x+1) = (x-1/2)^2 + 3/4$ となるので $(x-1/2) = (\sqrt{3}/2)u$ と置換すれば

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

以上まとめて

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}dx = x - \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

(2) $\tan(x/2) = u$ と置換積分する．このとき $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ なので

$$\int \frac{dx}{2+\cos x+\sin x} = \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2}{u^2+2u+3}du$$

この積分は分母が $(u+1)^2+2$ なので $u+1 = \sqrt{2}t$ と置換すると良い．

$$\int \frac{2}{u^2+2u+3}du = \int \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}dt = \sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}t = \sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right) + C$$

(3) $\sqrt{x^2+1}=u-x$ と置換積分する．$x=\frac{u^2-1}{2u}$ なので $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}$ である．また $dx=\frac{u^2+1}{2u^2}du$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(u^2-1)^2}{4u^2}\frac{2u}{u^2+1}\frac{u^2+1}{2u^2}du = \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{u^4-2u^2+1}{4u^3}du \\ &= \left[\frac{u^2}{8}-\frac{1}{2}\log u-\frac{1}{8u^2}\right]_1^{2+\sqrt{5}} = \frac{9+4\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})-\frac{9-4\sqrt{5}}{8} \\ &= \sqrt{5}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})\end{aligned}$$

(4) 被積分関数は 0 と 1 で ∞ に発散するので，積分域の 0 と 1 は極限として理解する．$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=u$ と置換積分する．$x=\frac{1}{u^2+1}$，$dx=-\frac{2u}{(u^2+1)^2}du$，$\sqrt{x(1-x)}=xu=\frac{u}{1+u^2}$ である．また $x\to 0$ のとき $u\to\infty$，$x\to 1$ のとき $u\to 0$ である．以上から

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_\infty^0 \frac{1+u^2}{u}\frac{-2u}{(1+u^2)^2}du = \int_0^\infty \frac{2}{1+u^2}du = \left[2\mathrm{Tan}^{-1}u\right]_0^\infty = \pi$$

別解として平方根の中身が $\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ であることを使って $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u$ とおくのも有効である．

【コメント】

- (1) は有理関数の積分だ．方法は 6 月 5 日の講義メモの 3 にまとめてある．割り算で分子の次数を分母の次数よりも小さくすること，分母を因数分解することが部分分数展開に入るための準備だ．そのうえで因数分解の形に応じた分数式を用意する．講義メモに記述した一般論と解答例をきちんと比較しておくこと．
- 部分分数展開によって現れる $\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}$ の計算はまったくできていなかった．講義で強調したのは，分母の平方完成 $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ が u^2+1 の定数倍になるように置換積分せよということだ．6 月 12 日の講義メモの 1 を確認すること．

  公式を覚えても数学の理解は深まらない．一般的な問題のアプローチの方法を理解すれば，どんな有理関数も積分できるという感覚が得られる．レポート課題やテキストの例題は一般的なアプローチの方法を理解するためにやらなければならない．簡単な問題だけ解いて満足しては進歩はない．
- (2) は置換積分の基本手法である $\tan(x/2)=u$ を使う問題だ．これはこのような $\cos x$ と $\sin x$ の有理式すべてに有効な方法だ．この置換が全く行えない人は何を勉強してきたのだろうか．
- (3) と (4) は $\sqrt{\text{二次式}}$ の積分だ．これには二次式の形によって二通りの置換の方法がある．6 月 12 日の講義メモの 2(2) と 2(3) を確認せよ．いずれも一般的な手法によって煩雑にならないものを出題した．一般的な手法と思い付きで解くというやり方と質的な違いを理解すること．
- (3) は部分積分や $\sqrt{x^2+1}=u$ とおく置換でも計算できる．この方法では $\int\sqrt{x^2+1}dx$ の計算に帰着される．この積分はテキストの基本公式の中に含まれているので暗記してきた人も多いようだ．しかし，暗記するゆとりがあるのなら何故置換の基本的手法を理解しようとしないのか．勉強のやり方が完全に間違っている．数学は暗記科目だという受験生がいるが，数学は暗記科目とはもっともほど遠いものだ．

  さて，この積分は $\sqrt{x^2+1}=u-x$ とおけば簡単に積分できる．解答例と同じ置換なのでそれを参考に考えてみよ．

$$\int\sqrt{x^2+1}dx = \int\frac{u^2+1}{2u}\frac{u^2+1}{2u^2}du = \int\frac{u^4+2u^2+1}{4u^3}du = \frac{u^2}{8}+\frac{1}{2}\log|u|-\frac{1}{8u^2}$$

あとは $u = \sqrt{x^2+1}+x$ と $u^{-1} = \sqrt{x^2+1}-x$ を使えば，$u^2-u^{-2} = 4x\sqrt{x^2+1}$ なので

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\log(\sqrt{x^2+1}+x)\right)$$

- (4) は $\sqrt{1-x}=u$ とおいても計算できる．しかし，これも偶然うまくいっただけのことだ．6 月 12 日の講義メモ 2(3) の手法を使ってほしい．なお，定積分と広義積分の置換積分では積分域が変わる．(4) でこの部分を全くやっていない答案が目についた．これは置換積分がきちんとできないということなので大きく減点した．
- 以上 4 つの積分はすべてテキストに記載されレポート課題としたものおよびその類題である．きちんと勉強していればできて当然の問題だ．しかし，結果は惨憺たるものだった．(1) は 15 点満点で平均が 6.31 点，満点はいなかった．(2) も 15 点満点で平均が 10.05 点，(3)(4) は 10 点満点で平均がそれぞれ 5.91 点，4.56 点だった．

2 $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx,\ n = 0,1,2,3,\dots$ とおく．I_n についての漸化式を求めよ．またその結果を利用して I_n を求めよ．

【解答例】$n \geqq 2$ について $\sin^n x = \sin^{n-1}x\sin x$ として $\sin^{n-1}x$ を微分，$\sin x$ を積分する形で部分積分を行う．

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x(n-1)\cos x\sin^{n-2}xdx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx = (n-1)(I_{n-2}-I_n) \end{aligned}$$

この式から I_n についての漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を得る．

この漸化式を順次使っていく．n が偶数のときは $I_0 = \pi/2$ より

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}I_0 = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$$

n が奇数のときは $I_1 = 1$ より

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}I_1 = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}$$

【コメント】

- 最後の授業で扱った例題 3.2.1 だ．アイデアは単純なのでできてほしい問題だ．
- この積分を $\log x$ の不定積分の計算のように $\int \sin^n xdx = x\sin^n x + \int nx\sin^{n-1}x\cos x$ とした人が少なからずいた．こんなのでうまくいくと思ったのだろうか．おそらく今まで学習した手法を意味もなく適用したということだろう．こういう計算に時間をかけても部分点すら得られない．
- 15 点満点で平均は 5.42 点だった．

3 a を正の数とする．極座標によって $r = a(1+\cos\theta),\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi$ で表される曲線の長さおよびその囲む面積を求めよ．

【解答例】 面積は $r^2/2$ を θ で積分すればよい（7 月 3 日の講義メモ 2）.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{3a^2\pi}{4}$$

曲線の長さについては $x = r\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y = r\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta$ としパラメーター表示による曲線の長さの公式（定理 3.4.4）を用いる．

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (-a\sin\theta - a\sin 2\theta)^2 + (a\cos\theta + a\cos 2\theta)^2 = 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

より長さは

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a$$

【コメント】

- 積分の応用は面積と曲線の長さだ．面積も直交座標なら高校で学習しているので出題する必要はない．極座標による面積は当然出題されるものと思うのが自然だ．こういうことこそきちんと覚えておくべきだろう．しかし，全く手が付けられないという人が多すぎる．残念だ．
- 長さについて解答例はパラメーター表示による曲線の長さの公式を利用した．計算過程はやや複雑なので計算ミスした人も少なくない．状況に応じて部分点を与えている．なお，長さを $\sqrt{f(\theta)^2 + (f'(\theta))^2}$ の積分で求めた人もいる．これについては章末問題に出題されているが講義ではやらなかった．少しコメントしておこう．

  極方程式 $r = f(\theta)$ は $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta,\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ と直交座標でのパラメータ表示に直せる．$\dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$ なので

  $$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2$$

  となる．定理 3.4.4 と合わせて極方程式での曲線 $r = f(\theta),\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta$ の長さは次で求められる．

  $$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}d\theta$$

  この式を使ったほうが途中の計算は簡単になる．
- 配点は 20 点，平均点は 4.78 点だった．

4 (1) 関数 $f(x)$ のリーマン和とは何か説明せよ．

(2) $f(x)$ を C^1 級関数とする．曲線 $y = f(x),\ a \leqq x \leqq b$ の長さが，積分 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ で与えられることを積分がリーマン和の極限であることを利用して証明せよ．

【解答例】 (1) 積分域 $[a,b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ と各小区間での点 $x_{i-1} \leqq c_i \leqq x_i$ について

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

をリーマン和という．

(2) $\mathrm{P}_i(x_i, f(x_i))$ とおけば，曲線は $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ を結ぶ折れ線で近似できる．線分 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ の長さは

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}(x_i - x_{i-1})$$

である．ここで右辺に平均値の定理を使えば $x_{i-1} < c_i < x_i$ を

$$\sqrt{1 + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1})$$

となるようにとれる．よって折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1})$$

となるがこれは $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ のリーマン和に他ならない．曲線の長さは折れ線の長さの分割を細かくしていった時の極限になるので，それは積分 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ で与えられる．

【コメント】

- リーマン和は積分の理論の中心にある概念だ．言葉で説明する人もいるが，解答例のようにきちんと式で与えてほしい．
- (2) の要点は，曲線を折れ線で近似すること，折れ線の長さの表示と平均値の定理を組み合わせること，それが $(1 + f'(x))^2$ のリーマン和になっていることだ．この問題は難しい問題ではないが，高校での数学の問題とは質的に違うので取り組みずらいと思う．できが悪いのは覚悟していたが，こういう議論の流れに関心を持ってほしいという気持ちを込めて出題した．15 点満点で平均は 0.73 点だった．

この授業では微分と積分をそれぞれ 90 分で試験した．他のほとんどのクラスは，まとめて 90 分の試験だ．そのためそれぞれ論理的な記述を要する問題をつけた．ただそれ以外の問題は標準的なものばかりだ．本来なら合格点は 40 点ぐらいにすべきだろう．しかし，平均点が 37.75 点という状況ではそれもままならないので 31 点以上を合格にした．

数学の勉強は理解することに尽きる．理解できればやさしく感じられるはずだし，面白さも分かってくる．公式を当てはめるだけの勉強には何の意味もない．後期はそういう気持ちで授業に臨んでほしい．