微分積分 II 講義メモ (10 月 2 日)

本日の講義の要点

1. はじめに

   数学を応用する際に，多変数関数を考える必要があるのは当然なことだ．現象を数式で表すとき，一般に多数のデータが必要になるからだ．ただし，この講義では主に 2 変数関数のみを扱うことにする．理由は次の二つである．

   - 多変数関数を扱う方法と，2 変数関数を扱う方法は基本的には同じである．2 変数関数についての微積分が理解できればそれを n 変数の場合に拡張するのは難しいことではない．
   - 関数の理解にはグラフが有効である．しかし，n 変数関数のグラフは $\mathbb{R}^{n+1}$ で考えなければならないので，$n \geqq 3$ の場合は図形として捉え難い．2 変数の場合は座標空間内の図形としてグラフを直感的にとらえることができる．

2. 2 変数関数のグラフ

   1 変数関数の基本的な定義域は区間（端点が $\infty, -\infty$ などの場合を含む）だが，2 変数関数の定義域は座標平面内の図形なのでより複雑になる．テキストに開集合や領域という言葉が記述されているが，これらは感覚的にとらえておけばよい．

   重要なのは 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフが座標空間内の曲面として記述されることだ．テキストには様々な曲面の絵が記載されているが眺めておいてほしい．なおこれらのグラフにおいて，z 座標は高さと思うと理解しやすい．(x, y) 地点での高さが $f(x, y)$ ということだ．

   - 1 次関数のグラフ $z = ax + by + c$

     グラフは平面になる．a を x 方向の傾き，b を y 方向の傾き，c を z 切片と呼ぶことにする．これらの言葉は一般的に使われるわけではないが，高校までの 1 次関数のグラフの理解と結びつけることができるので，この講義では積極的に使用する．なお，$a = b = 0$ の場合は $z = c$ で一定であり，高さ c の水平面である．
   - 2 次関数のグラフ $z = ax^2 + by^2$

     この曲面と水平面 $z = c$ との切り口 $ax^2 + by^2 = c$ は曲面の等高線として理解できる．等高線は $ab > 0$ の場合は楕円，$ab < 0$ の場合は双曲線である．さらに詳しく見るには xz 平面（$y = 0$）との切り口 $z = ax^2$ と yz 平面との切り口 $z = by^2$ を考えると良い．ab の正負によって曲面の様子が全く異なることに注意せよ．
   - その他のグラフ

     最も基本的な例として上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ に触れた．

3. 2 変数関数の極限，連続性

   定義は 1 変数関数の場合と同様に感覚的に理解しておけばよい[*1]．ただし (x, y) を (a, b) に近づける際にいろいろな方法があるので難しい．それでも定理 4.1.1 を使うと多くの極限は代入するだけで求められる．例えば

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left((x^2 + 2y)\pi\right) = \cos 3\pi = -1$$

   しかし，テキストでも実際に問題にされているのは 0/0 型不定形で代入では極限が求められないものばかりである．このような問題への一般的な解き方はない．ただし極座標の利用（例題 4.1.2）が有効に

[*1] $\varepsilon\delta$ 論法という厳密な定義の仕方もあるが，ここでは省略する．

なることも多い．r は (x,y) と $(0,0)$ の距離なので $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ に置き換えられるからだ．例題 4.1.1，例題 4.1.2，例題 4.1.3 の三つを解説したが，テキストと基本的に同じ説明をしたので読んでおくこと．

本日の課題とヒント

問題 4.1 の 1 を課題にする．(1) から (5) までは極座標を使って考えてみると良い．(6) は難しい．放物線 $x = ay^2$ に沿って原点に近づけた時の極限を考えてみると良い．

微分積分 II 講義メモ (10 月 9 日)

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題（2 変数関数の極限）について

   問題 4.1 の 1 はいずれも $(x, y) \to (0, 0)$ での 0/0 型不定形の極限である．具体例に基づいて解説しよう．

   - (2) について，極座標を利用すれば極限式の中身は

     $$\frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta$$

     である．これは θ の値によって -2 から 1 までのあらゆる値をとる．すなわち (x, y) と $(0, 0)$ の距離 r をいくら小さくしても一定の値に近づくとは言えない．

   - (3) について x 軸に沿って近づければ（$y = 0$ とおいて近づければ）

     $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

     y 軸に沿って近づければ（$x = 0$ とおいて近づければ）

     $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^2} = 2$$

     近づけ方によって異なる値に収束するので，$(x, y) \to (0, 0)$ での極限は発散する．

     なお，この考え方で同じ値に収束しても，$(x, y) \to (0, 0)$ での極限が収束するとは言えない．単に特別な 2 つの近づけ方で極限が等しくなっているというだけだ．

   - (5) について，極座標を利用すれば極限式の中身は

     $$\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\cos\theta\sqrt{r|\sin\theta|}}{r} = \sqrt{r}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}$$

     ゆえに絶対値をとり $|\cos\theta| \leqq 1$, $|\sin\theta| \leqq 1$ を使えば

     $$\left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqq \sqrt{r}$$

     となるので $r \to 0$ のとき 0 に収束する．すなわち

     $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

   - (6) については原点を通る直線 $y = ax$ に沿って近づけると

     $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2x^3}{x^2 + a^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{1 + a^4x^2} = 0$$

     である．また y 軸に沿って近づけても

     $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4} = 0$$

である．すなわち原点を通る直線に沿って近づけるときは，すべて 0 に収束する．しかし，放物線 $x = y^2$ に沿って近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

となり 0 に収束しない．近づけ方によって異なる値に収束するので発散する．

2. 接平面の方程式と偏微分係数

$z = f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を $z = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b)$ とすれば，A（B）は接平面の x（y）方向の傾きである．これは y 軸に直交する平面 $y = b$ と接平面との切り口の傾きなので，1 変数関数 $z = f(x,b)$ の傾きである．すなわち y を定数として x で微分してやれば良い．この操作を x による偏微分という．

偏微分計算は y を定数として微分することなので 1 変数関数の微分の計算法はすべて自由に使ってよい．

3. 全微分可能性

偏微分係数とは $y = b$（$x = a$）との切り口の傾きなので，関数の x 方向（y 方向）の変化にしか依存しない．だから偏微分可能だけでは接平面が存在するとは限らないし，連続であるとすら言えない．例えば問題 4.2 の 1 だ．これは x 軸（y 軸）上では常に 0 なので偏微分係数は 0 である．しかし，極座標を使ってみれば $f(x,y) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$ なので連続ですらない．

偏微分係数による 1 次式が実際に関数の 1 次近似式になっているとき全微分可能という．すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\left|f(x,y) - f(a,b) - f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b)\right|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \tag{1}$$

が成り立つとき (a,b) において全微分可能という．分子は $f(x,y)$ と 1 次近似式の差（誤差）の絶対値，分母は (x,y) と (a,b) の距離である．

4. C^1 級関数

$f(x,y)$ がいたるところ偏微分可能で，偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ がともに連続な時 $f(x,y)$ は C^1 級であるという．定理 4.2.2 は C^1 級関数が全微分可能であることを主張している．この定理により偏導関数だけで全微分可能性まで示せることになる．ただし，この定理の逆は成り立たない．C^1 級と全微分可能は異なる概念である．

この定理の証明はテキストに記述されていないのでここに記しておく．難しいが考えてみてほしい．

$x = a+h,\ y = b+k$ とおいていて (1) 式の左辺を書き直せば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{2}$$

である．ここで分子の最初の 2 項を

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) + f(a,b+k) - f(a,b)$$

と書き直す．右辺の最初の 2 項は 1 変数関数 $F(x) = f(x,b+k)$ として $F(a+h) - F(a)$ になっている．f は x について偏微分可能なので F は微分可能である．よって平均値定理により

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = F(a+h) - F(a) = F'(a+\theta_1 h)h = f_x(a+\theta_1 h + b + k)h \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

となる．後ろの 2 項についても同様に 1 変数関数 $G(y) = f(a, y)$ を使って

$$f(a, b + k) - f(a, b) = G(b + k) - G(b) = G'(b + \theta_2 k)k = f_y(a.b + \theta_2 k)k \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

以上の結果を (2) 式に代入して整理すれば

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|(f_x(a + \theta_1 h, b + k) - f_x(a, b))\, h - \left(f_y(a, b + \theta_2 k) - f_y(a, b)\right) k\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{3}$$

f_x および f_y の連続性から分子の h, k の係数は 0 に収束する．$\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ および $\dfrac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ は 1 より小さいので全体が 0 に収束することが分かる．すなわち全微分可能である．

5. 合成関数の微分

定理 4.2.4 と定理 4.2.5 の結果のみ解説した．計算例を含め詳しくは次回扱おう．なお線形代数とリンクさせて次のように考えてみると良い．

- $x(t)$ と $y(t)$ が $t = \alpha$ で微分可能であるとは，$a = x(\alpha)$, $b = y(\alpha)$ として

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} (t - \alpha)$$

- $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であるとは

$$z - f(a, b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

- これらを 2 つ合わせれば

$$z - f(a, b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} (t - \alpha)$$

微分可能であるとは 1 次式で近似できるということ，1 次式は（平行移動で 0 が 0 に移るように修正すれば）行列で表せること，合成は行列の積になることから合成関数の微分は自然な結果であることが見て取れるだろう．

本日の課題とヒント

問題 4.1 の 4(1)(3)(5)(7)(9) および，問題 4.2 の 3(1)(2) を課題にする．3 変数関数の偏微分については p.83 例 4 を参考に考えてほしい．なお問題 4.2 の 3 については法線も求めるようになっているが，これは講義で扱っていないので省略してよい．接平面のみ求めてほしい．

微分積分 II 講義メモ (10 月 9 日)

本日の講義の要点

1. 問題 4.1 の 4（偏微分計算）について

   x で偏微分する（偏導関数を求める）とは y を定数とみなして x で微分することに過ぎないので，通常の微分計算とまったく同じように計算できる．例えば (1) は

   $$z_x = 2xy^5 - 6x^2y^2, \qquad z_y = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$$

   だ．第 3 項の y は x で偏微分すると 0 になる．商の微分法則や合成関数の微分法則も自由に使ってよい．例えば (5) は商の微分法則を使って

   $$z_x = \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}, \quad z_y = \frac{(x-y)+(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

   (3) は合成関数の微分法則（1 変数版）を使って

   $$z_x = 2xy\cos(x^2y), \quad z_y = x^2\cos(x^2y)$$

   なお，(7) は対数法則を使って $z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ として計算したほうがやりやすい．この程度の工夫ができないと複雑な計算に対応できない．

2. 問題 4.2 の 3（接平面の方程式）について

   (1) と (2) の偏導関数はいずれも多項式であり連続である．よって C^1 級であり全微分可能（定理 4.2.2）なので接平面が存在する．あとは接点の座標と接点での偏微分係数（接平面の x（y）方向の傾き）を求めればよい．例えば (1) では $f(x,y) = 3x^2y + xy$ として $f_x(x,y) = 6xy + y$, $f_y(x,y) = 3x^2 + x$ より $f_x(1,-1) = -7$, $f_y(1,-1) = 4$ なので

   $$z = f(1,-1) + f_x(1,-1)(x-1) + f_y(1,-1)(y+1) = -4 - 7(x-1) + 4(y+1) = 7 - 7x + 4y$$

   が接平面の方程式である．なお，法線ベクトルについては解説していない事項なので問題の対象から除いてある．

3. 合成関数の微分

   合成関数の微分に行列の積が現れること（定理 4.2.5 の直後の記述）は本質的である．あえて変数の個数を一般にして何故行列の積が現れるのかを解説した．

   - m 個の n 変数関数 $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ と l 個の m 変数関数 $z_k = g_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $k = 1, 2, \ldots, l$ の合成を考える．変数の組を列ベクトルとみなして，線形代数でやるようにボールド体で表すと

     $$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$$

     と書ける．
   - f は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の周りで全微分可能とする．また g は $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$ の周りで全微分可能とする．全微分可能であるとは 1 次式で近似できることを意味する．すなわち

     $$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \fallingdotseq A\boldsymbol{h} + \boldsymbol{b}, \quad g(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}) \fallingdotseq B\boldsymbol{k} + g(\boldsymbol{b})$$

     ここで行列 A は $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ たちを並べた行列である．同様に B は $\dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}$ たちを並べた行列である．

- 2 つの 1 次近似式を組み合わせれば

$$g(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})) \fallingdotseq g(\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{h}) \fallingdotseq BA\boldsymbol{h}+g(\boldsymbol{b})$$

  である．これは $\dfrac{\partial(g\circ f)_k}{\partial x_i}$ たちを並べた行列が BA であることを表している．

もちろん，この解説を完全に理解することは困難である．全微分可能とは 1 次式で近似できること，一般の 1 次式は行列を用いて記述されること，合成は行列の積であることから合成写像の微分法則を感じ取ってほしい．

4. 極座標

$x(u,v), y(u,v)$ との合成は座標変換として応用される場合が多い．その中でも極座標はもっとも重要である．極座標による合成写像の微分はテキスト p.88 にまとめられている．なお

$$\begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

である．$\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial x}{\partial u}^{-1}$ であることに注意せよ．講義ではこの関係を極座標の場合に具体的に与えた．x,y の r,θ による偏微分の作る行列と，r,θ の x,y による偏微分の作る行列が互いに逆行列であることをチェックせよ．

5. 高次の偏導関数（講義では高階と言ったが同じことだ．）

高次の偏導関数の定義自体は簡単なことだ．これに関する最初の重要な定理が偏微分の順序交換（定理 4.3.1）だ．テキストにも証明は記述されていないし講義でも省略した．結果のみ覚えておけばよい．ただし仮定（f_{xy}. f_{yx} の連続性）を忘れないように．

この定理を使えば C^n 級関数（n 次までのすべての偏導関数が存在し連続となる関数）の n 次までの偏導関数は，x で何回偏微分したか y で何回偏微分したかのみが問題になり，偏微分の順序は気にしなくてよい．講義では $f_{xyxxy} = f_{xxxyy}$ によって解説した．ここにも再現しておこう．

- $(f_x)_{xy} = f_{xxy}$ と $(f_x)_{yx} = f_{xyx}$ はともに連続なので等しい．ゆえにそれを x,y の順に偏微分して $f_{xyxxy} = f_{xxyxy}$ が成り立つ．
- $(f_{xx})_{yx} = f_{xxyx}$ と $(f_{xx})_{xy} = f_{xxxy}$ はともに連続なので等しい． ゆえにそれを y で偏微分して $f_{xxyxy} = f_{xxxyy}$ が成り立つ．
- 以上から $f_{xyxxy} = f_{xxxyy}$ が成り立つ．

この結果により高次の偏導関数について

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$$

といった書き方が許される．

6. 2 変数のテーラーの定理

基本となるのは合成関数の微分による例 7（p.94）である．これを次のように理解する．

- 2 変数関数の世界から 1 変数関数の世界への対応を $F(t) = f(a+th, b+tk)$ によって定める．すなわち $x = a+th,\ y = b+tk$ との合成である．
- 2 変数関数の世界での $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ という作用素を考える．ここで h,k は定数である．

- 2 変数関数の世界で $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ を作用させてから，1 変数関数の世界に移行することと，1 変数関数の世界に移行してから単に微分することは同じである．

この考え方を繰り返せば

$$F^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+ht, b+kt)$$

が得られる．さてこの $F(t)$ にテーラーの定理（定理 2.4.1）を $a = 0,\ b = 1$ として適用すれば

$$\begin{aligned} F(1) = f(a+h, b+k) &= F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{(n)!}, \quad 0 < \theta < 1 \\ &= f(a,b) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) + \frac{F^{(n)}(\theta)}{(n)!} \end{aligned}$$

この右辺の最後の項を除いたものを h, k の多項式と捉えれば，それが $n-1$ 次近似多項式になっている．

次回は 2 次近似多項式を利用して 2 変数関数の極値問題を考察する．

本日の課題とヒント

合成関数の微分（問題 4.2 の 5）と 2 次までの偏導関数の計算（問題 2.3 の 2）を課題にする．いずれもやさしいのでヒントは不要だろう．

微分積分 II 講義メモ (10 月 23 日)

本日の講義の要点

1. 問題 4.2 の 5（合成関数の微分）について

　z_u, z_v は u, v の関数とみているので，結果は u, v の式で記述すべきである．x, y が混在した式にするのは好ましくない．なお，(5) の $z = f(x+3y)$ には注意を要する．f は 1 変数関数であり，その中に $x+3y$ を代入したと理解しなくてはならない．すなわち $z = f(t)$ と $t = x+3y$ の合成関数とみるべきである．

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+3y)\frac{\partial}{\partial x}(x+3y) = f'(x+3y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+3y)\frac{\partial}{\partial y}(x+3y) = 3f'(x+3y)$$

すなわちこの問題は 2 段階の合成関数の微分を行っている．

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f'(x+3y)\cdot 1 + 3f'(x+3y)\cdot 3 = 10f'(u-2v+9u-12v) = 10f'(10u-14v)$$

　なお偏微分の記号と微分の記号の区別がついていない解答が目につく．数学の記号にはそれぞれの意味がついているので，安易な記述はしないように．上の式ではあえて添え字を使うのではなく偏微分の記号で表した．なおレポート課題としては問題 4.3 の 2（2 次の偏導関数）も出題したが特に言うことはない．

2. 極値とは

　関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で極大であるとは，(a, b) の近くのすべての (x, y) について

$$f(a, b) \geqq f(x, y)$$

が成り立つことを言う[*1]．ここで「近くのすべて」という表現は数学的ではないが，離れたところにおける関数の値との大小は問題にしていないことを述べている．テキスト p.95 では「近く」を (a, b) を中心とする半径 ε の円の内部 D_ε と記述している．

3. 極値をとるための必要条件（定理 4.3.3）

　関数 $f(x, y)$ が (a, b) で極値をとりかつ
   - (a, b) は $f(x, y)$ の定義域の内部にある．
   - $f(x, y)$ は (a, b) でで偏微分可能である．

という条件を満たすとき $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である．これは「極値をとれば微分は 0 になる」という高校で学習した事実の一般化である．なお，定義域の端で極値をとる場合はこの事実は成り立たない．$y = x^2$, $-1 \leqq x \leqq 2$ は -1 と $x = 2$ で最大であり極大でもある．微分は 0 にはならない．

4. 関数の 2 次近似式

　$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ でも実際に極値をとるかどうかは分からない．それを調べるために 2 次近似式を利用する．$f(x, y)$ を C^2 級としテーラーの定理（定理 4.3.2）で $n = 2$ とすれば

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a, b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k)$$

[*1] テキストでは $(x, y) \neq (a, b)$ という条件を付けたうえで不等号を $>$ にしている．講義の説明と少し意味が変わるが，それほど大きな問題はない．テキストの流儀で定義すれば講義での説明は広義の極大ということになる．ただ，最大については $\geqq$ で定義するので極大も $\geqq$ でやったほうが良いと思うのだが．

この第 2 項は

$$hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$$

であり，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ より消える．第 3 項（の 2 倍）は

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)(hf_x+kf_y)=h^2f_{xx}+hkf_{yx}+khf_{xy}+k^2f_{yy}$$

より

$$h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)$$

であるが，$f(x,y)$ が C^2 級であることから，(h,k) が $(0,0)$ に近い時

$$2(f(a+h,b+k)-f(a,b))\fallingdotseq f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2$$

が成り立つ．この近似の誤差は h^2+k^2 の大きさよりはるかに小さいこと（$o(h^2+k^2)$ であること）が証明できる．

5. 2 次式の値の大きさについて

2 次式の値の大きさを知るには平方完成を利用する方法がある．また極座標に変換する方法も有効である．しかしこれらは 2 変数でないとうまくいかない．もっとも強力な方法は線形代数での 2 次形式の議論を応用することだ．対称行列の対角化と 2 次形式は線形代数 II のシラバスの最後の項目としてあげられているので，この講義ではその結果を利用して説明した．

- n 次対称行列 A について

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}{x_i}^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

を 2 次形式と呼ぶ．

- A の最大固有値を M，最小固有値を m とするとき

$$m({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)\leqq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\leqq M({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)$$

- この不等式で左の等号は A の固有値 m に対する固有ベクトルで成り立つ．右も同様．

固有値についても線形代数で学習する．ここでは 2 次対称行列 $\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ について

$$mM=AC-B^2,\qquad m+M=A+C$$

のみを利用した．

6. 2 次偏微分係数を利用した極値問題の解き方

$A=f_{xx}(a,b),\ B=f_{xy}(a,b),\ C=f_{yy}(a,b)$ とおく．

$$2(f(a+h,b+k)-f(a,b))\fallingdotseq Ah^2+2Bhk+Ck^2,\quad m(h^2+k^2)\leqq Ah^2+2Bhk+Ck^2\leqq M(h^2+k^2)$$

の 2 つの式から

- $0<m\leqq M$ ならば $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ で極小
- $m\leqq M<0$ ならば $f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$ で極大

- $m < 0 < M$ ならば m の固有ベクトルの方向では $f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$，M の固有ベクトルの方向では $f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$ となるので極値をとらない．

を得る．これを A, B, C における条件として書き直したものが定理 4.3.4 である．
最初の 2 つは m, M が同符号であること，最後は m, M が異符号であることから $mM = AC - B^2$ の正負で区別できる．$AC - B^2 > 0$ の場合は $AC > B^2 \geqq 0$ なので A, C も同符号であり，$m + M = A + C$ から A, C, m, M はすべて同符号になる．よって最初の二つは A の正負によって区別できる．

7. 極値問題の具体例

例題 4.3.2 を解説した．詳細はテキストを読んでほしい．なお，この問題で $(0,0)$ では $AC - B^2 = 0$ になっている．この場合は 2 次の偏導関数だけでは極値の判定はできないが，具体的に 2 つの方向をとることによって極値をとらないことが示せる．一般論は存在しないので問題に合わせて考察しなくてはならない．

もう一つ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値問題を考察した．

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0. \qquad f_y = 3y^2 - 3x = 0$$

を解けば $(0,0)$ と $(1,1)$ が極値の候補であることが分かる．$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ であるから

	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	判定
$(0,0)$	0	-3	0	負	極値をとらない
$(1,1)$	6	-3	6	正	極小

ゆえに $(1,1)$ で極小値 -1 をとる．

本日の課題とヒント

問題 4.3 の 7 を課題にする．具体例のように表を書くと分かりやすいだろう．

微分積分 II 講義メモ (10 月 30 日)

本日の講義の要点

1. 極値の定義についての補足

   テキスト p.95 の極値の定義に従えば，$f(x,y)$ が (a,b) で極大であるとは

   (a,b) の近くのすべての $(x,y) \neq (a,b)$ について $f(x,y) < f(a,b)$

   が成り立つことを言う．これに対し

   (a,b) の近くのすべての (x,y) について $f(x,y) \leqq f(a,b)$

   が成り立つことを広義の極大という．$f(a,b)$ が最大であっても，その周りに $f(x,y) = f(a,b)$ を満たす点が無数にあれば，極大ではない．ただし広義の極大にはなっている．極大だけではなく広義の極大という概念も覚えておく必要がある．

2. 問題 4.3 の 7（極値問題）について

   2 変数関数 $f(x,y)$ が C^2 級の時，その極値問題は次のプロセスで考察する．
   - 連立方程式 $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ を解く．
   - その解 (a,b) において $A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$, $C = f_{yy}(a,b)$ を求める．
   - $AC - B^2 > 0$ のとき，$A > 0$ なら極小，$A < 0$ なら極大である．$AC - B^2 < 0$ のときは極値をとらない．
   - $AC - B^2 = 0$ のときは，$f(x,y) - f(a,b)$ の (a,b) の周りでの正負を直接考察する．

   第 1 の関門は連立方程式を解くことだ．その際，代入と「$ab = 0$」を「$a = 0$」または「$b = 0$」と読み替えて場合分けをするのが基本となる．例えば (3) では

   $$f_x = 3x^2 + 2x + 2y = 0, \qquad f_y = 3y^2 + 2x + 2y = 0$$

   だが，第 1 式と第 2 式の差をとれば $3x^2 - 3y^2 = 3(x-y)(x+y) = 0$ を得る．よって $x - y = 0$ または $x + y = 0$ でありこの 2 つの場合に分けて考える．
   - $y = x$ の場合は $3x^2 + 4x = 0$ であり $x = 0$,　または $x = -4/3$ である．$y = x$ なので $(0,0)$ と $(-4/3, -4/3)$ を得る．
   - $y = -x$ の場合は $3x^2 = 0$ であり $x = 0$ となる．この場合は $(0,0)$ のみである．

   $AC - B^2$ の正負による判定は定理 4.3.4 にまとめられている．正確に覚えておくこと．線形代数で対称行列の対角化を学習した時はそれと関連させて理解しておくこと．

   $AC - B^2 = 0$ の場合の判定は一般論はない．この問題の中では (3) の $(0,0)$ が該当する．$f_{xx} = 6x + 2$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 6y + 2$ なので $(0,0)$ では $A = B = C = 2$ であり $AC - B^2 = 0$ となる．さて，この問題では $f(0,0) = 0$ なので $f(0,0)$ との大小は，$f(x,y)$ の正負を調べればよい．

   $$f(x,y) = (x^3 + y^3) + (x+y)^2 = (x+y)(x^2 - xy + y^2 + x + y)$$

   と整理してみれば $f(t,-t) = 0 = f(0,0)$ なので極値をとらない．ただし広義の極値を持つか否かはこれでは不明である．ここでは省略する．

3. 陰関数

   関数 $f(x,y)$ について，$f(x,y) = 0$ は y と x の何らかの関係を定めると考えられる．特に関数 $y = \varphi(x)$ が $f(x, \varphi(x)) = 0$ を満たすとき，$f(x,y) = 0$ の定める陰関数と呼ぶ．定理 4.4.1 は陰関数の存在とその微分を記述する定理である．

4. 定理 4.4.1 の図形的考察

定理 4.4.1 の主張の意味を正確に捉えるのは簡単ではない．また証明も複雑で，自分でじっくり考えなければ理解できないような代物である．ここではテキストの記述の仕方から離れて図形的考察を元に定理 4.4.1 の意味を考えてみる．

- $f(x,y)$ が C^1 級なので $z = f(x,y)$ のグラフは滑らかな曲面である． z 座標を高さと捉え，曲面の (x,y) 地点での標高が $f(x,y)$ であると考える．
- グラフと水平面 $z = c$ との切り口 $\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$ は高さ c の等高線である．
- $f(a,b) = c$ のとき $z = f(x,y)$ のグラフの (a,b,c) での接平面は

$$z - f(a,b) = z - c = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる（定理 4.2.6）．この平面が傾いているとき，すなわち $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ でないとき，接平面と水平面 $z = c$ との切り口は直線

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

である．

- この直線は等高線 $f(x,y) = c$ の (a,b) における接線である．

以上の考察から次は自然なものに感じられるだろう．

定理　$f(x,y)$ が C^1 級で $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ でないとき (a,b) を通る等高線 $f(x,y) = f(a,b)$ は (a,b) の周りで滑らかな曲線でありその接線は次の式で与えられる．

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

ここでさらに接線が x 軸に垂直でなければ（$f_y(a,b) \neq 0$ ならば），等高線は (a,b) の周りで $y = \varphi(x)$ の形にかけることが予想される．それを厳密に述べたものが定理 4.4.1 である．

5. 合成関数の微分による陰関数の導関数

$f(x,y) = 0$ から陰関数 $y = \varphi(x)$ が定まるとき，$f(x,\varphi(x)) = 0$ が成り立つ．この両辺を微分するとき，x で微分することと，x で偏微分することが同時に現れ混乱する可能性がある．講義では新しい変数 t を導入し

$$z = f(x,y), \qquad x = t,\ y = \varphi(t)$$

という合成関数 $z = f(t,\varphi(t))$ と考えた．さて陰関数の定義から $z = 0$（定数関数）である．

$$0 = \frac{dz}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} = f_x + f_y\varphi'$$

これから $f_y \neq 0$ のときは自然に

$$\varphi' = -\frac{f_x}{f_y}$$

が得られる．さらにこの式を t で微分すれば

$$0 = \frac{d}{dt}(f_x) + \frac{d}{dt}f_y\varphi' + f_y\varphi'' = f_{xx} + f_{xy}\varphi' + f_{yx}\varphi' + f_{yy}(\varphi')^2 + f_y\varphi''$$

であり $\varphi' = -f_x/f_y$ を代入して

$$f_{xx} - 2\frac{f_{xy}f_x}{f_y} + \frac{f_{yy}(f_x)^2}{(f_y)^2} + f_y\varphi'' = \frac{(f_y)^2f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (f_x)^2f_{yy}}{(f_y)^2} + f_y\varphi'' = 0$$

を得る．これから例題 4.4.2 の式はすぐ導ける．

例題 4.4.2 で $\dfrac{df_x(x,y)}{dx}$ という記述があるが，これは f を x で偏微分した後，x で微分したものである．講義では f_x との合成関数 $f_x(t,\varphi(t))$ を作り t で微分している．結局同じことになるが，こういうような変数の扱いは間違いにつながる可能性がある．気を付けたほうが良いと思う．

本日の課題とヒント

問題 4.4 の 3 を課題にする．なお求めるのは接線のみで良い．

微分積分 II 講義メモ (11 月 6 日)

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題について

　問題 4.4 の 3 は $f(x,y)=0$ の形で定義された曲線の (a,b) での接線を求める問題だ．これについて講義では (a,b) における接平面 $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ と水平面 $z=f(a,b)=0$ との交わりとして

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$$

の形で与えた．一方テキストでは陰関数の定理（定理 4.4.1）を利用して $y=\varphi(x)$ と表し

$$y=\varphi'(a)(x-a)+\varphi(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)+b$$

として求めている．もちろんどちらの方法をとっても構わない．

　なお，テキストの問題では接線の方程式のほかに法線ベクトルを求めさせている．法線とは接線に直交するベクトルであり，$(f_x(a,b),f_y(a,b))$ に他ならない．これも接線の方程式を講義のやり方で理解したほうが分かりやすいだろう．

2. 条件付き極値問題

　$g(x,y)=0$ の条件下で $z=f(x,y)$ の極値を考えることを条件付き極値問題という．$f(x,y)$ が C^1 級のとき，$z=f(x,y)$ のグラフは滑らかな曲面となるが，それを $g(x,y)=0$ という (x,y) 平面上の曲線に沿って，高さがどう変わるかを考えれば良い．

　さて，f,g がともに C^1 級であるとき，条件付き極値問題の極値の候補点は

- $f(x,y)$ の極値の候補点，$f_x=fy=0$ を満たす点
- $g(x,y)=0$ のグラフが滑らかな曲線にならない点，$g_x=g_y=0$ を満たす点
- $g(x,y)=0$ のグラフと，曲面 $z=f(x,y)$ の等高線が接する点

の 3 つの場合に限られる．この 3 つの条件は，2 つのベクトル (f_x,f_y), (g_x,g_y) が線形従属であることとしてまとめられる．これを $(g_x,g_y)\neq(0,0)$ という付加条件のもとに

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表したのがラグランジュの未定乗数法である．ただし 2 つの 2 項列ベクトルの線形従属性は行列式を用いて

$$\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix}=f_xg_y-f_yg_x=0$$

とまとめられる．この方法だと λ を使わないので簡単になる場合が多い．なお，3 変数以上の場合は λ を用いた方法を使う必要がある．

　なお，いずれの方法でも $g(x,y)=0$ の条件は必要である．前者の方法では x,y,λ の連立方程式（式 3 つ），後者の方法では x,y の連立方程式（式 2 つ）である．なお，f, g が C^1 級にならない点がある場合にはそれも極値の候補点に加えればよい．

　条件付き極値問題で，極大か極小か判定するには陰関数 $g(x,y)=0$ を陰関数 $y=\varphi(x)$ で表示して $p(x)=f(x,\varphi(x))$ の 2 回微分の正負を調べればよい．講義では解説しなかったがテキストの 105 ページに具体例が記述されている．

3. 最大最小問題　　曲線 $g(x,y)=0$ で囲まれた領域 D において $f(x,y)$ の最大最小を求めるには

- D の内部における極値の候補点（$f_x=f_y=0$ を満たす点）
- D の周囲における条件付き極値問題の候補点（$g=f_xg_y-f_yg_x=0$ を満たす点）

を求め，それらの点での $f(x,y)$ の値の最大最小を考えれば良い．なお，周囲がいくつかの曲線をつないだものになっている場合は，つなぎ目も最大最小の候補点に加えておけばよい．なお，すべての最大最小の候補点を求めなければこの方法は無意味になる．気をつけること．

講義では例を一つ，講義中の課題を一つ出した．いずれもテキストにない問題なのでここに書いておく．

- D を楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の内部とし，D における $f(x,y)=xy$ の最大最小を求める．

  $f_x=y=0$, $f_y=x=0$ を満たす点は原点 $(0,0)$ のみである．これは D の内部にあるので最大最小の候補である．

  周囲 $g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ において条件付き極値の候補は

$$g=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\qquad f_xg_y-f_yg_x=y\frac{2x}{a^2}-x\frac{2y}{b^2}=0$$

  なので $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$ である．これから $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$ を得る．なお，複号は任意である．以上の考察から最大最小の候補は

$$(0,0)\qquad \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\qquad \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

  の 5 つである．ここでの $f(x,y)$ の値は 0, $ab/2$, $-ab/2$ であり，最大値 $ab/2$，最小値 $-ab/2$ を得る．

- 楕円 $x^2+3y^2=1$ の内部の領域 D において $f(x,y)=x^2+xy+2y^2$ の最大最小を求める．

  $f_x=2x+y=0$, $f_y=x+4y=0$ を満たす点は $(0,0)$ のみでありこれは D 内にあるので最大最小の候補である．

  周囲 $g(x,y)=x^2+3y^2-1=0$ での最大最小の候補は $g(x,y)=0$ の条件下での条件付き極値問題の候補点なので

$$g=x^2+3y^2-1=0,\qquad f_xg_y-f_yg_x=12xy+6y^2-2x^2-8xy=-2(x+y)(x-3y)=0$$

  という連立方程式を解けばよい．第 2 式から $x+y=0$ または $x-3y=0$ であり，場合分けして考えれば

  $x=-y$ のときは $4y^2=1$ より $y=\pm1/2$ であり $(\mp1/2,\ \pm1/2)$ という解を得る．

  $x=3y$ のときは $12y^2=1$ より $y=\pm1/(2\sqrt{3})$ であり $(\pm\sqrt{3}/2,\pm1/(2\sqrt{3}))$ を得る．

  こうしてえられた 5 つの候補点での $f(x,y)$ の値を比較して，$(0,0)$ で最小（最小値は 0），$(\pm\sqrt{3}/2,\pm1/(2\sqrt{3}))$ で最大（最大値 7/6）を得る．

今日で，微分を終わり，次回からは積分に入ります．微分の範囲での試験は少し空きますが 11 月 27 日とします．

本日の課題とヒント

問題 4.4 の 6 と 7 を課題にする．円（楕円）のパラメーター表示を使えば高校までの知識だけで解けるが，条件付き極値問題として解くこと．

微分積分 II 講義メモ (11 月 13 日)

本日の講義の要点

1. 問題 4.3 の 4
　ラプラシアンを極座標による偏微分作用素として書き直す問題である．応用上重要な事項でありこういう式があることを頭の片隅においておくように．
　方法は合成関数の微分法則である．

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = \cos\theta z_x + \sin\theta z_y$$
$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -r\sin\theta z_x + r\cos\theta z_y$$

この式から z_{rr}, $z_{\theta\theta}$ を計算する．その際，$(z_x)_r$ を計算する必要があるが，z_x は x, y についての 2 変数関数なので，上の等式が使える．例えば

$$(z_x)_r = \cos\theta z_{xx} + \sin\theta z_{xy}$$

である．なお $(z_x)_r$ を z_{xr} と書いてはいけない．これは z を y を定数とみなして x で微分し，それを r, θ の関数に直してから，θ を定数として r で微分する．変数は必ず組で考えてほしい．

2. 問題 4.3 の 5
　2 変数のテイラーの定理（マクローリンの定理）は高次の偏微分係数を利用して表せる．定理 4.3.2 の表示はきれいだが扱いやすくはない．j 乗を二項定理によって展開して

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b) = \sum_{p=0}^{j} {}_jC_p h^p k^{j-p} \frac{\partial^j}{\partial x^p \partial y^{j-p}} f(a,b) h^p k^{j-p}$$

として理解すべきだ．なお $(a,b) = (0,0)$ とすればマクローリンの定理である．マクローリンの定理のときには (h,k) を (x,y) で置き換えるのが望ましい．この場合 $x^l y^m$ の項は

$$\frac{1}{l!m!}\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(0,0) x^l y^m$$

となる．この形でしっかり覚えておくこと．なお，誤差項（最後につけた θ を含んだ項）はあまり気にしなくてよい．誤差項の表示を利用した応用はこの講義では扱わない．
　なお，この問題のレベルであれば，$f(x,y)$ の偏導関数を計算するよりも，既知のテイラーの定理を利用したほうが簡単である．例えば e^x のテイラーの定理の x に $x-y$ を代入すれば

$$e^{x-y} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} + R_n(x-y)$$

となる．第 1 項の和は x, y の $n-1$ 次多項式であり，これが 2 変数関数 e^{x-y} についてのテイラーの定理になっている．

3. 条件付き極値問題の補足
　条件付き極値問題の極値の候補点について，定理 4.4.2 は連立方程式

$$g(x,y) = 0, \quad f_x - \lambda g_x = 0, \quad f_y - \lambda g_y = 0$$

を解けばよいと主張している．ただし $g_x = g_y = 0$ でないことを仮定しているので，$g(x,y) = 0$ 上に $g_x = g_y = 0$ を満たす点がある場合には，別途極値の候補点として考察する必要がある．例題 4.4.4 では

「$g_x = g_y = 0$ の解は $(0,0)$ だが，この点は $g(0,0) = -1 \neq 0$ なので条件を満たさない．ゆえに $g(x,y) = 0$ 上では $g_x = g_y = 0$ とならず定理 4.4.2 を利用できる．」という一文が必要だ．その意味で例題 4.4.4 の解答は不完全だ．

講義では極値の候補点を連立方程式

$$g(x,y) = 0, \quad f_x g_y - f_y g_x = 0$$

の解として求めた．この方法では $g = g_x = g_y = 0$ の場合も連立方程式の解として含んでいるので，上記のような考察は不要である．

4. 条件付き極値問題の極値の判定

条件付き極値問題の極値の判定について考察する．まず (a,b) を極値の候補点とする．すなわち

$$g(a,b) = 0, \qquad f_x(a,b)g_y(a,b) - f_y(a,b)g_x(a,b) = 0$$

が成り立つとする．ここで $g_y(a,b) \neq 0$ ならば，$g(x,y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ の形に書き直すことができる．すると $p(x) = f(x, \varphi(x))$ について $p'(a) = 0$ が成り立つ．この関数が $x = a$ で極大か極小か判定すればよい．ようするに $p''(a)$ の符号を調べ，正なら極小，負なら極大ということになる．

$$p' = f_x + f_y\varphi', \qquad p'' = f_{xx} + 2f_{xy}\varphi' + f_{yy}(\varphi')^2 + f_y\varphi''$$

であるがここに $\varphi' = -g_x/g_y$ および $\varphi'' = -\left(g_{xx}(g_y)^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}(g_x)^2\right)/(g_y)^3$（例題 4.4.2）を代入すればよい．ただし，この一般的な式を記述するのは煩雑だし，覚えても仕方がない．p'' の計算を具体的な例を通じてやり方を理解するのが良いだろう．

なお $g_y(a,b) = 0$ で $g(a,b) \neq 0$ の場合には x と y の役割を入れ替えて $x = \varphi(y)$ とおいて考えれば良い．

5. 体積，重積分，累次積分

重積分を立体の体積を求めるという観点から導入した．高校で回転体の体積を学習したときに体積は断面積の積分で得られることを学習した．一般の $z = f(x,y)$ のグラフと xy 平面が長方形領域 $D = [a,b] \times [c.d] = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ 上で囲む部分の体積も，断面積を積分すれば求められる．そこで断面積も積分で求めることにすれば積分の繰り返しで体積が求められることになる．これが累次積分だ．詳しくは次回の講義で解説する．

今回はレポート課題は出題しない．試験に向けて，今までのレポート課題を含めて学習しておくこと．

微分積分 II 講義メモ (11 月 20 日)

本日の講義の要点

1. 体積としての重積分

　テキストではまず積分の定義を記述している（p.107–108）が，上限，下限などの馴染みのない概念を利用しておりそのまま解説するのは困難だと感じた．この講義では重積分を $z = f(x, y)$ のグラフと xy 平面に挟まれた部分の体積（$f(x, y) < 0$ となる点がある場合はその部分の体積を負とみなすという了解が必要だが）とみなし，それを如何に求めるかという考えで解説した．

　前回の講義の最後に，長方形領域 $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ での重積分（体積）を断面積の積分という考えで求めた．

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

断面積を積分で求めるので，積分を二度繰り返すことになる．これを累次積分という．

2. 単純な領域

　1 変数関数の場合は，区間上の積分を扱えば十分である．しかし，2 変数関数の場合は長方形領域での積分だけでは不十分だ．そこで，「単純な領域」を考えた（p.109）．x について単純な領域とは連続関数のグラフ $y = \varphi_1(x)$ と $y = \varphi_2(x)$ で挟まれた領域である．同様に y について単純な領域とは $x = \psi_1(y)$ と $x = \psi_2(y)$ で挟まれた領域である．

　もちろん単純ではない領域も沢山ある．例えば同心円の間のリング状の領域がそうだ．しかし，それもいくつかの単純な領域に分けることができる．分けられたそれぞれの単純な領域で重積分を求めれば，全体の領域での積分はそれらの和で求められる．単純な領域は応用上もっとも基本的な領域といえる．

3. 単純な領域での重積分，累次積分

　x について単純な領域 $D : a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$ での重積分は，次の累次積分で計算できる．

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

簡単な計算例は p.110 の例や p.112 の例題 5.1.1 にある．難しくはない．

4. 積分の順序交換

　一つの領域が x, y のどちらについても単純な場合がある．そのとき，x と y のどちらで先に積分するかは自由である．しかし，どちらを選ぶかによって計算量は変わってくるし，極端な場合には原始関数が求められない（積分計算ができない）場合もある．重積分が初めから累次積分の形で与えられているとき，その順序を変えることを考えてみる．作業は次の 2 つだ．

   - 累次積分の形から，積分域 D を求める．
   - D の形から累次積分の形を調べる．

　最初の作業は，不等式から領域を求める作業に他ならない．

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \longrightarrow D : a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$$

後半はこの D について y を固定した時の x の動く範囲を求める．x の動く範囲は $[a, b]$ ではないかとの疑問も出るかもしれないが，y を固定した場合に，x の動く範囲はより制約を受ける．この状況につい

ては具体例で考えてほしい．講義では例題 5.1.3 の (1) を扱った．積分域の図 5.8 を見れば y をこていした時の x の動く範囲が $y \leqq x \leqq \sqrt{y}$ であることが分かるはずだ．

5. リーマン和の極限としての重積分

ここまでの重積分はすべて y 軸（または x 軸）と垂直な平面による断面積を積分する形で求めていた．しかし，この方法では簡単に計算できないような重積分もある．例えば回転体の体積を求める方法としてバームクーヘン法というのがある．これは回転体を円環状に切って，それぞれの体積を足し合わせるという方法だ．極座標を使えば r が一定のところでの断面を求めたことに他ならない．

この方法をより一般にするために 5.2 節で重積分の変数変換を行う．そのために，改めて積分の定義を考察する必要がある．ただし，テキストに記述されているような厳密な定義は行わない．変数変換や積分の応用を理解するために必要最小限な知識としてリーマン和を紹介した．

リーマン和はテキストでは p.109 の定理 5.1.1 の中に記述されている．これを講義では次のように紹介した．

- 長方形領域を縦横に細かく分割する．そうして出てくる小長方形領域を $D_j, 1 \leqq j \leqq N$ と表す．
- D_j 上の点 (α_j, β_j) をとる．
- $S = \sum_{j=1}^{N} f(\alpha_j, \beta_j)\mu(D_j)$ をリーマン和と呼ぶ．ただし $\mu(D_j)$ は D_j の面積を表す．
- 分割を細かくしていくとき，リーマン和が一定の値に近づいていけば，$f(x, y)$ は D 上積分可能であるという．またその極限を重積分と呼び

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と表す．

リーマン和とは，考える立体を領域の分割によって棒状の部分に分け，それぞれの体積を角柱の体積とみなし加え合わせたものである．これが全体の体積に近づいていくことは納得できるだろう．リーマン和の極限という重積分の定義が重積分は体積だというこの講義の導入における理解と矛盾しないことが分かるだろう．

今回のレポート課題

問題 5.1（p.115）の 2(1)(2)(3)(4)(6)，および 3(2)(3)(4) を課題とする．なお，27 日は微分の範囲の試験なので，レポートには試験終了後に取り組めばよい．提出期限は 12 月 2 日 (火)12 時半とする．

微分積分 II 講義メモ (12 月 4 日)

前回のレポート課題について

問題 5.1（p.115）から出題した．2(1) と 2(2) は長方形領域の積分なので，簡単だ．例えば 2(1) は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin(2x+y)dy &= \int_0^{\pi/2} dx\,[-\cos(2x+y)]_{y=0}^{\pi/2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2x + \cos 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1\end{aligned}$$

2(3)2(4) は円の内部での積分だ．この 2 つの問題ではどちらも x で先に積分すると 2 番目の積分が多項式の積分になり計算しやすい．このように積分の順序によって計算の難しさが変わってくるので注意すること．

$$\int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx = \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} dy = \int_0^1 1 - y^2 dy = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx = 2\int_{-a}^{a} a^2 - y^2 dy = 2\left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{8a^3}{3}$$

2(4) の最初の積分は，y を一定として x で積分するから，定数関数の積分であり，値と積分区間の長さをかければよい．

2(6) は三角形での積分であるが，辺はいずれも座標軸で平行でないので．1 つの累次積分では表せない．例えば D を x に関して単純な領域と見た時，領域の下側の境界は直線（$y = x$）だが，上側の境界は $x = 1$ で曲がった折れ線になっている．そのため累次積分も $x = 1$ で分ける必要がある．

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y)dy + \int_1^{3/2} dx \int_x^{3-x} (2x-y)dy$$

この積分の続きは省略する．

3 は被積分関数が与えられていないので，積分域のみ考える問題だ．3(2) は $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y = -x + 2$（上端）と $y = x^2$（下端）で囲まれた部分だ．このとき y の動く範囲は $- \leqq y \leqq 4$ である．これを y を固定して x の動く範囲を考えれば左端は $x = -\sqrt{y}$ と 1 つの式で表されるが，右端は $x = \sqrt{y}$ と $x = 2 - y$ をつないだものになる．よって，積分の順序を交換すると 2 つの累次積分の和になる．

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

後の答えは省略する．テキストの解答を参考に自分で作図しながら考えてみよ．

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換

   積分の変数変換においては，積分範囲，被積分関数，積分要素の 3 つについて考察しなくてはならない．元の積分を $\iint_D f(x,y)dxdy$，変数変換を $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ として要点を箇条書きしておく．

   (I) 積分範囲

   (x,y) が D を動くとき，対応する (u,v) がどの範囲（Ω と表す）を動くかを考察する．一般論はないが，D を定める不等式を (u,v) の不等式に変えることが手掛かりになる．

   (II) 被積分関数

   $f(x,y)$ を u,v の式に直す．$x = x(u,v)$ と $y = y(u,v)$ を代入するだけなので簡単だ．

(III) 積分要素

ヤコビアンを使って次の式で記述される．

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

論理的には変数変換の等式を理解するポイントだ．なぜこの式が成り立つかについては次の項目に回す．

以上をまとめて次の変数変換の公式を得る．

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

2. 積分要素の変換の意味

変数変換 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ によって uv 平面の領域 Ω が xy 平面の領域 D に対応しているとする．このとき Ω の分割 $\Omega = \cup_j \Omega_j$ によって，D の分割 $D = \cup_j D_j$ を作る．また $(u_j, v_j) \in \Omega_j$ をとり $x_j = x(u_j, v_j)$, $y_j = y(u_i, v_j)$ と定める．

- 重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ は

$$\sum_j f(x_j,y_j)\mu(D_j), \qquad \mu(D_j) = D_j\text{の面積}$$

  で近似できる．これは D_j たちによる D の分割が縦横の分割ではないのでリーマン和ではない．しかし．この値が求める重積分の近似になっていることは納得できるだろう．
- $f(x_j,y_j) = f(x(u_j,v_j),y(u_j,v_j))$ より

$$\sum_j f(x_j,y_j)\mu(D_j) = \sum_j f(x(u_j,v_j),y(u_j,v_j))\frac{\mu(D_j)}{\mu(\Omega_j)}\mu(\Omega_j)$$

  である．よって D_j と Ω_j の面積比を求めることが課題になる．
- Ω_j が (p,q) を左下の頂点とする微小な長方形の時（頂点は (p,q), $(p+h,q)$, $(p+h,q+k)$, $(p,q+k)$）D_j は $h(x_u,y_u)$ と $k(x_v,y_v)$ の 2 つのベクトルの作る平行四辺形で近似できる．Ω_j の面積は hk であり，Ω_j の面積は平行四辺形の面積 $hk|x_uy_v - x_vy_u|$ で近似できる．よって 2 つの面積比は

$$|x_uy_v - x_vy_u| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

  で近似できる．
- $dxdy$ は xy 平面での微小部分の面積，$dudv$ は uv 平面での微小部分の面積なので上の関係は

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

  と記述できる．

以上から積分要素の変換が公式として導かれる．厳密な議論ではないが，平行四辺形の面積が行列式によって記述できることが背景にある．後は結果を覚えておいてほしい．

3. 積分の変数変換の計算例

例題 5.2.1 と例題 5.2.2 を解説した．テキストに詳しく説明がのっているのでここでは繰り返さない．D に対応する領域をどうとればいいのかがポイントになることを確認しておくこと．なお，D と Ω（テ

キストでは E）の対応について，D を分割した小領域と Ω を分割した小領域が 1 対 1 に対応しなくてはならない．そのため例題 5.2.2 では $0 \leqq r \leqq a$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のように選ぶ．θ の取る範囲が 2π に満たなければ，Ω は D の一部にしか対応しない．また 2π を超えてしまったら，D の一部が 2 重に覆われてしまう．これでは正しい答えは得られない．なお，極座標において $r \geqq 0$ は前提である．$r^2 \leqq a^2$ より $-a \leqq r \leqq a$ としてはいけない．

今回のレポート課題

問題 5.2（p.121）の 1(1)，1(2)，2(1) を課題にする．講義で扱った例題を参考に取り組むこと．

微分積分 II 講義メモ (12 月 11 日)

今回の講義では新しい内容には入らずに，重積分の計算練習を行った．基本的な計算手法は，累次積分，積分の順序交換，変数変換の 3 つであり，それを駆使して計算を行う．しっかり理解するようにしてほしい．

1. $\iint_D \sqrt{xy - y^2}dxdy, \quad D : 0 \leqq y \leqq b,\ y \leqq x \leqq 10y$

この被積分関数は x で積分すると $\sqrt{\text{一次式}}$，y で積分すると $\sqrt{\text{二次式}}$ だ．どちらも不定積分できるが $\sqrt{\text{一次式}}$ の積分のほうがはるかに簡単だ．そこでまず y を固定して x で積分することにしよう．

y を固定した時 x の動く範囲は $y \leqq x \leqq 10y$ だ．なお $0 \leqq y \leqq b$ なので $y \leqq 10y$ に注意せよ．累次積分においては，積分の上端と下端の大小を逆にすべきではない．

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}dxdy = \int_0^b dy \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}dx = \int_0^b dy \left[\frac{2}{3y}(xy - y^2)^{3/2} \right]_{x=y}^{10y}$$
$$= \int_0^b 18y^2 dy = 6b^3$$

- ここでは積分域の図は書かないが，授業では積分域をきちんと書いた．累次積分をどう記述するかは x, y の動く範囲については積分域を具体的に見ながら考えてほしい．
- 累次積分の表示を考える際には，y を固定した時の x の動く範囲（y ごとに変わり得る．）あるいは x を固定した時の y の動く範囲を考える．単純に y は 0 から b まで，x は 0 から $10b$ まで動くと考えると長方形領域での積分になってしまう．
- $0 \leqq y \leqq b$ なので $(9y^2)^{3/2} = 27y^3$ である．絶対値をつける必要はない．

2. $\iint_D x^2 + y^2 dxdy, \quad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$

$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ とおいて置換積分する．置換積分は，積分域，被積分関数，積分要素の 3 つをそれぞれ新しい変数による表示に変えていく必要がある．

積分域　外周の楕円は $(a\cos\theta, b\sin\theta),\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とパラメーター表示される．各 θ について，$(ar\cos\theta, br\sin\theta)$ は，r を 0 から 1 まで動かせば，中心から楕円の周上の点までの線分になる．これらの線分を $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で集めれば，ちょうど D を覆うことになる．よって r, θ での積分域は長方形領域 $E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である．

被積分関数　変数変換の式をそのまま代入するだけだ．

$$x^2 + y^2 = a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta$$

積分要素　ヤコビアンの絶対値をかけるだけだ．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & ar\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

より $dxdy = abrdrd\theta$ である．なお，$0 \leqq r \leqq 1$ より r に絶対値をつけないで良い．

以上から積分の変数変換により

$$\iint_D x^2 + y^2 dxdy = \iint_E abr^3(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)drd\theta = ab\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta d\theta$$
$$= ab\frac{1}{4}\frac{a^2 + b^2}{2}2\pi = \frac{ab(a^2 + b^2)}{4}\pi$$

なお，この計算において次の等式を使った．使い勝手のいい公式だ．

命題　長方形領域 $D = [a, b] \times [c.d]$ 上の $f(x)g(y)$ の積分は次で与えられる．

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

実際，y から先に累次積分したとき，長方形領域なので

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy$$

となる．最初の積分は x を定数として積分するので $f(x)$ も定数とみなすことになる．ゆえに $f(x)\int_c^d g(y)dy$ となる．ここで $\int_c^d g(y)dy = A$ とおけば 2 回目の積分は $\int_a^b Af(x)dx$ になる．A は定数なので積分の外に出せ，$A\int_a^b f(x)dx$ となる．

- 積分域を考えるとき D を定める不等式を r, θ の不等式になおして $r^2 \leqq 1$ を得る．ただしこれから r, θ の動く範囲を調べるときは注意を要する．$-1 \leqq r \leqq 1$ の範囲で r を動かすと各 θ に対して，「直径」上を動くことになる．ここで $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ としてしまうと，直径を 1 周回すので楕円を 2 回覆うことになる．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のように半周にしなくてはならない．ただし，ヤコビアン abr は r の符号によって正負が変わるので絶対値は落とせない．このようなやり方はやめたほうが良い．

3. $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq x$

極座標で計算する．被積分関数は $\sqrt{1 - r^2}$，積分要素は $dxdy = rdrd\theta$ なので積分域だけが問題だ．D を定める不等式は平方完成により

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

となるので $(1/2, 0)$ を中心とする半径 $1/2$ の円周およびその内部である．偏角 θ を一定とするとき（すなわち傾き $\tan\theta$ の原点を出発する半直線上で考えるとき）r の動く範囲は $0 \leqq r \leqq \cos\theta$ である．この不等式は，形式的に

$$x^2 + y^2 \leqq x \Longrightarrow r^2 \leqq r\cos\theta$$

としても得られるが，極座標には xy 平面上での幾何的意味があるので図形的な考察をしてほしい．なお $x \geqq 0$ より θ の動く範囲は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1 - r^2}dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - |\sin^3\theta| d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} 1 - \sin^3\theta d\theta\end{aligned}$$

なお，最後の等式では偶関数の $[-\pi/2, \pi/2]$ での積分を $[0, \pi/2]$ での積分の 2 倍に直した．$\sin\theta$ は正となるので絶対値を外すことができる．以下は 3 倍角の公式を利用して計算するだけなので省略する．

また，どのような変数変換を行うべきかは一般的な判断基準があるわけではない．例えばこの問題と同じ領域でも，被積分関数が違えば極座標変換はうまくいかない．講義では

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy, \qquad D : x^2 + y^2 \leqq x$$

を紹介した．この積分は変数変換せずにまず y で積分すると計算できる．やってみると良い．

今回のレポート課題

問題 5.2（p.121）の 1 と 2 について，残された問題 1(3)，2(2)，2(3) を課題にする．前回提出しなかった人は前回の課題と合わせて提出するように．

微分積分 II 講義メモ (12 月 18 日)

本日の講義内容

1. 3 重積分

   3 重積分を密度が均一でない立体の質量を求める問題と関連させて解説した．座標空間内の立体 V について，点 (x, y, z) における密度が $\rho(x, y, z)$ で与えられているとする．V を各座標軸に直交する平面で細かく切り分ける．感覚としては，ジャガイモを縦横水平に切り分けて小さな直方体に分けることだ．切り分けられた各立体を V_j とし，V_j での密度を $(a_j, b_j, c_j) \in V_j$ により $\rho(a_j, b_j, c_j)$ で近似する．すると V の質量は

   $$\sum_j \rho(a_j, b_j, c_j)\mu(V_j), \qquad \mu(V_j) = V_j\text{の体積}$$

   で近似できる．これはまさに 3 重積分におけるリーマンの和であり，分割を細かくしていけば実際の V の質量に近づいていく．この極限が 3 重積分である．

   3 重積分も，その計算は累次積分で行う．x, y を固定して z で積分し，それで得られた x, y の関数を x を固定して y で積分する．さらにそれを x で積分する，すなわち 3 回積分を繰り返す．これはジャガイモの喩えで説明すれば，小さなサイコロ状のジャガイモを，z 軸の方向に並べて，スティック状のジャガイモにし，それを y 軸方向に並べてジャガイモスライスにする．そしてそれを x 軸方向に寄せ集める．各段階で体積の和を求めるのが累次積分の各段階だ．

   3 重積分についても変数変換の公式が存在する．積分範囲と被積分関数の変換は変数の対応を見るだけだ．積分要素の変換については

   $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \qquad dxdydz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw$$

   となる．これは平行 6 面体の体積が行列式の絶対値になることが背景にある．uvw 空間の小立方体とそれに対応する xyz 空間での立体（平行 6 面体で近似できる）の体積の比がヤコビアンの絶対値である．

2. 計算例（例題 5.4.1）

   球の体積を求める問題だ．結果は誰でも知っている．ここでは 3 次元の極座標を利用して 3 重積分の変数変換を使って計算した．

   $$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

   r, θ, φ の意味は講義で解説した．θ は緯度（正確には 90 度から緯度を引いたもの），φ は経度と思うと分かりやすいだろう．なおこの極座標では $r \geqq 0$ と $0 \leqq \theta \leqq \pi$ は大前提だ．

   この極座標による変数変換のヤコビアンは

   $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

   であるが，r, θ の条件からはこれは正である．

3. 計算例（例題 5.4.2）

   問題の意味を考えれば $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ の $D : x^2 + y^2 \leqq ax$ 上での積分（の 2 倍）になる．すなわち

   $$2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy, \qquad D : x^2 + y^2 \leqq ax$$

だが，これは極座標を使えば簡単に計算できる．

4. 曲面積

$z - f(x,y)$ のグラフの xy 平面内の領域 D 上にある部分 S の面積を考察した．

- D を小領域 D_j に分割する．
- グラフの D_j の上にある部分の曲面を S_j とする．S の面積は S_j の面積の和である．
- S_j をその接平面の D_j の上にある部分 S'_j で近似する．
- S'_j と水平面のなす角を θ_j とすると S'_j の面積は D_j の面積を $\cos\theta_j$ で割ったものになる．
- S'_j と水平面のなす角はそれぞれの法線ベクトルのなす角に等しい，
- S'_j は $(a_j, b_j) \in D_j$ での接平面なのでその法線ベクトルは $(-f_x(a_j, b_j), -f_y(a_j, b_j), 1)$ である．水平面の法線ベクトルは $(0, 0, 1)$ である．このなす角の余弦は内積を使って求められる．

$$\cos\theta_j = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x(a_j, b_j))^2 + (f_y(a_j, b_j))^2}}$$

以上の議論から

$$S\text{ の面積} = \sum_j S_j\text{の面積} \fallingdotseq \sum_j S'_j\text{の面積} = \sum_j \sqrt{1 + (f_x(a_j, b_j))^2 + (f_y(a_j, b_j))^2}D_j\text{の面積}$$

となるが最後の式は $\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}$ のリーマン和であり，分割を細かくしていった時の極限は重積分になる．よって

$$S\text{ の面積} = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}dxdy$$

今回のレポート課題

問題 5.4 の 1 を課題にする．締め切りは 1 月 13 日の 12 時半とする．

微分積分 II 講義メモ (1 月 15 日)

章末問題 5.4 の 1

体積を求める問題だが，3 重積分で考えるべき問題と 2 重積分で対応できる問題に分かれる．

(1) z の積分と考えるよりも 3 重積分として扱い，空間の極座標のアイデアで $x = ar\sin\theta\cos\varphi$, $y = br\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と置くと良い．このとき

積分範囲　$0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$

被積分関数　　1

積分要素　$dxdydz = abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

であり体積は

$$\int_0^1 dr\int_0^\pi d\theta\int_{-\pi}^\pi abcr^2\sin\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc$$

(2) これも $z = f(x,y)$ の形にすると大変なので 3 重積分とし，球面の極座標をもじった変換 $x = (r\sin\theta\cos\varphi)^3$, $y = (r\sin\theta\sin\varphi)^3$, $z = (r\cos\theta)^3$ と置くと良い．

積分範囲　$0 \leqq r \leqq a^{1/3}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ これを Ω とおこう．

被積分関数　　1

積分要素　$dxdydz = 27r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi drd\theta d\varphi$

この積分要素の変換の計算は大変だが難しいことは使わない．自力でやってみると良い．

$$\begin{aligned}\text{体積} &= \iiint_\Omega 27r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{a^{1/3}} 27r^3 dr\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_{-\pi}^\pi \frac{1-\cos 4\varphi}{8}d\varphi = \frac{4\pi}{35}a^3\end{aligned}$$

この計算において長方形領域での $f(x)g(y)$ の積分の求め方の 3 重積分版を利用している．累次積分の意味を考えれば納得できるはずだ．

(3) 曲面と平面の交わりは $x^2 + y^2 = 2x$ であり，これは $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円である．円の内部では曲面は平面の下にあり，外部では上にある．よって挟まれた部分の体積は

$$\int_D 2x - (x^2+y^2)dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 2x$$

で求められる．これは $x = 1 + r\cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおくと計算しやすいだろう．

積分範囲　$0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　　$2 + 2r\cos\theta - (1 + r\cos\theta)^2 - r^2\sin^2\theta = 1 - r^2$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

以上から

$$\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} r(1-r^2)d\theta = \frac{\pi}{2}$$

【別解】 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ としても計算できる．条件は $r^2 \leqq 2r\cos\theta$ となるので

積分範囲　$-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$, $0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$

被積分関数　　$2r\cos\theta - r^2$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

より

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} 2r^2\cos\theta - r^3 dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(4) 3 組の平行平面で囲まれた領域の共通部分なので多面体であることは間違いないのだが具体的に考えようとすると大変だ．そこで $x+y=u$, $y+z=v$, $z+x=w$ という変数変換，すなわち $x=\frac{u-v+w}{2}, y=\frac{u+v-w}{2}$, $z=\frac{-u+v+w}{2}$ と変換する．

積分範囲　$0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$, $0 \leqq w \leqq 1$

被積分関数　　1

積分要素　$dxdydz = \frac{1}{2}dudvdw$

積分は 1 辺の長さ 1 の立方体で 1/2 を積分するので 1/2 である．

(5) この問題もどんな曲面か理解するのは困難だ．空間極座標を使えば $r^4 = r\cos\theta$ となるのでこれが手掛かりになる．なお，$r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ の極座標の前提条件を意識すること．

積分範囲　$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$, $0 \leqq r \leqq (\cos\theta)^{1/3}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$

被積分関数　　1

積分要素　$dxdydz = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{(\cos\theta)^{1/3}} dr \int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\pi}{3}$$

【別解】 条件式は $x^2+y^2 = \sqrt{z}-z^2$ となるので $\sqrt{z} \geqq z^2$ でなければならない．$z^4 \leqq z$ であり $0 \leqq z \leqq 1$ である．この範囲の z について，水平面 (z 一定の面) との切り口は半径 $\sqrt{\sqrt{z}-z^2}$ の円であり，z 軸を中心とする回転体になっている．ゆえに体積は

$$\int_0^1 \pi(\sqrt{z}-z^2)dz = \pi\left[\frac{2}{3}z^{3/2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

となる．こうしてみると数学 III の知識で解けてしまう．

本日の講義内容

1. 回転面の曲面積

　$z = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ のグラフを x 軸の周りに回転して得られる回転体は $y^2+z^2 = (f(x))^2$ で定義される．すなわち $z = \sqrt{(f(x))^2 - y^2}$ のグラフの $D: a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq |f(x)|$ の上にある部分の曲面積の 2 倍である．この事実と定理 5.4．2 を合わせれば定理 5.4．3 が得られる．具体的な計算はテキストに記述してあるのでここでは触れない．

　定理 5.4．3 はより素朴に次のように理解できる．

- $[a,b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と分割する．
- $x_{j-1} \leqq x \leqq x_j$ の部分の回転面の面積を円錐台の側面積で近似する．すなわち $x_{j-1} < c_j < x_j$ をとり中心線の半径を $|f(c_j)|$ で，母線の長さを $\sqrt{1+(f'(c_j))^2}(x_j - x_{j-1})$ で近似する．円錐台の側面積は

$$2\pi|f(c_j)|\sqrt{1+(f'(c_j))^2}(x_j - x_{j-1})$$

- これらの総和は $|f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}$ のリーマン和なので分割を細かくしていった時の極限は

$$2\pi\int_a^b |f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

で与えられる．これは定理 5.4.3 に他ならない．

2. 広義積分

　無限領域での積分や無限大に発散する関数の積分はリーマン和の極限という積分の定義では理解できない．そこで極限と合わせて理解する．この作業は一般には難しいので具体例（例題 5.2.3）によって解説した．詳細は教科書に譲る．

今回のレポート課題

p.133 問題 5.4 の 4 を課題にする．今回が最後のレポート課題である．

「微分積分 II」第 1 回試験（11 月 27 日実施）の解答例とコメント

1 の 4 つの問題に各 10 点，2，3，4 に各 20 点の 100 点満点で採点した．ただし，4 はほぼ全滅に近く，実質的には 80 点満点だったかもしれない．4 の出題意図については解答例の後のコメントを見てほしい．

最高点は 80 点，最低点は 0 点，平均点は 56.11 点だった．今回は 40 点を合格点とする．39 点未満が 5 人いるが，第 2 回試験（積分，定期試験期間中に実施）で必ず合格するように準備しておいてほしい．

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の関数の 2 階までの偏導関数を求めよ．

$$(1) f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 2xy + y \qquad (2) f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$$

(2) 次の極限の収束発散を調べよ．収束する場合には極限を求めよ．

$$(1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad (2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}$$

(3) 関数 $z = x^3 + 3xy - y^3$ のグラフ（曲面）の $(x,y) = (2,-1)$ での接平面の方程式を求めよ．また $x^3 + 3xy - y^3 = 3$ で定義される曲線の $(2,-1)$ における接線の方程式を求めよ．

(4) C^2 級関数 $z = f(x,y)$ について $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変換する．次の等式を示せ．

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2$$

【解答例】

(1) 単純な計算なので結果のみ記述しておく．

$$(1) \quad f_x = 3x^2 + 6xy - 2y, \quad f_y = 3x^2 - 2x + 1$$
$$f_{xx} = 6x + 6y, \quad f_{xy} = 6x - 2, \quad f_{yy} = 0$$

$$(2) \quad f_x = 2xe^{x^2+2y^2}, \quad f_y = 4ye^{x^2+2y^2}$$
$$f_{xx} = (2+4x^2)e^{x^2+2y^2}, \quad f_{xy} = 8xye^{x^2+2y^2}, \quad f_{yy} = (4+16y^2)e^{x^2+2y^2}$$

(2) いずれも極座標で考察すると分かりやすい．(1) は

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2 + r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

なので，r をいくら小さくしても θ の値によって 1/2 から 3/2 の間のすべての値をとりえる．すなわち $r \to 0$ としても一定の値には収束しない．ゆえにこの極限は発散する．(2) は

$$\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} = r\cos^3\theta + 2r\sin^3\theta$$

なので，両辺の絶対値をとれば

$$\left|\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}\right| = r|\cos^3\theta + 2\sin^3\theta| \leqq r(|\cos^3\theta| + 2|\sin^3\theta|) \leqq 3r$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ なので最後の式は 0 に収束する．絶対値をとっているので左辺の値は正であり，はさみうちが使え極限は 0 に収束する．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}=0$$

(3) 接平面の方程式は $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ である．$f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ と $(a,b)=(2,-1)$ を代入すればすれば $f(2,-1)=3$, $f_x(2,-1)=9$, $f_y(2,-1)=3$ となるので接平面の方程式は

$$z=3+9(x-2)+3(y+1)=9x+3y-12$$

である．$x^3+3xy-y^3=3$ は曲面 $z=x^3+3xy-y^3$ の高さ 3 の等高線なので，接線は上で求めた接平面と水平面 $z=3$ の切り口である．よって接平面の方程式に $z=3$ を代入すればよく次で与えられる．

$$3=9x+3y-12,\qquad 3x+y-5=0$$

（接線の方程式の別解）$f_y(2,-1)=3\neq 0$ より陰関数の定理が適用でき，微分係数は $-f_x/f_y$ で与えられる．この $(2,-1)$ での値は -3 なので

$$y=-3(x-2)-1=-3x+5$$

(4) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ なので合成関数の微分により

$$f_r=f_xx_r+f_yy_r=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y$$
$$f_\theta=f_xx_\theta+f_yy_\theta=-r\sin\theta f_x+r\cos\theta f_y$$

なので

$$(f_r)^2+\frac{1}{r^2}(f_\theta)^2=(\cos\theta f_x+\sin\theta f_y)^2+(-\sin\theta f_x+\cos\theta f_y)^2=(f_x)^2+(f_y)^2$$

【コメント】

- (1) は簡単な計算問題，求める偏導関数は 10 個あるので一つに 1 点ずつ計 10 点を配点した．間違いとしては，f_{xy} の計算を忘れるもの，2 つ目の問題で積や合成関数の微分に失敗するものなどだ．
- (2) は極座標を使って考察するといい．分母が r^2 になるので（これに気付かないで計算する人もいるが）考えやすい．
- x 軸上から近づけた時の極限と，y 軸上から近づけた時の極限が異なっていれば収束しない（発散する）．しかし，等しいから収束すると言ったら間違いだ．後半の問題でそのような解答が散見した．なお，この問題ではどちらも

  $$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=0$$

  であり，座標軸に沿って近づけただけでは収束，発散は分からない．
- 等しくないものを = で結ぶ人，一般には成立しない不等式など，式の記述がでたらめな人が多い．解答に本質的に影響しないものは減点しなかったが，決して正しいと認めたわけではない．
- (3) では接平面の方程式や接線の方程式をきちんと覚えていない人が多い．覚え間違いは部分点の対象にならない．
- 陰関数の定理による微分係数は $-f_x/f_y$ だ．分母と分子が逆になったり $-$ が落ちたりする解答は 0 点にした．なお，講義ではグラフとその接平面を接点を通る水平面できれば，交わりが曲線と接線になると解説した．接平面の方程式 $z=9x+3y-12$ と水平面 $z=3$ を連立させれば，接線の方程式 $9x+3y-15=0$ が簡単に導かれる．テキストを勉強するのもいいが，講義の解説（講義メモに記述している）にも注意を払ってほしい．

- (4) は合成関数の微分を理解していれば簡単だ．ただ $(A+B)^2$ の計算ができない人がいるので驚いた．AB の係数の 2 を落とすのはうっかりでは済まされない．

2 次の関数の極値の候補点を求めるとともに，求めたそれぞれの点について極値の判定を行え．

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 4x$$

【解答例】 まず $f_x = 3x^2 + y^2 - 4 = 0$ と $f_y = 2xy = 0$ の連立方程式を解く．第 2 式から $x = 0$ または $y = 0$ でなくてはならない．$x = 0$ の場合は第 1 式から $y^2 - 4 = 0$ を得るので解 $(0, \pm 2)$ を得る．$y = 0$ の場合は第 1 式から $3x^2 - 4 = 0$ を得るので解 $(\pm 2/\sqrt{3}, 0)$ を得る．これら 4 点が極値の候補点である．

$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 2y$, $f_{yy} = 2x$ より

候補点	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	判定
$(0, \pm 2)$	0	± 4	0	-16	極値をとらない
$(2/\sqrt{3}, 0)$	$4\sqrt{3}$	0	$4/\sqrt{3}$	16	極小
$(-2/\sqrt{3}, 0)$	$-4\sqrt{3}$	0	$-4/\sqrt{3}$	16	極大

この結果から $(2/\sqrt{3}, 0)$ で極小値 $-(16/9)\sqrt{3}$ を，$(-2/\sqrt{3}, 0)$ で極大値 $(16/9)\sqrt{3}$ をとる．

【コメント】

- 極値の候補点を求めるのは比較的簡単なはずだ．計算ミスは仕方がないが，場合分けの失敗などの論理的なミスについては大きな減点になった．
- $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ の式を書かずに計算結果のみ書く人がいるが，間違えている場合に計算ミスなのか式の覚え違いなのか判断ができない．式は当然書くべきなので，覚え違いとの判断で採点した．
- 極小値，極大値を求めていない答案があったが，設問が候補点を求めることと極値の判定なので減点しなかった．さらに極大値，極小値の計算ミスは減点していない．

3 関数 $f(x,y) = x^2 y$ の $D : x^2 + y^4 \leqq 1$ における最大最小を求めよ．

【解答例】 D の内部で最大最小をとるとき $f_x = f_y = 0$ でなくてはならない．$f_y = x^2 = 0$ から $x = 0$ であるが，このとき y の値によらず $f_x = 2xy = 0$ になる．よって最大最小の候補として $(0, c)$ が得られる．（内部にあるのは $-1 < c < 1$ の場合）

D の境界上で最大最小になる場合は，条件付き極値問題（$g(x,y) = x^2 + y^4 = 1$ の条件下で $f(x,y) = x^2 y$ の極値を求める）の候補点を考える．これは連立方程式

$$x^2 + y^4 = 1, \qquad f_x g_y - f_y g_x = (2xy)(4y^3) - (x^2)(2x) = 2x(4y^4 - x^2) = 0$$

の解である．第 2 式から $x = 0$ または $x^2 = 4y^4$ であるが $x = 0$ の場合は第 1 式より $y^4 = 1$ となる．すなわち候補点として $(0, \pm 1)$ を得る．

$x^2 = 4y^4$ の場合は第 1 式より $5y^4 = 1$ である．よって $y = \pm 1/\sqrt[4]{5}$ である．このとき $x^2 = 4/5$ なので $x = \pm 2/\sqrt{5}$ である．なお，複合の取り方は任意である．

以上の候補点のすべてについて $f(x,y)$ の値を求める．

$$f(0,c)=0,\quad -1\leqq c\leqq 1$$
$$f(\pm 2/\sqrt{5},1/\sqrt[4]{5})=\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$$
$$f(\pm 2/\sqrt{5},-1/\sqrt[4]{5})=-\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$$

より $(\pm 2/\sqrt{5},1/\sqrt[4]{5})$ で最大値 $\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ を，$(\pm 2/\sqrt{5},-1/\sqrt[4]{5})$ で最小値 $-\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ をとる．

【コメント】

- D は円ではないが有界な閉じた領域であり，最大値最小値が存在する．解答例では最大最小を取る可能性のある点を，内部では極値問題の候補点として，境界の周上では条件付き極値問題の候補点として求めた．そして候補点で取る値の大小比較によって最大最小を求めている．2 階の微分を使った極値の判定は不要である．
- D の内部の点を考察するとき $f_x=2xy=0,\ f_y=x^2=0$ から $(0,0)$ と結論してしまう人が多い．なお，ここで得られた点での $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ は 0 であり，2 階の微分から極値の判定は行えない．しかしそれは極値ではないという意味ではないので，候補点から除いてはならない．すべての候補点について値の大小比較をするという考え方は，候補点を一つでも見落としたら正当性を失う．
- テキストの条件付き極値問題の解き方に従えば，後半は

  $$x^2+y^4=1,\qquad 2xy-\lambda 2x=0,\qquad x^2-\lambda 4y^3=0$$

  を解くことになる．第 2 式は $x=0$ または $y=\lambda$ であるが，$x=0$ の場合は第 1 式から $y^4=1$ 第 3 式から $\lambda=0$ を得る．$y=\lambda$ の場合は第 3 式から $x^2-4y^4=0$ を得る．この後は解答例の議論と同じである．

  テキストの方法とこの解答例の方法が同じことは，λ の存在が 2 つのベクトル (f_x,f_y), (g_x,g_y) が線形従属であることに他ならないからだ．線形従属であることは行列式が 0 であることと同値であり講義での方法に結びつく．

4 次の関数の $(0,0)$ における偏微分係数を求めよ．また $(0,0)$ で全微分可能であることの定義を述べるとともに，$(0,0)$ での全微分可能性を調べよ．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

【解答例】　$(0,0)$ の周りでは関数は 1 つの式として定められていないので偏微分係数は定義に従って計算しなくてはならない．

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$
$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-2k-0}{k}=-2$$

$(0,0)$ での全微分可能性の定義は

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

が成立することである．問題の関数を $(x, y) \neq (0,0)$ として代入すれば

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\dfrac{x^3-2y^3}{x^2+y^2} - x + 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3 - 2y^3 - x^3 + 2x^2y - xy^2 + 2y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

なので極座標を使えば

$$\frac{r^3(2\cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^2\theta)}{r^3} = \cos\theta\sin\theta(2\cos\theta - \sin\theta)$$

これは θ の取り方によって様々な値をとるので $(x, y) \to (0,0)$ としても一定の値には 0 には収束しない．よって全微分可能ではない．

【コメント】

- 予想通り悲惨な結果になったが，偏微分係数を求めることはできてほしかった．計算方法のみを学習していると本来の意味を忘れてしまう．これは数学を理解するうえで絶対避けなくてはいけないことだ．定義をきちんと理解する必要性を強調するために，あえてこのような問題を出題した．

  なお，問題の関数は x 軸上（$y = 0$）では $f(x, 0) = x$，y 軸上では $f(0, y) = -2y$ だ．それらの 0 における微分が 1, -2 であることはすぐ分かるはずだ．偏微分係数の意味に注意すれば，特に計算せずに当たり前のこととして答えが出せるはずだ．
- f_x, f_y が連続なら全微分可能であるが，これは定義ではないし全微分可能であることと同値な条件でもない．定義式は関数 $f(x, y)$ と 1 次近似式（接平面の方程式と同じ）$f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$ との差（の絶対値）が $\sqrt{x^2+y^2}$ に比べてずっと小さいことを述べている．そのような理解をしてほしい．

  なお全微分可能性の判定はこの試験問題の 1(2) と同じである．決して手の届かない問題とは思わないのだが．

「微分積分 II」第 2 回試験（1 月 29 日実施）の解答例とコメント

1 の 5 つの問題と 2 に各 10 点，3，4 に各 20 点の 100 点満点で採点した．平均点は 43.4 点，最低は 0 点，最高は 84 点だった．30 点以下の 6 人を不合格とした．

採点をして，計算力の低下を痛感している．型にはまったことしかできず，考察を要する問題は出来が非常に悪くなる．今回はテキストの例題に出ているような問題を多く出題したが，分からないので形だけ覚えようとしている人が多いのではないか．これでは数学の応用力はいつまでたっても身につかない．情報・電気系の学科は 2 年次以降も数学の課題に取り組むことが多いので，日ごろからきちんと理解して学習を進めるような習慣を身に付けてほしい．

1 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y^2 - xy\,dxdy,\ D: y^2 \leqq x \leqq y$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{y}dxdy,\ D: x^2 + y^2 \leqq y$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)dxdy,\ D: 0 \leqq x+y \leqq \pi,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$

(4) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy,\ D: x^2+y^2 \leqq a^2$

(5) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin y^2 dy$

【解答例とコメント】

(1) 単純な累次積分による計算問題

$$\iint_D y^2 - xy\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} y^2 - xydx = \int_0^1 y^2(y-y^2) - \frac{y}{2}(y^2-y^4)dy$$
$$= \int_0^1 \frac{y^3}{2} - y^4 + \frac{y^5}{2}dy = \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$$

- 基本的な計算問題だが，計算ミスが目立った．
- 積分範囲が $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ になっているもの，2 度目の積分の範囲に変数が使われているものは 0 点として扱った．
- 配点 10 点，平均 7.54 点

(2) x で先に積分とすると計算しやすい．

$$\iint_D \sqrt{y}dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \sqrt{y}dx = \int_0^1 2y\sqrt{1-y}dy$$

$1 - y = u$ と置換積分すれば

$$= 2\int_1^0 (1-u)\sqrt{u}(-du) = 2\int_0^1 u^{1/2} - u^{3/2}du = 2\left[\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

- $y\sqrt{1-y}$ の積分を部分積分で計算しようとする人が目につくが，感覚が悪い．$\sqrt{1\text{次式}}$ の積分はその 1 次式を u とおいて置換積分するのが基本だ．

- この計算は極座標を利用しても実行できる．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin\theta} r\sqrt{r\sin\theta}dr = \int_0^\pi d\theta \left[\sqrt{\sin\theta}\frac{2}{5}r^{5/2}\right]_0^{\sin\theta} = \frac{2}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\
&= \frac{2}{5}\int_1^{-1}(1-t^2)(-dt) = \frac{4}{5}\int_0^1 1-t^2 dt = \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

ここで $\sin^3\theta$ の積分は $\cos\theta = t$ とおいて計算している．また，最後から 2 番目の等式では偶関数の積分であることを利用している．

- 上の積分の範囲は $x^2+y^2 \leqq y$ なので講義での例題と異なる．極座標にしたときの積分域を $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2,\ 0 \leqq r \leqq \cos\theta$ とした人が目につくが，これでは $x^2+y^2 \leqq x$ を考えたことになる．なお，$\sqrt{y} = \sqrt{r\sin\theta}$ だから $-\pi/2 \leqq \theta < 0$ だと実数にならない．
- $r\sqrt{r\sin\theta}$ の積分で $r\sin\theta = t$ と置く人が多いが $\sqrt{\sin\theta}r^{3/2}$ なのでこのまま積分すればよい．
- 配点 10 点，平均 4.31 点

(3) $x-y=u,\ x+y=v$ すなわち $x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{v-u}{2}$ と変数変換する．これにより

積分域　$\Omega:\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \pi$

被積分関数　$u\sin v$

積分要素　$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$ より $dxdy = \dfrac{1}{2}dudv$

と変換されるので，この積分は

$$
\iint_\Omega u\sin v\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 udu\int_0^\pi \sin vdv = \frac{1}{2}
$$

- 一人を除き全員が変数変換を利用した．取り組みやすい問題でもあり良くできていた．
- 積分要素の変換で，ヤコビアン（偏微分係数の作る行列式）の絶対値がかかる．解答例ではヤコビアンは 1/2 だが，おき方を変えると $-1/2$ になる場合も多い．そのときは絶対値をとって $dxdy = \frac{1}{2}dudv$ としなくてはならない．ここに $-$ を付けたものは 3 点減点した．
- 配点 10 点，平均 9.04 点

(4) 極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で変換する．

積分域　$\Omega:\ 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　e^{r^2}

積分要素　極座標なので $dxdy = rdrd\theta$

より

$$
\iint_\Omega e^{r^2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^a re^{r^2}dr = 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^a = \pi\left(e^{a^2}-1\right)
$$

- 極座標で計算する典型的な問題．積分域も分かりやすい．
- re^{r^2} の積分を部分積分でやる人がいるが，e^{r^2} の原始関数は初等関数にならない．すなわち積分計算で原始関数を求めることはできない．
- (3) も (4) も変数変換の問題だが，積分要素の変換をできない人がこの問題のほうが多かった．極座標による変数変換の問題は何度もやっておりこれは理解に苦しむ状況だ．
- 配点 10 点，平均 7.02 点

(5) このままの順序では $\sin y^2$ を y で積分することになるので計算できない．そこで順序を交換してから積分する．

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dx \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin y^2 dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^{y} \sin y^2 dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin y^2 dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

- 順序交換を行った人は少なかった．しかし，$\sin y^2$ の原始関数は積分計算では求められないのだ．$\sin y^2$ の原始関数を $-\dfrac{1}{2y}\cos y^2$ としたり，$\sin y^2 = \dfrac{1-\cos 2y}{2}$ と計算したりする人がいたが，これは誤りであることにすぐ気が付いてほしい．
- 順序交換をすれば x の積分で y が出るので $y\sin y^2$ の積分になる．(4) で極座標変換で r が出たことにより re^{r^2} の積分になったことと状況は同じだ．
- 配点 10 点，平均 1.04 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$ の順序を交換せよ．

【解答例】積分域は右に開いた放物線 $x = y^2$ と直線 $y = x-2$ で囲まれた部分である．この 2 つのグラフの交点は $(1,-1)$, $(4,2)$ の 2 点である．この領域での x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq 4$ である．

x を固定したときの y の動く範囲を考えれば $0 \leqq x \leqq 1$ のときは $-\sqrt{x} \leqq y \leqq \sqrt{x}$，$1 \leqq x \leqq 4$ のときは $x-2 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ である．よって順序交換するためには積分を二つの積分の和として次のようにすればよい．

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

【コメント】

- 解答例はファイルにする制約からグラフを省略したが本来は書くべきだ．なお，曲線 $x = y^2$ は $y = x^2$ のグラフを直線 $y = x$ によって対称移動した図形だ．$y = \sqrt{x}$ のグラフではない．
- 配点 10 点，平均 7.02 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間内の曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ と 平面 $z = 0$ 内の領域 $D : x^2 + y^2 \leqq ax,\ z = 0$ について

(1) 曲面と $z = 0$ に挟まれ，かつ D の上方にある部分の体積を求めよ．

(2) 曲面の D の上方にある部分の曲面積を求めよ．

【解答例】(1) 体積は z を D 上で積分すればよい．

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

これを極座標で変換すれば

積分域 D は $(a/2, 0)$ を中心とする半径 $a/2$ の円板なので D 内の点の偏角は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ の範囲に含まれる．各 θ の値について r の動く範囲は $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ である．よって積分域は $\Omega : -\pi/2 \leqq \pi/2,\ 0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ に変換される．

被積分関数　$\sqrt{a^2-r^2}$
積分要素　極座標なので $dxdy = rdrd\theta$

$$\iint_\Omega \sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta}$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^3-a^3|\sin^3\theta|}{3}d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta d\theta$$
$$= \frac{2a^3}{3}\left[\theta+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3$$

(2) 表面積は同じ領域での

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

の積分になる．これも極座標で変換すれば，積分域と積分要素は体積のときと同じで被積分関数が $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}$ になる．

$$\iint_\Omega \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta}$$
$$= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a-a|\sin\theta|d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2} 1-\sin\theta d\theta = 2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = a^2(\pi-2)$$

【コメント】

- 体積は普通に $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の $D: x^2+y^2 \leqq ax$ での重積分を計算すればよいのだが．3 重積分にして空間極座標を利用した人は積分域の記述が困難なので全滅した．
- 極座標にしたときの r, θ の動く範囲の考え方は 1(4) の問題と基本的に同じだ．θ の動く範囲を読み取れない人が多かった．
- $(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin^3\theta|$ と絶対値がつくことに注意せよ．表面積の問題でも同様である．
- 配点 20 点，平均 6.48 点

4 サイクロイド $x = a(\theta-\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積および表面積を求めよ．

【解答例】サイクロイドは $0 \leqq x \leqq 2\pi a$ 上の関数のグラフなのでその回転体の体積は πy^2 を $[0, 2\pi a]$ 上で積分すればよいので

$$\int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx$$

θ によって変数変換すれば

積分域　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$
被積分関数　$\pi y^2 = a^2\pi(1-\cos\theta)^2$
積分要素　$dx = \dfrac{dx}{d\theta}d\theta = a(1-\cos\theta)d\theta$

であり，

$$\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3 d\theta = \pi a^3\int_0^{2\pi} 1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta d\theta = 5\pi^2 a^3$$

表面積については $2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ を積分すればよいので同じ変数変換を行う．このとき被積分関数のみが変わってくる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

なので表面積は

$$2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\sqrt{1+\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2}a(1-\cos\theta)d\theta=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta$$

$1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ を使い $\theta=2x$ と変数変換すれば

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 xdx=\frac{64}{3}\pi a^2$$

【コメント】

- 回転体の体積だから易しいと思っていたがパラメーター表示なので混乱したようだ．例題に出されているような問題なのだが．体積が $\int_0^{2\pi a}\pi y^2dx$ であることは高校で学習したはずだ．しかし，これを $\int_0^{2\pi}\pi y^2d\theta$ としてしまうと間違いだ．x による積分と θ による積分は全くの別物だ．なんとなく πy^2 を積分すると思っているからこういう間違いを犯す．
- 回転体の表面積は講義で解説したが，あまり詳しくやらなかったのでできなくても仕方がない．ただし $2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ の積分は重積分ではない．注意せよ．
- 配点 20 点，平均 0.93 点