

数学の世界 C – 素朴な題材による数学入門 – 第 5 回

井上 尚夫

熊本大学自然科学研究科

May 7, 2014

問5の考え方

ある主張が成り立たないことを示すには

- 主張「 ab が p の倍数なら a と b の少なくとも一方は p の倍数である」
- p が素数の時は真：定理2の主張
- p が素数でないときは偽：問5
- 成り立たないことを示すには「反例を上げる」
- 反例は一つでよい。数学の主張は一つでも反例があれば偽である。
- 「反例をすべて決定せよ」というのは一つ上げるよりもはるかに難しい。
- 【解答例】 p の素因数を a とし $p = ab$ と表す。 p は素数ではないので $1 < a < p$ であり、また $1 < b < p$ である。よって a と b はどちらも p の倍数ではないが、 $ab = p$ は p の倍数である。

問6について

一般に自然数 n について $\sqrt[k]{n}$ が無理数か否かを考える.

- $\sqrt[k]{n}$ は $x^k - n = 0$ である.
- 命題8より有理数解は n の約数に限られる. 特に整数である.
- $m^k < n < (m+1)^k$ となる自然数 m が見つければ,
 $m < \sqrt[k]{n} < m+1$ であり整数になれない. よって無理数である.
- 高校の時の $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を真似るのは間違いではないが, この講義内容を理解したということにはならない.
- n の約数を代入していくのは計算が大変
- 【解答例】 $2^3 = 8 < 16 < 27 = 3^3$ より $2 < \sqrt[3]{16} < 3$ なので, これは無理数である.

ピタゴラス数の決定 1 (p.7)

- ピタゴラス数とは $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数の組 $\{x, y, z\}$ をいう.
- 例 $\{3, 4, 5\}$, $\{5, 12, 13\}$
- $\{x, y, z\}$ はどの2つも互いに素であるとして考察する.
 $\{x, y, z\}$ の x と y が共通な素因数 p を持てば, p は z の素因数になっている. p は $\{x, y, z\}$ に共通の素因数であり, $\{x/p, y/p, z/p\}$ もまたピタゴラス数になる. ゆえに互いに素なものが決定できれば, 他はその自然数倍である.
- $\{x, y, z\}$ がすべて奇数ということはありません. またすべて偶数ということも取り方 (互いに素) に反する.
- x, y が奇数で z が偶数ということはありません.
- x が奇数, y が偶数, z が奇数として差し支えない.

ピタゴラス数の決定 2

- $y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$ とすれば $z+x, z-x, y$ はともに偶数である.
- そこで $z+x = 2p, z-x = 2q, y = 2r$ とおき, $4r^2 = 4pq$ とおく.
- p と q は互いに素である.
 z と x が互いに素なので, $Mz + Nx = 1$ となる整数 M, N が存在する.
 $z = p+q, x = p-q$ なので $M(p+q) + N(p-q) = 1$ が成り立つ.
 $(M+N)p + (M-N)q = 1$ より p と q は互いに素である.
- $pq = r^2$ と合わせて命題7により p, q は平方数である.
- $p = m^2, q = n^2$ とおいて $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$ を得る. なお, p, q が互いに素なので m, n も互いに素である.
- $m = 2, n = 1$ のとき $\{3, 4, 5\}$, $m = 3, n = 2$ のとき $\{5, 12, 13\}$

フェルマーの最終定理

- 1637 年ごろ フェルマーのディオファントスの「算術」への書き込み $n \geq 3$ のとき, $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数の組は存在しない.
フェルマー自身は $n = 4$ の場合の証明は行っていた.
- 1770 年 $n = 3$ の場合 Euler
- 1825 年 $n = 5$ の場合 Legendre
- 1839 年 $n = 7$ の場合 Lamé
- 1850 年 n が正則な素数の場合 Kummer
125000 以下の素数のうち正則なもの 7128 個, 残りの 4605 個は非正則
- 1978 年 125000 以下のすべての素数について (コンピューター利用)
- 1994 年 Wiles による解決 (代数幾何の最先端の成果と結びつく)

$n = 4$ の場合の証明

- $x^4 + y^4 = z^2$ が自然数解を持たないことを示す.
- 解が存在したとし, その中で z の値が最も小さいものを取り, $\{a, b, c\}$ とおく.
- a と b は互いに素なので $\{a^2, b^2, c\}$ は互いに素なピタゴラス数である.
- a^2 を奇数とし, $a^2 = m^2 - n^2$, $b^2 = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ とおく.
- $a^2 + n^2 = m^2$ は互いに素なピタゴラス数であり a が奇数なので

$$a = p^2 - q^2, \quad n = 2pq, \quad m = p^2 + q^2$$

- m と p は互いに素である. 同様に m と q も互いに素である.
- $b^2 = 4pqm$ より $pqm = (b/2)^2$ なので平方数である.
- 命題7より p, q, m はすべて平方数であるが $m = p^2 + q^2$ より新たな $x^4 + y^4 = z^2$ の解を定める. 解の z の値を d とおけば

$$d \leq d^2 = m \leq m^2 < m^2 + n^2 = c$$

となるので最初の解の選び方に矛盾する.

数学の世界 C – 素朴な題材による数学入門 – 第 10 回

井上 尚夫

熊本大学自然科学研究科

June 11, 2014

紀元前 300 年ごろエジプトのアレクサンドリアで著された史上最古の科学書

- 議論の出発点としての定義，公理，公準（p.17～18）
- 48 個の命題を一つずつ証明していく．
- 第 1 命題 与えられた線分を辺とする正三角形の作図
- 第 4 命題 2 辺とその挟む角による合同定理
- 第 27 命題 錯角が等しければ平行である．
- 第 29 命題 平行ならば錯角が等しい．初めて第 5 公準を使う．
- 第 47 命題，第 48 命題 三平方の定理とその逆

平行線の公理の問題

平行線の公理は公準として仮定するべきではなく他の公理から証明されるべきだ。ユークリッド原論の汚点

- ユークリッド自身は？
- 平行線の定義を変える，別の公理（相似三角形の存在など）を導入する等の努力が行われたが，平行線の公理を証明したことにはならなかった。
- サッケーリ (1667-1733)
平行線の公理を使わずに何が言えるかを追及，サッケーリの四角形と鋭角の仮定。
- ランベール (1728-1777)
鋭角の仮定から得られる幾何学と球面幾何学との類似に気が付く。
半径が虚数の球面上の幾何学。
- ロバチェフスキーとボヤイ
非ユークリッド幾何：ユークリッドの仮定した第5公準以外の公理をすべて満たし，第5公準のみ満たさない幾何学。これによって平行線の公理は他の公理，公準からは証明できないことが明らかになった。

非ユークリッド幾何について

- 半径 R の球面の曲率（曲がり具合）を $1/R^2$ とする．曲がり具合一定であることによって，第 4 命題の証明における移動の自由性が保証される．
- 非ユークリッド幾何： $R = i$ の「球面」上の幾何（実際に球面ということではない）
 - 内角 α, β, γ の三角形の面積は

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)i^2 = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

三角形の内角の和は π 以下．

- 非ユークリッド幾何の余弦定理は

$$\cos \frac{c}{i} = \sin \frac{a}{i} \sin \frac{b}{i} \cos \gamma + \cos \frac{a}{i} \cos \frac{b}{i}$$

ここで $\cos \frac{x}{i} = \cos(-ix) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$\sin \frac{x}{i} = \sin(-ix) = -i \sinh x = -i \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ より

$$\cosh c = -\sinh a \sinh b \cos \gamma + \cosh a \cosh b$$

非ユークリッド幾何の可視化

- 残念ながら非ユークリッド幾何の世界は空間内の曲面上の幾何として実現させることは不可能。しかし，平面上に地図を作ることは可能。
- 全世界は半径1の円板の内部。2点を結ぶ直線は，単位円と境界で直交する円弧。また角度は見た目の角度と一致。
- 2点を結ぶ直線はただ1本，第5公準は成り立たない。
- エッシャーの版画

- 平行線の公理とは図形の存在する空間が平坦であることを述べている。平坦か否かはアприオリに決まるのではなく、公理として仮定しなければならない。
- 球面幾何（曲率正），平面幾何（曲率0），双曲幾何（曲率負）
- 1850年頃，リーマンは様々に曲がった空間の幾何を提唱する。リーマン幾何
- アインシュタインは物質によって時空は様々に曲がると考え，一般相対性理論を提唱した。彼はその記述にリーマン幾何の枠組みを利用している。