数学の世界 C -素朴な題材による数学入門　(2014 年度)

井上尚夫（理学部 3 号館 D416，096(342)3328）
URL: http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~hisinoue/index-j.html
E-mail: hisinoue@kumamoto-u.ac.jp

1　整数-数学における抽象化

数学において最も基本的な方法は抽象化である．言葉の意味を厳密に定め，論理的な推論のみによって議論を進める．直感にまったく頼らないので，具体的イメージがわかず抽象的で難しいという印象を持つかもしれないが，それによって 100 %正しい議論が可能になる．数学の論理が他分野で信頼されるもっとも根本的な理由である．

この事情を整数を題材に解説しよう．整数という誰でも知っている対象がいかに深い数学的構造を持っているか感じていただけたら幸いである．

1.1　従来の最大公約数を求める方法

2 つの自然数 a と b が与えられたとき，その最大公約数はどうやって求めるのだろうか．中学校まででは共通の公約数で割っていって，公約数がなくなった時にそれまで割った数の積として最大公約数を求めるという方法を学習したはずだ．a と b を素因数分解して共通な素因数を掛け合わせるという形で教わった人も多いだろう．だが，この方法で 1581 と 899 の最大公約数を従来の方法で求めようとすると，作業は煩雑になってしまう．従来の計算問題は単に解きやすい問題を解いていたに過ぎない．

しかし，より根本的に，この方法で本当に最大公約数が求められるのかという疑問が残る．例えば公約数で割っていく方法について，割り方によって結果が変わることはないだろうか．素因数分解を利用するという人は，素因数分解はいつでもできるのだろうか．できるとしてもそれは一通りなのだろうか．こういう疑問は中学校まででは扱わない[*1]が，この疑問に答えられなければ，中学校までで学習した方法が本当に最大公約数を求める方法になっているとは言えない．さて，この問題について考察していこう．

1.2　まずは用語の定義を再確認する

除法の原理　2 つの整数 $a, b (b \neq 0)$ について，$a = bp + r,\ 0 \leqq r \leqq |b| - 1$ となる整数の組 $\{p, r\}$ がただ一組存在する[*2]．この関係を $a \div b = p \cdots r$ と表す．p を商，r を余り（剰余）と呼ぶ[*3]．なお，数は整数の範囲で考えているが $b \neq 0$ は大前提である．0 で割ることはできない．

約数，倍数，自明な約数　2 つの整数 a, b について $a = bp$ となる整数 p が存在すると

[*1] 新しい高等学校学習指導要領では数学 A に整数の単元が入っている．この章で扱う話の一部はこの単元の内容と重複する

[*2] この事実は経験的に周知のことだ．a, b が自然数のときは，実際に割り算をしてその整数部を p とすればよい．ただし，この事実が成り立つことを厳密に示すには整数とは何かを考え直さなければならない．この作業は大変なので，この講義では除法の原理を出発点に整数を扱うことにする．

[*3] 整数の範囲で考えているが，唯一組にするために余りは 0 以上の整数にしている．例えば $(-8) \div 3 = -3 \cdots 1$，$(-25) \div (-9) = 3 \cdots 2$ など．

き，a を b の倍数，b を a の約数という．a の約数全体の集合を $D(a)$ と表す．ここで数を整数の範囲で考えているので次が成り立つ．

- $D(1) = D(-1) = \{1, -1\}$, $D(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$
- $a \neq 0, \pm 1$ のとき $D(a) \supseteqq \{\pm 1, \pm a\}$ この 4 つを a の**自明な約数**という．
- $a \neq 0$ のとき $k \in D(a)$ は $-|a| \leqq k \leqq |a|$ を満たす．$D(a)$ は有限集合である．
- $D(0) = \mathbb{Z} =$ 整数全体の集合[*4]

公約数，最大公約数，互いに素　2 つの整数 a, b について，その共通の約数を a と b の公約数という．公約数の集合は $D(a, b) = D(a) \cap D(b)$ である．$D(a, b)$ の最大元を最大公約数と呼ぶ．最大公約数が 1 のとき a と b は互いに素であるという．

- $D(12, 8) = D(-12, 8) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4\}$
- $D(a, b) \supseteqq \{\pm 1\}$，$a$ と b が互いに素 $\Longleftrightarrow D(a, b) = \{\pm 1\}$
- $D(a, 0) = D(a) \cap D(0) = D(a)$

素数，素因数分解　2 以上の自然数 p で $D(p) = \{\pm 1,\ \pm p\}$ となるもの（自明な約数以外に約数を持たないもの）を素数と呼ぶ．a の約数で素数のものを a の素因数と呼ぶ．2 以上の自然数 n を素数の積として表すことを素因数分解と呼ぶ．なお，1 は素数とは呼ばない．

問 1. 除法の原理が成り立つ理由を，数直線上で図形的に考察せよ．（ヒント bq たちは数直線上で $|b|$ の間隔で並ぶ点の集まりになる．）

問 2. a が b の約数で，また b が c の約数であるとき，a は c の約数であることを示せ．

問 3. a を 2 以上の自然数とするとき，a の 2 以上の約数で最小のものは素数であることを示せ．

この問題から次の命題が直ちに得られる．

命題 1. $0, \pm 1$ 以外の整数は素因数を持つ．

1.3　ユークリッドの互除法

2 つの整数の最大公約数を求める方法としてユークリッドの互除法を紹介する．

命題 2 (除法の原理と公約数の関係)**.** 等式 $a = bp + r$ において $D(a, b) = D(b, r)$ が成り立つ．特に $r = 0$ のとき a と b の公約数は b の約数である．

証明. c が a と b の公約数であれば，$a = cq,\ b = cr$ と表せる[*5]．ゆえに $r = a - bp = cq - cpr = (q - pr)c$ であり，c は r の約数である．c は b の約数だったから b と r の公約数である．逆も同じように議論できる．　□

この命題を利用して，a と b の最大公約数を求めてみる．まず，負の整数の場合は符号

[*4] これはこれは小学校以来の約数の感覚とずれていると思う．ただこの定義により数学的考察は単純になる．

[*5] 商は p と表すと思い込む人がいるが，状況によって商は変わるので，文字は変えないといけない．記号の意味を考えずに形だけまねようとすると同じ p で表しがちだ．

を変えたものに置き換えればいいので a と b は自然数にしておく．また必要なら a と b を入れ替えて，$a > b$ としておく．次のような割り算を繰り返す．

- $a \div b = p_1 \cdots r_1$ このとき $a = bp_1 + r_1$ なので $D(a, b) = D(b, r_1)$
- $b \div r_1 = p_2 \cdots r_2$ このとき $b = r_1p_1 + r_2$ なので $D(b, r_1) = D(r_1, r_2)$
- $r_1 \div r_2 = p_3 \cdots r_3$ このとき $r_1 = r_2p_2 + r_3$ なので $D(r_1, r_2) = D(r_2, r_3)$

以下，割る数を余りで割るというプロセスを続ける．余りは小さくなっていくので有限回の計算で割り切れる（余りが 0 になる）．$n+1$ 回の割り算で終わったとし，最後の計算を

- $r_{n-2} \div r_{n-1} = p_n \cdots r_n$ このとき $r_{n-2} = r_{n-1}p_n + r_n$ なので
$$D(r_{n-2}, r_{n-1}) = D(r_{n-1}, r_n)$$
- $r_{n-1} \div r_n = p_{n+1}$ このとき $r_{n-1} = r_np_{n+1}$ なので
$$D(r_{n-1}, r_n) = D(r_n, 0) = D(r_n)$$

と表す．$D(a, b) = D(r_n)$ であり，r_n が最大公約数であることが分かる．なお，n が大きいと，次の段階の割り算の仕方が混乱しやすい．この場合 $\{a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ \cdots, r_{n-1},\ r_n\}$ という数列を意識するとよい．これを剰余の系列と呼ぶことにする．この最大公約数の求め方はユークリッド[*6]の原論に記述されておりユークリッドの互除法と呼ぶ．

例 1. ユークリッド互除法を使って 1581 と 899 の最大公約数を求める．

$$\begin{array}{lll}
1581 \div 899 = 1 \cdots 682 & 1581 = 899 \times 1 + 682 & D(1581, 899) = D(899, 682) \\
899 \div 682 = 1 \cdots 217 & 899 = 682 \times 1 + 217 & D(899, 682) = D(682, 217) \\
682 \div 217 = 3 \cdots 31 & 682 = 217 \times 3 + 31 & D(682, 217) = D(217, 31) \\
217 \div 31 = 7 \cdots 0 & 217 = 31 \times 7 + 0 & D(217, 31) = D(31, 0) = D(31)
\end{array}$$

剰余の系列は $\{1581,\ 899,\ 682,\ 217,\ 31\}$ であり最大公約数は 31 である．

ユークリッドの互除法による最大公約数の求め方は，素因数分解はおろか素数の概念さえ使っていないことに注意してほしい．さて，以上の議論を振り返ると次が分かる．

命題 3. 公約数は最大公約数の約数である．

証明．互除法により割り切れた時の割る数を c とすれば $D(a, b) = D(c)$ が成り立つ．これは公約数が最大公約数 c の約数であることを意味する． □

問 4. 互除法により 297 と 184 の最大公約数を求めよ[*7]．

1.4 素因数分解の可能性一意性

1.4.1 ユークリッド互除法を逆にたどると

$a \div b = p \cdots r$ から互除法を始めるときその k 回目を

$$r_{k-2} \div r_{k-1} = p_k \cdots r_k, \quad r_{-1} = a,\ r_0 = b$$

[*6] Euclid 紀元前 3 世紀ごろエジプトアレクサンドリアで活動

[*7] 互除法があらゆる場合に使えることを確認しながら計算してほしい．やさしければ計算できるが複雑になると混乱して分からなくなるという状況では，理解は深まらない．計算は大変だがこの方法なら必ず最大公約数を求められるという感覚を持つこと．

と表す．この式を $r_k = r_{k-2} - p_k r_{k-1}$ と書き直せば，r_k を r_{k-2} と r_{k-1} の定数倍の話で表示する式とみなせる．特に r_n を a と b の最大公約数とし

$$r_n = r_{n-2} - p_{n-2} r_{n-1}$$

について $r_{n-1} = r_{n-3} - p_{n-3} r_{n-2}$ を代入すれば r_n は r_{n-3} と r_{n-2} の定数倍の和になる．これは r_n が r_{-1} と r_0（すなわち，a と b）の定数倍の和となるまで続けることができる．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 1. 自然数 a と b の最大公約数を m とすれば，$Ma + Nb = m$ となる整数 M，N が存在する．また，$Ma + Nb = 1$ となる整数 M，N が存在すれば，a と b の最大公約数は 1，すなわち互いに素である．

証明. $Ma + Nb = m$ となる M, N の存在は既に示したので，後半のみ証明する．$Ma + Nb = 1$ が成り立つとする．a と b の公約数は 1 の約数になるので ± 1 しかない．すなわち a と b は互いに素である． □

例 2. $M1581 + N899 = 31$ となる M, N を求めるためには剰余の系列
$\{1581,\ 899,\ 682,\ 217,\ 31\}$ に着目して，次々と前の数字に置き換えていく．

$$\begin{aligned} 31 &= 682 - 3 \times 217 = 682 - 3 \times (899 - 682) = 4 \times 682 - 3 \times 899 \\ &= 4 \times (1581 - 899) - 3 \times 899 = 4 \times 1581 - 7 \times 899 \end{aligned}$$

この定理のよさは互いに素という基本的概念が一つの簡単な式で記述できるところにある．例として次の命題を証明しておく．当たり前だと思う人もいるかもしれないが，上の定理を使わないとなかなかきれいな証明はできない．

命題 4. ab が c の倍数で b と c が互いに素であれば，a は c の倍数である．

証明. b と c が互いに素なので $Mb + Nc = 1$ となるような整数 M, N が存在する．ゆえに $a = Mab + Nac$ だが ab が c の倍数なので a も c の倍数である． □

1.4.2　素数の既約性

定理 2. p が素数の時，ab が p の倍数なら a と b の少なくとも一方は p の倍数である．

証明. a が p の倍数でなかったとしよう．p は素数なのでその約数は ± 1 と $\pm p$ のみであり，p は a と互いに素である．ゆえに命題 4 により b は p の倍数になる．a, b の少なくとも一方は p の倍数であるといえる． □

問 5. p が素数でないときは，ab が p の倍数であっても，a と b のどちらも p の倍数でないということがあり得る．$p = 14$ の場合にこのような例を与えるとともに，この事実を証明せよ．

1.4.3　素因数分解の可能性，一意性

定理 3 (算術の基本定理)**.** 2 以上の自然数は（1 つ以上の）素数の積[*8]として，素数の並べ方を除いてただ一通りに表すことができる．

[*8] 1 つの積という言い方は日常的には使われないが，数学の文章では許容される．その方が場合分けがいらないので議論が単純になる．

証明．素数は 2 より大きいので 2 つ以上の素数の積は 4 より大きくなる．ゆえに 2 の素数の積としての表し方は一通りである．

$n-1$ までの 2 以上の自然数はすべて素数の積として一意的に表されたとする．n が素数の場合は n は 1 つの素数（すなわち n）の積として表されているし，それ以外の素数の積としての表示はあり得ない．n が素数でないときは，命題 1 により n の素因数 $p(p<n)$ を 1 つとる．$a=n/p \geqq 2$ は $n-1$ 以下なので素数の積として表せる．よって $n=ap$ も素数の積として表せる．

次に n の素因数分解，$n=p_1p_2p_3\cdots p_m$ を考える．n は p の倍数なので p_1 から p_m のいずれかは p の倍数になる．仮に p_1 が p の倍数であるとすると，p_1 は素数なので $p_1=p$ である．$a=p_2p_3\cdots p_m$ は素因数分解なのでこの表示は一通りである．よって n の素因数分解の仕方も一通りである．□

証明が続いたので少し難しくなってしまった．しかし，証明とはある主張が数学的真実だと自ら確認するプロセスであり，数学の考え方を知るには避けて通れない．証明の方法という観点から少しコメントしておこう．

- 定理 1 の主張は $Ma+Nb=m$ となる整数 M,N が存在することだ．証明はこのような M,N をどう見つければよいのかという観点から考察している．ユークリッドの互除法を基にしているが，実際に計算することは煩雑だ．具体的に計算できるようになることが重要なのではなく，どのような数の組に対してもこのアイデアで M,N が見つけられるという確信を持つことが重要だ．そうすればこの定理の主張が数学的真実であることを納得できるはずだ．具体的計算のみにこだわる必要はない．
- 定理 2 の主張は a と b の少なくとも一方が p の倍数になることだ．これを a が p の倍数でなければ b が p の倍数になるという形で証明している．ちょっとした言い回しの違いに過ぎないのだが，同じことだと理解していただけるだろうか．
- 定理 3 は数学的帰納法で証明した．ただし，高校で通常行う議論ではなく $n-1$ 以下のすべての 2 以上の自然数について主張が成り立つと仮定している．これでも構わないことに納得して頂けるだろうか．数学的帰納法の証明というと型にあてはめることばかり考える人が多いが，それでは柔軟な数学的思考を展開することはできない．なお，一意性の主張も含めているので理解できない人も多いと思う．あまり気にしないように．

1.5　素因数分解の一意性の応用

1.5.1　素因数分解の一意性から導かれる整数の性質

素因数分解の一意性から以下の事実が簡単に証明できる．

命題 5. a と b が互いに素であることと，それぞれの素因数分解に共通の素数が現れないことは同値である．

証明．共通な素数が現れたらそれは 2 以上の公約数なので互いに素ではない．逆に互いに素でなければ，最大公約数は 2 以上なので最大公約数は素因数 p を持つ．p は素数の公約数である．これが a と b の素因数分解に共通にあらわれることは素因数分解の一意性による．□

命題 6. a が n 乗数（$a=b^n$ と表せる数）であることと，a の素因数分解において各素因数が n の倍数個ずつ含まれることは同値である．

証明. $a = b^n$ であれば a の素因数分解を b の素因数分解から作ることができる．このとき各素因数は n の倍数個ずつ含まれる．素因数分解の一意性から a の素因数分解はこの形しかない．逆は明らかである． □

命題 7. ab が n 乗数で a と b が互いに素なら a，b それぞれ n 乗数である．また abc が n 乗数で a, b, c のどの二つも互いに素であれば a, b, c はそれぞれ n 乗数である．

証明. a の素因数分解と b の素因数分解を

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}, \qquad b = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_t^{l_t}$$

とおけば,

$$ab = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_t^{l_t}$$

は ab の素因数分解になる．互いに素であることから p_i と q_j に共通なものはなく，p_i, q_j の個数はそれぞれ k_i, l_j である．ab は n 乗数なので，k_i, l_j は n の倍数であり，a と b はそれぞれ n 乗数になる．

3 個あるいはそれ以上の場合も本質的な議論は同じである． □

1.5.2　様々な無理数

分数 b/a で表される数を有理数という．ここで分母と分子の素因数分解に共通の素数が現れるときにはそれで約分できるので，a と b には共通の素因数を持たないとして良い．これを既約分数という．有理数として表されない実数を無理数という[*9]．

命題 8. α を 整数係数の n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0$$

の有理数解とする．このとき α は $\dfrac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$ である．特に $a_n = 1$ のときは整数である．

証明. $a_0 \neq 0$ より $\alpha \neq 0$ なのでを既約分数を使って $\alpha = b/c$ と表す．方程式に $\alpha = b/c$ を代入し c^n を両辺に掛ければ

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} c + a_{n-2} b^{n-2} c^2 + \cdots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n = 0$$

を得る．第 2 項以下を右辺に移項して右辺を c でくくれば

$$a_n b^n = -(a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} c + \cdots + a_1 b c^{n-2} + a_0 c^{n-1}) c$$

を得る．c は $a_n b^n$ の約数であり，c と b^n は互に素なので命題 4 により c は a_n の約数である．同様に第 $n+1$ 項以外を右辺に移項して b でくくれば

$$a_0 c^n = -(a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} c + \cdots + a_1 c^{n-1}) b$$

となるので，b と c^n が互に素であることから b は a_0 の約数になる． □

この命題で $a_0 \neq 0$ と仮定したが，$a_0 = 0$ の場合は x^k をくくり出して定数項が 0 でないようにすればよい．

[*9] これは実数が定義できていないので，厳密な定義ではない．実数を定義するのは難しいのでこの講義では扱わない．

例 3. $\sqrt[5]{27}$ は $x^5-27=0$ の解なので，整数でなければ無理数である．一方 $1=1^5<27<32=2^5$ なので $1<\sqrt[5]{27}<2$ であり，$\sqrt[5]{27}$ は整数にはなりえない．よって無理数である．

例 4. 方程式 $x^5-3x^3+x^2+x-1=0$ が有理数解を持ったとしよう．命題 1 からそれは 1 の約数（±1）でなくてはならない．しかし，±1 を左辺に代入すると奇数になるので 0 になることはない．ゆえに ±1 は解ではなく，この方程式は有理数解を持たない．

問 6. $\sqrt[3]{16}$ と $\sqrt[3]{27}$ について有理数か否か調べよ．

問 7. 次の方程式には有理数解は存在するか．存在する場合にはその値を求めよ．

$$(1) x^5-3x+1=0, \qquad (2)\ 2x^3-3x^2-7x+3=0$$

1.6 フェルマーの最終定理（発展話題）

素因数分解の一意性はピタゴラス[*10] 数（$x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数の組）の決定にも使える．まず，x と y が共通な素因数 p を持てば，z^2 は p の倍数になるので，z も p を素因数にもつ．よって $x/p,\ y/p,\ z/p$ がより小さなピタゴラス数になる．よって，ピタゴラス数を決定するにはどの 2 つも互いに素になっているもののみ考えれば良い．

x と y がともに奇数とすると $x^2+y^2=(2n+1)^2+(2m+1)^2=4(n^2+n+m^2+m)+2$ となるので，この因数分解には 2 は 1 つしか現れず，平方数になることはない．よって，x と y は一方が奇数，他方が偶数となっている．そこで $y=2k$ とおく．また x と z は奇数なので $z+x=2p,\ z-x=2q$ とおく．$z=p+q,\ x=p-q$ である．

さて，x と z は互いに素なので $Mx+Nz=1$ となるように整数 M,N をとることができるが，これは $M(p-q)+N(p+q)=(M+N)p+(-M+N)q=1$ と書き直せるので定理 1 より p と q は互いに素である．一方 $y^2=4k^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)=4pq$ より $pq=k^2$ が成り立つ．よって p と q は平方数であり $p=m^2,\ q=n^2$ と表せる．

定理 4. 互いに素なピタゴラス数は互いに素な 2 つの自然数 m,n により $m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2$ と表せる．

このピタゴラス数の構成法が紀元前 2000 年ごろの古代バビロニアで知られていたことは発掘された粘土板（プリンプトン 322）から明らかと思われる．この表の 2 列目と 3 列目はすべてピタゴラス数の一部である．

さて，17 世紀の数学者フェルマー[*11] は 1637 年ごろ，ディオファントス[*12]の「算術」のピタゴラス数についての項の余白に次の書き込みをした．

> ある 3 乗数を 2 つの 3 乗数の和で表すこと，あるいはある 4 乗数を 2 つの 4 乗数の和で表すこと，及び一般に，2 乗よりも大きいべきの数を同じべきの 2 つの数の和で表すことは不可能である．私はこの命題の真に驚くべき証明を持っているが，余白が狭すぎるのでここに記すことはできない．

[*10] Pythagoras BC582–BC496，3 平方の定理に証明を与えたとされる．ピタゴラス教団として活動していた．

[*11] Pierre de Fermat, 1607–1665, 本職は判事 (弁護士) 数学は余技であったらしい．数論の父と呼ばれる．

[*12] Diophantus, 210 頃–290 頃，アレクサンドリアで活動

図 1　プリンプトン 322

ようするに $n \geqq 3$ の場合には $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数の組は存在しないと主張した．当時は定理の証明を公開するということは必ずしも行われておらず，フェルマー自身多くの命題を証明を与えないまま発表している．彼が証明せずに与えた命題はその後証明され，この主張のみが証明されずに残された．これが「フェルマーの最終定理」である．

フェルマーの最終定理が証明されたのは 1993 年でワイルズ[*13]による[*14]．フェルマーが主張してから 350 年以上経過してようやく証明された．さて，フェルマーが本当にこの証明を行っていたのか今となっては確かめようはない．しかし，ようやくなされた証明は現代の高度な数学を駆使したものである．この方法でフェルマーが証明したとは考えられない．さて，フェルマーは本当にこの命題を証明していたのであろうか．

この章の最後に $n = 4$ の場合のフェルマーの最終定理の証明を与えておこう．ここまで学習してきた皆さんなら十分理解できるであろう．

定理 5. $x^4 + y^4 = z^2$ を満たす自然数の組は存在しない[*15]．

証明．そのような自然数の組が存在したとしてその中で z が一番小さいものをとる．ここで，x と y が共通な素因数 p を持ったとすると，z^2 は p^4 の倍数になるので z は p^2 の倍数になる．$x/p,\ y/p,\ z/p^2$ もこの式を満たすので z の取り方に矛盾する．よって x と y は互いに素である．同様に x と z が共通な素因数を持ったとすると，それは y の素因数になるので，x と y は互いに素でなくなり矛盾である．ゆえに，$x,\ y,\ z$ はどの 2 つも互いに素である．

$x^2,\ y^2,\ z,$ は互いに素なピタゴラス数なので、互いに素な自然数 m, n により

$$x^2 = m^2 - n^2,\ y^2 = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

と表せる．最初の式から $x,\ n,\ m$ も互いに素なピタゴラス数であり，x は奇数なので n

[*13] Andrew John Wiles, 1953–

[*14] この経緯は読み物として「フェルマーの最終定理 サイモン・シン著 青木薫訳 新潮社」に記述されている．関心のある人は読んでみるとよい．

[*15] z のべきを 2 にしているが，証明の都合上である．これから $x^4 + y^4 = z^4$ を満たす自然数の組が存在しないことは簡単だ．考えてみよ．

は偶数である．よって互いに素な自然数 p, q により

$$x = p^2 - q^2,\ n = 2pq,\ m = p^2 + q^2$$

と表せる．

$y^2 = 4pqm$ であり，p と q が互いに素で $n = 2pq$ と m が互いに素であることから，p, q, m はどの 2 つも互いに素である．よって，$pqm = (y/2)^2$ は平方数なので p, q, m はそれぞれ平方数になる．$p = a^2$, $q = b^2$, $m = c^2$ とおけば $a^4 + b^4 = c^2$ であるが，$c \leqq c^2 = m \leqq m^2 < z$ よりこれは z の取り方に矛盾する．よって $x^4 + y^4 = z^2$ を満たす自然数の組は存在しない． □

2 球面幾何-幾何的直感と数学

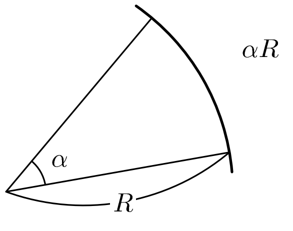
数学的議論に図形的直感が必要なことは多い．しかし，議論は直感に頼らずに厳密に行わなければならない．この姿勢は紀元前 300 年頃にまとめられた，ユークリッド原論にも端的に示されている．ここでは，球面上の幾何を題材に，高校までで学習した数学を駆使しながら議論を深めていくことにする．この世界（地球）を幾何学的に理解することにつながる．

2.1 予備知識

まずこの話に必要な予備知識をまとめておく．

- 弧度法・ラジアン（数学 II）
  半径 1 の円弧の長さで角度を記述する（90 度 $= \pi/2$ ラジアン）．半径 R の円において，角 α ラジアンに対応する弧の長さは αR である．
- 三角比・余弦定理（数学 I）
  離れたところにある 2 点 A，B の距離をそれぞれの点までの距離と 2 点を見込む角度によって記述する．

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$



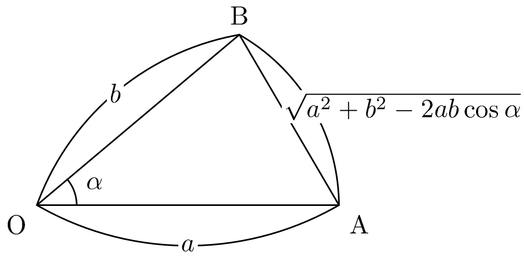


図 2　弧度法・余弦定理

- 空間ベクトルの内積の幾何学的表示と座標成分による表示（数学 B）

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

  証明には内積が $\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right)/2$ に等しいことを利用する．

2.2　球面上における直線，図形

球面（半径は R としておく）上でユークリッドの幾何と同様な幾何を構築してみよう．まず，球面における曲線の長さや角度は素朴に理解してほしい．平面幾何（空間幾何，ユークリッド幾何）における直線，線分，多角形，円などに対応する球面上の図形を決める．線分については 2 点の最短線であることで特徴づけられるので，これは球面では大円（中心を通る平面との切り口）の劣弧（半円を超えない弧）になる．これを球面線分と呼ぶ．その弧の長さを 2 点間の球面距離と呼ぶ*16．また大円を球面直線と呼ぶ．

球面直線と球面距離に関連して平面幾何との違いを箇条書きしておこう．

- 2 点を結ぶ球面線分はたいていは 1 本だが，対蹠点どおしの場合（北極と南極など）は無数にある．
- 球の半径が R のとき，2 点の球面距離は πR 以下である．ゆえに球面線分の長さは πR 以下である．
- 2 本の異なる球面直線は 2 点で交わる．2 本の球面直線は球面を 4 つの部分に分けるが，それらは長さ πR の 2 つの球面線分で囲まれた図形である．これを球面 2 角形と呼ぶ．
- 球面幾何では平行線という概念はない．

3 つの球面線分で囲まれた図形を球面 3 角形と呼ぶ．さて，2 辺とその挟む角による合同定理は成り立つか考えてみよう．まず，2 つの図形が合同であるとは合同変換で移りあうことを言う．球面での合同変換は，球の中心を通る直線を軸とする回転移動と 1 つの球面直線（大円）に関する線対称移動の繰り返しで実現される．次の証明は基本的にユークリッド原論の方法である．

定理 6. 2 つの球面 3 角形 △ABC と △DEF において，AB=DE，AC=DF，∠BAC= ∠EDF，が成り立つとき，B と C が対蹠点でなければ合同である．

B と C が対蹠点になるのは ∠BAC= π で，AB+AC= πR の場合に限られる．

証明. △ABC を固定し，△DEF を次のように移動する．

- 球面線分 AD の中点と球の中心を結ぶ直線を軸に 180 度回転すれば，D は A に重なる．
- A と球の中心を結ぶ直線を軸に適当に回転し，球面直線 DE を球面直線 AB に重ねる．AB=DE より E は B と重なるので，球面線分 DE は球面線分 AB と重なる．
- ∠BAC= ∠EDF より，必要なら AB を通る大円による裏返しで球面直線 DF を球面直線 AC に重ねることができる．AC=DF より F は C と重なるので球面線分 DF は球面線分 AC に重なる．
- B と C が対蹠点でなければ 2 点を結ぶ球面線分はただ 1 本なので，DF は BC に重なる．
- 合同変換の繰り返しで △DEF を △ABC に重ねることができたので合同である．

*16 地球上で 2 地点の距離を考えるときは球面距離であって 3 次元空間での距離ではない．距離は幾何の根本の概念なので，地球上の幾何を考える場合は球面幾何で考えなくてはならない．

B と C が対蹠点のときは，B を通る球面直線はすべて C を通る．ゆえに，球面線分 BA の延長上に C があるので，BA と CA は同じ大円の弧である．よって ∠BAC$=\pi$ かつ， AB+AC$=\pi R$ が成り立つ． □

さて，これと同じ考えでユークリッド幾何における合同定理も証明できる．これは問題にしておく．

問 8. ユークリッド幾何における二辺とその挟む角による合同定理を証明せよ．

n 個の線分で囲まれた図形を球面 n 角形と呼ぶ．なお，内角を考えるには内部をどちらかに指定する必要がある．球面 n 角形で n 個の辺の長さと n 個の角の大きさがすべて等しい図形を球面正 n 角形と呼ぶ．ただし，平行線がないので平行 4 辺形は定義できない．球面円については 1 点から等距離にある点の軌跡と考えれば良い．これについては球面を地球と考え，北極，南極，緯度，経度，緯線，経線などの用語を流用すると分かりやすい．なお，球面直線は球面円でもある．これはユークリッド幾何において直線を半径無限大の円とみなすことに対応する．

命題 9. 球面円は球面と平面との切り口である．半径 r の球面円周の長さは $2\pi R\sin(r/R)$ である．

証明. 球面円の中心を北極に取れば，半径 r の球面円周上の点の緯度は $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{r}{R}$ ラジアンになる．この点の地軸との距離は[*17]

$$R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{r}{R}\right)=R\sin\frac{r}{R}$$

なので球面円の 3 次元空間内での円としての半径が $R\sin(r/R)$ になる．これに 2π をかければ球面円周の長さになる． □

球面を北極方向から投影すれば，球面は円板になり赤道はその周囲の円周になる．中心が赤道にある円は赤道に直交する平面（北極方向を含む平面）と球面の切り口なので線分になる．このことを手掛かりに次の問題を考察せよ．

問 9. 赤道上に長さ r の球面線分 AB を与える．A を中心とする半径 r の球面円，および B を中心とする半径 r の球面円を，北極方向から赤道面に投影した図形を作図せよ．また二つの円が交わるための条件を与えよ．

この問題は長さ r の線分の両端を中心に半径 r の円を描くことを意味する．すなわち正三角形の作図である．この問題は正三角形の辺の長さがどれほど大きくなりえるか考えるための問題である．

2.3 球面多角形の面積

半径 R の球の表面積が $4\pi R^2$ であることは既知とする．[*18]．球面 2 角形は 2 つの長さ πR の球面線分で囲まれており，頂点（従って角）は 2 つである．図形の対称性から 2 つ

[*17] 空間図形を上，正面，横の 3 方向から投影した図形で理解することは，製図で良く行われる．空間図形をそれらしく描くのではなく，あえて一方からの投影で見ることにより，空間図形が理解しやすくなる．この主張については球面を赤道面の方向から投影して眺めてみると分かりやすい．

[*18] 理系学生は重積分の応用として扱うだろう．素朴にはカヴァリエリの原理を使った初等的な証明があるがここでは述べない．

の内角は等しく，内角 α の球面 2 角形は球面全体の $\alpha/(2\pi)$ の部分を占める．よってその面積は

$$4\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

である．

定理 7. 球面 3 角形の内角を α, β, γ とするとき，その面積は

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

である．球面 3 角形の内角の和は π（180 度）よりも大きい．

証明．球面 3 角形は 3 つの球面 2 角形の共通部分である．対蹠点（球面の反対側の点，例えば北極に対する南極）の作る合同な球面 3 角形についても考えれば，6 つの球面 2 角形が 2 つの球面 3 角形を 3 重に覆い，かつそれ以外の領域を 1 重に覆っている．ゆえに，6 つの球面 2 角形の面積の和から，球面の面積を引けば，求める球面 3 角形の面積の 4 倍になる．ゆえに面積は

$$\frac{1}{4}(4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4\pi R^2) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

□

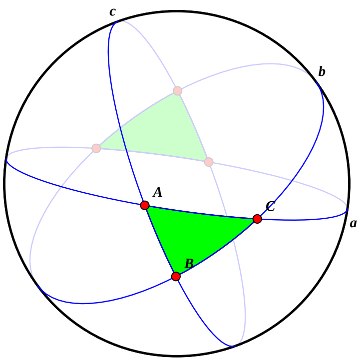


図 3　球面 3 角形

我々のふつう扱う 3 角形の面積は地球半径の 2 乗より圧倒的に小さいので内角の和はほぼ 180 度になる．しかし，非常に大きな 3 角形，例えば北極と赤道上の 2 点で 3 角形を作れば，2 つの角が 90 度になるので，内角の和は 180 度を超える．

球面 4 角形については，対角線で 2 つの球面 3 角形に分けることにより

$$(4\ \text{角形の内角の和} - 2\pi)R^2$$

を得る．

例 5. 球面に内接する立方体を考え，その辺を中心から球面に投影すれば，球面を 6 つの合同な球面正 4 角形で分割できる．一つの 4 角形の面積は球面の 1/6 なので，$4\pi R^2/6$ である．一方，各頂点には 3 つの球面 4 角形が集まっており，その角度はすべて等しいので $2\pi/3$ ラジアンである．よってこの 4 角形の内角の和は $8\pi/3$ でありこれを使っても面積が $(2\pi/3)R^2$ であることを確認できる．

球面 5 角形以上でも同じように考察できる．面積が角度だけで決まるところが興味深い．球面幾何では相似という概念は存在しない．さて，いくつか球面多角形についての問題を与えておこう．幾何の問題なので図形のイメージを思い浮かべることが大事だ．決して難しいわけではないが，空間図形なので苦手な人も多いのではないか．地球儀を眺めながら考えてみてほしい．

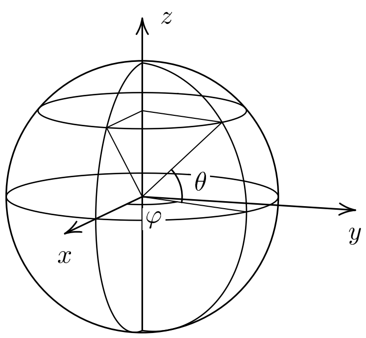
問 10. 3 つの角がすべて 90 度であるような球面 3 角形はどのような図形か考察せよ．またその面積を求めよ．

問 11. 球面 n 角形が凸であるとは，任意の 2 つの頂点を結ぶ球面線分が，球面 n 角形の周または内部に含まれることを言う．凸球面 n 角形について，その面積を内角の和を使って表せ[*19]．

問 12. 正 12 面体（12 個の正 5 角形の作る立体）を球面に内接させ，各辺を中心から球面上に投影する．そうすると球面が 12 個の球面 5 角形で分割される．この球面 5 角形の内角の大きさと面積を求めよ．

2.4　球面距離

球面上の 2 点の球面距離を求めてみよう．球面上の点の位置を表すには緯度 θ と経度 φ を用いる．また空間座標は，原点を球の中心に，赤道面（緯度 0 の点）を球面と xy 平面との切り口に，本初子午線（経度 0 の点）を xz 平面との切り口の $x \geqq 0$ の部分にとる．このとき緯度，経度と空間座標には次のような関係がある．



$$(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$$

図 4　緯度経度と直交座標

球面上の 2 点 A, B について，その球面距離 AB は大円の弧の長さなので AB$= R\angle$AOB である[*20]．この角度を求めるのに内積の空間座標による表示を利用する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2\cos\angle\mathrm{AOB} = R^2\cos\frac{\mathrm{AB}}{R}$$

さて 2 点 A と B の緯度・経度を添え字を使って (θ_1,φ_1), (θ_2,φ_2) と表せば

$$R^2\cos\frac{\mathrm{AB}}{R} = R^2\left(\cos\theta_1\cos\varphi_1\cos\theta_2\cos\varphi_2 + \cos\theta_1\sin\varphi_1\cos\theta_2\sin\varphi_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

---

*19 議論は平面において n 角形の内角の和が $(n-2)\pi$ であることの証明とほとんど同じなのでそれを思い出してみるとよい．

*20 ラジアンは弧の長さで角度の大きさを表している．これはラジアンの定義と言える．

この式から三角関数の加法定理を使って

$$\cos\frac{\mathrm{AB}}{R} = \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{1}$$

例 6. メートルという長さの単位は，18 世紀末にフランスにおいて本初子午線上の北極と赤道との距離が 10000km になるように定められた[*21]．これにより地球は半径 $20000/\pi$km の球面であることがわかる．[*22]この前提で南緯 45 度東経 20 度の点と北緯 30 度東経 140 度の点の距離 d を求めてみよう．

$$\begin{aligned}\cos\frac{d}{R} &= \cos(-45)\cos(30)\cos(120)+\sin(-45)\sin(30)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4} = -0.65974\end{aligned}$$

cos の値が -0.65974 になる角度を求めるためには，関数電卓などを利用する．その値は 2.2913 ラジアンであり，これに地球の半径 $20000/\pi$ をかけておよそ 14587km であることが分かる．

問 13. A を北緯 30 度東経 130 度の点，B を北緯 60 度東経 10 度の点とする．地球を半径 $R=20000/\pi$km の球体とするとき，AB の球面距離 d について $\cos\dfrac{d}{R}$ を求めよ．なお，関数電卓を持っている人は d の値を求めてみよ．

2.5 球面上の余弦定理

地球上の 2 点の位置関係を知るには，球面距離だけではなく方角も求める必要がある．そのために余弦定理を紹介する．余弦定理とは 3 角形において 2 つの辺の長さとその角の余弦（コサイン）によって対辺の長さを表す公式だが，3 角形の 3 つの辺の長さから角度を求める公式としても利用できる．またスケールを大きくして考えれば，観測点から 2 つの点までの距離と，2 点を見込む角によって離れた 2 地点の距離を求める式と言える．

定理 8 (球面余弦定理)**.** 球面 3 角形 ABC において，C から B までの球面距離を a，A までの球面距離を b，角 ACB を γ とする．このとき AB の球面距離 c は次の式で与えられる．

$$\cos\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma+\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}$$

証明. 球面上の点と北極との距離 r はその点の緯度 θ によって決まる．具体的には

$$\frac{\pi}{2}-\frac{r}{R}=\theta$$

という関係がある．そこで 3 角形を形を変えないまま，C が北極に，B が本初子午線上に，A が東半球に来るように移し，このときの B と A の緯度を θ_1, θ_2 とおく．B の経度は 0，A の経度は γ なので，(1) 式により

$$\begin{aligned}\cos\frac{c}{R} &= \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\gamma+\sin\theta_1\sin\theta_2\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{b}{R}\right)\cos\gamma+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{b}{R}\right)\end{aligned}$$

[*21] 今の定義は光の速さなどを利用する．ネットなどで調べてみるとよい．

[*22] 実際の地球は完全な球体ではなく，極半径 6356.75km，赤道半径 6378.14km の回転楕円体である．$20000/\pi \fallingdotseq 6366.20$km が良い近似であることは納得できるだろう．

を得る．あとは公式 $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$ を使えばよい． □

さて，球面余弦定理を使って，地球上の 2 点 A，B について A から B の方向を求めよう．そのためには北極を合わせて 3 角形 NAB を考え，∠NAB が B の方向が真北からどれだけずれているかを表していることを使えばよい．AB の長さの求め方はすでに学習したし，NA，NB の長さは A，B の緯度で決まる．3 つの辺の長さが分かるので余弦定理から逆に角の余弦を知ることができる．

$$\cos\frac{\mathrm{NB}}{R}=\sin\frac{\mathrm{NA}}{R}\sin\frac{\mathrm{AB}}{R}\cos\angle\mathrm{NAB}+\cos\frac{\mathrm{NA}}{R}\cos\frac{\mathrm{AB}}{R}$$

$\frac{\mathrm{NA}}{R}=\pi/2-\theta_1$，$\frac{\mathrm{NB}}{R}=\pi/2-\theta_2$ なので $\alpha=\cos\frac{\mathrm{AB}}{R}$ とおけば，この式は

$$\sin\theta_2=\cos\theta_1\sqrt{1-\alpha^2}\cos\angle\mathrm{NAB}+\sin\theta_1\alpha$$

と書き直せる．以上から球面上の 2 点の距離と方角について次のようにまとめられる．

命題 10. 半径 R の球面上の 2 点 A,B について，その緯度と経度を (θ_1,φ_1)，(θ_2,φ_2) とおく．A と B の距離 d は

$$\alpha=\cos\frac{d}{R}=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\sin\theta_1\sin\theta_2$$

から求められる．A からみた B の方角 $\theta=\angle\mathrm{NAB}$ は

$$\cos\theta=\frac{\sin\theta_2-\alpha\sin\theta_1}{\cos\theta_1\sqrt{1-\alpha^2}}$$

から求められる．$\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ が正なら西，負なら東である．

例 7 (熊本大学からエッフェル塔までの距離と方角)**.** 熊本大学とエッフェル塔の緯度・経度は

地点	緯度（北緯）	経度（東経）
(A) 熊本大学	32 度 48 分 46.181 秒	130 度 43 分 40.501 秒
(B) エッフェル塔	48 度 51 分 29.776 秒	2 度 17 分 40.243 秒

である．ゆえに球面距離を d とすれば

$$\begin{aligned}\alpha=\cos\frac{d\pi}{20000}&=\cos 32.812828\cos 48.858271\cos 128.433405\\&\quad+\sin 32.812828\sin 48.858271\fallingdotseq 0.064378065\end{aligned}$$

である．これから球面距離は

$$d\fallingdotseq\frac{20000}{\pi}\arccos(0.064378065)\fallingdotseq 9590$$

ここで arccos とは cos の逆関数であり，上の式では cos が 0.064378065 になるような角度の値をラジアンで与えている[*23]．

方角については $\alpha\fallingdotseq 0.064378065$ なので $\sqrt{1-\alpha^2}\fallingdotseq 0.9979256$ であり

$$\cos\angle\mathrm{NAB}=\frac{\sin 48.858271-0.064378065\sin 32.812828}{0.9979256\cos 32.812828}\fallingdotseq 0.8565056616$$

[*23] 理系の学生は $\arccos x$，$\cos^{-1}x$ などと表記してアークコサインと読むことを学習しているはずだ．

となるので，角度は ∠NAB =31.1063 度である．また $\varphi_2 - \varphi_1 = -128.43$ なので，エッフェル塔の方向は北から西にずれている．よって，熊本大学からエッフェル塔までの距離は約 9590km，方角は約 31 度西である．[*24].

問 14. A を北緯 30 度東経 130 度の点，B を北緯 60 度東経 10 度の点とする．地球を半径 $20000/\pi$km の球体とするとき，A から B を見た方角 ∠NAB の cos の値を求めよ．

問 15. (1) △ ABC において ∠C = 90°であるとき， 3 つの辺の長さ a, b, c の間の関係式を求めよ．
(2) 地球上において北極 N から本初子午線に沿って南に $r$km 進んだ点 A と東経 90 度の子午線に沿って南に $r$km 進んだ点 B を考える．r が 10000/3, 10000/2, 10000 の場合に AB の球面距離を求めよ．

問 16. 2 点の距離と方角は，それぞれの点の緯度と，2 点の経度の差で決まる．経度についてその差しか影響しない理由を考察せよ．

2.6 表計算ソフトによる計算の自動化

球面距離や方角を求める式を見て，なんと難しい式なんだろうと思う人もいるかもしれない．確かに，緯度と経度を具体的に与えて，手計算で求めようと思えば煩雑になり過ぎて手におえない．しかし，Excel などの表計算ソフト[*25]を利用すれば，そのような計算を瞬時に行ってくれる．自分で計算する必要などない．

1. Google Earth， Geocoding（`http://www.geocoding.jp/`） などで 2 点 (A,B) の緯度と経度を調べる．この際，緯度経度は度分秒で表されることが多いのでそれぞれの数値を対応するセルに入力する．
2. 1 度＝ 60 分，1 分＝ 60 秒により緯度経度を小数点付きの度に変換する．なお，Excel ではセルの式を = で始めるとその計算結果を表示する．
3. Excel に組み込まれた三角関数 COS と SIN は変数をラジアンでとるので，関数 RADIANS を利用して緯度経度をラジアンに変換する．
4. COS と SIN を利用して $\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2$ を計算する．この値を α とする．
5. 地球の半径を $20000/\pi$ [*26] とすれば 2 点間の球面距離は $\arccos(\alpha)$ に $20000/\pi$ をかけたものになる．Excel には arccos は ACOS という名前で組み込まれている．
6. 方角を求めるためには $\beta = \dfrac{\sin\theta_2 - \alpha \sin\theta_1}{\cos\theta_1 \sqrt{1-\alpha^2}}$ を計算する．角度は ACOS(β) を度に変換しなおせばよい（組み込み関数 DEGREES を利用する）．

このアイデアによるエクセルファイルを記述しておこう．なお，このファイルはホームページにも掲載しているので関心のある人はダウンロードして使ってみてほしい．

[*24] 地球は完全な球面ではないので，この方法で厳密な値が求められるわけではない．誤差はどの程度なのか考える必要があるが省略する．

[*25] 以下 Excel というが，持っていない人はフリーのオフィスソフトである Open Office（あるいは Libre Office）を使うと良い．そこに含まれる Calc でもまったく同様の計算ができる．

[*26] 地球の半径には，赤道半径:6378.137km，極半径:6356.752km である．ちなみに本初子午線上の赤道と北極の球面距離を 10000km とする導入時のメートル法の定義に従えば，半径は $20000/\pi = 6366.198$km である．

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		XX°（度）	mm'(分)	ss"(秒)	XX°（度）	mm'(分)	ss"(秒)
3	A地点緯度・経度	32	48	46.181	130	43	40.501
4	B地点緯度・経度	48	51	29.776	2	17	40.243
5		XX.ab°（度）	θラジアン		B列の入力式		C列の入力式
6	A地点緯度	32.81282806	0.572691886		=B3+C3/60+D3/3600		=RADIANS(B6)
7	A地点経度	130.7279169	2.281632575		=E3+F3/60+G3/3600		=RADIANS(B7)
8	B地点緯度	48.85827111	0.852737698		=B4+C4/60+D4/3600		=RADIANS(B8)
9	B地点経度	2.294511944	0.040046788		=E4+F4/60+G4/3600		=RADIANS(B9)
10	cos(d(A,B)/R)	0.064378067			=COS(C6)*COS(C8)*COS(C7-C9)+SIN(C6)*SIN(C8)		
11	d(A,B)	9589.871807	A,B２地点間の距離		=20000*ACOS(B10)/3.141593		
12	cos(∠NAB)	0.856321193			=(SIN(C8)-SIN(C6)*B10)/(COS(C6)*SQRT(1-(B10)^2))		
13	∠NAB	31.09399757	Aから見たときのBの方角		=DEGREES(ACOS(B12))		
14	方角(A→B)	西			=IF(SIN(C9-C7)>0,"東","西")		
15							
16		緯度・経度の入力において，南緯・西経の場合は各数値に－をつけること.					

図 5　距離方角を知るためのエクセルファイル

問 17. ホームページのエクセルファイルを利用して，地球上の様々な点の間の距離と方角を調べよ．

2.7　ユークリッド幾何から非ユークリッド幾何へ（発展話題）

今まで学んできた幾何学と，球面上の幾何学の類似点，相違点を学習してきた．球面上だから変わってくるのは当たり前であり，不思議に感じることはない．また地球上での大きな図形を考えるときには球面上の幾何学のほうが実態を表していることも理解できるだろう．幾何には様々なものがあるのだ．

しかし，紀元前 300 年頃にユークリッドがそれまでの数学の成果として「原論」をまとめて以来，ユークリッド幾何のみが唯一絶対の幾何とみなされてきた．ユークリッドの議論は少数の定義と公理（公準）から始めて論理的推論で新しい事実（定理）を獲得していくというものだ．定義は用語の意味を厳密に定めることであり，公理（公準）は証明するまでもない自明な事実[*27] だった．

さて，ユークリッド原論第 1 巻における公理を見てみよう．ユークリッドは公理を 2 種類に分け，次の 5 つを公準と呼んで幾何学を議論する上での前提とした．

公準 1： 任意の 1 点から他の 1 点に対して直線を引くこと
公準 2： 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること
公準 3： 任意の中心と半径で円を描くこと
公準 4： すべての直角は互いに等しいこと
公準 5： 直線が 2 直線と交わるとき、同じ側の内角の和[*28]が 2 直角より小さい場合、その 2 直線が限りなく延長されたとき、内角の和が 2 直角より小さい側で交わる。

次の 9 つが公理と呼ばれ，あらゆる学問に共通の真理とされた．

公理 1: 同じものと等しいものは互いに等しい
公理 2: 同じものに同じものを加えた場合、その合計は等しい
公理 3: 同じものから同じものを引いた場合、残りは等しい
公理 4: 不等なものに同じものを加えた場合、その合計は不等である

[*27] 数学で，論証がなくても自明の真理として承認され，他の命題の前提となる根本命題（大辞泉より）
[*28] 同側内角の和と呼ぶ．現在の学習指導要領では扱わなくなっている．

公理 5: 同じものの 2 倍は互いに等しい

公理 6: 同じものの半分は互いに等しい

公理 7: 互いに重なり合うものは、互いに等しい

公理 8: 全体は、部分より大きい

公理 9: 2 線分は面積を囲まない

ただし，公理 9 は「2 点を結ぶ線分はただ 1 本である」ということなので，公準に移したほうがすわりが良いと思う．ここではユークリッドに敬意を表して，そのまま記述しておく．ユークリッドはこれらの公理・公準から論証を積み重ね，第 1 巻で 48 個の命題を証明する．47 番目が 3 平方の定理，48 番目がその逆である．[*29]

さて，これらの公理公準を眺めてみると公準 5 に異質なものを感じる人は多いだろう．ユークリッド自身も公準 5 には不満を感じていただろう．第 1 巻の 48 個の命題の証明で 28 番目までは公準 5 は使っていない．初めて公準 5 を使うのは 29 番目の命題であり，公準 5 を使わずにできる限り多くのことを証明しようと考えたのは明らかだ．例えばユークリッドは 3 角形の 2 つの内角の和が 2 直角よりも小さくなることを公準 5 を使わずに証明した．これから 2 本の直線に 1 本の直線が交わっている場合に同側内角の和が 2 直角以上であれば，その側では 2 直線は交わらないことが示される．しかし，2 直角以下の場合に交わることがどうしても証明できなかった．そこで初めて公準 5 を使うのである．すなわち公準 5 は平行になるのは同側内角の和が 2 直角の場合に限ることを主張する．すなわち，1 つの直線とその上にない点 A が与えられたとき，A を通って与えられた直線に平行な直線が 1 本しかないことになる．そこで，公準 5 を平行線の公理と呼ぶ．

平行線の公理を他の公理・公準から証明しようとする試みは 19 世紀まで続けられた．そして 1830 年ごろにロバチェフスキー[*30]とボヤイ[*31]が，非ユークリッド幾何を発見したことによって最終的に解決した．非ユークリッド幾何においては，公準 5 以外のすべてのユークリッドの仮定した公理公準を満たしつつ，公準 5 は成立しない．これによって公準 5 を他の公理公準から証明することはできないということが証明された．

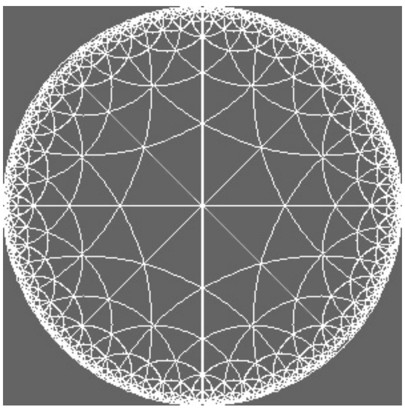


図 6　非ユークリッド幾何のタイル張り

[*29] これ以外にもユークリッドが暗黙の裡に使ってしまった前提がある．代表的なものは図形の移動だ．2 辺とその挟む角による合同定理の証明でそれを仮定している．ユークリッド幾何を現代的な意味で完全な体系にしたのはヒルベルトであり，20 世紀初頭のことである．ただし，問題点があるからと言ってユークリッド原論の歴史的価値は失われない．

[*30] Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792–1856, ロシアの数学者

[*31] Bolyai János, 1802–1860, ハンガリーの数学者

非ユークリッド幾何は平面や球面と同様に曲がり具合の一様な世界での幾何である．3次元空間の中の具体的な曲面として構成することはできないが，その世界の地図を作ることはできる．この図で描かれている線は，全て非ユークリッド幾何の直線である．非ユークリッド幾何において平行線の公理が成り立たないことが簡単に見て取れる．もう一つこの絵では非ユークリッド幾何の世界が角度 45 度，60 度，60 度の合同な 3 角形で埋め尽くされている．3 角形の内角の和が 180 度より小さいことに注意してほしい．非ユークリッド幾何はある意味で球面幾何と正反対の性質を持っている．

この絵と次のエッシャー[*32]の有名な版画と見比べると興味深い．同じ形同じ大きさの

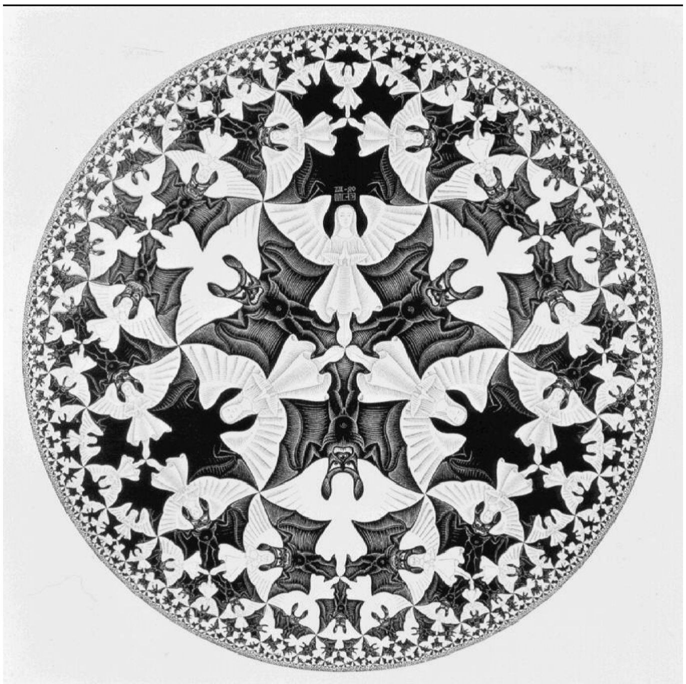


図 7　円の極限：エッシャー

天使（悪魔）によって世界が埋め尽くされていることが分かるだろう．現在では公準 5 は図形を含む世界が平坦であることを述べているに過ぎないことが分かっている．世界が平坦か否かはアプリオリに決められるものではなく，議論の前提（公理）として仮定するしかない．

非ユークリッド幾何の発見から 30 年後，リーマン[*33]は様々に曲がった空間の幾何を提唱した．そしてそれはアインシュタイン[*34] によって一般相対性理論の記述に利用された．一般相対性理論では空間は物質によって様々に曲がっていると考えられており，リーマンの考えが宇宙を理解するための基本概念になった．物理と数学が高度なレベルで交流しながら発展していく良い実例と言えよう．このことに関連して次のロバチェフスキーの言葉を引用しておこう．

> There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.

[*32] Maurits Cornelis Escher, 1898–1972, オランダの版画家
[*33] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866, ドイツの数学者
[*34] Albert Einstein, 1879–1955

3　微分-変化する量へのアプローチ

時間的に変化する量の考察は，現代科学の様々な場面で重要な役割を果たす．気候，経済，生態，様々なものが時間的に変化する量で記述される．これを数学的に扱う最も基本的な手法が微分である．これは 17 世紀にニュートン*35とライプニッツ*36によって作られたものだが，科学技術に重要な進展をもたらし，産業革命の原動力の一つとなった．現代社会において数学が役に立つ最も重要な場面である．

なお，この章の内容には数学 III の範囲の微分積分が使われているが，高校で数学 III を学習していない学生は計算結果はそのまま受け止めてほしい．自分で計算できるようになることは求めていない．むしろ微分積分の考え方と，それを時間的に変化する量の観察にどのように役立てるのかを学んでほしい．

3.1　変化率と微分

時刻によって変化する量を関数を使って $f(t)$ と表す．時刻 t での量が $f(t)$ であることを意味している．この量の単位時間あたりの変化を捉えるために変化量 $f(a+h)-f(a)$ を変化時間 h で割る．そしてこの h を小さくしていった時の極限値を微分と呼ぶ．これは時刻 a における単位時間当たりの変化量を表している．*37

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

これは $f(t)$ を 1 次式で近似することとも理解できる．

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

t が h 増えたとき，$f(t)$ は およそ $f'(a)h$ だけ増えることになる．ここで極限については感覚的に捉えておけば十分である．数学でこれを厳密に扱えるようになったのは 19 世紀になってからのことだ．

微分の最も基本的な例は速度であろう．時刻 t での位置を $(x(t),y(t))$ と表すとき速度ベクトルは

$$(x'(t),y'(t))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((x(t+h),y(t+h))-(x(t),y(t))\right)$$

で与えられる．速度は大きさだけではなく方向も合わせて考える必要があり，ベクトルとして理解すべきものだ．

3.2　基本的な関数の微分

微分の有用性はその計算の自由度にある．微分計算の手法を微分法と呼ぶがこの講義では深入りしない．理系基礎科目の微分積分，教養科目の文系のための数学入門 A で扱

*35 Isaac Newton, 1642–1727, イングランド

*36 Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, ドイツ

*37 例えば時速 40km とは 1 時間経てば 40km 進むことを意味している．0.1 時間 (6 分) なら 4km 進むのであり，速度に時間をかければ移動距離が出てくる．ゆえに移動距離を時間で割れば速度が得られる．なお，単位時間の取り方で単位時間当たりの変化量は変わる．時速 36km は分速 600m であり，秒速 10m である．人間の走る速さの限界は時速 40km 程度であろう．マラソンは時速 20km 程度で 2 時間走る．

う．ただし，まったく触れないわけにもいかないのでもっとも基本的な事項のみまとめておく．

まず多項式の微分は周知としよう．以下は数学 III を学習した人には周知であるが，それ以外の人を考慮して簡単に解説する．まず 3 角関数について

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t$$

となる．これは単位円を反時計回りに等速度 1 で動く運動がラジアンを使って $(\cos t, \sin t)$ で表されることと，その速度ベクトルを考えれば分かりやすい．より数学的な証明には加法定理と導関数の定義を利用する．

次に指数関数 a^t について，指数法則を使えば

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{t+h}-a^t}{h} = \lim_{h\to 0} a^t \frac{a^h-1}{h} = a^t \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$$

となる．そこで $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$ となる a を e とおけば

$$(e^t)' = e^t$$

が成り立つ．$e^h \fallingdotseq 1+h$ なので $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} \fallingdotseq 2.71828$ である．

対数関数 $\log_a t$ については，対数法則により

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\log_a(t+h) - \log_a t\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{t} \log_a \left(1+\frac{h}{t}\right)^{t/h} = \frac{1}{t}\log_a e$$

となる．特に対数の底を e にした場合（このとき自然対数とよんで底は省略する．）は

$$(\log t)' = \frac{1}{t}$$

である．

さて，微分を扱う際に合成関数の微分法則は避けて通れない．高校では数学 III で扱うが，この講義では次の形のみ紹介しておく．知らない人は結果だけ覚えておいて欲しい．

$$(f(ct))' = cf'(ct), \qquad (\log f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

3.3 放射性元素の崩壊と微分方程式

時刻によって変化する量で最も基本的なものは，単位時間あたりの変化量が一定なものである．すなわち $x'(t) = c$ を満たす場合である．これは一次関数 $x(t) = ct + D$ しかない．例えば身長が 1 ヶ月で 1cm 伸びるなら 10 ヶ月では 10cm 伸びるだろうという考えに相当する．次に重要なのが単位時間の変化率が一定なものである．1 ヶ月で 1 割増える (1.1 倍になる) のなら 10 ヶ月では $(1.1)^{10}$ 倍になるだろうという考えである．これをもう少し厳密に説明しよう．

単位時間あたりの変化率とは，単位時間当たりの変化量の全体量での割合である．すなわち x'/x が単位時間当たり変化率である．よって変化率が c で一定とすれば

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{hx(t)} \fallingdotseq c$$

が成り立つ．極限を考えれば $x'(t) = cx(t)$ と記述できる．この条件を満たす $x(t)$ がどのような関数かを考える．$x(t)$ は未知の関数であり，$x(t)$ と $x'(t)$ の式によって $x(t)$ の条件が記述されている．これを微分方程式と呼び，この式を満たす関数を微分方程式の解と呼ぶ．定数 D について $x(t) = De^{ct}$ はこの微分方程式の解[*38]であり，これ以外に解が存在しないことが知られている．表にまとめておく．

一定なもの	微分方程式	解	離散化	金利
変化量 x'	$x'(t) = c$	$x = ct + D$ 一次関数	$cn + D$ 等差数列	単利
変化率 x'/x	$x'(t) = cx(t)$	$x = De^{ct}$ 指数関数	$D(e^c)^n$ 等比数列	複利

問 18. 次の現象はどのような関数で記述されるか．

(1) 身長が毎月 5mm 伸びる．

(2) 出生率と死亡率がそれぞれ一定な町の人口（転入・転出はないとする）

問 19. 次の用語の中で，微分によって記述できるものは何か．

人口増加率，工場の稼働率，経済成長率，食料自給率．

放射性元素の崩壊について，単位時間に崩壊する原子の割合は原子の量によらず一定であることが知られている．崩壊する割合を α とすれば時刻 t における原子の個数 $x(t)$ は $x'(t) = -\alpha x(t)$ なる微分方程式を満たす．ゆえに

$$x(t) = De^{-\alpha t}$$

である．これから，いわゆる放射性元素の半減期を理解できる．$t_1 < t_2$ とし $x(t_2) = x(t_1)/2$ が成り立ったとする．

$$De^{-\alpha t_2} = \frac{1}{2}De^{-\alpha t_1}$$

より

$$e^{\alpha(t_2 - t_1)} = 2, \qquad t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha}\log 2 = T$$

すなわち $x(t)$ が半分になるのにかかる時間は $T = \log 2/\alpha$ で一定である．これを半減期と呼ぶ．

問 20. 指数関数に従う量 $x(t) = a^t$ について，$x(t)$ の変化率が一定であることを示せ．

問 21. 核分裂によって生成する放射性ヨウ素 $^{131}\mathrm{I}$ の半減期は 8.1 日である．福島原発事故直後に大きな話題になった放射性ヨウ素の問題が，最近聞かなくなった理由を述べよ．

問 22. 人口増加率が年 2 ％で一定な時，人口が 2 倍になるのに要する年数を調べよ．ただし $\log_{10} 1.02 = 0.0086$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とせよ．

3.4 簡単な生態系モデル

ある生物の時刻 t における個体数を $x(t)$ とおく．ここで単位時間あたりの増加率（減少率）が一定であると仮定すれば放射性元素の崩壊の時と同様に

$$x'(t) = \alpha x(t)$$

[*38] このように微分方程式を解く際に文字 D が現れる．これは本質的には不定積分の積分定数である．不定積分は微分の逆演算であり $x'(t) = f(t)$ を解くことと $\int f(t)dt$ を求めることは同じである．

なる微分方程式に従い，$x(t)$ は指数関数（$x(n)$ は等比級数）になる．経済学者マルサス[*39]はこれを「人口は等比級数的に増加する」と表現した．しかし，現実には個体数の増加によって過密の問題が生じ，増加率は減少するであろう．それを考慮して考えられた方程式（ロジスティック方程式）が

$$x'(t) = \alpha(\beta - x(t))x(t)$$

である．時刻 t での増加率は $\alpha(\beta - x)$ であり，x が β に近づくにつれて増加率は 0 に近づく．この微分方程式を解くには数学 III レベルの微分積分の知識が必要になるのでここでは結果のみを与えておく．

$$x(t) = \frac{\beta C}{C + e^{-\alpha\beta t}}$$

なお，微分積分の計算法を知らなくても数式処理ソフトを使えば解はコンピューターが求めてくれる．またグラフも書いてくれる．難しいと思う必要はない．この曲線はロジス

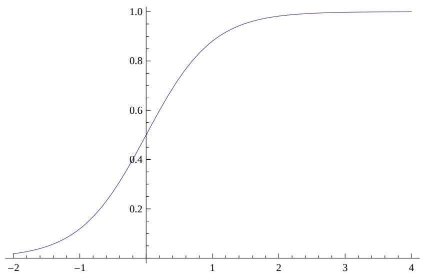


図 8　ロジスティック曲線 $x(t) = \frac{1}{1+e^{-2t}}$

ティック曲線と呼ばれ，シャーレ内での細菌の増殖などをよく近似することが知られている．

次に 2 種類の生物で構成される生態系を考えよう．生物 X の時刻 t における個体数を $x(t)$，生物 Y の時刻 t における個体数を $y(t)$ とする．X が Y を捕食するとき，X の増加率は $y(t)$ の増大によって増えるだろう．また Y の増加率は $x(t)$ の増加によって減少するだろう．このことから

$$x'(t) = (-A + By)x, \qquad y'(t) = (C - Dx)y$$

なる微分方程式系（被食者・捕食者モデル：ロトカ[*40]・ヴォルテラ[*41] の方程式）を考察する．ここで係数 A, B, C, D はすべて正数である．この微分方程式の解を具体的な関数で与えることはできないが，解の振る舞いは数式処理ソフトを使えば視覚的に捉えられる．

この図を見ると解の曲線はすべて閉じた軌道になっている．[*42]またこの系ではそれぞれの種が時間をずらしながら増加と減少を繰り返すことが分かる．

[*39] Thomas Robert Malthus, 1766–1834, イギリスの経済学者
[*40] Alfred J. Lotka, 1880–1949, アメリカの統計学者
[*41] Vito Volterra, 1860–1940, イタリアの数学者
[*42] これが一般に成り立つことは（いささか天下り的だが）次の式から証明される（理系学生向け）．

$$\begin{aligned}&(C\log x + A\log y - Dx - By)' = C\frac{x'}{x} + A\frac{y'}{y} - Dx' - By'\\&= C(-A + By) + A(C - Dx) - D(-A + By)x - B(C - Dx)y = 0\end{aligned}$$

解の曲線の上では $C\log x + A\log y - Dx - By$ は一定であり，解は曲面 $z = C\log x + A\log y - Dx - By$ の等高線をたどる．

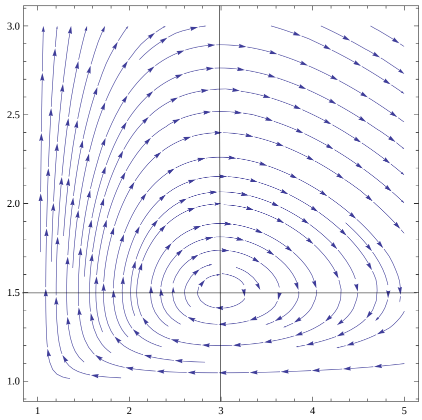


図 9　被食者・捕食者モデル $x'(t) = (-3+2y)x,\ y'(t) = (3-x)y$

次に X と Y が同じ食物を求めて争う場合を考えよう．このとき自分の個体数だけでなく相手の個体数の増加も，自らの増加率を減少させる．このことから

$$x'(t) = (A - Bx - Cy)x \qquad y'(t) = (D - Ex - Fy)y$$

なる微分方程式系（生存競争モデル）を考察する．係数は前の例と同様にすべて正とする．これについて 2 つの計算結果を紹介しよう．まず，図 10 では，ほとんどの解の曲線ががが x 軸上の点または y 軸上の点に収斂する．要するに一つの種は絶滅し，一方の種のみが残る．どちらが生き残るかは初期状態に依存する．図 11 ではすべての解がある一点に収れんしている．二つの種が共存する形で安定した状態になる．

このように時間的に変化する量の変化の仕方を微分方程式によって捉えることにより，その量の時間的変化を知ることができる．講義で扱った例はあまりに単純化しすぎており現実を反映したものとはいえないが，それでもなにがしかの本質を表している．コンピューターの発達によって解析できる対象は益々広がっており，その重要性も増している．

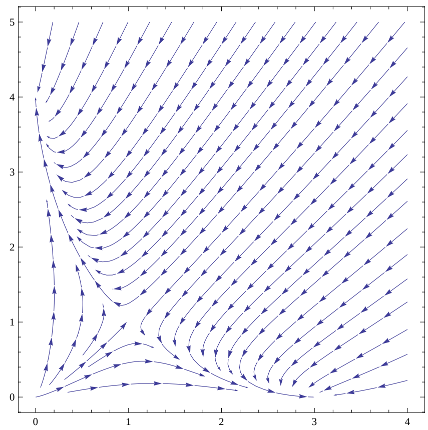


図 10　生存競争モデル $x'(t) = (3-x-2y)x,\ y'(t) = (4-3x-y)y$

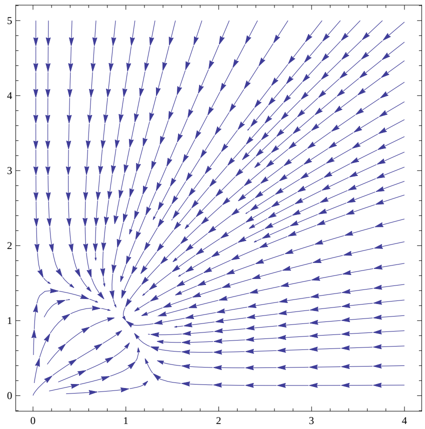


図 11　生存競争モデル $x'(t)=(4-3x-y)x,\ y'(t)=(3-x-2y)y$

3.5　ケプラーの法則とニュートンの万有引力の法則（発展話題）

17 世紀前半，ケプラー*43 はティコ・ブラーエ*44 の観測記録をもとに惑星の運行について次の三つの法則を発見した．

第 1 法則　惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く．

第 2 法則　惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に通る面積は一定である（面積速度一定の法則）．

第 3 法則　惑星の公転周期の 2 乗は軌道の長半径（長径の半分で中心からの距離の最大をいう）の 3 乗に比例する．

17 世紀後半になって，ニュートンはケプラーの法則を万有引力の法則から運動方程式（微分方程式）を解くことによって導き出した．かなり高度な内容だが微分積分の登場という科学史上の最大の事件と関わるので教養教育の立場からも重要な話題と思う．

まず，万有引力の法則は次のように述べられる．

ニュートンの万有引力の法則

2 つの物体は $\dfrac{GMm}{r^2}$ の大きさの力で引き合う．ここで M, m はそれぞれの物体の質量，r は 2 つの物体の距離（球体の場合は中心どおしの距離）である．G は物体によらない定数であり，万有引力定数と呼ぶ．

次にニュートンの運動方程式であるが「質量×加速度＝力」と表現される．ここで加速度は速度の変化率なので

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=F$$

と表現される．加速度と力はベクトル量（大きさと方向を持つ量）なので，この方程式はベクトルについての方程式になる．ここまでがニュートンの議論の前提 (仮説) である．

本論に入る前に地球上での自由落下について考察しよう．$x(t)$ を地表面からの高さとする．このとき $x'(t)$ は落下速度，$x''(t)$ は落下の加速度を表す．引力は下向きに働くの

*43 Johannes Kepler, 1571–1630, ドイツの天文学者

*44 Tycho Brahe, 1546–1601, デンマークの天文学者

で運動方程式は

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{r^2}, \qquad M: \text{地球の質量},\ m: \text{物体の質量}$$

r は中心との距離なので地球の半径であり，一定と考えて差し支えない．ゆえに $x''(t) = -GM/r^2$ は物体によらず一定であり，重力加速度と呼ぶ．落下速度は物体の質量によらないというガリレオ[*45]の発見が確認できる[*46]．

では，いよいよ本論に入ろう．太陽を原点に，惑星の軌道が xy 平面上にあるように座標を取る[*47]．さらに極座標を利用して時刻 t における惑星の位置を $(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$ と表す．惑星の加速度ベクトルは

$$\left(r'' - r(\theta')^2\right)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + (2r'\theta' + r\theta'')\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

となる．惑星は太陽（原点）から引力を受けるので，力は $(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向に向いている．よって運動方程式は

$$m\left(r'' - r(\theta')^2\right)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + m(2r'\theta' + r\theta'')\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = -\frac{GMm}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

と記述できる．ここで M は太陽の質量，m は惑星の質量，r は時間とともに変わる太陽と惑星との距離である，これから

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{GM}{r^2}, \qquad 2r'\theta' + r\theta'' = 0$$

という二つの微分方程式を得る．第 2 式から

$$(r^2\theta')' = 2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0$$

であり，$r^2\theta'$ は一定であることが分かる．以下この値を c とおく．

さて，面積速度について考える．時刻が t から $t+h$ に変化する間に，方向は $\theta(t)$ から $\theta(t+h)$ に変わる．短い時間であれば，太陽との距離はほぼ一定と考えていいので，その間に惑星と太陽を結ぶ線分が通る図形は，頂角 $\theta(t+h) - \theta(t)$ で半径 $r(t)$ の扇形とみなせる．ゆえにその面積は

$$\frac{1}{2}(\theta(t+h) - \theta(t))r^2(t)$$

である．これを h で割って $h \to 0$ の極限を取れば単位時間あたりの描く面積（面積速度）が求められる．すなわち面積速度は $\dfrac{1}{2}r^2\theta'$ であり，これは $c/2$ で一定なので第 2 法則が導かれる．

次に焦点を原点にとった楕円の方程式を与えよう．この場合極座標を使うと次のようなきれいな表示を得る．

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

e は楕円の離心率であり，l は近日点までの距離と遠日点までの距離の調和平均である．なお，この式は $e = 1$ のときは放物線の方程式，$e > 1$ のときは双曲線の方程式を与える．

[*45] Galileo Galilei, 1564–1642, イタリアの物理学者

[*46] 実際には空気抵抗があるので落下速度は変わる．土砂降りの日の大きい雨粒のほうが，霧雨の日の小さい雨粒より速く落ちる．

[*47] 地球と月でも良い．また宇宙の他の惑星系でも良い．

さて，この楕円の方程式とニュートンの運動方程式

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

を見比べて $p = 1/r$ とおく．

$$\frac{dp}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2\theta'}\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}, \qquad r^2\theta' = c$$

$$\frac{d^2p}{d\theta^2} = -\frac{1}{c}\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{c}\left(r(\theta')^2 - \frac{GM}{r^2}\right)\frac{1}{\theta'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{r}r^2\theta' - \frac{GM}{r^2\theta'}\right) = -p + \frac{GM}{c^2}$$

この方程式の解は（必要なら座標軸を回転することによって）

$$p = \frac{1}{r} = a\cos\theta + \frac{GM}{c^2}, \qquad r = \frac{l}{1+e\cos\theta},\ e = \frac{ac^2}{GM},\ l = \frac{c^2}{GM}$$

これは離心率 e の原点を焦点とする楕円の方程式であり第 1 法則を意味する．なお，離心率が 1 より大きい時は双曲線である．惑星は太陽の周りを周回しているので楕円にならざるをえないが，彗星の中には離心率が 1 より大きい軌道をとるものがある．この場合，一度太陽に近づくだけで二度と戻ってこない．

最後に第 3 法則を示そう．楕円の極座標表示 $r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$ は

$$\frac{\left(x + \frac{le}{1-e^2}\right)^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1-e^2}} = 1$$

と表せるので，長半径は $\dfrac{l}{1-e^2}$ ，面積は $\pi\dfrac{l^2}{(1-e^2)^{3/2}}$ である．一方面積速度が一定なので，面積速度 $c/2$ に周期 T をかければ 1 周期で描く面積（すなわち軌道の描く楕円の面積）が求められる．

$$\frac{c}{2}T = \pi\frac{l^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

$c = \sqrt{GMl}$ を代入して整理すれば

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GMl}}\frac{l^2}{(1-e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^{3/2}$$

長半径の 3/2 乗と公転周期 T が比例することが分かる．

さて，太陽系の 8 つの惑星と冥王星についてケプラーの第 3 法則を確認してみよう．距離の単位は AU（天文単位，地球軌道の長半径），周期の単位は年（地球の公転周期）とする．

	近日点距離	遠日点距離	公転周期	軌道長半径	第 3 法則
式	a	b	t	$l = (a+b)/2$	l^3/t^2
水星	0.3075	0.4667	0.2408467	0.3871	0.999973
金星	0.718	0.728	0.615207	0.723	0.998556
地球	0.983	1.017	1	1	1
火星	1.381	1.666	1.880866	1.5235	0.999566
木星	4.952	5.455	11.86155	5.2035	1.001391
土星	9.021	10.054	29.53216	9.5375	0.994748
天王星	18.286	20.096	84.25301	19.191	0.995685
海王星	29.811	30.327	165.2269	30.069	0.995853
冥王星	29.574	49.316	247.74	39.445	0.999962

正確に 1 にはなっていないが，第 3 法則を数学的に証明できたのは 2 つしか天体がない場合（2 体問題）だからだ．現実には多くの天体が影響を及ぼしあうので，その分の誤差が現れる．とはいってもほとんど 1 になっているのも事実である．これは 1 つの惑星に及ぼされる引力は太陽からの引力が決定的に大きいことを表している．

問 23. ハレー彗星の公転周期は約 76 年である．また，ハレー彗星が最も太陽に近くなるのは，0.59AU である．ハレー彗星が太陽から最も離れるとき，その距離は何 AU か求めよ．

問 24. 月の公転周期は 27 日と 7 時間 43.1 分である．静止衛星は 23 時間 56 分[*48] で地球を 1 周する．静止衛星までの距離と月までの距離の比を求めよ．ただし，距離は地球の中心から測るものとする．また ISS（国際宇宙ステーション）は約 90 分で地球を 1 周する．地球の半径を $20000/\pi$km，ISS の高度（地表からの高さ）を約 400km として静止衛星の高度を求めよ．

[*48] 地球の自転周期である．何故 24 時間ではないのか，考えてみよ．