微分積分 I 講義メモ (4 月 9 日)

今日の講義では 1.1 数列と関数の極限および 1.2 連続関数を扱った．いずれも高校で学習しているはずだが，曖昧になっている人は再確認しておいてほしい．今日解説した事項を箇条書きする．

本日の講義の要点

1. 定理 1.2 について (定理 1.6 についても同様)

   高校でも学習している基本的事実だ．ただし (1) で仮定を $a_n < b_n$ の形に変えても $\alpha = \beta$ となる場合もあるので $\alpha < \beta$ としてはいけない．例えば $a_n = 0,\ b_n = 1/n$ のとき $a_n < b_n$ だが $\alpha = \beta = 0$ である．

2. 例題 1.1 について

   一般項を求めなくても極限が厳密に求められる場合がある．テキストと同じ証明を与えたので特に記しておくべき事項はない．

3. 例題 1.2 について

   a_n, a_{n+1} を 2 項定理で展開したときの第 k 項どおしを比較する．

$$
{}_nC_k \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
$$

$$
{}_{n+1}C_k \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k+1)}{k!}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)
$$

   右辺で比較すれば a_n よりも a_{n+1} のほうが大きいのは明らかだろう．これによって単調増加であることが示される．

   有界であることは $k \geqq 1$ について $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geqq 2^{k-1}$ であることを利用する．後は等比級数の和により $a_n < 3$ を得る．テキストに詳しく証明がついているので読んでおくこと．

4. 例題 1.3 について

   $a > 1$ の場合のみ示した．他の場合はテキストに任せる．証明は $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ とおいてから 2 項定理を利用する．証明の筋道を追うのはそう難しくないだろう．ただし，何故こう置くのか自分ではとても思いつかないというのが実感だろう．ただし，これは別に気にする必要のないことだ．こういう証明上のテクニックは，覚えるものではなく何度も使っているうちに感覚として身につくものだ．くれぐれもこのテクニックを覚えようなどとしないように．

5. 関数の極限の定義について

   極限の定義で注意すべきは $x \to a$ とは $x \neq a$ を前提にしているということだ．ただ x を a に近づけるというのは不正確で x を a 以外の点から x に近づけると理解しておかなければならない．だから講義では気が付かなかったが定理 1.7 は誤りだ．「a に収束するどんな数列 $\{a_n\}$ 」ではなく，「a に収束し $a_n \neq a$ を満たすどんな数列 $\{a_n\}$」としなくてはならない．

6. 連続関数の和・差・積・商・合成の連続性（定理 1.8 と定理 1.9）について

   関数 $f(x)$ の a での連続性を考察するには $f(a)$ が定義されていなければならない．定理 1.8(2) で $g(a) \neq 0$ という条件は $x = a$ において $f(x)/g(x)$ が定義されるための条件である．(2) は定義される範囲で連続だという意味だ．

7. 例題 1.4 と例題 1.5

   例題 1.5 はどちらも $\lim_{x \to o} f(x) = f(0) = 0$ が成り立つか調べることが課題である．ここで極限の定義から $x \neq 0$ なので，$f(x) = \sin(1/x),\ f(x) = x\sin(1/x)$ と表して良いことになる．すると (1) は例題 1.4 と同じになり極限は存在しないので不連続である．(2) は sin の取る値は -1 から 1 までなので，

$-|x| \leqq x\sin(1/x) \leqq |x|$ が成り立つ．これから 0 に収束することが導かれるので連続である．

本日のレポート課題とヒント

演習問題の 1.1.1，1.1.3，1.2.1，1.2.4 を課題とする．提出締め切りは 4 月 14 日 (火) の昼休み，提出場所は教養科目等事務室（全学教育棟 A 棟 4 階）の前にレポート提出箱があるのでそこに入れること．授業科目名と担当教員名を確認して入れ間違えが無いようにしてほしい．

締め切りに遅れた場合は研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）まで持ってきてほしい．締め切りにはたいした意味があるわけではないので受け取る．ただし，添削の都合上，あまり授業の直前に持ってこられてもたいおうできない．やはり締め切りは守ってほしい．

ヒントを与えておこう．

- 1.1.1 は分母が 1 の分数式とみて，分子分母に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけてみると良い．高校数学でも扱う分子の有理化のテクニックと同じだ．
- 1.1.3 は $\sqrt[n]{n} > 1$ は明らかなので $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ とおく．例題 1.3 の議論を少し修正して考えれば良い．
- 1.2.1 は (1) は $x = 1$ で連続になるように a を定めよということだ．右極限と左極限を調べそれが一致するための a の条件を求めること．
- 1.2.4 は $f(x) - x$ という関数に中間値の定理を使う．この関数が $[a, b]$ の両端で符号が変わるならば，中間の値 0 をとる点の存在が分かる．$f(c) - c = 0$ より不動点の条件 $f(c) = c$ を満たす．

来週の事前学習

1.3 節の初等関数を扱う．微分の定義は高校で学習済みなので p.22 の微分まで進むかもしれない．微分（高校での数学 III 程度）の基本的計算法が曖昧という人は復習しておくこと．

微分積分 I 講義メモ (4 月 16 日)

前回のレポート課題

少し（かなり）難しい問題があったので 4 月 9 日の講義メモにヒントを記述しておいた．ヒントを使わずに解答した人もいるが，講義メモは見ているのだろうか．講義メモは復習（家庭学習）の題材として提供しているものなので，きちんと読んでからレポートに取り組むようにしてほしい．レポート課題の解答例とコメントをまとめておく．

1.1.1　分子分母に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{1}{2}$$

【コメント】

- 高校数学の知識で十分できる問題だ．分子分母に $\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\sqrt{n+2}$ をかけた人もいるが解答例のほうが分かりやすい．
- きちんと計算できているのに極限を 1 にしてしまう人が散見する．ケアレスミスだ．

1.1.3　$\sqrt[n]{n}=1+h_n$ とおくと $\sqrt[n]{n}\geqq 1$ より $h_n\geqq 0$ である．よって $n\geqq 2$ について

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2$$

が成り立つ．これより $0\leqq h_n<\sqrt{2/(n-1)}$ が得られるので，$n\to\infty$ のとき $h_n\to 0$ となる．よって $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ である．

【コメント】

- 例題 1.3 とほぼ同じ方法だが，$n>nh_n$ としてしまうと失敗する．2 項定理を使った後その第 3 項を利用するのがポイントだ．
- この問題をヒントの方法以外で正解に至った人が一人だけいた．高校までの知識でも解ける問題だ．しかし，ノーヒントで解くのはやはり難しい．講義メモにヒントを書いているのでそれを確認してほしい．

1.2.1　(1) は $x=1$ で連続になるように a を定めれば良いので

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}x^2=1,\qquad \lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1^0}ax-3=a-3$$

の値が等しければよい．$1=a-3$ より $a=4$ だ．(2) も同様にできるので省略する．

【コメント】

- この問題は易しいしよくできていた．一人だけ右微分係数と左微分係数で考えた人がいたが，つまらないミスだ．

1.2.4　$g(x)=f(x)-x$ とおくと $a\leqq f(x)\leqq b$ より $g(a)=f(a)-a\geqq 0$ および $g(b)=f(b)-b\leqq 0$ を得る．ここで $g(a)=0$ の時は $f(a)-a=0$ より a が不動点になっている．同様に $g(b)=0$ のときは b が f の不動点になる．$g(a)>0$ かつ $g(b)<0$ のときは中間値の定理により $g(c)=0$ となる c（$a<c<b$）が存在する．この c について $g(c)=f(c)-c=0$ なので f の不動点になる．

【コメント】

- 証明問題なので難しかっただろう．なお，中間値の定理は $f(a)<k<f(b)$ を満たす k について記述している（定理 1.10）ので，$g(a)\leqq 0\leqq g(b)$ の条件のもとに $g(c)=0$ となる c があるという形で

は使えない．解答例では $g(a) = 0$ の場合と $g(b) = 0$ の場合を別に扱って中間値の定理に帰着している．ただし，除外された場合はむしろ簡単なので（$c = a$ または $c = b$ とおけばよい）特に言及していなくても正解にした．

- $f(x) = x$ の解とは $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ の交点の x 座標だ．条件からグラフは正方形 $[a, b] \times [a, b]$ の内部にあり，左辺から右辺への連続曲線になる．これが対角線 $y = x$ と交わるということだ．

本日の講義の要点

1. 双曲線関数
　この授業での新しい関数としてまず双曲線関数を導入した．p.13 に読み方も含めて定義が記述してあるので確認しておくこと．なおこの関数は三角関数と非常によく似た性質を持つ．p.14 の公式，p.22 の導関数も三角関数の対応する性質と比べて理解しておくと良い．
2. 逆三角関数
定義は p.15 にグラフは図 1.7 に記述してある．定義を式としてだけではなく
　$\sin^{-1} x$ とはサインをとると x になる値のうち $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にあるもの
と言葉で覚えておくように．これを理解しておけば例題 1.7 は簡単に解けるだろう．
例題 1.8 について講義では三辺の長さが $5, 12, 13$ の直角三角形を書いて考察した．$\cos^{-1} 5/13$ とは長さ 5 の辺と斜辺（長さ 13 の辺）に挟まれた角度であり，その角度のサインは $12/13$ である．テキストの解答は図に頼ることなく，$\sin\theta \geqq$ を述べてから，$\sin\theta \geqq 0$ を示しその後で $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ を利用した．
例題 1.9 はテキストの証明と同じ形で解説したのでここでは省略する．
3. 逆三角関数の導関数
p.22 にまとめられている．なお講義で言及しなかったが $\sin^{-1} x$ は $-1, 1$ の 2 点で微分不可能である．テキストのように $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ という条件を付けるべきだった．
4. 初等関数
テキストでは初等関数は節のタイトルにはなっているが言葉の意味には触れられていない．実は今まで学習した関数（多項式，無理式，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数）たちの加減乗除・合成で得られる関数が初等関数である．要するに一つの式で表示できる関数はみな初等関数である．
初等関数の基本となる関数はみな定義域で連続なので定理 1.8 および定理 1.9 を使えば初等関数はみな定義域で連続である．このような関数が微分計算，積分計算の対象である．
5. 微分
微分可能の定義は高校の教科書にきちんと記述されている．しかし，微分可能の定義を尋ねると答えられる学生は殆んどいない．微分の定義など知らなくても微分計算ができるので，微分計算の練習をしているうちにいつしか定義を忘れてしまう．困ったものだ．
しかし，微分計算で導関数が求められるのは初等関数の場合だけだ．例えば

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおくとき，$f(x)$ は 0 の周りで一つの式で表せていない．だから $f'(0)$ を求めるのに微分計算は使えな

い．定義に戻って考えるしかない．

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)$$

より例題 1.5(2) から $f'(0)$ が得られる．

本日のレポート課題とヒント

逆三角関数に関する問題 1.3.1，1.3.2(1)，1.3.3(1) をレポート課題にする．提出締め切りは 4 月 21 日 (火)12 時半で提出場所は先週と同じにする．

ヒントだが 1.3.1 はノーヒントでいいだろう．逆三角関数の定義を知っているかという程度の問題だ．1.3.2(1) は $\alpha=\tan^{-1}\sqrt{5}$ を作図してみると良い．その上で両辺の cos をとってみよ．1.3.3(3) は両辺の tan をとる．後は例題 1.9(1) を参考に取り組むと良い．

来週の事前学習

来週は微分計算や高次導関数，テイラーの定理などを解説する．数学 III で学習したことを思い出しておくように．

微分積分 I 講義メモ (4 月 23 日)

前回のレポート課題

今回の問題は逆三角関数に関するものだけだった．馴染みのない関数なので早く慣れるようにしてほしい．

1.3.1　逆三角関数の値を求める問題，定義を意識して考えること．解答はテキストにあるのでここでは省略する．【コメント】

- $\tan^{-1} x$ が tan をとると x になる値（角度）のことだということは理解できている．しかし，そのような角度のうち $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間の値だということを忘れている．$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ を $2\pi/3$ としてしまうとこの範囲から外れるので間違いだ．

1.3.2(1)　$\tan^{-1}\sqrt{5}$ とは tan が $\sqrt{5}$ になる角度で $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にあるものである．すなわち隣辺の長さ 1，対辺の長さ $\sqrt{5}$ の直角三角形の角度である．斜辺の長さは $\sqrt{6}$ なのでこの角度についての cos の値は $1/\sqrt{6}$ である．ゆえに

$$x = \cos\tan^{-1}\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

【コメント】

- この問題は図を書いて考察するのが分かりやすいと思う．このプリントでは作図を書くのが面倒なので文章により記述したが作図による考察と同じ内容である．
- 作図によらない解答を記述しておく．
  $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{5}$ とおく． 条件 $\cos^{-1} x = \tan^{-1}\sqrt{5} = \alpha$ と $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ より $x = \cos\alpha > 0$ である．ゆえに

$$x = \cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

1.3.3(1)　$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと $\sin\theta = x$ および $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ が成り立つ．仮定より $-1 < x < 1$ なので $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ である．ゆえに $\cos\theta > 0$ であり $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ が成り立つ．ゆえに $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ である．ここで再び $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ を考慮すれば $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を得る．
【コメント】

- 議論を $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ から始める人が多い．しかしこれでは示したい式を仮定したことになり証明にならない．気をつけてほしい．
- $\tan\theta = \alpha$ から $\theta = \tan^{-1}\alpha$ は出てこない．$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ を確認することが必要である．証明の中にこの不等式が記述されていても，実際に使う場合にはその都度きちんと言及してほしい．

本日の講義の要点

1. 初等関数の微分計算
   初等関数（基本的な関数の一つの式で表される関数）は定理 2.2，定理 2.3(1) という微分法の公式と 21 ページと 22 ページの基本的な関数の導関数によって計算できる．高校では合成関数の微分は簡単な関数にしか扱わないことになっているが大学の数学ではそのような制約は一切設けない．難しいことではないので自分で計算しておくように．
2. 対数微分
   対数をとると積は和に冪は積に変わるので計算しやすくなる．例題 2.1 は簡単なので見ておいて欲し

い．講義では $y = x^{\sin x}$ の微分を対数微分で計算した．

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x, \quad \frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \quad y' = \cos x \log x x^{\sin x} + \sin x x^{\sin x - 1}$$

講義のときとは整理の仕方が違うが，第 2 項は x^{α} の微分のようで興味深い．

対数微分の応用として積の微分法則の一般化を解説した．テキストには記述してないので補っておく．

n 個の正値関数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ について，その積 $y = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ の微分を対数微分で計算する．

$$\log y = \sum_{k=1}^{n} \log f_k(x) \quad \frac{y'}{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)} \quad y' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x)\ldots f_{k-1}(x)f_k'(x)f_{k+1}(x)\ldots f_n(x)$$

要するに各 f_k を微分した項を足し合わせればよい．

対数をとるためには各関数が正でないと取れないが，結果的に得られた式は値の条件なしに成立している．このことは結果だけ覚えておいてほしい．講義で扱った例を書いておこう．

$$\begin{aligned}(\sin x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x)' &= \cos x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x + \sin x e^x (x^2-1)\cos^{-1} x \\ &\quad + \sin x e^x (2x)\cos^{-1} x + \sin x e^x (x^2-1)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

3. 高次導関数

$f(x)$ を n 回微分して得られる関数を n 次導関数と呼び $f^{(n)}(x)$ と表す．これに関して p.23 の基本的な関数の高次導関数を解説した．(1) は 2，3 回微分してみれば納得できると思う．(3)(4) は単位円上の速度 1 の運動の速度ベクトルを考えると分かりやすいと思うのだが．納得できなければ $n = 1$ の場合を加法定理で示してあとは数学的帰納法で良い．

次に $\log x$ の n 次導関数を求めた．$(\log x)' = (\log x)^{(1)} = x^{-1}$ より $(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)}$ が成り立つので $(x^{\alpha})^{(k)}$ の公式が使える．

$$(\log x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

高次導関数に関連して定理 2.4（ライプニッツの公式）がある．この公式と 2 項定理との類似性を意識しておくこと．証明は与えなかった．講義では p.24 の 2 つ目の例を解説した．テキストを見ておくこと．

本日のレポート課題とヒント

演習問題 2.1（p.25）から 2.1.2（(1) を除く），2.1.3(1)，2.1.4(2) を出題する．来週火曜日の 12 時半までに教養科目等事務室前のレポート提出箱に入れること．

2.1.2 は単なる計算問題だ．この程度はすらすらできてほしい．2.1.3(1) は根号の中身が正（または 0）になる点で考えること．場合分けも必要になるだろう．2.1.4(2) は割り算で分子の次数を下げてから計算すること．$(x+1)^{-1}$ の n 次導関数に帰着できる．

次回は平均値の定理からテイラーの定理まで解説する．いよいよ前半の佳境である．

微分積分 I 講義メモ (4 月 30 日)

前回のレポート課題

微分計算の問題ばかりだがなかなか手ごたえのあるものがそろっている．計算がまだ苦手という人には少しハードかもしれないが，この程度の計算ができなくては微分計算ができるようになったとは言えない．頑張ってほしい．

2.1.2　詳しく計算する．

$$\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}\right)' = \frac{(\sin x - x\cos x)'(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\sin x + \cos x)'}{(x\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(x\sin x)(x\sin x + \cos x) - (\sin x - x\cos x)(x\cos x)}{(x\sin x + \cos x)^2} = \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$$

【コメント】 商の微分法則が使えない人がいるので，最初は商の微分をそのまま使った形で記述した．以下は分子の微分計算だ．

$$\left(\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

【コメント】 $(x/2)' = 1/2$ をかけ忘れる人が目につく．合成関数の微分を忘れないように．

$$(x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2})' = \sin^{-1}x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sin^{-1}x$$

【コメント】 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ での分母の 2 を忘れる人が目につく．

$$\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)\right)' = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2 x}\frac{b}{a\cos^2 x} = \frac{ab}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

【コメント】 $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$ はこの講義で新たに学習したもっとも重要な導関数だ．確実に覚えておくこと．なお，この程度の式は最後まで整理してほしい．

$$(\tan^{-1}\tanh x)' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}$$

【コメント】 双曲線関数については三角関数と累次の公式が成り立つが符号が微妙に変わっているものが多い．覚えようとすると混乱する．なお $(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x$ と記述する人が多い（テキストにそう書いているから仕方がないが）が意味は分かっているだろうか．実は三角関数は 6 種類あって sin（正弦）cos（余弦）tan（正接）cot（コタンジェント・余接）sec（セカント・正割）cosec（コセカント・余割）という．今の高校では初めの 3 つしか習わない．なお定義は $\cot x = (\tan x)^{-1}$ $\sec x = (\cos x)^{-1}$ $\mathrm{cosec} x = (\sin x)^{-1}$ だ．

2.1.3(1)　対数をとって微分する．

$$\log y = \log\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}} = \frac{1}{2}(\log|a+x| + \log|b+x| - \log|a-x| - \log|b-x|)$$

の両辺を微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}\right) = \frac{a}{a^2-x^2} + \frac{b}{b^2-x^2} = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$$

よって

$$\left(\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}\right)' = \frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$$

【コメント】

- 対数をとっても対数法則を使わなかったら意味がない．積は和に，商は差に，冪は積に変わることを徹底的に利用せよ．
- この関数が定義されるためには根号の中身が正でなくてはならない．$a > b > 0$ の条件のもとに正になるのは $x^2 > a^2$ の場合と $b^2 > x^2$ の場合だ．すなわち $(-\infty, -a)$, $(-b, b)$, (a, ∞) の 3 つの区間で定義される．ただこの時，$a \pm x$, $b \pm x$ の正負は定まらない．ゆえに対数法則を使って分けた時は，絶対値をつける必要がある．これは対数微分を利用する際に注意すべき事項だ．しかし

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と微分すると絶対値が消えてします．$|f(x)|$ とは $f(x)$ に符号をつけたものだが，$-f(x)$ の時でも微分すると分子分母に $-$ がつくので消えてします．結果的に絶対値を無視しても間違えることはない．

2.1.4(2)　$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ なので

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = (x)^{(n)} - (1)^{(n)} + ((x+1)^{-1})^{(n)}$$

だ．1 は定数なので 1 回でも微分すれば 0 である．x は 2 回微分すれば 0 になる．ゆえに $n \geqq 2$ について

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = ((x+1)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$n = 1$ の場合は高校数学の範囲の基本問題なので省略する．

【コメント】

- ヒントに割り算で分子の次数を下げることをアドバイスしたが無視している解答も多い．それでできれば問題ないのだが．講義メモにはレポート課題のヒントも記述しているので，きちんと読んでほしい．
- x^α の n 次導関数を与えたのだから $(x+1)^{-1}$ の n 次導関数も分かるはずだ．そういう感覚を持てるようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 平均値の定理 (p.22 定理 2.6)

平均値の定理は高校でも学習したはずだがその重要性は十分認識されているとは言い難い．講義では最大値・最小値の存在定理（定理 1.11）→ロルの定理（定理 2.5）→平均値定理（定理 2.6）という証明に至る道筋を簡単に解説した．

- 定理 1.11 →定理 2.5 は，$f(a) = f(b)$ の仮定から最大値または最小値の少なくとも一方は区間の内部でとることを導く．もしどちらも両端でとれば $f(a) = f(b)$ の仮定から最大値と最小値が一致してしまう．すると $f(x)$ は定数関数になるのでいたるところ微分係数は 0 である．よって

$f'(c)=0,\ (a<c<b)$ である．内部の点 $c,\ (a<c<b)$ で最大値（最小値）をとればその点での微分係数は 0 である．よって $f'(c)=0$ でありロルの定理が示された．

- 定理 2.5 →定理 2.6 は $f(x)$ から傾き $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の 1 次式をひいてロルの定理の条件を成り立つようにする．

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad g(b)=f(b)-f(b)+f(a)=g(a)$$

これから $g'(c)=0$ となる $c,\ (a<c<b)$ が見つかるがこれが平均値の定理の c の条件を満たす．

平均値の定理の応用としてある区間で $f'(x)>0$ なら単調増加であることを示した．2 点 $x_1<x_2$ について $[x_1,x_2]$ で平均値定理を使えば[*1]

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\quad x_1<c<x_2$$

となる c が存在が分かる． $f'(c)>0$ より $f(x_1)<f(x_2)$ を得るので単調増加である．

導関数が常に負なら単調減少，導関数が常に 0 なら定数関数であることも同様に証明できる．

2. テイラーの定理（定理 2.8）

定理 2.8 は式が二つ記述されているが第 1 式は R_{n+1} の定義式だと思うこと．そしてこれが第 2 式によって表示されるというのがテイラーの定理の趣旨だ．

$$R_{n+1}=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

が定義式であり

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},\qquad a<c<b$$

を満たす c が存在するというのが定理の内容だ．なおこの式で $0!=1$ としており，$k=0$ のときは $f(a)$ になっている．証明はテキストとは違い，ロルの定理利用した．記述しておこう．

証明　$F(x)$ を

$$F(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-K(b-x)^{n+1}$$

とおく．$F(x)$ は f の n 次導関数までしか使っていないのでもう 1 回微分できる．また $F(b)=f(b)-f(b)=0$ である．$\sum$ 記号の中の $k=0$ の項は $f(x)$ であることに注意せよ．

$$F(a)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k-K(b-a)^{n+1}=R_{n+1}-K(b-a)^{n+1}$$

なので $K=R_{n+1}(b-a)^{-n-1}$ とおけば $F(a)=0$ を得る．よってロルの定理が使え $F'(c)=0$ となる c が $a<c<b$ の範囲に存在する．

$F(x)$ の微分を $(b-x)^k$ を微分したもの（$k\geqq 1$ でよい）と $f^{(k)}(x)$ を微分したものの和に分ける．

$$F'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+(n+1)K(b-x)^n$$

[*1] このように平均値定理では，適用する区間を自由に選んでよい．それを含む区間で微分可能性が保証されていれば十分である．この事情はテイラーの定理の場合も同様である．

より左のシグマ記号の $k=p+1$ での式と，右のシグマ記号の $k=p$ での式は同じ形だから符号の違いから和は 0 になる．残るのは右のシグマ記号の $k=n$ の項であり

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)K(b-x)^n$$

を得る．$F'(c)=0$ と K の置き方から

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + (n+1)R_{n+1}\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(b-c)^n = 0$$

であり

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を得る．

3. テイラーの定理の書き換え（定理 2.9，p.302 行目の式）

$f(x)$ は $x=a$ の周りで $n+1$ 回微分可能とし，a を固定したまま b を a の周りで自由に動かす．このとき b が a の左に来ても $b<c<a$ となるだけで式の形も証明も全く同じである．b を自由に動かすので x を使う．定理 2.8 の R_{n+1} の定義式は

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

となる．これは $f(x)$ と n 次多項式（実は n 次近似多項式）の誤差であり x によって異なる値をとる．表示は c ではなく $\theta = \frac{c-a}{x-a}$ を利用して $c = a+\theta(x-a)$ とおく．この工夫により x, a の大小によらず $0<\theta<1$ という条件になる．

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

さらに $a=0$ とすればいわゆるマクローリンの定理になる．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

注意　θ は $0<\theta<1$ しか分かっていない．x, n によって当然変わる値である．いや，一つの値に決まるわけでもない．誤解しないように．なお $f^{(n)}(2x)$ と書くと $f^{(n)}(x)$ という関数に $2x$ を代入したという意味だ．$(f(2x))^{(n)}$ と書くと，$f(2x)$ という関数を n 回微分したことになる．1 回微分するたびに 2 が出るので $(f(2x))^{(n)} = 2^n f^{(n)}(2x)$ だ．注意すること．もちろん上の式における $f^{(n+1)}(\theta x)$ は $f^{(n+1)}(x)$ の x を θx に置き換えただけの式だ．

4. 指数関数への適用と応用

$f(x)=e^x$ とすれば $f^{(k)}(x)=e^x$ なので

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

を得る．シグマ記号によらない表示はテキスト p.30 の (1) 式を見ること．この式の応用を 2 つ紹介した．

- n が奇数のときは $x \neq 0$ について $R_{n+1}(x) > 0$ が成り立つ．すなわち次の不等式が得られる．

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad x \neq 0$$

- $n = 3,\ x = 0.1$ として適用すれば

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + R_4(0.1) \qquad R_4(0.1) = \frac{e^{\theta 0.1}}{24} 0.0001$$

  $0 < e^{\theta 0.1} < e^{0.1} < 1.2$ を使えば $0 < R_4(0.1) < 0.000005$ なので

$$e^{0.1} = 1.105166 \cdots + R_4(0.1)$$

  より小数点 6 桁目で四捨五入した値が 1.10517 であることが分かる．この値を関数電卓の値と比較してみよ．

本日のレポート課題とヒント

今回は来週の授業まで休みが続くのでレポート課題は出題しない．ただし，微分のもっとも重要な話題に入っているので何をやっているのかきちんと考えておいてほしい．来週はテイラーの定理のさらなる応用を解説する．テイラーの定理は微分の応用を考える際の打ち出の小づちである．

微分積分 I 講義メモ (5 月 7 日)

本日の講義の要点

1. 近似多項式について（テイラーの定理の意味の補足）
   多項式
   $$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + c_n(x-a)^n$$
   を k 回微分すれば
   $$p^{(k)}(x) = c_k k! + c_{k+1}(k+1)k(k-1)\cdots 2(x-a) + \cdots + c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$$
   である．特に $0 \leqq k \leqq n$ について $p^{(k)}(a) = c_k k!$ が成り立つ．ゆえにテイラーの定理における多項式部分
   $$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
   はその a における k 次（$k \leqq n$）の微分係数がすべて $f^{(k)}(a)$ になる多項式である．感覚的には n 回微分可能ならこの多項式が n 次近似多項式になると思えるが，1 回余分に微分可能性を仮定することによって誤差の表示を与えるのがテイラーの定理（定理 2.9）の意味である．
2. テイラーの定理の応用 (つづき)
   前回の講義ではある種の不等式の証明（誤差の正負を考察した)，近似値の計算（具体的な値について，近似多項式の取る値と誤差の大きさを考えることにより近似値を求めた）の 2 つの応用を紹介した．さらに応用例をあげる．
   - $f^{(n+1)}(x)$ が a で連続な時
     $$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$
     が成り立つ．これを使えば $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3(x)$（p.30(1) 式で $n=3$ としている）より
     $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$
   - $f(x)$ が無限回微分可能で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成り立つとき
     $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$
     が成り立つ．これをテイラー展開という．$f(x) = e^x$, $a = 0$ の時は $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ だが
     $$0 < e^{\theta x} < e^{|x|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$
     【上の極限の証明】$2|x|$ より大きな自然数を一つ選んで $N \geqq 2|x|$ とおけば $n > N$ のとき
     $$0 \leqq \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^N}{N!}\frac{|x|}{N+1}\frac{|x|}{N+2}\cdots\frac{|x|}{n} \leqq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{2^N|x|^N}{N!}\frac{1}{2^n}$$
     であるが，N はある定まった自然数なので最後の式は $n \to \infty$ で 0 に収束する．あとは挟み撃ちを使えばよい．

より $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成り立つ．ゆえに

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

ここで $x = 1$ を代入すれば次の有名な無限級数の和を得る．

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

3. $f(x) = \sin x$ の場合に考察した．

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & (m = 2k) \\ (-1)^k \cos x & (m = 2k+1) \end{cases}$$

なので $f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ である．よって n を $2n$ に書き換えて

$$f(x) = \sin x = \sum_{m=0}^{2n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

この式をシグマ記号を用いずに表せば p.30(2) 式に他ならない．これについても指数関数の場合と同様な応用をが得られる．

- $n = 2, x = 0.1$ とおけば

$$\sin 0.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} + R_5(0.1), \qquad R_5(0.1) = \frac{\cos 0.1\theta}{120}(0.1)^5$$

  である．最初の 2 項は $0.09983333\cdots$ であり，$0 < R_5(0.1) < \frac{(0,1)^5}{120} < 0.000000084$ なのでおよそ小数点以下第 8 桁で四捨五入した値は 0.0998334 または 0.0998333 である．

- $\sin x = x + R_3(x)$ を用いれば次の周知の極限を求められる．

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-R_3(x)}{x^3} = \frac{-f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6}$$

- $0 \leqq |R_{2n+1}(x)| \leqq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ より，これは $n \to \infty$ で 0 に収束する．ゆえに

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. $\cos x$ の場合とオイラーの公式

$\cos x$ については $\sin x$ の場合とほとんど変わらない．p.30(4) の式を見ておくこと．興味深いのはオイラーの公式である．i を虚数単位として e^x のテイラー展開に ix を放り込む．

$$e^{ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$i^{2k} = (-1)^k$ よりこの式は

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x$$

となる．この式をオイラーの公式と呼ぶ．ここで $x = \pi$ とした式は $e^{i\pi} + 1 = 0$ と表せる．一つの式に $0, 1, i, e, \pi$ が現れる何とも美しい式である．

本日のレポート課題とヒント

さて，レポート課題として $f(x) = \log(1+x)$ として $a = 0$ でのテイラーの定理を考察してもらう．

(1) $f^{(n)}(x)$ を求めよ．(ヒント：$\log x$ の n 次導関数は 4 月 23 日の講義メモの 3 に解説している． x が $1+x$ になっただけなので分かるだろう．

(2) $a = 0$ としてテイラーの定理を書き下せ．（ヒント：上の結果を使う．$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ を求めるのが基本だが $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$ に注意すること．結果は p.30 の (4) 式に記述されている．）

(3) $n = 3$ として $\log 1.1$ の近似値を求めよ．（ヒント：テイラーの定理を $n = 3$ の場合に書き下すこと．さらに $x = 0.1$ を代入すれば $f(0.1) = \log 1.1$ である．）

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ となることを示せ．（ヒント：$R_{n+1}(x)$ の形を使う．$0 \leqq x \leqq 1$ より $x \leqq 1$ と $1 + \theta x \geqq 1$ が成り立つことに注意せよ．）

授業の終了後に $R_{n+1}(x)$ の表示をそのまま使っていいのかとの質問を受けた．もちろん構わない．というか具体的な関数の場合に定理 2.9 の証明のアイデアを使って $R_{n+1}(x)$ の表示を得るのは大変すぎる．定理 2.9 の証明は抽象的な関数としてやっているから単純なのであって具体的な関数にしたら $f^{(k)}(x)$ の計算を迫られることになり難しすぎる．一般の関数を $f(x)$ とおいて証明することは，具体的な関数の場合をすべて証明したことにつながる．それだけではなく，$f^{(k)}(x)$ の計算から解放されるために，議論がよりシンプルになる．抽象化は分かりづらくしているのではなく分かりやすくしていることに気づいてほしい．

微分積分 I 講義メモ (5 月 14 日)

前回のレポート課題について

$f(x) = \log(1+x)$ として $a = 0$ でのテイラーの定理に関連して次の問題に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

【解答例】 $f'(x) = (1+x)^{-1}$ なので $n \geqq 1$ について $f^{(n)}(x) = \left((1+x)^{-1}\right)^{(n-1)}$ である．ゆえに

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \log(1+x) & (n=0) \\ (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} & (n \geqq 1) \end{cases}$$

である．

(2) $a = 0$ としてテイラーの定理を書き下せ．

【解答例】 $k \geqq 1$ のとき $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ である．$k = 0$ のときは $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ なので

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

である．シグマ記号を使わずにまとめて書けばテキストの式を得る．

(3) $n = 3$ として $\log 1.1$ の近似値を求めよ．

【解答例】 $n = 3$ とすると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_4(x) \qquad R_4(x) = (-1)\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}$$

である．この式に $x = 0.1$ を代入すれば次を得る．

$$\log 1.1 = 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} + R_4(0.1) \qquad R_4(0.1) = -\frac{0.0001}{4(1+\theta 0.1)^4}$$

$0 > R_4(0.1) > -0.000025$ より

$$0.0953333\cdots > \log 1.1 > 0.095308333\cdots$$

なので $\log 1.1 \fallingdotseq 0.0953$ である．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ となることを示せ．

【解答例】 $0 \leqq x \leqq 1$ より $\dfrac{x}{1+\theta x} < 1$ である．よって

$$0 \leqq |R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

であり，$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を得る．

【コメント】

- $f^{(n)}(x)$ の計算は $n = 0$ の時と $n \geqq 1$ の時は別に扱わなければならない．なお $(-1)!$ は定義できないので $n \geqq 1$ の時の式に $n = 0$ は代入できない．

- (2) で最初のシグマ記号は $k=0$ から始めているが，次のシグマ記号は $k=1$ から始まっている．このようなことが許されるか疑問に思う人がいるかもしれない．これは次の処理による．

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

- 近似値を求めるには誤差の大きさを考えないといけない．解答例では $0 > R_4(0.1) > -0.000025$ としたが $1+\theta 0.1 < 1.1$ を利用して

$$-\frac{0.000025}{(1.1)^4} > R_4(x) > -0.000025$$

  としても良い．$(1.1)^4 = 1.4641$ なので近似値として 0.09531 を得る．ただ，ここまで苦労することもないだろう．
  この値が電卓の結果と合わないという指摘を受けた．数学（特に微積分）で扱う対数は断らない限り自然対数（底が e の対数）だ．しかし，実験データの処理などでは常用対数（底が 10 の対数）も良く使われる．関数電卓では log を常用対数 ln を自然対数と使い分ける．注意しておくこと．
- (4) では $x \leqq 1$ より $lim x^n = 0$ とする答案が目立った．しかし，$x=1$ のときはこうはならない．深刻なミスとまでは言えないがやはり間違いだ．同様に $\lim(1+\theta x)^n = \infty$ も $x=0$ の時は成立しない．微妙なのは

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} = 0$$

  だ．θ は n によって変わるのでこれは微妙な等式だ．確かに $x=1$ のときも括弧内は 1 より小さいが，θ が 0 に近づいていくと 1 に収束してしまう．1^∞ は不定形なので極限は分からない．解答例では単に 1 より小さいことだけを示して 0 になることは分母の $n+1$ を利用している．

本日の講義の要点

1. 前回のレポート課題の補足
   (4) の結果を使うと $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x について

$$\log(1+x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}$$

   が成り立つ．これが $\log(1+x)$ のテイラー展開だ．テキストの 77 ページも合わせて見ておくこと．ここで $x=1$ を代入すると

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

   という表示を得る．
2. $f(x) = (1+x)\alpha$ にテイラーの定理を適用する．
   p.23 の基本的な関数の高次導関数を使えば $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ である．ゆえにテイラーの定理の k 次の項は

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

である．この係数を一般化された二項係数と呼び $\binom{\alpha}{k}$ と表す．この記号によりテイラーの定理は

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n}$$

と記述できる．若干コメントしておく．

- 一般化された二項係数 $\binom{\alpha}{k}$ において，α は任意だが k は 0 以上の整数である．ただし $\binom{\alpha}{0} = 1$ と約束する．
- α が自然数のときは，$k \leqq \alpha$ について $\binom{\alpha}{k} = {}_\alpha C_k$（組合せ）である．$k > \alpha$ のときは定義式の分子に 0 が現れるので 0 である．これは α 次多項式 $(1+x)^\alpha$ を $\alpha+1$ 回微分すれば 0 になることに対応している．
- α が自然数で $n = \alpha$ のとき $f^{(n+1)}(x) = 0$ なので $R_{n+1}(x) = 0$ である．テイラーの定理は

  $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$$

  となるが，これは二項定理に他ならない．数学的帰納法によらない二項定理の証明が与えられたことになる．

他にテイラー展開を結果だけ紹介した．p.77 を参照すること．

3. $f(x) = \tan^{-1} x$ について

この関数の n 次導関数を今までの知識で一般に求めることはできない．ただし，$f^{(n)}(0)$ は求められる．それが演習問題 2.1 の 2.1.6 である．まずこの演習問題の回答を記述しておこう．

- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ より $(1+x^2)f'(x) = 1$ である．これを n 回微分（$n \geqq 1$）すればライプニッツの公式（定理 2.4）により

  $$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n2xf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0, \qquad n \geqq 1$$

  が成り立つ．特に $x = 0$ を代入すれば

  $$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \qquad n \geqq 1$$

  という漸化式を得る．
- $f^{(0)}(0) = f(0) = \tan^{-1} 0 = 0$ より $f^{(2n)}(0) = 0$ である．奇数の場合は $f^{(1)}(0) = f'(0) = 1$ より

  $$f^{(2k+1)}(0) = -2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)f^{(2k-3)}(0) = (-1)^k(2k)!$$

  となる．

$f^{(k)}(0)$ がすべて求めることができたのでテイラーの定理の多項式部分はきちんと記述できる．

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + R_{2n}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!} x^{2l+1} + R_{2n}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} + R_{2n}(x)$$

さて，$R_{2n}(x)$ はどうなるだろうか．これは $\tan^{-1} x$ から $2n-1$ 次多項式をひいたものなのでもちろん微分可能である．

$$R_{2n}{}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^l x^{2l}$$

和は公比 $-x^2$ の等比級数なので計算でき

$$R_{2n}{}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

である．$R_{2n}(0) = 0$ なので

$$R_{2n}(x) = \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

である．この表示を利用すれば $0 \leqq x \leqq 1$ で $\lim_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$ が次の不等式から示せる．

$$0 \leqq |R_{2n}(x)| \leqq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leqq \int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ については $R_{2n}(x)$ が奇関数であることを注意すればよい．以上から

$$\tan^{-1} x = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{2l+1} \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

を得る．$x = 1$ とおけば

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

π の級数表示が得られたが，これを用いて π の近似値を求めようとしても効率が悪い．マチンは 18 世紀の初めに

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

という公式と，テイラー展開を組み合わせて π の値を小数点以下 100 桁まで計算した．電卓のない時代にここまで計算できるのかと思うと驚きである．

今日でテイラーの定理およびそれに関連する話題を終える．次回は微分に関するいくつかのトピック（ロピタルの定理など）を紹介する．来週で微分は終わりになるので 1 週間空けて 6 月 4 日に試験を行う．

本日のレポート課題とヒント

p.31 の 2.2.5 を課題にする．(1) については $\alpha = 1/2$ で $n = 3$ の場合なので今日の講義内容と照らし合わせれば分かるはずだ．(2) はテイラーの定理を極限計算に応用する話題に関連する．5 月 7 日の講義メモの 2 を参考にしてほしい．なお，次の問題を付け加える．

(3) (1) で求めた式を利用して $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ．

微分積分 I 講義メモ (5 月 21 日)

前回のレポート課題について

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ についてテイラーの定理を適用する問題だ．

(1) $n = 3$ とした時のマクローリンの定理を書き表せ．

【解答例】 一般化された二項係数は

$$\binom{1/2}{0} = 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

なので

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_3(x), \qquad R_3(x) = -\frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{1/2-4}$$

である．

(2) 次の極限が存在するように α の値を定めよ．

【解答例】 2 次近似多項式は $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ なので $\alpha = -1/8$ とすればよい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-7/2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{16} - \frac{5}{128}x(1+\theta x)^{-7/2} = \frac{1}{16}$$

(3) $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよ．

【解答例】 $x = 0.1$ を代入すると

$$\sqrt{1.1} = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{8} + \frac{0.001}{16} + R_4(0.1) = 1.0488125 + R_4(0.1)$$

である．ここで誤差は $(1+\theta 0.1)^{-7/2} < 1$ より

$$0 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001 \fallingdotseq -0.0000039, \qquad 1.0488125 > \sqrt{1.1} > 1.0488086$$

小数点以下第 6 桁で四捨五入すれば $\sqrt{1.1} \fallingdotseq 1.04881$ を得る．

【コメント】

- $f^{(n)}(x) = (1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n+1)(1+x)^{1/2-n}$ だ．これから

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-k+1)}{k!} = \binom{1/2}{k}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{1/2-n-1} = \binom{1/2}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1/2}$$

  を得る．一般化された二項係数が自然に現れるが，その定義を確認しておくこと．特に $(1+\theta x)$ の冪には注意すること．

- 多項式部分の係数を $f^{(k)}(x)/k$ とした人がいたが，それでは多項式にならない．テイラーの定理の意味が関数を多項式と誤差の和の形で表し，誤差を $n+1$ 次導関数を使って表示するところにあることを例を通じて感じ取ってほしい．

- (2) は特に問題はないが，せっかく 3 次近似多項式と誤差の形にしたのだから，分子を 2 次近似式との差にするのはもったいない．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\right)=\lim_{x\to 0}-\frac{5}{128}(1+\theta x)^{-7/2}=-\frac{5}{128}$$

という極限のほうがテイラーの定理の応用にはふさわしい．5 月 7 日の講義メモの 2 と比較してほしい．

- 近似値の計算では誤差の扱いが曖昧な人が多かった．難しい話題だが解答例を参考に考えてほしい．求めた近似値の何桁までが意味を持つかの考察は応用上も重要だ．なお $1 < 1+\theta 0.1 < 1.1$ を利用して

$$-\frac{5}{128}(1.1)^{-7/2}0.0001 > R_4(0.1) > -\frac{5}{128}0.0001$$

とした人がいたが，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めるのに $(1.1)^{-7/2}$ の値を利用するというのはうれしくない．電卓を使わずに済む数値のみを利用するのがこの問題の趣旨だ．

本日の講義の要点

1. （極限の）不定形

   $f(x), g(x)$ の極限が α, β であるときその商 $f(x)/g(x)$ の極限は $\beta \neq 0$ なら α/β になる．$\beta = 0$ で $\alpha \neq 0$ の場合は $\pm\infty$ に発散する．しかし，$\alpha = \beta = 0$ の場合は分からない．このような極限を 0/0 型不定形という．不定形にはテキストにある 5 つのタイプの他にも 1^∞ 型，$\infty - \infty$ 型など様々なものがある．不定形の極限の調べ方には一般論はない．問題に応じて様々な工夫を行う必要がある．

2. ロピタルの定理

   不定形の極限を求めるための強力な方法としてロピタルの定理がある．テキストには定理 2.10 とその注意書きにまとめられているが，証明はごく特殊な場合にしか記述されていない．講義では証明は解説しなかった．ロピタルの定理の注意点を箇条書きしておく．

   - 極限は $x \to a,\ x \to a+0,\ x \to \infty$ などどれでも良い．
   - 対象は 0/0 型不定形と，∞/∞ 型不定形のみである．ロピタルの定理を使う前に，不定形のチェックを怠ってはならない．
   - 異なる型の不定形でも何らかの工夫で 0/0 型（∞/∞ 型）の極限に帰着できる場合がある．
   - 仮定が満たされる場合 $f'(x)/g'(x)$ が α に収束すれば（無限大に発散すれば）$f(x)/g(x)$ も α に収束する（無限大に発散する）．これがロピタルの定理の主張である．
   - ロピタルの定理は繰り返し使うことが多い．$f''(x)/g''(x),\ f^{(3)}(x)/g^{(3)}(x), \ldots$ のように考えていくが，このとき各段階で 0/0 型（あるいは ∞/∞ 型）であることのチェックを怠ってはならない．

3. ロピタルの定理の適用例

   - p.33 の例の (1) と (4) を解説した．(1) についてはテキストの解答に補足すべき点はない．(4) では 0^0 型不定形なので対数をとって 0∞ 型の不定形にし，さらに $x\log x = \frac{\log x}{1/x}$ と変形して ∞/∞ 型不定形に変える．

     $$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0} -x = 0$$

     あとはテキストの解答を見ること．
   - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$

$\infty-\infty$ 型の不定形だが $\dfrac{\sin x - x}{x\sin x}$ と整理すれば，$x\to 0$ での極限は 0/0 型不定形になる．この分母分子を微分すると $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$ となるがこの $x\to 0$ での極限もやはり 0/0 型不定形である．そこでもう一度分子分母を微分して $\dfrac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$ を得るが分母は 0 に収束しないので不定形ではない．この $x\to 0$ での極限は 0 である．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=0$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x^2}$

  0/0 型不定形であるので分母分子を微分して $\dfrac{3^x\log 3 - 2^x\log 2}{2x}$ とする．この分母は 0 に収束するが分子は $\log 3 - \log 2 \neq 0$ に収束する．これは不定形ではなく $\pm\infty$ に発散する．

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\log 3-2^x\log 2}{2x}=\pm\infty$$

  なお，正負を考えれば $x\to +0$ のとき ∞ に $x\to -0$ のとき $-\infty$ に発散する．
  この問題では一回微分したものが不定形になるかのチェックを忘れてしまいがちだ．ロピタルの定理を使う時は，不定形のチェックを明記すること．

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$

  ∞/∞ 型の不定形なので，分母分子をそれぞれ k 回微分してみる．$k \leqq n-1$ のときは $(x^n)^{(k)}/e^x$ だが，分母は ∞ に発散し分子も $n-k \geqq 1$ より ∞ に発散する．よってロピタルの定理を n 回繰り返し

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

  を得る．
  この問題ではテイラー展開を利用するのも良い．$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ がすべての x について成り立つ．また $x>0$ のときこの級数の各項はすべて正である．よって $x>0$ で $e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ が成り立つ．

$$0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}\longrightarrow 0\quad (x\to\infty)$$

  とすれば挟み撃ちで極限が 0 であることが分かる．

4. $f''(x)\geqq 0$ である関数のグラフが下に凸であること
   高校時代からなじみ深い事実であるがこれもテイラーの定理で証明できる．
   - $y=f(x)$ のグラフが下に凸であるとは，グラフ上の 2 点を結ぶ線分について，グラフがその線分の下にあることを言う．すなわち任意の $a<b<c$ について

$$f(b)\leqq f(a)+\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)$$

     が成り立つことを言う．
   - $x=b$ で $n=2$ のテイラーの定理を使う．

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+R_2(x),\qquad R_2(x)=\frac{f''(c)}{2}(x-b)^2$$

     ここで $f''(x)\geqq 0$ であることから $R_2(x)\geqq 0$ であり，$f(x)\geqq f(b)+f'(b)(x-b)$ が成り立つ．

- 2 つの式

$$f(a) \geqq f(b) + f'(b)(a-b), \qquad f(c) \geqq f(b) + f'(b)(c-b)$$

から，左の式に $c-b>0$ をかけ，右の式に $b-a>0$ をかけて加え合わせれば

$$f(a)(c-b) + f(c)(b-a) \geqq f(b)(c-b) + f(b)(b-a) = f(b)(c-a)$$

あとは $c-a>0$ で割って整理すればよい．

本日のレポート課題

p.39 の 2.3.1 を課題にする．ロピタルの定理を使って計算すればよい．なお，(4) は 1^∞ の不定形だ．対数をとって考えること．

微分積分 I 講義メモ (5 月 28 日)

前回のレポート課題について

演習問題 2.3.1（p.39）の 4 つの極限を課題にした．ロピタルの定理を用いて極限を求める問題である．

(1) $x \to 0$ のとき分母と分子はともに 0 に収束する．すなわち 0/0 型不定形なのでロピタルの定理が使える．分母分子を微分すれば

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{\cos x + 1}{-\cos^2 x}$$

となるので $x \to 0$ での極限は -2 である．ゆえに

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = -2$$

(2) これは ∞/∞ 型不定形なので，ロピタルの定理が使える．

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

よりこの $x \to \infty$ での極限は 1 なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x} = 1$$

(3) $\infty - \infty$ 型の不定形なのでこのままではロピタルの定理は使えない．通分して一つの分数式にすれば $\dfrac{\tan x - x}{x \tan x}$ となるがこれは 0/0 型不定形である．この分子分母を微分して

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x \sin x + x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x + x} = \frac{\sin x}{\cos x + \frac{x}{\sin x}}$$

となるが，最後は $x \to 0$ で分母は 1 に収束する．分子は 0 に収束するのでこの極限は 0 である．よってロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = 0$$

(4) 1^∞ 型の不定形なのでこのままではロピタルの定理は使えない．そこで対数をとってみれば $\frac{1}{x^2}\log\cos x$ となりこの $x \to 0$ での極限は 0/0 型不定形である．そこで分母と分子を微分して

$$\frac{-\tan x}{2x} = -\frac{\cos x}{2}\frac{\sin x}{x}$$

となるのでこの $x \to 0$ での極限は $-1/2$ である．よって $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ なので

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\cos x}{x^2}} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

【コメント】

- 不定形のチェックを明示的に行っていない答案は正解とは言えない．
- $f'(x)/g'(x)$ を使った後，その式の簡略化を試みると良い．詳しくは解答例を参考にせよ．
- 1^∞ が不定形であるとは $f(x)^{g(x)}$ において $f(x) \to 1$ でも $g(x) \to \infty$ であれば極限は分からないということだ．$f(x)$ の 1 への近づき方と $g(x)$ の無限大への発散の仕方のバランスで極限が変わってくることを意味している．

本日の講義の要点

1. 基本的な関数の原始関数（p.41 の囲みの中）
   少しずつコメントしながら p.41 の囲みの中の等式を解説した．
   - $1/x$ の原始関数は $\log|x|$ である．同様に $f'(x)/f(x)$ の原始関数は $\log|f(x)|$ である．絶対値を忘れないように．なお，$f(x) > 0$ が分かっている場合は絶対値をつける必要はない．(7) には絶対値がついて (10) には絶対値がつかない理由を理解すること．
   - (8)(9)(10) の双曲線関数の積分は (5)(6)(7) の三角関数の積分とよく似ている．p.22 と比較しておくように．
   - (11)(12) は p.22 の逆三角関数の微分に基づく．この 2 つはきちんと覚えておくように．
   - (13) については右辺の微分が積分の中身になっていることを確認せよ．これはこういう公式があったということだけ頭の中に留めておけばよい．覚えるまでのことはない．
2. 部分積分の利用
   部分積分とは $f(x)g(x)$ の積分を $f(x)$ を微分し $g(x)$ を積分したものの積の積分に直すことだ．どちらを微分し，どちらを積分するか明確に意識すると良い．講義で紹介したのは次の 3 つである．

$$\int \log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

   いずれも被積分関数に 1 がかかっていると思い 1 を積分し被積分関数を微分している．
3. 置換積分の利用
   今日の講義では結果的に $x^2 = u$ とおくものばかり解説した．$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int xf(x^2)dx = \frac{1}{2}F(x^2)$$

   である．右辺の微分が $xf'(x)$ になることは簡単に分かる．なおここで積分の中に x が入っていることは重要である．

$$\int f(x^2)dx = \frac{1}{2x}F(x^2) \quad \text{（要注意：この等式は間違いだ．ここだけ取り出さないように．）}$$

   という計算をしばしば見かけるが，これは本質的な間違いである．具体的には

$$\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sin x^2, \qquad \int \cos x^2 dx \neq \frac{1}{2x}\sin x^2$$

   である．特に右の積分の原始関数は初等関数にならない．式で表すことができないので積分計算で求められるはずがない．

微分の場合は和差積商合成の微分がすべて公式として与えられているので，初等関数の微分は初等関数になる．微分計算も基本的な関数の微分から微分公式を利用することにより簡単に実行できる．しかし，積分の場合はそのような積分公式は存在せず，問題に応じて様々な工夫をしなければならない．比較的簡単な関数でも積分計算不可能なもの（原始関数が初等関数にならないもの）が数多く存在する．次回の講義（6 月 11 日）か

ら，積分計算のためのいくつかの強力な計算方法を解説する．

本日のレポート課題

次の関数の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad (3)\ x(x^2+2)^{\alpha} \quad (4)\ \frac{x^2+3}{\sqrt{x}} \quad (5)\ \frac{1}{x^2+x+1} \quad (6)\ 2^x$$

微分積分 I 講義メモ (6 月 18 日)

前回のレポート課題について

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad (3)\ x(x^2+2)^\alpha \quad (4)\ \frac{x^2+3}{\sqrt{x}} \quad (5)\ \frac{1}{x^2+x+1} \quad (6)\ 2^x$$

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x$ に留意すれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\frac{1}{2}dx = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(2) 同様に $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log(x + \sqrt{x^2+A})$ を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \log|x + \sqrt{x^2-4} + C|$$

(3) $x^2+2 = u$ と置換積分する．$2xdx = du$ である．

$$\int x(x^2+2)^\alpha dx = \int u^\alpha \frac{du}{2} = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} = \dfrac{(x^2+2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} + C & (\alpha \neq -1) \\ \dfrac{1}{2}\log u = \dfrac{1}{2}\log(x^2+2) + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$

(4) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + 3x^{-1/2}$ より

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + 6x^{1/2}$$

(5) 分母を平方完成すれば $x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + (3/4)$ となるので $x + 1/2 = (\sqrt{3}/2)u$ と置換積分する．

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(3/4)(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} u = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)$$

(6) $2^x = e^{x\log 2}$ より

$$\int 2^x dx = \int e^{x\log 2}dx = \frac{1}{\log 2}e^{x\log 2} = \frac{1}{\log 2}2^x + C$$

本日の講義の要点

1. 部分分数展開

   部分分数展開についてはテキストの p.49 の最初の 4 行に記載されているが，これでは分からないだろう．まず部分分数展開のプロセスを箇条書きしておこう．

   (1) 有理関数とは二つの多項式の商で表される関数を言う．以下 $f(x)/g(x)$ と表す．

   (2) 分子 $f(x)$ の次数が分母 $g(x)$ の次数以上であるときは，割り算 $f(x) \div g(x) = q(x) \cdots r(x)$ により

   $$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

   と変形する．よって分子の次数が分母の次数未満だとして議論する．

   (3) 分母を 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解する．これは一般に可能であることが代数学の基本定理（方程式は複素数の範囲で解を持つ）と因数定理により証明できる．まあ，これは事実として受け入れること．

(4) 因数の種類に応じて以下のように分数式を用意する．

- 因数 $(x+a)^k$ については以下の k 個の分数式の和を用意する．

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^k}$$

- 因数 $(x^2+bx+c)^l$, $b^2-4c<0$ については以下の l 個の分数式の和を用意する．

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+bx+c)^l}$$

(5) 用意されたすべての分数式の和が元の分数式と等しくなるという形の等式を作る．

(6) 分母を払って両辺の多項式の係数を比較することにより，連立方程式が得られる．それは必ず唯一組の解を持つので，部分分数展開の形が得られる．

2. 部分分数展開の例

(1) $\frac{x^4}{x^3+1}$ を上に述べた方法に従って部分分数展開する．

(2) $x^4\div(x^3+1)=x\cdots-x$ より

$$\frac{x^4}{x^3+1}=x+\frac{-x}{x^3+1}$$

(3) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であり x^2-x+1 の判別式は負である．

(4) 因数 $x+1$ については $\frac{A}{x+1}$ を， x^2-x+1 については $\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ を用意する．

(5) 用意された分数式の和から

$$\frac{-x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

となるように A,B,C を定める．

(6) 両辺に $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ をかければ

$$-x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$$

となる．これより $A+B=0$, $-A+B+C=1$, $A+C=0$ となるので $A=-1/3$, $B=C=1/3$ を B $A=-1/3$, $B=C=1/3$ を得る． 以上まとめると

$$\frac{x^4}{x^3+1}=x-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

この連立方程式はただ一組の解を持つので係数行列は正則である．よって分子の $-x$ を他の 2 次以下の式に取り換えてもやはりただ一組の解を持つ．(3) 以下のプロセスがうまくいくためには分子が 2 次以下の式でなくてはならないこと，逆に 2 次以下の式ならいつでも大丈夫なことも分かるだろう．(2) の割り算のプロセスが必要なことも理解してほしい．

3. 部分分数展開で現れる分数式の不定積分

3(6) で得られた展開式を不定積分する場合，問題になるのは第 3 項のみであろう．これは平方完成 $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ から $x-1/2=(\sqrt{3}/2)u$ とおくとうまくいく．基本的なテクニックだ．

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx&=\int\frac{(\sqrt{3}/2)u+(3/2)}{(3/4)(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\int\frac{u}{u^2+1}du+\sqrt{3}\int\frac{1}{u^2+1}du\\&=\frac{1}{2}\log(u^2+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)+C\end{aligned}$$

なお，2 行目の二つの式の log の中身は定数倍の違いがある．しかい対数をとっているので定数の違いになり，積分定数の中に組み込める．

4. 部分分数展開の計算練習

部分分数の置き方のみ記しておく．後は各自やってみること．

- $\dfrac{4x+2}{4x^2+7x-2} = \dfrac{A}{4x-1} + \dfrac{B}{x+2}$
- $\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$
- $\dfrac{4x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

理論的にはすべての有理関数について部分分数展開を行える．あとは展開から出てくる有理関数の不定積分ができればよい．これについては次回解説する．

本日のレポート課題

次の有理関数の不定積分を求めよ．ヒントはなし．

$$(1)\frac{x}{(2x+1)^2} \quad (2)\frac{x-1}{x^2(x+1)} \quad (3)\frac{1}{x^3(x^2+1)} \quad (4)\frac{1}{x^4-1}$$

微分積分 I 講義メモ (6 月 25 日)

前回のレポート課題について

　次の有理関数の不定積分を求めよ．ヒントはなし．

$$(1)\frac{x}{(2x+1)^2} \quad (2)\frac{x-1}{x^2(x+1)} \quad (3)\frac{1}{x^3(x^2+1)} \quad (4)\frac{1}{x^4-1}$$

(1) 被積分関数の分母は 1 種類の因数しか持たないので

$$\frac{x}{(2x+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}$$

の形に展開する．両辺に $(2x+1)^2$ をかけて分母を払えば $x = A(2x+1) + B = 2Ax + (A+B)$ となるので $A = 1/2,\ B = -1/2$ である．

$$\int \frac{x}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\log|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right) + C$$

(2) 被積分関数の分母は x と $x+1$ の 2 種類の因数を持つ．x は 2 つあるので以下のように 2 つの分数式を用意する．

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

両辺に $x^2(x+1)$ をかけて分母を払うと $x-1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$ である．ゆえに $A+C = 0,\ A+B = 1,\ B = -1$ なので $A = 2,\ B = -1,\ c = 2$ を得る．

$$\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1}dx = 2\log|x| - 2\log|x+1| + \frac{1}{x} + C$$

(3) 被積分関数の分母は x と x^2+1 の 2 種類の因数を持つ．x^3 になっていることに注意して

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}dx$$

と展開する．$1 = Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)(x^3) = (A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C$ より $C = 1,\ B = 0,\ A = -1,\ E = 0,\ D = 1$ である．

$$\int \frac{1}{x^3(x^2+1)}dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{x^2+1}dx = -\log|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

(4) 分母は $x^4 - 1 = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ と 1 次式と判別式負の 2 次式の積に因数分解される．ここには 3 種類の因数があるが，それぞれ重複はしていない．ゆえに

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

と部分分数展開する．分母を払えば $1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$ となるので

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

より $A = 1/4,\ B = -1/4,\ C = 0,\ D = -1/2$ である．

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx = \int \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{-1/2}{x^2+1}dx = \frac{1}{4}\log\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

【コメント】

- (1)(4) は高校生的な感覚でも部分分数に展開できるが，部分分数展開の技法の修得を目的にした出題なのでこのようなやり方は好ましくない．
- 分母の x^3 について，分数式を $\frac{A+Bx+Cx^2}{x^3}$ とおく人がいる．これでも A, B, C は求められるが，さらにその後の処理が必要になる．解答例の置き方が最も効率的なので，理解するようにしてほしい．
- 判別式負の 2 次式の場合，分子は 1 次式にする．定数としてしまうと，係数を求められない．
- この問題での展開された後の各分数式の積分は易しい．特に悩まなくても答えられるようにしてほしい．
- 高校の積分計算は様々な工夫が必要だった．うまく計算できた場合は，それなりにうれしく感じただろう．しかし，ここで学習している計算技法は「必ずうまくいく方法」だ．今はその修得を目指しているのだから，何かいい方法があるか悩んではいけない．定められた手法に従ってきちんと計算してほしい．

本日の講義の要点

1. 有理関数の積分

有理関数の不定積分は部分分数展開により

$$\frac{A_k}{(x+a)^k} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}\ (b^2-4c<0)$$

という 2 つの積分に帰着される．前者の積分は簡単なので省略する．後者の不定積分は分母の平方完成 $x^2+bx+c=(x+b/2)^2+(4c-b^2)/4$ を参考に $x+b/2=\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}u$ と置換積分すると良い．

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}dx &= \int \frac{B\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}u+C-\frac{bB}{2}}{\left(\frac{4c-b^2}{4}(u^2+1)\right)^l}\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}du \\ &= \left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{l-1}B\int\frac{u}{(u^2+1)^l}du+\left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{l-1/2}\left(C-\frac{bB}{2}\right)\int\frac{1}{(u^2+1)^l}du\end{aligned}$$

講義ではこの係数の計算は省略した．ここでは正しく書いてみたが，だからといってあまり恩恵はない．さて，第 1 項の積分は

$$\int\frac{u}{(u^2+1)^l}du=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log(u^2+1) & (l=1)\\ \dfrac{1}{2(1-l)}\dfrac{1}{(u^2+1)^{l-1}} & (l\geqq 2)\end{cases}$$

第 2 項の積分は $I_k=\int\frac{1}{(x^2+1)^k}dx$ とおいて積分の漸化式を作る．まず $I_1=\tan^{-1}x$ である．$k\geqq 2$ とし

$$I_k=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^k}dx=I_{k-1}-\int x\frac{x}{(x^2+1)^k}dx$$

ここで第 1 項の積分の結果を利用して部分積分を行えば

$$I_k=I_{k-1}+\frac{1}{2k-2}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}}-\frac{1}{2k-2}\int\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx=\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{1}{2k-2}\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}}$$

この漸化式を使えば I_k が計算できる．例えば

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

2. 置換の技法 1

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の不定積分を考えよう．$a<0$ の場合は判別式は正でなくてはならない[*1]ので $ax^2+bx+c=(-a)(x-\alpha)(\beta-x)$, $\alpha \leqq x \leqq \beta$ と書き直せる．このとき

$$u=\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

とおく．この置換により $u^2(\beta-x)=x-\alpha$ なので

$$x=\frac{\beta u^2+\alpha}{u^2+1} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}(\beta-x)u=\sqrt{-a}\frac{(\beta-\alpha)u}{u^2+1} \qquad dx=-\frac{(\beta-\alpha)2u}{(u^2+1)^2}du$$

となる．これより u の有理関数の積分に帰着できる．

この技法についてはテキストの節末問題 3.2.4(1) を利用した．

$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$ について，被積分関数の定義域は $1<x<2$ である．ここで $u=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ とおいて置換積分[*2]する．$(x-1)u^2=2-x$ より

$$x=\frac{u^2+2}{u^2+1}=1+\frac{1}{u^2+1}, \qquad \sqrt{(x-1)(2-x)}=(x-1)u=\frac{u}{u^2+1}, \qquad dx=-\frac{2u}{(u^2+1)^2}du$$

なので

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx=-\int \frac{u^2+1}{u}\frac{2u}{(u^2+1)^2}du=-\int \frac{2}{u^2+1}du=-2\tan^{-1}u$$
$$=-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+C$$

テキストの解答と正負が異なるが，こちらが正しい．

3. 置換の技法 2

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の不定積分で $a>0$ の場合は技法 1 は使えない．この場合は $\sqrt{ax^2+bx+c}=u-\sqrt{a}x$ とおくとうまくいく．2 乗すると $bx+c=u^2-2\sqrt{a}ux$ と x^2 の項が消えるため，$x=\frac{u^2-c}{2\sqrt{a}u+b}$ と有理式で記述できるからだ．この技法についてはテキストの例題 3.6(3) を使って解説した．

$\sqrt{x^2+x+1}=u-x$ と置換する．両辺を 2 乗すれば $x+1=u^2-2ux$ なので

$$x=\frac{u^2-1}{2u+1} \qquad \sqrt{x^2+x+1}=u-\frac{u^2-1}{2u+1}=\frac{u^2+u+1}{2u+1} \qquad dx=\frac{2u^2+2u+2}{(2u+1)^2}du$$

であり，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int \frac{2u+1}{u^2+u+1}\frac{2u^2+2u+2}{(2u+1)^2}du=\int \frac{2}{2u+1}du$$
$$=\log|2u+1|=\log|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1|+C$$

4. 置換の技法 3

$\sin x$ と $\cos x$ の有理式の積分は $\tan\frac{x}{2}=u$ と置くと良い．

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

なので有理式の積分になる．例題 3.5(1) を使って解説した．

[*1] 負なら平方根の中が常に負になるので実関数にならない．

[*2] テキストの指示と形が異なるが，同じ置換である．$2-x>0$, $x-1>0$ に注意せよ．

$\int \frac{1}{\sin x} dx$ について $\tan \frac{x}{2} = u$ とおけば

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{u} du = \log |u| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

以上の 3 つの技法はある種の不定積分の計算に一般的に有効な汎用性の高い方法である．もっとも，この方法が最も簡単に計算できる方法というわけではない．さまざまな工夫でより簡単に計算できる場合もある．汎用性の高い方法をきちんと理解したうえで，問題に応じた簡単な方法を考えてみると良い．

本日のレポート課題

次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx \qquad (2) \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}} dx \qquad (3) \int \frac{1}{5+4\sin x} dx$$

これらは今日学習した 3 つの技法を使って計算する問題だ．まずは一般的な方法にのっとって計算してみること．

微分積分 I 講義メモ (7 月 2 日)

前回のレポート課題について

次の不定積分を求めよ．

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx \qquad (2) \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}dx \qquad (3) \int \frac{1}{5+4\sin x}dx$$

(1) 被積分関数の定義域は $1 < x < 2$ であることに注意せよ．置換の技法 1 を使って $u = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ とおく．$(2-x)u^2 = x-1$ より

$$x = \frac{2u^2+1}{u^2+1} = 2 - \frac{1}{u^2+1} \qquad \sqrt{(x-1)(2-x)} = (2-x)u = \frac{u}{u^2+1} \qquad dx = \frac{2u}{(u^2+1)^2}du$$

なので

$$\int \frac{1}{x\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx = \int \frac{u^2+1}{2u^2+1}\frac{u^2+1}{u}\frac{2u}{(u^2+1)^2}du = \int \frac{2}{2u^2+1}du$$
$$= \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}u) = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\right) + C$$

(2) 被積分関数の定義域は $x \geqq 2+\sqrt{6}$ および $x \leqq 2-\sqrt{6}$ である．置換の技法 2 を使って $\sqrt{x^2-4x-2} = u-x$ とおく．$-4x-2 = u^2-2xu$ より

$$x = \frac{u^2+2}{2u-4} \qquad \sqrt{x^2-4x-2} = u - \frac{u^2+2}{2u-4} = \frac{u^2-4u-2}{2u-4} \qquad dx = \frac{2u^2-8u-4}{(2u-4)^2}du$$

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}dx = \int \frac{2u-4}{u^2-2u+6}\frac{2u-4}{u^2-4u-2}\frac{2u^2-8u-4}{(2u-4)^2}du = \int \frac{2}{u^2-2u+6}du$$
$$= \int \frac{2}{(u-1)^2+5}du = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}(u-1)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-4}\right) + C$$

(3) 置換の技法 3 を使って $\tan\frac{x}{2} = u$ とおく．

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int \frac{1}{5+4\sin x}dx = \int \frac{1}{5+\frac{8u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{2}{5u^2+8u+5}du = \frac{2}{5}\int \frac{1}{(u+4/5)^2+9/25}du$$
$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5u+4}{3} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5\tan(x/2)+4}{3} + C$$

【コメント】

- どの積分も高校までの知識では計算不可能だ．前回解説した置換の技法の強力さを感じてほしい．なお，これらの技法を使う積分計算の問題は試験で必ず出題する．
- $\int \frac{1}{ax^2+1}dx,\ a > 0$ を $\tan^{-1}\sqrt{a}x$ としてしまう答案が目立つ．ただ，不定積分が $\tan^{-1}\sqrt{a}x$ になるなと思う感覚は悪くない．こういうときは積分ではなく微分してみるほうが間違いが少ないだろう．

$$\left(\tan^{-1}\sqrt{a}x\right)' = \frac{\sqrt{a}}{ax^2+1} \quad \text{より} \quad \int \frac{1}{ax^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\sqrt{a}x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2/a+1}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}} + C$$

本日の講義の要点

1. リーマン和と積分の定義

   $[a,b]$ 上定義された関数 $f(x)$ と $[a,b]$ の分割，および各小区間での代表点により

   $$S(f,\varDelta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1})$$

   をリーマン和という．小区間の幅の最大を $|\varDelta|$ と表す．関数が積分可能とは $|\varDelta| \longrightarrow 0$ においてリーマン和が一定の値に収束することを言う．

   この定義が $f(x) > 0$ の場合にはグラフと x 軸で囲む部分の面積になることは図 3.1 を眺めれば納得できるだろう．この定義から閉区間上の連続関数は積分可能であることが示せる．

2. 積分の定義から積分計算まで

   積分の定義から直接積分その値を求めることは困難である．積分の計算は高校の時と同様原始関数を利用して行う（微分積分学の基本公式）．積分の定義から微分積分学の基本公式に至る議論の流れは簡単に解説した．

   - 積分の平均値定理

     $f(x)$ を $[a,b]$ 上連続な関数とするとき，$a < c < b$ で

     $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

     を満たすものが存在する．この右辺は $[a,b]$ での $f(x)$ の平均値であり，最小値と最大値の間にある．最小値を $f(\alpha)$，最大値を $f(\beta)$ とおけば，平均値はその間にあるので中間値の定理により $f(c)$ が平均値になるような c が α と β の間に存在する．

   - 微分積分学の基本定理

     $f(x)$ は $[a,b]$ 上連続であるとし，$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおけば

     $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

     は $f(x)$ の $[x, x+h]$ での平均値になる．積分の平均値定理と微分の定義を組み合わせれば $F'(x) = f(x)$ を得る．

   - 微分積分学の基本公式（定積分の計算法）

     $G(x)' = f(x)$ であれば

     $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

     定積分が微分の逆演算（不定積分）から計算できるので置換積分や部分積分の公式も得られる．

3. 広義積分

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

   という計算に疑問を持つ人は少ないだろう．しかし，この積分に対応するリーマン和

   $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{x_1}}a_1 + \sum_{k=2}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1})$$

において $0 < x_1 \leqq a_1$ はいくらでも小さくとれるので，リーマン和の第 1 項はいくらでも大きくなり得る．よってリーマン和は収束しない．上の計算は積分の定義からは説明できない．そこで導入したのが広義積分である．広義積分は通常の積分と極限を組み合わせて定義する．p.54 の (i)(ii)p.56 の (V) が基本的だ．ただしこの広義積分の定義と微分積分の基本公式を組み合わせれば p.54(i)(ii) は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} F(\beta) - F(a) \qquad \int_a^b = F(b) - \lim_{\alpha \to a+0} F(\alpha)$$

となる．これらの式は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

として，$F(a), F(b)$ が定義されていない場合は極限に置き換えるというように理解すればよい．すなわち微分積分学の基本公式を利用して計算する場合は，広義積分も通常の積分も違いはない．冒頭の積分計算に疑問が生じないのはそのためだと言える．

基本公式が使えるので，広義積分についても置換積分や部分積分が行える．例えば p.54 の下から 5 行目の積分を $x = \sin\theta$ で置換積分すれば

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

最初の積分は広義積分だが，置換積分で出てきた積分は通常の積分である．こういう状況はしばしば起こり得るので計算上は広義積分と通常の積分を区別しなくてもよい．

4. 広義積分と通常の積分の違い (お話し）

   計算については広義積分も通常の積分も同じやり方だと強調してしまったので，では何が違うのかの説明も加えた．広義積分は積分の極限が問題になるので収束するか発散するかの考察が重要になる．この方法として定理 3.8 があるが講義ではその下の例を解説した．難しい課題だ．

   また一般に $f(x)$ が $[a, b]$ 上積分可能なら $|f(x)|$ も $[a, b]$ 上積分可能になる．しかし，広義積分については成り立たない．一般的な扱いにおいて，広義積分と通常の積分を区別することは重要である．

本日のレポート課題

p.59 の 3.3.1 を課題にする．(1) は講義で扱ったので残り 4 つをやれば良い．ヒントを与えておこう．
【ヒント】(2) は $x^2 = u$，(3) は $e^x = u$ と置換積分すると良い．(4) は絶対値の中身の正負によって積分域を 2 つに分けること．(5) は一般的な置換の技法を使うのではなく $(x-a)(b-x)$ を平方完成して三角関数を利用して置換するのが良い．工夫してみよ．

次回の講義

次回は積分の応用について解説する．応用の理解についてもその基礎にリーマン和の極限としての積分の定義がある．

微分積分 I 講義メモ (7 月 9 日)

前回のレポート課題について

(2) $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ に注意すれば

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}[-e^{-x^2}]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(3) $e^x = u$ と置換積分する．x が 0 から ∞ まで増加するとき，u は 1 から ∞ まで増加する．また $x = \log u$ なので $dx = \frac{du}{u}$ である．

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{u + (1/u)}\frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(4) $x = 1$ で積分域を分け絶対値を外す．

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

第 1 項の被積分関数の原始関数は $\sin^{-1} x$，第 2 項では $\log(x + \sqrt{x^2-1})$ である．よって

$$与式 = [\sin^{-1} x]_0^1 + [\log(x + \sqrt{x^2-1})]_1^2 = \frac{\pi}{2} + \log(2 + \sqrt{3})$$

(5) 置換の技法を使って $u = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$ とおく．$x \to a+0$ のとき $u \to +0$，$x \to b-0$ のとき $u \to \infty$ である．また $x = \frac{a+bu^2}{1+u^2}$，$dx = \frac{2(b-a)u}{(1+u^2)^2}du$，$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{(b-a)u}{1+u^2}$ より

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \int_0^\infty \frac{1+u^2}{(b-a)u}\frac{2(b-a)u}{(1+u^2)^2}du = \int_0^\infty \frac{2}{1+u^2}du = [2\tan^{-1} x]_0^\infty = \pi$$

【コメント】

- 微分積分学の基本公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ は広義積分についても，$F(b) = \lim_{x\to b-0} F(x)$，$F(a) = \lim_{x\to a+0} F(x)$ と理解しなおすことによって適用できる．計算上は広義積分と通常の積分を厳格に区別しなくても良い．
- (5) の積分での平方根の中身は a, b で 0 となる下に凸の放物線だ．ゆえに $[a, b]$ の中点が原点に来るように平行移動すれば $r = (b-a)/2$ として

$$\int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

となる．これは $x = r\sin\theta$ とおくと簡単に積分できる．

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi$$

本日の講義の要点

1. 積分の応用 1（曲線の長さ）

   $f(x)$ を C^1 級関数とし，$y = f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の上にある部分の長さを求めよう．

   - 区間 $[a, b]$ の分割 $\varDelta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり，$\mathrm{P}_i(a_i, f(a_i))$ とおく．曲線を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_n$ で近似する．

- 折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}^2} (a_i - a_{i-1})$$

  である．ここで平均値定理により $a_{i-1} < x_i < a_i$ を次が成り立つようにとる．

$$\frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = f'(x_i)$$

- 折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} (a_i - a_{i-1})$$

  となるが，これは連続関数 $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ のリーマンの和に他ならない．
- 分割を細かくしていくとき，折れ線の長さは曲線の長さに近づいていくはずだ．一方分割を細かくしていくときリーマン和は定積分の値に収束する．ゆえに長さは次の式 (p.60(2)) で求められる．

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

このように，求めたいもの（曲線の長さ）に対して，まず対象を分割し，分割された一つ一つを分かりやすいもの（線分）で近似する．そこから求めたいものの近似値をだし，分割を細かくしていった時の極限を考えるという方法を「区分求積法」と呼んでいる．これは古代ギリシャの数学でも盛んに使われた手法であり，球の表面積など様々な値を求めることができた．区分求積法の考えと，リーマン和の極限という定積分の定義を組み合わせることによって，このプロセスはより簡明なものになった．

2. 積分の応用 1（曲線の表し方による長さの公式）
   $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ が $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ と媒介変数表示されているときは，置換積分 $x = x(t)$ により次のようになる (p.60 (1))．ただし $x'(t) \geqq 0$ としておく．

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

   この等式は，より一般の媒介変数で表示された曲線の長さに適用できる．
   極座標により $r = f(\theta)$, $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ で定義される曲線は媒介変数表示 $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$ による曲線に他ならない．

$$(x')^2 + (y')^2 = (r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 = (r')^2 + r^2$$

   より曲線の長さは次 (p.60(3)) で与えられる．

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

3. 計算例
   $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ の $0 \leqq x \leqq a$ の部分の長さを求める．

$$\int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_0^a \cosh x dx = [\sinh x]_0^a = \sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

   講義では指数関数のままやったがここでは双曲線関数を使って求めた．内容はまったく同じだ．

4. 積分の応用２（面積）

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフおよび $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を求める．もちろん高校数学で既知のことだがリーマン和と関係づけて説明する．

- 区間 $[a, b]$ の分割 $\varDelta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり図形を $x = a_i$ によって n 個の部分に分割する．
- $a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i$ をとって，$x = a_{i-1}$ および $x = a_i$ で挟まれた部分を，幅 $a_i - a_{i-1}$，長さ $|f(x_i) - g(x_i)|$ の帯 (長方形) で近似する．
- 帯の面積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - g(x_i)|(a_i - a_{i-1})$$

だがこれは $|f(x) - g(x)|$ のリーマン和である．

- 分割を細かくしていけば帯の面積の総和は求める図形の面積に収束する．一方リーマン和の極限は定積分なので面積は次の式で与えられる．

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

5. 計算例 3.4.1(3)

二つの曲線の交点の x 座標は $x = \pm 2$ である．

$$\int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} dx = 2\left[4 \tan^{-1} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2\pi - \frac{4}{3}$$

6. 積分の応用２（極座標での面積）

極座標において $r = f(\theta)$ のグラフと原点を出発する 2 つの半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた図形の面積を求めよう．

- 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$ をとる．図形を原点を出発する半直線 $r = \alpha_i$ たちで分割する．
- $\alpha_{i-1} \leqq \theta_i \leqq \alpha_i$ をとり，$\theta = \alpha_{i-1}$ と $\theta = \alpha_i$ で囲まれた部分を半径 $f(\theta_i)$，頂角 $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ の扇形で近似する．
- 扇形の面積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_i))^2(\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

だがこれは $\frac{1}{2}(f(\theta))^2$ のリーマン和である．

- ゆえに面積は次の式で与えれる．

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta$$

7. 計算例 3.4.2(3)

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \tan^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \frac{1}{2(1 + u^2)} du = \frac{1}{4}[u - \tan^{-1} u]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$$

ここで $\tan 2\theta = u$ と置換積分している．

8. 積分の応用３（体積）
座標空間において平面 $x = a$ と平面 $x = b$ で挟まれた立体の体積について

$$\int_a^b S(t)dt \qquad S(x) \text{ は平面 } x = t \text{ による立体の断面積}$$

で求められることを解説した．

- 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ をとり立体を平面 $x = a_i$ によって n 個のスライスに分割する．
- $a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i$ をとって，$x = a_{i-1}$ および $x = a_i$ で挟まれたスライスを，厚さ $a_i - a_{i-1}$，面積 $S(x_i)$ の板で近似する．
- 板の体積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i)(a_i - a_{i-1})$$

だがこれは $S(x_i)$ のリーマン和である．

9. まとめ
定積分はリーマン和の極限として定義された．その定義が，各種の応用に結びついていることに注意してほしい．一方，計算は微分積分学の基本公式を利用して不定積分から求める．定義から微分積分学の基本公式を得るまでの論理については前回の講義で簡単に紹介した．こうしてみると積分の理論を理解する鍵はリーマン和にあることに気づくだろう．高校のように積分を微分の逆演算として定義してしまうと，積分の豊かな応用を理解できなくなる．

これで微分積分 I の講義を終える．試験は 7 月 30 日でありしばらく間があるが，勉強は続けるように．最低限，レポート課題に出した問題はすべて理解するようにしてほしい．

理系基礎科目「微分積分 I」（工学部機械 2 組）第 1 回試験（6 月 4 日実施）解答例とコメント

各小問に 10 点，大問 3 に 20 点の 100 点満点で採点した．最高点は 70 点，最低点は 0 点，平均点は 38.3 点だった．はっきり言って全く勉強しないまま試験を受けたのではないかと思える人が多すぎる．どうせ微分だ，高校の知識で何とかなると高をくくっていたのだろうか．高校の知識で解ける問題など最初から出すつもりはない．

原因は日常的な学習の不足だろう．講義メモは毎週の自習教材の意味を持たせており，レポート課題の解答も掲載している．きちんと学習していれば 50 点は取れるはずの問題だ．日常的な学習をせず，試験前に勉強しようとしても間に合うはずがない．形だけとにかく覚えて勉強した気になったのでは特に大問 2 には答えられないだろう．日常的な学習の必要性を自覚すること．

大学の単位制は授業時間の 2 倍の家庭学習をすることを前提に作られている．家庭学習をしない人が単位を得られないのは当然の結果である．とはいってもあまり多くの学生に不可をつけるわけにもいかない．今回は 30 点未満の 18 名を不合格とする．この 18 名は積分の試験で不合格になった場合は再試験の対象にならない．覚悟して後半の授業に臨むように．

1 (1) $y = \cos^{-1} x$ の定義域，値域，グラフを書け．

【解答例】 定義域は $[-1, 1]$，値域は $[0, \pi]$，グラフについてはテキストを見ること．

【コメント】

- 逆三角関数は三角関数の逆関数である．$y = \cos^{-1} x$ とは $x = \cos y$ ということなので $-1 \leqq x \leqq 1$ は当然のことだ．形式的に覚えるのではなく意味を意識して覚えるようにすれば間違えることはないと思うのだが.
- おそらく $\cos^{-1}(1/2)$ がいくつかという問題にしたらできたのかもしれない．計算方法だからだ．しかし逆三角関数の理解についてはこのような細部の問題では測れない．グラフをイメージすることは関数を理解することのもっとも基本なはずだ.
- 逆三角関数は 4 月 16 日の講義で扱った．グラフはテキストに書いてあるのできちんと見ておくように指示したはずだ.

1 (2) 等式 $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を示せ.

【解答例】 $\theta = \sin^{-1} x$ とおけば $\sin\theta = x$ かつ $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．ゆえに $\cos\theta \geqq 0$ なので $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ である．

$$\tan \sin^{-1} x = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

と $-\pi/2 \leqq \sin^{-1} x \leqq \pi/2$ から

$$\sin^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

【コメント】

- 等式の証明を $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ から始めるのは議論としておかしい．これでは証明したい式を

仮定したことになるからだ．この式を変形して正しい式を導けたからといって，元の等式が証明できたことにはならない．もっとも「$A = B$ が成り立つためには $C = D$ が成り立てばよい．」という議論を続けていけば正しい議論になるのだが．なお「$A = B$ が成り立てば $C = D$ が成り立つ」は論理記号では「$A = B \Longrightarrow C = D$」であり，「$A = B$ が成り立つためには $C = D$ が成り立てばよい」は「$A = B \Longleftarrow C = D$ 」である．

- 両辺の導関数が等しいからという答案があったが $f'(x) = g'(x)$ では $f(x) - g(x)$ が定数であることしかわからない．$x = 0$ などを代入してその定数が 0 であることを言わないと $f(x) = g(x)$ とは言えない．
- $\tan\sin^{-1}x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を言うには $-\pi/2 < \sin^{-1}x < \pi/2$ が必要だ．解答の中にこの不等式が記述されていたとしても，それを使う場面で言及がないと正しい証明とは言えない．
- 逆三角関数に関する等式の証明は 4 月 16 日の講義でレポート課題にした 1.3.3(1) でやってもらった．4 月 23 日の講義メモにその解答例とコメントをつけている．結論から始めないように注意もしている．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (3) $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

【解答例】 $(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ と $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を使えばよい．

$$(x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2})' = \sin^{-1}x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

【コメント】

- $\sin^{-1}x$ の導関数を間違えて覚えている人がいる．確実に覚えるためには導出の過程を何度か自分で体験することが必要だ．例えば
  $y = \sin^{-1}x$ より $x = \sin y$ なので $1 = \cos y y'$ になる．$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$ なので $y = \sin^{-1}x$ のグラフが単調増加であることと合わせて $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる．
  この考察が頭の中で 15 秒でできるようになれば公式を覚えたのと変わらない．
- 合成関数の微分法則のミスが目立つ．まれだが積の微分法則を間違える人もいる．計算量が足りないのでは．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (4) $f(x) = (x+1)\cos x$ とするとき $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

【解答例】 ライプニッツの公式を使えば $(x+1)$ の 2 次以上の微分がすべて 0 であることから $n \geqq 1$ で

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (x+1)^{(k)}(\cos x)^{(n-k)} = (x+1)(\cos x)^{(n)} + n(\cos x)^{(n-1)}$$

となる．これに $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$ を代入すれば

$$f^{(n)}(x) = (x+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

【コメント】

- 4 回ぐらい微分して結果を予想した答案が目立った．これは数学的帰納法で証明したものを除いて正解

にはしていない．そもそもいくつか計算して予想を立てたとしてもそれで議論が終わることはあり得ない．予想はあくまで予想であって結論ではない．
今年の入試問題で三角形と平行線を使って長さの漸化式を求める問題を出した．多くが 2 番目まで求めて勝手な予想を立て破たんした．いくつか調べて予想を立てるという受験数学での技法の危うさが際立った．こういう議論では正解にならないことを意識してほしい．

- $\cos x$, $\sin x$ を微分すると偏角が 90 度進むことは知っておいてほしい．すなわち $(\cos x)' = \cos(x + \pi/2)$, $(\sin x)' = \sin(x + \pi/2)$ が成り立つ．これは単位円上の速度 1 の反時計回りの運動の速度ベクトルを考えると良い．
- ライプニッツの公式における $(\cos x)^{(k)}$ を $(\cos x)^k$ と書く人がいるが記号の違いには注意すること．中にはべきだと思い込んでいる答案もあったが問題外だ．意味を考えずに覚えるのは，勉強した気になっている分だけ覚えないより悪いことかもしれない．
- ライプニッツの公式は 4 月 23 日の講義で扱った．テキスト p.24 の例を解説したがこの問題はその類題である．

1 (5) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\sin x}$ を求めよ．

【解答例】対数をとって $\log x^{\sin x} = \sin x \log x$ の極限を考える．

$$\lim_{x\to+0} \sin x \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/\sin x}$$

とすればこれは ∞/∞ 型の不定形なのでロピタルの定理が使える．分母分子をそれぞれ微分したものの極限は

$$\lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = \lim_{x\to+0} -\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

となるのでロピタルの定理により $\lim_{x\to+0} \sin x \log x = 0$ である．よって

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x \log x} = e^0 = 1$$

【コメント】

- ロピタルの定理は 0/0 型あるいは ∞/∞ 型の不定形でないと使えない．ところがそういうことを自覚せずになんとなく「微分したものの極限を考えればよい」と誤解している人が多い．例えば $\sin x \log x$ を微分するような答案だ．$f(x)$ の極限と $f'(x)$ の極限は無関係なので，こんな計算をしても何の意味もない．
  このような解答をする人でも単純な問題であればきちんと計算できるのかもしれない．ただ，それはロピタルの定理を理解しないままなんとなく使って答えが出たに過ぎない．ロピタルの定理を適用できる条件は何か，よく考えて問題を解くようにしてほしい．
- ロピタルの定理は 5 月 21 日の講義で解説した．この問題は p.33 の例 (4) の類題だ．

2 (1) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ の $x = 0$ における $n = 3$ の場合のテイラーの定理を記述せよ．

【解答例】 一般化された二項係数は

$$\binom{1/3}{0}=1,\quad \binom{1/3}{1}=\frac{1}{3},\quad \binom{1/3}{2}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}=-\frac{1}{9}$$

$$\binom{1/3}{3}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}=\frac{5}{81},\quad \binom{1/3}{4}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}=-\frac{10}{243}$$

よって

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+R_3(x),\quad R_4(x)=-\frac{10}{243}x^4(1+\theta x)^{1/3-4}$$

【コメント】

- テイラーの定理では関数を n 次多項式と $R_{n+1}(x)$ の和として記述する．この問題では $x=0$ におけるテイラーの定理なのでその多項式の部分の k 次の項は $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ である．$f(x)=(1+x)^\alpha$ のときは $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ なので

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k=\binom{\alpha}{k}x^k$$

  である．ゆえに $x=0$ における $n=3$ の場合のテイラーの定理は

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+R_4(x),\quad R_4(x)=\binom{\alpha}{4}x^4(1+\theta x)^{\alpha-4}$$

  となる．$\alpha=1/3$ とすれば解答を得る．
- $\binom{\alpha}{k}$ は組み合わせの一般化で一般化された二項係数と呼ぶが，残念ながら使った人はいなかった．組み合わせの定義は知っているはずなので難しいこととは思えないのだが．このような記号は具体的な $1/3$ という値よりも α でやったほうが表示がシンプルになるので理解しやすい．こういうことは自分自身で考えないと分からない．
- k 次の項を $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k$ とすると多項式にならない．一度でも具体的問題にあたっていればおかしいことに気が付くはずだ．

2 (2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt[3]{1+x}-(a+bx+cx^2+dx^3)\right)$ が収束するように a,b,c,d の値を定めよ．またその時の極限を求めよ．

【解答例】 (1) の結果から $a=1,\ b=1/3,\ c=-1/9,\ d=5/81$ とすれば

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sqrt[3]{1+x}-(a+bx+cx^2+dx^3)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}-\frac{10}{243}(1+\theta x)^{-11/4}=-\frac{10}{243}$$

【コメント】

- (1) ができれば簡単な問題だ．特にいうことはない．
- この問題をロピタルの定理を使って解こうとした人がいる．各段階で 0/0 型不定形になるための条件として a,b,c,d の値を決めることができる．ただし，作業は大変だし感覚も悪い．この方法で正解にたどり着いた人はいなかった．

2 (3) (1) の結果を利用して $\sqrt[3]{1.3}$ の近似値を求めよ（誤差の考察を忘れないこと）．

【解答例】 (1) の結果に $x = 0.3 = 3 \times 0.1$ を代入する．

$$\sqrt[3]{1.3} = 1 + 0.1 - 0.01 + \frac{5}{3}0.001 + R_4(0.3) \quad R_3(0.3) = -\frac{1}{3}0.001(1+\theta 0.3)^{-11/3}$$

最初の 4 つの項の和は $1.091666\cdots$，誤差の $R_4(0.3) = -0.000333\cdots(1+\theta 0.3)^{-11/3}$ なので $0 > R_4(0.3) > -0.000333\cdots$ であり $1.091666\cdots > \sqrt[3]{1.3} > 1.091333\cdots$ となる．これを小数点以下第 4 位で四捨五入すれば 1.091 または 1.092 である．

【コメント】

- $0.3 = 3 \times 0.1$ なので各項で約分ができ計算が簡単になる．
- 解答例にあるように小数点以下第 4 位で四捨五入した時の値は一通りには決められない．小数点以下第 3 位で四捨五入して 1.09 とするのも間違いとは言えない．ただし誤差を考えるとこの理解は少しもったいない．なお近似値を取り扱う場合 $1.0915 \pm 0.000166\cdots$ という表示もよく使われる．
- 誤差の評価は難しい課題だが重要なことなので理解しておくように．
- 大問 2 は 5 月 14 日のレポート課題として出題した問題だ．授業に真面目に取り組んでいればこのような問題が出題されることは当然予想できるはずだ．

3 次で定義される関数 $f(x)$ について，その導関数を求めよ．また導関数の連続性を調べよ（$x = 0$ の時と $x \neq 0$ の時を分けて議論すること）．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

【解答例】 $x \neq 0$ のとき $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ である．$x = 0$ のときは

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$$

より $f'(0) = 0$ である．$f'(x)$ の $x \to 0$ でのふるまいを考えると，第 1 項は 0 に収束するが，第 2 項は -1 から 1 の範囲で変動してしまう．よって $\lim_{x \to 0} f'(x)$ は収束せず，$f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である．$x \neq 0$ では $f(x)$ は連続関数の差積合成で記述されているので連続である．

【コメント】

- $x \neq 0$ での $f'(x)$ の計算とその連続性は簡単なことだ．なお $f(x)$ の連続性を考察している答案があったが導関数の連続性を聞いているので解答になっていない．
- $f'(0)$ は微分の定義によって計算するが，その考察をした人はほとんどいなかった．$f(0) = 0$ で定数だから $f'(0) = 0$ というのは全く意味のない解答だ．どんな関数も $f(0)$ は定数だが，だからといって $f'(0) = 0$ とは限らない．例えば次の例を見ればよい．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

$f(1) = 2$ で定数だが $f'(1) = 1$ だ．分からなければ $x \neq 1$ の時の式を約分してみると良い．

- この問題は 4 月 16 日の講義メモの 5 に記述している．微分という概念と微分計算の違いを理解するための重要な例として紹介した．

理系基礎科目「微分積分 I」（工学部機械 2 組）第 2 回試験（7 月 30 日実施）解答例とコメント

1 (1) を 10 点，他の問題を 15 点の配点とした．平均点は 49.98 点で，30 点を合格点とした．

1 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^6}{x^4-1}dx$

【解答例】 $\dfrac{x^6}{x^4-1} = x^2 + \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ より

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}$$

と部分積分する．よって

$$\int \frac{x^6}{x^4-1}dx = \int x^2 + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

【コメント】

- 割り算により分子の次数を分母より小さくしてから部分分数展開を行うこと．他な基本的な問題なので特にコメントはつけない．

1 (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x+2\sin x}$

【解答例】 $u = \tan\frac{x}{2}$ とおけば

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

より

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x+2\sin x} = \int \frac{2}{3(1+u^2)+2(1-u^2)+4u}du = \int \frac{2}{(u+2)^2+1}du = 2\tan^{-1}(u+2)$$
$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}+2\right)+C$$

【コメント】

- $u=\tan(x/2)$ の置換を使う問題．この置換により $\cos x$, $\sin x$, dx がどう変換されるのかは単に暗記するのではなく自分で導けるようにしておくこと．
- 不定積分で置換積分を使った場合，元の変数に戻すように．

1 (3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

【解答例】 $\sqrt{x^2+4} = u - x$ と置換積分する．$x = \frac{u}{2} - \frac{2}{u} = \frac{u^2-4}{2u}$ なので

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{u^2+4}{2u},\quad dx = \frac{u^2+4}{2u^2}du$$

である．また $x=1$ のとき $u=1+\sqrt{5}$，$x=2$ のとき $u=2+2\sqrt{2}$ なので

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{2u}{u^2-4}\frac{2u}{u^2+4}\frac{u^2+4}{2u^2}du = \int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{2}{u^2-4}du = \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} \frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{|u-2|}{|u+2|}\right]_{1+\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} - \log\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+3}\right) = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+2)$$

【コメント】

- 最後の式はどこまで整理すべきか悩ましい．ただ，原始関数に代入しただけというのはいただけない．一定の簡略化は行うべきだろう．
- この問題は $\sqrt{x^2+4}=u$ とおいても計算できる．計算してみよ．
- 定積分の置換積分では積分域の考慮が必要になる．これを怠る人がいるが重大な誤りだ．

1 (4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

【解答例】 $3+2x-x^2=(3-x)(x+1)$ なので $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ と置換積分する．$x=\frac{3-u^2}{u^2+1}$ なので

$$\sqrt{3+2x-x^2}=(x+1)u=\frac{4u}{u^2+1} \qquad dx=-\frac{8u}{(u^2+1)^2}du$$

である．また $x=1$ のとき $u=1$，$x=3$ のとき $u=0$ である．

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_1^0 \frac{u^2+1}{4u}\frac{-8u}{(u^2+1)^2}du = \int_0^1 \frac{2}{u^2+1}du = \left[2\tan^{-1}u\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

【コメント】

- 被積分関数は $x\to 3-0$ で無限大に発散している．広義積分である．しかし，置換積分した結果は広義積分ではない．
- $\sqrt{3+2x-x^2}$ を u の式に直すには，$(x+1)u=(x+1)\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=\sqrt{(3-x)(x+1)}$ を利用する．$x=\frac{3-u^2}{u^2+1}$ を代入してもいいが，計算ははるかに複雑だ．
  このようなちょっとした計算の工夫は，自分で計算してみないと気が付かない．講義で扱った問題をすべて自力で計算し，計算過程を講義メモの計算と比べれば納得できると思うのだが．

2 放物線 $y^2=4kx,\ k>0$ の頂点 $(0,0)$ から放物線上の点 $(a,2\sqrt{ka}),\ a>0$ までの曲線の長さを求めよ．

【解答例 1】通常の x,y の役割を入れ替えて，$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ を $0\leqq y\leqq 2\sqrt{ka}$ まで積分すればよい．

$$\int_0^{2\sqrt{ka}} \sqrt{1+(y/(2k))^2}dy$$

$\frac{y}{2k}=u$ と置換積分すれば

$$\int_0^{\sqrt{a/k}} \sqrt{1+u^2}2kdu = k\left[u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^{\sqrt{a/k}} = \sqrt{a}\sqrt{k+a}+k\log\left(\sqrt{\frac{a}{k}}+\sqrt{1+\frac{a}{k}}\right)$$

【解答例 2】 $y = 2\sqrt{kx}$ より $y' = \sqrt{k/x}$ だ．よって求める曲線の長さは

$$\int_0^a \sqrt{1+\frac{k}{x}}dx$$

で求められる．この積分は $\sqrt{1+(k/x)} = u$ と置換積分することにより計算できる．以下省略.

【コメント】

- 少し煩雑な計算になりすぎたようだ．この問題を完全に解けた人はいなかった.
- $\int \sqrt{x^2+1}dx$ の計算は $\sqrt{x^2+1} = u - x$ と置くことにより計算できる．ここでは部分積分による計算を紹介しよう.

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

ここで $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ を使えば

$$2\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を正の数とする．極座標によって $r^2 = a^2\cos 2\theta,\ -\pi/4 \leqq \theta \leqq \pi/4$ で表される曲線により囲まれる部分の面積を求めよ.

【解答例】 極座標による面積は $r^2/2$ を積分すればいいので

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

【コメント】

- 極座標で表示された曲線による面積の求め方を知っていれば簡単に計算できる.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 関数 $f(x)$ のリーマン和とは何か説明せよ.
(2) 積分がリーマン和の極限であることを利用して，$f(x) \leqq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 (1) 区間 $[a,b]$ を $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ と分割し，$a_{j-1} \leqq c_j \leqq a_j$ を満たす c_j をとる．このとき

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(a_j - a_{j-1})$$

をリーマン和という.

(2) $f(x) \leqq g(x)$ であれば，$f(c_j) \leqq g(c_j)$ なのでリーマン和について

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(a_j - a_{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^{n} g(c_j)(a_j - a_{j-1})$$

が成り立つ．定積分はリーマン和の極限なので次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

【コメント】

- 言葉で説明しようとする人が多いが，式で書けないと数学の議論には使えない．式で記述するためには，表示に必要なデータ（a_j, c_j など）を文字で置かなくてはならない．それによって数学の議論は明快になる．