微分積分 II 講義メモ (10 月 1 日)

この講義では 2 変数関数を中心に多変数関数の微分積分に関する基本事項を解説する．概念は新しいが計算は簡単なので，高校の時に数学 III が苦手だったという人も特に大きなハンデはない．新しい内容を一つずつ理解していくようにしてほしい．

本日の講義の要点

1. 2 変数関数のグラフ
   主に 2 変数関数を扱う理由の一つに，グラフが座標空間内の曲面として理解できることがある．まずグラフの具体例を解説した．（テキストには記載なし）
   - 関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは座標空間における点 $(x, y, f(x, y))$ たちの作る図形である．このとき，xy 平面は水平面，z 座標は高さとみなす．
   - 定数関数 $z = c$ のグラフは高さ c の水平面である．
   - 1 次関数 $z = ax + by + c$ のグラフは平面である．z 軸上の点 $(0, 0, c)$ はこの平面の上にあり，これを z 切片という．
     x を 1 増やすと z は a だけ増える．ゆえに y 軸に垂直な平面で切った切り口の直線の傾きは a であり，これを x 方向の傾きと呼ぶ．同様に b は y 方向の傾きである．
   - 一般に $z = f(x, y)$ のグラフを理解するには高さ c の等高線 $f(x, y) = c$ の形を調べるのが有効である．
     - $z = 2x^2 - y^2$ について，等高線はすべて原点を中心とする楕円である．x 軸上での断面図は上開きの放物線 $z = 2x^2$ であり y 軸上での断面図はやはり上開きの放物線 $z = y^2$ である．ゆえにこの曲面は放物線の回転面を一方向にゆがめたものになっている．$(0, 0)$ で極小である．
     - $z = 2x^2 - y^2$ について，高さ 0 の等高線は 2 直線 $y = \pm\sqrt{2}x$ である．他の高さの等高線はすべて原点を中心とする双曲線であり，漸近線は $y = \pm\sqrt{2}x$ である．x 軸上での断面図は上開きの放物線 $z = 2x^2$ であり y 軸上での断面図は下開きの放物線 $z = -y^2$ である．この曲面を地形として考えた時 $(0, 0)$ は峠になっている．このような点を鞍点という．
     - $z = -2x^2 - y^2$ のグラフは最初のグラフの上下を逆転させたグラフである．
   - 無理関数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフは，原点中心で半径 1 の球面の上半分である．
2. 平面内の集合に関する用語
   平面内の集合は多様であるが，ここではいくつかの滑らかな曲線で囲まれた集合（あるいはそれからいくつかの点を除いた集合）のみ考えることにする．境界，内部，外部，閉集合，開集合という言葉を紹介したがこれらは直感的に理解しておけば良い．
3. 2 変数関数の極限，連続性
   極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ は直感的に理解しておいてくれればよい．また連続性も $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ も直感的に理解しておくこと．講義では例題 5.2 を解説した．
   - $(x, y) \to (0, 0)$ での極限を調べるには極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geqq 0$ を利用して $r \to 0$ の極限を考えれば良い．（r は原点との距離であることに注意せよ ）
   - 例題 5.2(1) の関数について，$(x, y) \neq (0, 0)$ のとき
     $$f(x, y) = \cos\theta\sin\theta$$
     となる．これは $r \to 0$ としても θ の値によって $-1/2$ から $1/2$ までのあらゆる値をとることにな

る．$(x,y)\to(0,0)$ で $f(x,y)$ が一定の値に近づくとは言えないので，$f(x,y)$ の極限は存在せず不連続である．この事情は p.86 図 5.4 を見てほしい．

- 例題 5.2(2) について，(1) と違い分母が r なので $f(x,y)=r\cos\theta\sin\theta$ である．ゆえに $0\leqq|f(x,y)|\leqq r/2$ が成り立つので $r\to 0$ のときこれは 0 に収束する．よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ でありこの関数は $(0,0)$ で連続である．

本日のレポート課題とヒント

演習問題の 5.1.3 を課題とする．提出締め切りは 10 月 6 日 (火)12 時，提出は教養科目等事務室（全学教育棟 A 棟 4 階）の前にレポート提出箱があるのでそこに入れること．授業科目名と担当教員名を確認して入れ間違えが無いようにしてほしい．

5.1.3 次の関数の点 $(0,0)$ での連続性について調べよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

(2) $g(x,y)=\begin{cases}xy\log(x^2+y^2) & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

締め切りに遅れた場合は研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）まで持ってきてほしい．締め切りにはたいした意味があるわけではないので受け取る．ただし，添削の都合上，あまり授業の直前に持ってこられても対応できない．やはり締め切りは守ってほしい．

ヒントについてだが，どちらも極座標を利用する．例題 5.2 を参考にすること．なお $\lim_{r\to+0} r\log r=0$ である．ロピタルの定理の応用として前期に解説済みである．

微分積分 II 講義メモ (10 月 8 日)

前回のレポート課題について

2 変数の関数の連続性を調べる問題（p.87 演習問題 5.1.3）を出題した．いずれも極座標を使って考察する問題だ．(1) は $(x, y) \neq (0, 0)$ で

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \cos 2\theta$$

なので，とる値は偏角 θ のみで決まる．ゆえに $(0, 0)$ にいくら近づけても $f(x, y)$ の取る値は偏角によって -1 から 1 までの任意の値をとる．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

は成立せず $(0, 0)$ で不連続である．

(2) は $(x, y) \neq (0, 0)$ で

$$g(x, y) = xy\log(x^2 + y^2) = r^2\cos\theta\sin\theta\log r^2 = \sin 2\theta r^2\log r$$

である．$0 \leqq |g(x, y)| \leqq r^2|\log r|$ であり $\lim_{r\to+0} r^2\log r = 0$ なので挟み撃ちにより

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$$

が成り立つ．よって連続である．

【コメント】

- 極座標はこの手の問題に強力な手段になる．ただし万能というわけではない．5.1.4 ではうまくいかない．
- 次のような表記をする人が多いが厳密には間違いである．ただし，「一定の値に近づかない」という表記があれば正解とみなせるだろう．あまりうるさいことは言いたくない．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

- (2) では挟み撃ちを使ってほしい．$r^2\log r$ が 0 に収束したとしても，それに定数以外のものがかかっているときは全体が 0 に収束するとは言えない．
- $\lim_{r\to+0} r^2\log r = 0$ はロピタルの定理で証明できる．テキスト p.33 を見ること．前期の講義でも解説済みだ．なお $r^2 \to 0$ だからという理由は誤りだ．結論が正しくても論理が正しくなければ正解にはできない．

本日の講義の要点

1. 偏微分 (p.88)
   - 偏微分の定義は p.88 に記述されている．x で偏微分するとは y を固定して（定数とみなして）x で微分することなので分かりやすいだろう．記号について p.88 の一番下にまとめられているので確実に使ってほしい．
   - 偏微分は x 方向（y 方向）に動かした時の変化率に過ぎないので，偏微分可能だけでは連続性すら保証されない．この状況が例題 5.3 に記述されている．

2. 全微分（テキストに記載なし）

$z = f(x, y)$ のグラフが $(a, b, f(a, b))$ において滑らかならその点で接する接平面が存在するはずだ．接平面とグラフの平面 $y = b$ による切り口は，xz 平面での曲線 $z = f(x, b)$ とその接線になる．1 変数関数の接線の傾きは微分係数に他ならないので，切り口の接線の傾きは $f_x(a, b)$ になる．これが節平面の x 方向での傾きであり，接平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で表される．この平面が $(a, b, f(a, b))$ を通っていることに注意せよ．

全微分可能性は，この 1 次式が実際に 1 次近似式であることを意味する．すなわち誤差を

$$\rho(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\rho(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

が成り立つこととして定義する．ぶんぼは (x, y) と (a, b) の距離なので分子が距離に比べて圧倒的に小さくなることを意味している．

論理的には全微分が微分の多変数への拡張である．全微分可能を単に微分可能ということもある．

3. C^1 級関数の全微分可能性

偏導関数 f_x, f_y がともに存在し連続であるとき，$f(x, y)$ を C^1 級関数という．講義では次の定理を証明した．

定理　C^1 級関数は全微分可能である．

これからグラフは滑らかであり接平面が存在する．さらに連続にもなる．テキストには証明なしに連続性のみが述べられている (定理 5.5) がこれでは全く不十分である．講義でこの事実を証明したので，講義メモにも記述しておく．

- $x = a + h,\ y = b + k$ とおく．これによって全微分の定義を書き直すと

$$\rho(x, y) = \rho(a + h, b + k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k$$

とおいて

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\rho(a + h, b + k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が示すべきことである．

- $F(x) = f(x, b + k)$ とおく．f は x について偏微分可能なので，F は微分可能である．ゆえに平均値定理より

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = F(a + h) - F(a) = F'(a + \theta_1 h)h = f_x(a + \theta_1 h, b + k)h$$

同様に $G(y) = f(a, y)$ とおく．f は y について偏微分可能なので，G は微分可能である．ゆえに平均値定理より

$$f(a, b + k) - f(a, b) = G(b + k) - G(b) = G'(b + \theta_2 k)k = f_y(a, b + \theta_2 k)k$$

- この 2 式の和をとって ρ の定義式に代入すれば

$$\rho(a+h.b+k) = (f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b))\,h + \Big(f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)\Big)\,k$$

  となるが f_x, f_y の連続性から $(h,k) \to (0,0)$ のとき，上の式における h,k の係数は 0 に収束する．$h/\sqrt{h^2+k^2}$, $k/\sqrt{h^2+k^2}$ はともに絶対値 1 以下なので，$\rho(a+h,b+k)/\sqrt{h^2+k^2}$ も 0 に収束する．ゆえに f は全微分可能である．

この定理のおかげでいちいち全微分可能性のチェックを行う必要がなくなる．例えば例題 5.3 の関数は $(0,0)$ 以外では C^1 級であり全微分可能である．

4. 合成関数の微分（連鎖法則）

   $z = f(x,y)$ と $x = x(t)$, $y = y(t)$ の合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ について，z が x,y の一次式で近似され，x,y が t の一次式で近似されれば z は t の一次式で近似されるだろう．この発想を使って合成関数の微分 定理 5.8 を解説した．一次式は行列で書けること，一次式の合成は行列の積で記述できることから合成関数の微分は行列を利用するときれいに整理して記述できる．詳しくは次回解説する．

本日のレポート課題とヒント

p.93 の 5.2.1 を課題にする．偏微分計算の問題なので一方を定数だと思って微分すればよい．ヒントは不要だろう．なおテキストを入手できていない人もいるかもしれないので問題を記述しておく．

$$(1)\ f(x,y) = x^5y^2 + 3x^3y \quad (2)\ f(x,y) = \frac{x}{x-y} \quad (3)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+4xy+y^2}$$

$$(4)\ f(x,y) = \log_y x \quad (5)\ f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad (6)\ f(x,y) = \int_y^x e^{t^2}dt$$

微分積分 II 講義メモ (10 月 15 日)

前回のレポート課題について

偏微分の計算問題（p.93 演習問題 5.2.1）を出題した．x で偏微分するとは y を定数とみなして x で微分することなので，1 変数の微分の知識で簡単に答えられる．計算過程は省略しいくつかコメントをつける．

【コメント】

- $\log_y x$ の y による偏微分では

$$(\log_y x)_y = \left(\frac{\log x}{\log y}\right)_y = -\log x \frac{1}{(\log y)^2}\frac{1}{y} = -\frac{\log x}{y(\log y)^2}$$

  だが，この $1/y$ をかけることを忘れる人が多かった．合成関数の微分を繰り返すとき，中身の微分を忘れないようにすること．

- $\int e^{t^2} dt$ は初等関数では表せない（理由は難しい）ので，積分計算で原始関数を求めることは不可能である．ただし原始関数が存在することは確かだ（連続関数は積分可能）．原始関数を具体的に求めて考えるという人が目につくが，求められたということは重大なミスを犯していることに他ならない．この問題では $\int e^{t^2} dt = F(t)$ とおき

$$f(x,y) = \int_y^x e^{t^2} dt = F(x) - F(y)$$

  とおいて偏微分すればよい．なお $F'(x) = e^{x^2}$ である．

本日の講義の要点

1. 偏微分 (p.88)
   - 偏微分の定義は p.88 に記述されている．x で偏微分するとは y を固定して（定数とみなして）x で微分することなので分かりやすいだろう．記号について p.88 の一番下にまとめられているので確実に使ってほしい．
   - 偏微分は x 方向（y 方向）に動かした時の変化率に過ぎないので，偏微分可能だけでは連続性すら保証されない．この状況が例題 5.3 に記述されている．
2. 合成関数の微分（連鎖法則）

   定理 5.9 を念頭に次のように解説した．
   - $x = \varphi(u,v)$ が $(u,v) = (\alpha,\beta)$ で全微分可能とする．これは 1 次近似式が存在するということなので

$$x = \varphi(u,v) \fallingdotseq \varphi(\alpha,\beta) + \varphi_u(\alpha,\beta)(u-\alpha) + \varphi_v(\alpha,\beta)(v-\beta)$$

     が成り立つ．
   - $y = \psi(u,v)$ も $(u,v) = (\alpha,\beta)$ で全微分可能とする．同様に

$$y = \psi(u,v) \fallingdotseq \psi(\alpha,\beta) + \psi_u(\alpha,\beta)(u-\alpha) + \psi_v(\alpha,\beta)(v-\beta)$$

     が成り立つ．
   - $(a,b) = (\varphi(\alpha,\beta), \psi(\alpha,\beta))$ として以上 2 式を行列を使って書き直す．

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-\alpha \\ v-\beta \end{pmatrix}$$

- $z = f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で全微分可能とする．これも一次近似可能ということなので

$$z = f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = f(a,b) + \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

- この 2 つの式を組み合わせれば

$$z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \fallingdotseq f(\varphi(\alpha,\beta), \psi(\alpha,\beta)) + \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-\alpha \\ v-\beta \end{pmatrix}$$

- この式は z が u, v の 1 次式で近似されること（全微分可能であること）を示唆する．u, v の係数が (α, β) における偏微分係数であることから

$$\begin{pmatrix} z_u(\alpha,\beta) & z_v(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u(\alpha,\beta) & \varphi_v(\alpha,\beta) \\ \psi_u(\alpha,\beta) & \psi_v(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

  を得る．考える点の座標を省略すれば

$$\begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

  であり，これを成分表示すれば定理 5.9 になる．

合成関数の微分法は合成のパターンによって様々な表示になる（定理 5.7，5.8，5.9）．しかしこれらは一次近似の考えを利用すれば，一次近似可能な関数の合成がやはり一次近似可能であるということに他ならない．一次式が行列で表されること，一次式の合成は行列の積で表されることから合成関数の微分法は行列を使うときれいに表示できる．難しいが考えてみてほしい．

講義では具体例として例題 5.5 と演習問題 5.2.4(1) を扱った．これはできるようにしておくこと．

3. 高次の偏導関数

偏導関数も関数なのでさらにそれをさらに偏微分することを考える．定義はテキスト p.94 に記述されている．講義では $\sin(xy)$ の 2 次までの偏導関数を求めてもらった．この程度のことは簡単に計算できるようにしておくこと．

- f_{xy}, f_{yx} がともに存在し連続なら $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ (定理 5.10).
  この主張は連続性の仮定がないと成り立たない．例題 5.6 にその例が解説されているが難しい．
- n 次までの偏導関数がすべて存在し連続であるとき，$f(x,y)$ を C^n 級関数という．重要な概念なので覚えておくこと．
- C^n 級関数については n 次までの偏導関数は偏微分の順序によって変わらない（p.96 の例をみよ）．x, y についてそれぞれ何回偏微分したかのみで決まるので

$$\frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m} \qquad l + m \leqq n$$

  という記号を使う．

4. テイラーの定理（p.96 定理 5.11）

一変数の場合と同様に多変数においても微分の応用の基本はテイラーの定理である．式の形はテキストで確認しておくこと．

- $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，x で偏微分したものに h をかけ，y で偏微分したものに k をかけ，それらを加え合わせるという操作を意味する．ただし h, k は x, y と無関係な定数とみなす．すると，それらの m 乗はこの操作を m 回繰り返すこととして理解できる．

- 講義では 2 回繰り返してどうなるかを解説した．

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f = hf_x + kf_y$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)(hf_x + kf_y) = h^2 f_{xx} + hkf_{xy} + khf_{yx} + k^2 f_{yy} = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

  この式を見れば $(x+y)^2$ の展開式とよく似ていることに気づくだろう．実際にそれは正しく，定理 5.11 の中に記述されている式を（2 項定理の証明とほぼ同様に）数学的帰納法で示すことができる．

- さらに $(x,y)=(a,b)$ を代入すれば

$$\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b) = \sum_{l=0}^{m}\frac{\partial^m f}{\partial x^l \partial y^{m-l}}(a,b)\frac{h^l}{l!}\frac{k^{m-l}}{(m-l)!}$$

  となり，h,k の m 次式であることが良くわかる．テイラーの定理の多項式部分の一般項は

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}(a,b)\frac{h^p}{p!}\frac{k^q}{q!} \qquad p+q \leqq n$$

  である．

- テイラーの定理による 1 次近似式は今まで述べたものに過ぎない．2 次近似式は

$$f(a+h,b+k) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + f_{xx}(a,b)\frac{h^2}{2} + f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)\frac{k^2}{2}$$

テイラーの定理が何故成立するかについては次回解説する．

本日のレポート課題とヒント

p.93 の演習問題 5.2.4（(19) は授業で解説済み）と p.97 の 5.3.1 を課題にする．計算問題ばかりなので確実にやっておくように．

微分積分 II 講義メモ (10 月 29 日)

前回のレポート課題について

合成関数の微分を利用する問題と 2 次偏導関数の計算問題を出題した．いずれも基本的であり必ずやっておくこと．提出されたレポートについて何人かに計算力の問題を感じるがここでコメントするような全体的な問題はない．

本日の講義の要点

1. テイラーの定理（p.96 定理 5.11）

   前回はテイラーの定理が $n = 1, 2$ の場合にどのような形になるかを確認した．今回はテイラーの定理がどのように証明されるのかを解説した．若干難しい内容だが考えてみると良い．

   - 2 変数関数 $f(x, y)$ と関数 $\varphi(t) = (a + th,\ b + tk)$ を合成して $F(t) = f \circ \varphi(t) = f(a + th, b + tk)$ とおく．合成関数の微分により次を得る．

   $$F'(t) = f_x x' + f_y y' = hf_x + kf_y$$

   - この式において右辺は正確には

   $$\left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right)(a + th, b + tk) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right) \circ \varphi(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\right)(a + th, b + tk)$$

     である．左辺が t の関数なので右辺も t の関数とみなければならずそれは φ と合成写像をとることに他ならない．

   - この結果は，2 変数関数を $\varphi(t)$ と合成してから t で微分することと，偏微分作用素 $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ を f に作用させてから $\varphi(t)$ と合成することが同じであることを述べている．これからさらに t で微分すれば

   $$F''(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\right)(a + th, b + tk)$$

     を得る．以下同様に

   $$F^{(m)}(t) = \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\right)(a + th, b + tk)$$

   - 偏微分作用素を繰り返し適用することは，2 項定理と同様な方法で次のように展開できることが分かる．

   $$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f = \sum_{l=0}^{m} {}_mC_l \frac{\partial^m f}{\partial^l x \partial^{m-l} y} h^l k^{m-l}$$

     これは f の m 次偏導関数のスカラー倍の和である．

   - f が C^{n+1} 級であれば F も C^{n+1} 級である．よって F にテイラーの定理（定理 2.8, ただし $a = 0, b = 1$ とする）を適用できる．

   $$F(1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + R_{n+1}$$

   - $F^{(m)}$ についての表示により

   $$f(a + h, b + k) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \frac{{}_mC_l}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial^l x \partial^{m-l} y}(a, b) h^l k^{m-l} + R_{n+1} \qquad \frac{{}_mC_l}{m!} = \frac{1}{l!(m-l)!}$$

     これが 2 変数関数のテイラーの定理（p.96 定理 5.11）に他ならない．

2. テイラーの定理と 1 次近似式，接平面の方程式

テイラーの定理は $f(a+h, b+k)$ を h, k の n 次多項式と誤差 R_{n+1} の和として記述する．ただし，この講義ではもっぱら近似多項式のみ考え，誤差の詳細な考察は行わない．例えば $n = 1$ の場合は

$$f(a+h, b+k) \fallingdotseq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

これが 1 次近似多項式である．さらに $a + h = x,\ b + k = y$ とおきなおせば

$$f(x, y) \fallingdotseq f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

であり，右辺が接平面の方程式 $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ を与える．

3. 極値問題

$f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるとき，接平面は水平なので

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

でなくてはならない．すなわち極値の候補点は連立方程式 $f_x = f_y = 0$ の解として与えられる．これにより極値問題を解くにはまず連立方程式 $f_x = f_y = 0$ を解く．

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ のとき (a, b) で実際に極値をとるかどうかは 2 次近似式を利用して判断する．1 次の項の係数は 0 なので

$$f(a+h, b+k) \fallingdotseq f(a, b) + f_{xx}(a, b)\frac{h^2}{2} + f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)\frac{k^2}{2}$$

となるが，この 2 次の項の正負によって $f(a+h, b+k)$ と $f(a, b)$ の大小関係が分かる．

2 次多項式の正負は平方完成を利用して調べられる．

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2$$

$AC - B^2 > 0$ で $A > 0$ ならこの式は $(0, 0)$ 以外で常に正，$AC - B^2 > 0$ で $A < 0$ ならこの式は $(0, 0)$ 以外で常に負，$AC - B^2 < 0$ の場合は正負いずれの値もとる．以上の考察から定理 5.13（p.99）が得られる．

4. 極値問題の計算例（例題 5.8）

テキストに詳しく書いてあるので読んでほしい．なお，極値の候補が多くなる時は次のような表で整理すると分かりやすい．

候補点	$A = f_{xx} = 6x$	$B = f_{xy} = -3$	$C = f_{yy} = 6y$	$AC - B^2$	判定
$(0, 0)$	0	-3	0	負	極値をとらない
$(1, 1)$	6	-3	6	正	極小

5. $AC - B^2 = 0$ の場合 (難しい)

平方完成すると $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(x + (B/A)y)^2$ なので，$A > 0$ なら常に 0 以上だが直線 $Ax + By = 0$ 上で 0 になっている．$(0, 0)$ 以外にも 2 次近似式の 2 次の項が 0 になる場合があるので，大小は誤差の値を考えなくては判断できない．例として $f(x, y) = x^2 + y^4$ と $g(x, y) = x^2 - y^4$ を紹介した．

いずれも偏微分係数が 2 つとも 0 になる点は $(0, 0)$ のみである．さらに $(0, 0)$ での 2 次近似式は x^2 である．これは 0 以上であるが y 軸上で 0 になっており，2 次近似式から極値の判定はできない．

$f(x, y) = x^2 + y^4$ の場合は誤差 y^4 は常に正であり，$f(x, y) \geqq x^2 \geqq f(0, 0) = 0$ が成り立つ．$(0, 0)$ で極小である．$g(x, y) = x^2 - y^4$ の場合は誤差 $-y^4$ は負なので，y 軸上で負になっている．x 軸上では正なので $f(0, 0) = 0$ は極値ではない．

本日のレポート課題とヒント

演習問題 5.4.1 をやること．(1) は講義で扱ったので (2)(3)(4) のみで良い．なお $AC - B^2 = 0$ になる場合が含まれている問題がある．これについてこの方法では判定できないという解答でも良い．もちろん誤差の正負を考えて考察することも可能である．

微分積分 II 講義メモ (11 月 5 日)

前回のレポート課題について

極値問題に取り組んでもらった．なお，前回の講義メモのレポート問題に関するコメントで，$AC - B^2 = 0$ の場合があると記述したが私の勘違いだった．混乱した人がいたらお詫びします．なお，レポート課題の解答については，本日の講義の要点に含めて開設します．

本日の講義の要点

1. 極値問題の解き方 (その 1)
   極値問題を解くための最初の作業は $f_x = f_y = 0$ を満たす点を求めることだ．これは連立方程式を解くことに他ならないが，解くための一般論のようなものはなく，きちんとした論理で考察しないとすべての解を決定することができない．前回のレポート課題を使って詳細に解説しよう．
   - $f(x,y) = xy(2-x-y) = 2xy - x^2y - xy^2$ について
     $f_x = 2y - 2xy - y^2 = y(2-2x-y) = 0$ と $f_y = 2x - x^2 - 2xy = x(2-x-2y) = 0$ の連立方程式を解く．
     $f_x = 0$ より $y = 0$ または $y = 2-2x$ が成り立つ．$y = 0$ の場合は $f_y = 0$ は $x(2-x) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = 2$ である．よって解として $(0,0)$ と $(2,0)$ を得る．
     $y = 2-2x$ の場合は $f_y = 0$ は $x(3x-2) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = 2/3$ である．$y = 2-2x$ なので $x = 0$ のときは $y = 2$，$x = 2/3$ のときは $y = 2/3$ である．よって解として $(0,2)$ と $(2/3,2/3)$ を得る．
     以上合わせて解は $(0,0), (2,0), (0,2), (2/3,2/3)$ の 4 つである．
   - $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$ もついて
     $f_x = 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 4x(x^2+y^2-1) = 0$ と $f_y = 4x^2y + 4y^3 + 4y = 4y(x^2+y^2+1) = 0$ の連立方程式を解く．
     $f_y = 0$ より $y = 0$ である．これを $f_x = 0$ に代入して $4x(x^2-1) = 0$ を得る．解は $(0,0)$ と $(\pm1,0)$ の 3 点である．
     【コメント】 $x^2+y^2+1 > 0$ なので $f_y = 0$ は $y = 0$ に他ならない．こちらから先に考えると場合分けの必要がない．
   - $f(x,y) = (ax^2+by^2)e^{-x^2-y^2}$ について
     $f_x = (2ax - 2x(ax^2+by^2))e^{-x^2-y^2} = 2x(a - ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$ は $x(a-ax^2-by^2) = 0$ と同値である．また $f_y = (2by - 2y(ax^2+by^2))e^{-x^2-y^2} = 2y(b-ax^2-by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$ は $y(b-ax^2-by^2) = 0$ と同値である．
     $x(a-ax^2-by^2) = 0$ より $x = 0$ または $ax^2 = a - by^2$ である．$x = 0$ のときは第 2 式より $by(1-y^2) = 0$ なので $y = 0$ または $y = \pm1$ である．よって解 $(0,0)$ と $(0,\pm1)$ を得る．$ax^2 = a - by^2$ のときは第 2 式より $(b-a)y = 0$ である．$a < b$ より $y = 0$ を得る．$ax^2 = a$ なので $0 < a$ より $x = \pm1$ である．結局解として $(\pm1,0)$ を得る．
     以上まとめて解は $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ の 5 点である．
     【コメント】$e^{-x^2-y^2}$ を消したが，形式的には両辺を $e^{-x^2-y^2}$ で割っている．ただし文字式で割るときにはその文字式が 0 でないことをチェックしなくてはならない．0 になる場合があれば，その場合は別途考える必要がある．解をすべて求められない人のミスの原因は，0 になり得る文字式で割ってしまったというものだ．
   - $f(x,y) = xy(x^2+y^2-4) = x^3y + xy^3 - 4xy$ について

$f_x = 3x^2y + y^3 - 4y = y(3x^2 + y^2 - 4) = 0$ と $f_y = x^3 + 3xy^2 - 4x = x(x^2 + 3y^2 - 4) - 0$ の連立方程式を解く．

$f_x = 0$ より $y = 0$ または $y^2 = 4 - 3x^2$ である．$y = 0$ の場合は $f_y = x(x^2 - 4) = 0$ となるので $x = 0$ または $x = \pm 2$ である．よって解として $(0, 0)$ と $(\pm 2, 0)$ を得る．

$y^2 = 4 - 3x^2$ の場合は $f_x = x(8 - 8x^2) = 8x(1 - x^2) = 0$ となる．よって $x = 0$ または $x = \pm 1$ である．$x = 0$ の場合は $y^2 = 4$ なので $y = \pm 2$ である．ゆえに解として $(0, \pm 2)$ を得る．$x = \pm 1$ のときは $y^2 = 1$ より $y = \pm 1$ となる．2 つの複合は無関係に取れるので，解として $(\pm 1, \pm 1)$ と $(\pm 1, \mp 1)$ を得る．

結局解は $(0, 0), (0, \pm 2), (\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ の 9 個ある．

いずれも一方の式から場合分けを行って議論している．この議論ですべての解が求められていることをきちんと理解してほしい．

2. 極値問題の解き方 (その 2)

   定理 5.13 を使えば，2 次の偏導関数の値から極値の判定を行うことができる．判定の理論的根拠はテイラーの定理による 2 次近似式と，2 次式の正負の考察である．これについては前回扱ったのでここでは繰り返さない．簡単なことなので例を参考に自分でやってほしい．こういう問題は自分で複数の問題に取り組まないと正確に覚えることができない．

3. 極値問題の解き方 (おまけ)

   2 回の偏微分を使わなくても関数が簡単な場合には極値の判定を行える場合がある．講義では $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$ によってその様子を解説した．分かれば面白い事項だが，分からないという人もいるだろう．分からないという人は気にしなくても良い．

   - $f(x, y) = 0$ は x 軸，y 軸および円周 $x^2 + y^2 = 4$ である．これによって座標平面は 8 つの領域に分かれ，各領域ごとに $f(x, y)$ の正負が決まっている．
   - 極値の候補点 $(0, 0), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$ はそれぞれ 4 つの領域が出会う頂点になっている．$f(x, y)$ は隣り合う領域で符号が変わるのでこれらの点の周りでは正になる点も負になる点もある．よってこれら 5 つの点では極値をとらない．
   - $(1, -1)$ は円の第 2 象限の部分の内部にある．その領域で関数は正の値をとる．周囲では 0 なので，この関数は内部で最大値をとる．そこでは当然極大でなくてはならないが極大値となる候補は $(1, -1)$ 以外に存在しない．よって $(1, -1)$ で極大となる．残りの 4 つの点についても同様に考察できる．

   講義ではさらに最大最小問題に触れたが，これは条件付き極値問題を扱ってから解説すべき問題だ．この講義メモでは省略する．なお例題 5.9 を解説したがテキストに詳細な解説があるのでこれも省略する．

次回は陰関数のグラフについて考察する．あと 2 回で微分を終えるのでその後 1 週間空けてから微分の範囲での試験を行う．今のところ 12 月 3 日を予定している．

本日のレポート課題とヒント

- 問 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値を求めよ．
- テキスト p.102 問 5.4.3 を解け．

最初の問題は極値問題の解き方に従って考えてほしい．なお，1 点だけ $AC - B^2 = 0$ の場合が出てくる．この

極値が分かったら素晴らしい．テキストの問題は極値問題の応用問題な．(3) の解が正三角形だということはすぐにわかると思うが，この講義で学習したことを使っていかにその結果を導くかが課題だ．問題が段階を追って出されているので取り組みやすいだろう．

微分積分 II 講義メモ (11 月 12 日)

前回のレポート課題について

問　$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値問題を解け．

【解答例】$f_x = f_y = 0$ は

$$4x^3 - 4x + 4y = 4(x^3 - x + y) = 0 \qquad 4y^3 + 4x - 4y = 4(y^3 + x - y) = 0$$

となる．第 1 式から $y = x - x^3$ となるので，これを第 2 式に代入し

$$(x - x^3)^3 + x - (x - x^3) = x^3 - 3x^5 + 3x^7 - x^9 + x^3 = x^3(2 - x^2)(x^4 - x^2 + 1) = 0$$

を得る．この解は $x = 0, \pm\sqrt{2}$ であり，それぞれに応じて $y = 0, \mp\sqrt{2}$ となる．よって極値の候補は $(0,0), (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ の 3 点である．

それぞれについて 2 次偏導関数 $f_{xx} = 12x^2 - 4$, $f_{xy} = 4$, $f_{yy} = 12y^4 - 4$ の値を調べれば

候補点	$A = f_{xx}$	$B = f_{xy}$	$C = f_{yy}$	$AC - B^2$	判定
$(0,0)$	-4	4	-4	0	判定できない
$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$	20	4	20	正	極小

$(0,0)$ で極値をとるか否かを判定するためには $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ の周りでの $f(x,y)$ の正負を調べればよい．常に正なら極小，常に負なら極大，正負いずれの値もとるのであれば極値をとらない．この関数では $f(x,y) = (x^4 + y^4) - 2(x - y)^2$ なので直線 $x = y$ の上では常に正である．しかし x 軸上では $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ なので $0 < |x| < \sqrt{2}$ のとき，この関数の値は負である．よって正負いずれの値もとるので $(0,0)$ では極値をとらない．

【コメント】

- $f_x + f_y = 4(x^3 + y^3) = 0$ より $y = -x$ を得る．これを $f_x = 0$ に代入すれば $x^3 - 2x = 0$ となって簡単に解を求められる．$f_x = f_y = 0$ は $f_x + f_y = f_x = 0$ と同値なので，これですべての解が求められる．なお $f_x = f_y = 0$ と $f_x + f_y = 0$ は同値ではない．$f_x = 0$ と連立させなくてはならない．
- $2x^3 - 3x^5 + 3x^7 - x^9 = 0$ から $2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 0$ としてはならない．形式的には x^3 で両辺を割っているがこの議論は $x \neq 0$ を仮定している．$x = 0$ のときは別途考えなくてはならない．
- $(0,0)$ での極値の判定は難しい．ただ解答を見れば納得できるだろう．自分で答えられることと，解答を見て理解できることは質的に異なるが，読んでも理解できないという状況よりはるかに好ましい．

問 5.4.3 を解け．

【解答例】(1) 三つの辺の長さは $x, y, 2a-x-y$ なので，辺の長さが正であることから $x > 0$, $y > 0$, $2a-x-y > 0$, 三角不等式から $x + y > 2a - x - y$, $x + 2a - x - y > y$, $y + 2a - x - y > x$ である．これを作図してみれば D は $x < a$, $y < a$, $a < x + y$ の定める直角二等辺三角形の内部である．なおテキストの解答は三角不等式を考慮していないので誤りである．

(2) 三角形の面積はヘロンの公式により $\sqrt{a(a-x)(a-y)(x+y-a)}$ である．

(3) 根号の中身を a で割ったものを $f(x,y) = (a-x)(a-y)(x+y-a)$ とおく．D の内部で $f(x,y) > 0$ であり D の境界で $f(x,y) = 0$ である．ゆえに最大は D の内部でとり，その点で $f_x = f_y = 0$ になる．

$$f_x = -(a-y)(x+y-a) + (a-x)(a-y) = (a-y)(2a-2x-y) = 0$$
$$f_y = -(a-x)(x+y-a) + (a-x)(a-y) = (a-x)(2a-x-2y) = 0$$

について D の内部では $a-y>0$ かつ $a-x>0$ なので $2a-2x-y=2a-x-2y=0$ である．この解は $x=y=2a/3$ であり，もう一つの辺の長さも $2a-x-y=2a/3$ なので 3 辺の長さが等しく正三角形である．D の内部にほかに $f_x=f_y=0$ を満たす点はないので $(2a/3,2a/3)$ で最大である．

【コメント】

- この解答例の D であれば $f(x,y)$ の値は正になる．テキストの D では必ずしも正にならないので根号の中に入れられない．
- 極値の判定を行う方法でも良いがこの解答例も味わってほしい．

本日の講義の要点

1. 陰関数定理

   $F(x,y)=c$ という条件は x を決めると y に制約がつく．$F(a,b)=c$ のとき (a,b) の周りで $F(x,y)=c$ を関数 $y=f(x)$ の形に表すための条件を与えるのが陰関数定理である．$f(x)$ とは $f(a)=b$ と $F(x,f(x))=c$ を満たす関数である．陰関数定理はテキスト p.103 定理 5.14 を見てほしい．

   陰関数とは関数関係が $F(x,y)=c$ という式の中に隠れているという意味であり，それを通常の関数と思えるための条件が陰関数定理である．例えば $x^2+y^2=1$ は $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ の周りでは $y=\sqrt{1-x^2}$ と記述できる．$(0,-1)$ の周りでは $y=-\sqrt{1-x^2}$ と表せる．ただし $(1,0)$ の周りでは $y=f(x)$ の形に表すことはできない．

2. 陰関数のグラフ（等高線）

   $F(x,y)$ が C^1 級であるとき，$z=F(x,y)$ のグラフは滑らかな曲面である．その高さ c の等高線はグラフと水平面 $z=c$ の交わりであるから $F(x,y)=c$ である．この等高線を陰関数のグラフとよぶことにする．(a,b) を $F(a,b)=c$ を満たす点（高さ c の等高線上の点）としよう．(a,b,c) での $z=F(x,y)$ の接平面が水平でないとき，曲面と (a,b,c) での接平面を水平面 $z=c$ で切れば，切り口は陰関数のグラフ $F(x,y)=c$ とその接線が出てくる．これは素朴に考えれば納得できるだろう．この事実を次の定理としてまとめた．

   定理 $F(x,y)$ は C^1 級で $F(a,b)=c$ が成り立つとする．$(F_x(a,b),F_y(a,b))\neq(0,0)$ のとき，$F(x,y)=c$ のグラフは (a,b) の周りで滑らかな曲線でありその接線は次で与えられる．

   $$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

   接平面の方程式 $z=c+F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)$ と水平面の方程式 $z=c$ を組み合わせて得られる式になっていることに注意してほしい．

   ここで $F_y(a,b)\neq 0$ であれば，接線は垂直方向ではないので傾いている．$F(x,y)=c$ のグラフも同様で，このグラフから $y=f(x)$ の形の関数を作ることができる．これが陰関数定理である．

3. 陰関数の導関数

   $F(x,y)=c$ を (a,b) の周りで $y=f(x)$ の形に表せたとき $F(x,f(x))=c$ が成り立つ．この両辺を微分すれば

   $$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0$$

   になる．よって

   $$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

なお計算には合成関数の微分を使っているが，x の 1 変数関数 $f(x)$ と x, y の 2 変数関数 $F(x, y)$ が混在するので x が二通りの意味で使われている．$z = F(x, y)$ と $x = t,\ y = f(t)$ を合成して $z = F(t, f(t))$ とするほうが分かりやすい．

4. 陰関数の極値問題 $F(x, y) = c$ の極値問題の解き方をまとめておく．
   - 極値をとる候補点を求める．
     $f'(x) = -F_x/F_y$ より $F_x(x, y) = 0$ である．これと陰関数のグラフ上にあるための条件 $F(x, y) = 0$ を連立させればよい．なお，候補点において $F_y \neq 0$ であることをチェックせよ．$F_y = 0$ の場合にはこの方法は使えない．
   - 極値の判定
     商の微分法則と陰関数の導関数の計算から
     $$f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}f')}{(F_y)^2}$$
     極値の候補点では $F_x = 0,\ f' = 0$ なので $f'' = -F_{xx}/F_y$ である．この値が正であれば極小，負であれば極大である．

   講義では例 5.11 を解説した．テキストに詳しく書いてあるのでここでは省略する．

テキストには 3 変数関数から作られる陰関数 $F(x, y, z) = c$ についても記述しているが，講義では $F(x, y) = c$ の場合に限定する．これに関する記述は無視して構わない．次回は条件付き極値問題と最大最小問題を扱う．次回で微分を終える予定である．

本日のレポート課題

p.107 の問 5.5.3 を課題にする．例と上のまとめを参考に取り組んでほしい．

微分積分 II 講義メモ (11 月 19 日)

前回のレポート課題について

問 5.5.3 は陰関数 $F(x,y)=c$ として定義される関数の極値問題だ．プロセスは他の極値問題と同様に二段階であり

- 極値の候補点を求める．すなわち連立方程式 $F(x,y)=c,\ F_x(x,y)=0$ を解く．
- 極値の候補点で $F_y\neq 0$ であることをチェックする．これによって極値の候補点の近くで $y=f(x)$ の形の関数として表せることが分かる．
- 極値の判定を行う．すなわち極値の候補点において $f''=-F_{xx}/F_y$ の符号を調べる．

(1) $F(x,y)=5x^2-6xy+5y^2=80$ について

- $F_x=10x-6y=0$ より $x=(3/5)y$ である．これを $F=0$ に代入して $y^2=25$ を得る．ゆえに $y=\pm 5$ でありそのとき $x=\pm 3$ である．極値の候補点は $(\pm 3,\pm 5)$ である．
- $F_y=-6x+10y$ より $F_y(\pm 3,\pm 5)=\pm 32\neq 0$ よりこの候補点の周りで $y=f(x)$ の形に表示できる．候補点では $f'=0$ なので f'' の符号を調べることにより極値の判定を行う．
- $F_{xx}=10$ より $f''(\pm 3)=-F_{xx}(\pm 3,\pm 5)/F_y(\pm 3,\pm 5)=-10/(\pm 32)$ なので $(3,5)$ で $f''<0$ であり極大である．また $(-3,-5)$ で $f''>0$ であり極大である．
- $x=3$ で極大値 5 を，$x=-3$ で極小値 -5 をとる．

(2) $F(x,y)=xy^2-x^2y=2$ について

- $F_x=y^2-2xy=y(y-2x)=0$ より $y=0$ または $y=2x$ である．$y=0$ のときは $F(x,0)=0\neq 2$ なのでこの場合の解は存在しない．$y=2x$ のときは $F(x,2x)=2x^3=2$ なので $x=1$ である．極値の候補点は $(1,2)$ である．
- $F_y(x,y)=2xy-x^2$ より $F_y(1,2)=3$ であり，極値の判定は f'' の符号を調べることにより行える．
- $F_{xx}=-2y$ より $f''=4/3>0$ なので極小である．
- $x=1$ で極小値 2 をとる．

(3) $F(x,y)=x^2y+xy^2+2a^3=0$ について

- $F_x=2xy+y^2=y(2x+y)=0$ より $y=0$ または $y=-2x$ である．$y=0$ のときは $F(x,0)=2a^3$ なので $a\neq 0$ より $F=0$ は成立しない．よってこの場合の解は存在しない．$y=-2x$ のときは $F(x,-2x)=2x^3+2a^3=0$ より $x=-a$ である．極値の候補点は $(-a,2a)$ のみである．
- $F_y=x^2+2xy$ より $F_y(-a,2a)=-3a^2\neq 0$ なので $(-a,2a)$ の周りで $y=f(x)$ の形に表せる．
- $F_{xx}=2y$ より $f''(-a)=-(4a)/(-3a^2)=4/(3a)$ なので $a>0$ のときは極小，$a<0$ のときは極大である．
- $x=-a$ において極大値（極小値）$2a$ をとる．

【コメント】

- $F_y=0$ の場合は $y=f(x)$ の形に記述できる保障はない．極値を考えること自体意味を持たなくなる可能性がある．
- $F_y\neq 0$ の場合は $y=f(x)$ という微分可能な関数で記述できる．これが陰関数定理だ．なお f' を F の

偏導関数で表す式は $F(x, f(x)) = c$ の両辺を微分すればよい．

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0 \qquad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

2 次導関数もこの式をさらに微分すればよい．

$$F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) + (F_{yx}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x))f'(x))f'(x) + F_y(x, f(x))f''(x) = 0$$

ここで $f'(a) = 0$ ならば次式が成り立つ．

$$f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}$$

ただしこの式を

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x, y)}{F_y(x, y)}$$

と書いたら間違いだ．一般の x では $f'(x) = 0$ は成り立たないからだ．

本日の講義の要点

1. 条件付き極値問題

C^1 級関数 $F(x, y)$, $G(x, y)$ について $G(x, y) = 0$ という条件のもとに $z = F(x, y)$ の極値を求めたい．これは $z = F(x, y)$ のグラフで定まる曲面（地形）を $G(x, y) = 0$ というルートで進んだ時の，登りから下りへ（下りから登りへ）変わる点を求めることに相当する．曲面を等高線で記述すれば，等高線 $F(x, y) = c$ とルート $G(x, y) = 0$ が接する点が極値の候補になる．逆に言えば等高線とルートが角度をもって交わるような点では極値は取らない．この事実を次のようにまとめた．

条件付き極値問題の候補点は次の連立方程式の解である．

$$G(x, y) = 0 \qquad \begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix} = F_xG_y - F_yG_x = 0$$

最初の条件 $G(x, y) = 0$ は極値を考える条件なのだから当然である．次の条件については，この行列式が 0 でない場合は等高線 $F(x, y) = c$ とルート $G(x, y) = 0$ はともに滑らかな曲線であり，その接線は角度をもって交わる．このような場合に極値をとらないことは最初の素朴な考察から納得できるだろう．

テキストでは $G_x = G_y = 0$ でないとして，ベクトル (F_x, F_y) が (G_x, G_y) の λ 倍であるという条件を立てている．$(G_x, G_y) = (0, 0)$ も含めてこれは 2 つのベクトルが一次従属だということに他ならないので，行列式で必要十分条件が与えられる．なお 3 変数以上の場合は，行列式は利用できないので一次従属性で記述する必要がある．

講義では例題 5.12 を解説した．$G(x, y) = ax + by + c = 0$ の条件下での $F(x, y) = x^2 + y^2$ の極値問題なので

$$G(x, y) = ax + by + c = 0 \qquad F_xG_y - F_yG_x = 2bx - 2ay = 0$$

なのでこれは連立 1 次方程式にほかならず

$$x = \frac{-ac}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-bc}{a^2 + b^2}$$

が極値の候補点になる．問題の図形的意味を考えればこの点で距離が最小になるのは明らかであり，原点 $(0, 0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. 最大最小問題

有界で閉じた領域 D で連続な関数は最大値および最小値をとることが知られている．$F(x, y)$ が D で C^1 級のとき，最大，最小の候補点は次のいずれかである．

- D の内部における極値の候補点，すなわち $F_x = F_y = 0$ を満たす点
- D の境界にあるという条件のもとに，$F(x, y)$ の極値の候補点，D の境界が C^1 級関数 $G(x, y)$ により $G(x, y) = 0$ で定義されているときには $G = F_xG_y - F_yG_x = 0$ を満たす点
- D の境界で滑らかになっていない点（D が三角形領域のときには三角形の頂点）

これらの候補点をすべて求めれば，候補点でとる値を比較することにより最大最小を決定できる．2 回微分を利用した極値の判定は不要である，

例 $D : (x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leqq 1,\ 0 < b < a$ において $F(x, y) = xy$ の最大最小を求める．

- $F_x = y,\ F_y = x$ より $F_x = F_y = 0$ を満たす点は $(0, 0)$ のみである．
- 境界は $G(x, y) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ で定義されるので，条件付き極値問題の候補点は

$$G = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad F_xG_y - F_yG_x = \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2x^2}{a^2} = 0$$

より $x^2/a^2 = y^2/b^2 = 1/2$ である．よって $(\pm a/\sqrt{2}, \pm b/\sqrt{2}),\ (\pm a/\sqrt{2}, \mp b/\sqrt{2})$ の 4 点である．

$F(0, 0) = 0,\ F(\pm a/\sqrt{2}, \pm b.\sqrt{2}) = ab/2,\ F(\pm a/\sqrt{2}, \mp b/\sqrt{2}) = -ab/2$ なので最大値は $ab/2$，最小値は $-ab/2$ である．

講義では同じ領域で $F(x, y) = x^2 + y^2$ の極値問題に取り組んでもらった．解答の解説まで行ったがここでは省略する．

次回は重積分の話に移る．1 週間空けて 12 月 3 日に微分の範囲での試験を行う．これはこの講義の第 1 回試験であり，学期末の第 2 回試験と同等のウェートを持つ．第 2 回試験のときと同等に試験準備を行っておくように．

本日のレポート課題

演習問題 5.6.3 および次の最大最小問題を課題とする．この講義メモの解説とテキストを読んで取り組むこと．

問題 $D : x^2 + 2y^2 \leqq 1$ において $F(x, y) = x^3 + y^3$ の最大値および最小値を求めよ．

微分積分 II 講義メモ (11 月 26 日)

前回のレポート課題について

レポート課題について授業では演習問題 5.6.2 と述べたのに前回の講義メモでは 5.6.3 と書いてしまった．申し訳ない．授業では 2 変数に限定して解説しているので 5.6.3 は気にしなくてよい．ただし，せっかくの機会なので両方とも解説しておこう．

- 5.6.2 は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上で $(0, 2)$ に最も近い点を求めよという問題だ．これは $G(x, y) = x^2 - y^2 = 1$ という条件のもとに $F(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ の極致を求めることに他ならない．ゆえに連立方程式

$$G = x^2 - y^2 = 1 \qquad F_x G_y - F_y G_x = -4xy - 4x(y - 2) = -4x(2y - 2) = 0$$

  を解けばよいが，第 2 式より $x = 0$ または $y = 1$ である．$x = 0$ の場合は第 1 式より $y^2 = -1$ となるので解は存在しない．$y = 1$ の場合は第 1 式より $x^2 = 2$ なので $x = \pm\sqrt{2}$ である．条件付き極値の候補は $(\pm\sqrt{2}, 1)$ なので最小値はこの 2 点の何れかでとる．$F(\pm\sqrt{2}, 1) = 3$ よりこの 2 点の $(0, 2)$ からの距離は $\sqrt{3}$ で等しくこの 2 点が最も近い点であるといえる．

  【コメント】グラフを考えれば最も近い点の存在は直ぐにわかる．候補点が 2 つ出てきたので，このうち近いほうを選べばよい．この問題では y 軸に関する対称性から 2 点いずれも最近点になるが，$(0, 2)$ を y 軸上にない点に変えれば距離は変わるので，最近点はその近いほうを選ぶ必要がある．

- 5.6.3 は 3 変数なので一次独立性の判定に行列式は使えない．条件は $G(x, y, z) = x + y + z = \pi$ であり，この条件下で $F(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ の極値を求めることになる．なお，三角形の内角 x は $0 < x < \pi$（他も同様）でなくてはならない．ラグランジュの未定乗数法により

$$F_x - \lambda G_x = \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0, \quad F_y - \lambda G_y = \sin x \cos y \sin x - \lambda = 0, \quad F_z - \lambda G_z = \sin x \sin y \cos z - \lambda = 0$$

  なので λ は消去して

$$\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z$$

  が極値の候補点の条件になる．最初の等式と 2 番目の等式は加法定理を用いて

$$\sin z \sin(y - x) = 0, \qquad \sin x \sin(z - y) = 0$$

  条件，$0 < x < \pi$, $0 < z < \pi$ より $\sin(y - x) = \sin(z - y) = 0$ を得る．$-\pi < -x < y - x < y < \pi$ より $y - x = z - y = 0$ を得る．よって極値の候補となりえる点は $x = y = z = \pi/3$ のみである．$F(x, y, z) > 0$ に注意して $F(x, y, z)$ は $x = y = z = \pi/3$ のとき最大値 $3\sqrt{3}/8$ をとる．

- 独自に出題した問題「$D : x^2 + 2y^2 \leqq 1$ において $F(x, y) = x^3 + y^3$ の最大値最小値を求めよ」について
  - D の内部での最大最小の候補点は $F_x = F_y = 0$ より $3x^2 = 3y^2 = 0$ なので $(0, 0)$ のみである．
  - D の境界上での最大最小の候補は $G(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$ という条件下での F の条件付き極値問題の解なので連立方程式

$$G = x^2 + 2y^2 = 1 \qquad F_x G_y - F_y G_x = 3x^2 4y - 3y^2 2x = 6xy(2x - y) = 0$$

    を解く．第 2 式は $x = 0$, $y = 0$, $y = 2x$ の何れかが成り立つことなので，それぞれの場合を第 1 式に代入して

$$(0, \pm 1/\sqrt{2}) \qquad (\pm 1, 0) \qquad (\pm 1/3,\ \pm 2/3)(\text{複号同順})$$

– 以上 7 点が最大最小の候補であるが，それぞれの値は

$$F(0,0) = 0 \quad F(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad F(\pm 1, 0) = \pm 1, \quad F(\pm 1/3, \pm 2/3) = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3}$$

であり，最大値は $F(1,0) = 1$，最小値は $F(-1,0) = -1$ である．

【コメント】 内部での最大最小の候補は極値の候補点として，境界上での最大最小の候補は条件付き極値の候補点として求めることができる．境界の曲線が滑らかになっていない点があれば，それも候補点に加えればよい．こうしてすべての候補点を求め，候補点での $f(x,y)$ の値を比較することにより最大最小が決定できる．ただし，候補点を一つでも落としてしまったら議論はまったく無効である．落としたところで最大最小になるかもしれないからだ．特に文字式で割ったりすると，その文字式の値が 0 でないことを仮定したことになってしまうので注意が必要だ．上の解答例をきちんと考えてみてほしい．

本日の講義の要点

1. 重積分

   D を有界で閉じた領域とし，$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする．重積分とは $z = f(x,y)$ のグラフと xy 平面で挟まれた部分の体積とみなすことにし

   $$\iint_D f(x,y)dxdy$$

   と表す．重積分はリーマン和の極限として定義されるが，講義ではその定義は後回しにして体積として考えることにする．

2. 累次積分

   高校で回転体の体積について断面積（円の面積）を積分することによって計算した．この断面積も積分で求めることにすれば積分を繰り返すことによって体積（重積分）が求められることは容易に想定できるだろう．このことを次のような枠組みで解説した．

   - D を $y = \varphi(x)$ と $y = \psi(x)$ で囲まれた領域とする．

     $$D = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$$

   - 求める立体を $x = \alpha$ なる断面できる．断面は yz 平面における $z = f(\alpha, y)$ と y 軸で囲まれた部分なので，断面積 $S(\alpha)$ は

     $$S(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha, y)dy$$

     で求められる．ここで α は任意に取れるので変数とみなし x に戻す．

   - 体積は断面積 $S(x)$ を積分すればよいので

     $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

     として計算できる．なお積分記号の上下の添え字は積分範囲を表すがどの変数の動く範囲か明確に意識する必要がある．最後の表示は積分記号と dx をセットで書くことにより，x の動く範囲が a から b までであることを分かりやすくしている．

3. 累次積分の計算例

- $D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ 上で x^2y を積分する．x を固定した時, y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ なので

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{1}{15}$$

この計算ではまず y について積分したが，x から先に積分することもできる．y を固定した時，x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}$ なので

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 y dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y^2)y\sqrt{1-y^2}dy$$

この積分は $y = \sin\theta$ と置換積分すれば計算できる．答えはもちろん 1/15 だが積分の順序によって計算の難易度に大きな差が出ることを感じてほしい．

- $D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$ 上で xe^y を積分する．y を固定した時 x の動く範囲は $0 \leqq x \leqq y$ であるから

$$\int_0^1 dy \int_0^y xe^y dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2}x^2e^y\right]_{x=0}^{y} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2e^y dy$$

この積分は 2 回部分積分を行うことにより計算できる．

- $D: 0 \leqq y \leqq x^2 \leqq 1,\ x \geqq 0$ において xy を積分する．x を固定した時 y の動く範囲は $0 \leqq y \leqq x^2$ なので

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{12}$$

以上 3 つの例において，まず D を図示することから始めること．これは不等式と領域の話なので高等学校で習っているはずだ．次に x と y のどちらで先に積分するか決めること．順序によって難易度が変わるので，難しい場合は順序を入れ替えてみると良い．積分の順序交換については 12 月 10 日の授業で扱う．累次積分の形に直せれば後の計算は難しくない．まずは演習問題を自力で解いてみるように．

本日のレポート課題

手元にテキストがないのでレポート課題についてはおって Moodle のニュースフォーラムに書くことにします．なおレポートの提出期限は 12 月 8 日 (火) とします．とりあえずは来週の試験に向けた勉強に集中してください．今回の授業の復習とレポート課題への取り組みは試験終了後に行うようにしてください．

微分積分 II 講義メモ (12 月 10 日)

前回のレポート課題について

重積分の基本的な計算問題を出題した．レポートを提出しない学生が多かったが，必ず自分で解いてみるように．解答例とコメントは省略する．

本日の講義の要点

1. 演習問題 6.1.2(2) について（前回の復習）

   D は 4 つの不等式で定義されているが，図示してみれば $y = x$ と $y = x^2$ のグラフで挟まれた領域であることが分かる．この問題の重積分は $z - \sqrt{xy}$ のグラフと xy 平面で挟まれた D の上にある部分の体積である．$0 \leqq y \leqq 1$ を固定して，y 軸に垂直な平面との切り口を考えれば，断面積は

   $$S(y) = \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}dx = \frac{2}{3}\sqrt{y}[x^{3/2}]_{y^2}^{y} = \frac{2}{3}\sqrt{y}(y^{3/2} - y^3) = \frac{2}{3}\left(y^2 - y^{7/2}\right)$$

   である．求める体積は断面積を 0 から 1 まで積分すればいいので

   $$\int_0^1 S(y)dydx = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{9}y^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{27}$$

   である．このように重積分は積分の繰り返し（累次積分）で求められる．記号としては

   $$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}dx$$

   と表す．$S(x)$ を積分記号の外（dy の右側）に出してしまったように感じるかもしれないが，そういう意味ではない．積分記号 $\int$ と dx はセットなので，近接させて表示したほうが分かりやすいことからこのような表示を行う．慣れてほしい．

   このように重積分は累次積分で計算するがその方法は二通りある．上の解答例では x で先に積分しているが，これを y で先に積分すると

   $$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sqrt{xy}dy = \int_0^1 dx\left[\sqrt{x}\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_x^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{5/4} - x^2 dx$$

   となる．この値ももちろん 2/27 である．

2. 積分の順序交換

   累次積分の仕方は二通りあるが，どちらも同じように計算できるわけではない．計算の難易度は変わるし，極端な場合一方の方法では計算できないということもある．p.118 の例題 6.2 はそのような例で

   $$\iint_D \sin(\pi y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin(\pi y^2)dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sin(\pi y^2)dx$$

   と累次積分に直したとき，y で先に計算するほうは原始関数が求められないので失敗する．x で先に計算するほうは簡単に計算できる（テキスト p.118）．

   さて，一般的な順序交換については定理 6.5 として整理されている．重要なのは積分域から累次積分の形を作ること，累次積分から積分域を求めることの 2 つを自由に行えるようになることだ．その際，積分域の図示が最も重要である．例題等で自分で考え t ほしい．

3. 積分の順序交換の例
$$\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$$
D は直線 $y=x+2$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域である．これを x で先に積分するためには y を固定した時の x の動く範囲を考察する．$0\leqq y\leqq 1$ のときは $-\sqrt{y}\leqq x\leqq\sqrt{y}$，$1\leqq y\leqq 4$ のときは $y-2\leqq x\leqq\sqrt{y}$ なので積分は 2 つの項に分け
$$\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$$
とすればよい．定理 6.5 の表示で $p(x)$ が 1 つの式で表せないので 2 つに分けたということだ．

4. リーマン和と積分の定義

　重積分は体積を求めることだが断面積を縦に切るか横に切るかで計算内容が全く変わることを経験した．さらに斜めに切ったり丸く切ったり（回転体の体積の求め方でバウムクーヘン法）する方法も考えられる．これは変数変換の立場から理解することができる．変数変換を記述するために，積分の定義を確認する．

　講義では簡単な説明にとどめたのでテキストの 112 ページから 113 ページのところを読んでほしい．リーマン和を導入しその極限として重積分を定義している．この定義からの帰結として定理 6.1 と定理 6.2 が得られる．詳しい説明は省略するが，リーマン和の極限が重積分であることを知っておくように．

次回は変数変換を解説する．重積分について最も重要な事項である．

本日のレポート課題

演習問題の 6.1.3 と 6.1.4 を課題にする．6.1.4 についてはどちらを先に積分するかを考えること．うまくいかない場合はじゅじょを入れ替えるように．

微分積分 II 講義メモ (12 月 17 日)

前回のレポート課題について

6.1.3 は積分域を図示してから順序を入れ替えること．式の形だけで交換しないように．なお累次積分の形から積分域を知るには

$$\int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dxdy \longleftrightarrow D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^4 \leqq y \leqq x^2$$

という関係で理解してほしい．解答はテキスト p.192 にあるので省略する．

6.1.4(1) は y で先に積分しないと計算できない．$\int e^{x^3}dx$ は積分計算では求められないからだ．(2) は x で先に積分したほうが計算が楽だ．y で先に積分することも可能だが計算は相当大変になる．どちらの問題でもそのまま累次積分にしてもうまくいかないような形で D が与えられている．少し意地が悪いが，その処理を行うことが問題の趣旨だ．

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} e^{x^3}dy = \int_0^2 x^2 e^{x^3}dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^2 = \frac{e^8-1}{3} \quad \text{テキストの解答は誤植}$$

$$\int_0^{\pi/4} dy \int_{\sin y}^{1/\sqrt{2}} xdx = \int_0^{\pi/4} dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sin y}^{1/\sqrt{2}} = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{4} - \frac{\sin^2 y}{2}\right)dy = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2y}{4}dy = \frac{1}{8}[\sin 2y]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}$$

【コメント】$\int f(x)dx = F(x)$ のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

が成り立つが，これを $ax+b$ で積分して中身の微分で割ると覚えた人は注意が必要だ．この調子で

$$\int f(x^3)dx = \frac{1}{3x^2}F(x^3)$$

とやったらとんでもない間違いだ．右辺を微分したら積の微分法則で $(1/(3x^2))'F(x^3) + (1/(3x^2))f(x^3)3x^2$ となるが第 1 項は 0 にならないからだ．このミスはケアレスミスではない．重大なミスとして大きく減点するので注意してほしい．

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換

   (x,y) が (u,v) の C^1 級関数で表されているとき，x,y による重積分を u,v による重積分に書き直すことができる．それが p.122 の定理 6.7 だ．

   $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

   講義ではリーマン和の極限としての積分の定義を利用して，なぜこの式が成り立つかを解説した．ここでは実際にこの公式を使う場合の考え方を記述しておく．

   - 積分域の変換

     (x,y) が D の上を動くときの (u,v) の動く範囲を考えそれを E とする．範囲を過不足なくとらないと正しい値は求められない．(u,v) と (x,y) の対応を考えなくてはならないので決してやさしくはない．

- 被積分関数の変換
  これは単に $f(x,y)$ を (u,v) の関数に直すだけだ．$f(x(u,v),y(u,v))$ と合成関数を作ればよい．
- 積分要素の変換
  これは簡単に
  $$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$
  とすればよい．公式として覚えてしまえば簡単だ．なお，積分要素とは無限小部分の面積のことである．面積要素ともいう．厳密に定義するのは難しい．
  講義ではリーマン和の考えを使って uv 平面での微小領域 E_j と xy 平面での微小領域 D_j の面積比として解説した．C^1 級を仮定しているので 1 次式で近似できること，1 次式は長方形を平行四辺形に移すこと，平行四辺形の面積が行列式（の絶対値）で与えられることが面積要素の変換の公式が成り立つ理由だ．

2. 変数変換の計算例
   例題 6.4 を解説した．
   - 積分域　$E: 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 4$
     D を定義する x,y の不等式をそのまま u,v の不等式に書き直しただけだ．これが積分域の変換を考える際の基本である．この問題では (u,v) と (x,y) が 1 対 1 に対応しているのでこれで十分だが，一般には難しい．詳しくは次回解説する．
   - 被積分関数 $(x+2y)e^{2x-y} = ue^v$
     x,y の式を u,v の式に直しただけ，簡単だ．
   - 積分要素 $x = (u+2v)/5,\ y = (2u-v)/5$ より $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -1/5$ なので $dxdy = \frac{1}{5}dudv$

   あとの計算はテキストを見ること．
3. 長方形領域における $f(x)g(y)$ の重積分
   $D: a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ のとき
   $$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$
   が成り立つ．これは結構便利な式なので覚えておくとよい．成り立つ理由を簡単にまとめておく．
   - まず左辺を累次積分で表す．
     $$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy$$
   - 一回目の積分 $\int_c^d f(x)g(y)dy$ において x は一定として y で積分するので $f(x)$ を積分の外に出せる．
     $$\int_c^d f(x)g(y)dy = f(x)\int_c^d g(y)dy$$
   - $\int_c^d g(y)dy$ は定数なのでこれを A とおく．第 1 回目の積分の結果は $Af(x)$ である．
   - 第 2 回目の積分を行えば
     $$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dy = \int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

   p.123 の例題 6.4 の計算でもこの公式を使っていることに注意してほしい．

次回（12 月 22 日第 3 時限の補講）は極座標変換を中心により一般の変数変換を解説する．変数変換の公式における三つの変換をきちんと理解しておいてほしい．

微分積分 II 講義メモ (12 月 22 日)

本日の講義の要点

1. 積分の変数変換（極座標変換）

   変数変換で最も重要なのは極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であろう．r は原点からの距離として，θ は x 軸の正方向からの偏角として理解できるので，D の図から r, θ の動く範囲を図形的に理解することができる．なお，$r \geqq 0$ は極座標を考える際の大前提である．また θ の動く範囲も必要以上に大きくしないため $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ あるいは $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ などに制限して考える必要がある．積分域の変換にはこの 2 点に注意すること．積分要素の変換は $dxdy = rdrd\theta$ でよい．計算は p.123 の例に記述されている．この式は覚えるなと言っても覚えてしまう式なので，当たり前のこととして使ってよい．

   - 例題 6.5 (1)

     最も基本的な問題である．積分域については D の条件式 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ に極座標を入れると $r^2 \leqq a^2$ となるがこれを $-a \leqq r \leqq a$ などとしないように．テキストに記述されているのでここでは省略する．

   - 例題 6.5 (2)

     講義では $D : x^2 + y^2 \leqq ax,\ a > 0$ として考えた．まず，この領域を求めることが第 1 段階だが，高校で扱った円の内部を表す不等式に過ぎない．この程度のことは簡単にできるように．なおテキストでは極座標変換で行っているが講義では

     $$x = \frac{a}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

     と D の中心からの極座標を利用した．変数変換は

     積分域　$E : 0 \leqq r \leqq a/2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

     被積分関数　$x = a/2 + r\cos\theta$

     積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

     極座標の場合と定数しか違わないので積分要素の変換は極座標の場合と同じになる．以上を組み合わせれば

     $$\iint_D xdxdy = \iint_E \left(\frac{a}{2} + r\cos\theta\right) rdrd\theta = \int_0^{a/2} dr \int_0^{2\pi} \frac{a}{2}r + r^2\cos\theta d\theta$$

     だが $\cos\theta$ を $[0, 2\pi]$ で積分したら 0 になるので

     $$\iiint_D xdxdy = \int_0^{a/2} \pi a r dr = \frac{a^3}{8}\pi$$

     となる．テキストでは単純に極座標で計算しているがこのほうが簡単に計算できる．

   - $D : x^2 + y^2 \leqq ax,\ a > 0$ における $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ の重積分

     積分域は前と同じだが被積分関数が違うので前の変数変換は使えない．これは極座標を使う必要がある．

     積分域　D を定める不等式を極座標を使って書き直せば $r^2 \leqq ar\cos\theta$ となる．$r \geqq 0$ と合わせて $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ である．なお，$x \geqq 0$ なので θ の動く範囲は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．これは原点を通る偏角 θ の方向の弦の長さが $a\cos\theta$ であることを考えれば図形的にも納得できるだろう．

     被積分関数　$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

原点中心の円ではないので積分域の考察は難しい．じっくり考えてほしい．さて以上の変換から計算は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy &= \iint_E \sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1-|\sin\theta|^3 d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}1-\sin^3\theta d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2}1+\frac{\sin 3\theta}{4}-\frac{3\sin\theta}{4} = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3\end{aligned}$$

- 変数変換の問題ではないが $D: x^2+y^2 \leqq ax$ で $\sqrt{x}$ を積分する問題も出した．これは y で先に積分する形で累次積分すると簡単に計算できる．重積分の変数変換では，被積分関数と積分域の両方を考えなくてはならないので難しい．一般論はないので試行錯誤は覚悟しないとならない．

2. 広義積分

   重積分においても関数が無限大に発散する点を持つ場合や，積分域が無限に広がっている場合はリーマン和の極限の形で積分を定義することはできない．1 変数の場合と同じように積分域を適当に狭めてやって極限をとるという考えが必要になる．ただし，積分域の列を考えるというのは理解するのが難しい．例題 6.7 のみ解説した．ここでは省略する．

1 月 14 日の講義では重積分の応用を解説する．また 1 月 21 日の講義では 3 変数の場合の微積分の扱いを解説する．第 2 回試験は 2 月 4 日に行う．レポート課題は 6.2.1 と 6.2.2 をやること．6.2.2(3) は $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変換するとよい．レポートの締め切りは 1 月 12 日 (火) の 12 時とする．

微分積分 II 講義メモ (12 月 22 日)

前回のレポート課題

6.2.1(1)　積分域は原点中心の半径 1 の円なので極座標による積分域は $E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とすればよい．

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr = 2\pi[\sqrt{1+r^2}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)\pi$$

6.2.1(2)　極座標による積分域は $E : a \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とすればよい．

$$\int_a^b dr \int_0^{2\pi} e^{r^2} r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_a^b = \pi\left(e^{b^2} - e^{a^2}\right)$$

6.2.1(3)　D は $(a, 0)$ を中心とする半径 a の円板の上半分である．この円は原点において y 軸に接するので θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ である．θ を固定した時の r の動く範囲は弦の長さが $2a\cos\theta$ であることから $0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta$ である．よって極座標での積分域は $E : 0 \leqq \theta \leqq \pi/2,\ 0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta$ である．

$$\iint_D xydxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta dr = 4a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\sin\theta d\theta = 4a^4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^4}{3}$$

6.2.2(1)　$x + y = u,\ x - y = v$ と変換すれば $x = (u+v)/2,\ y = (u-v)/2$ である．

積分域　$E : 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 2$

被積分関数　ve^u

積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u|dudv = (1/2)dudv$

より

$$\iint_E \frac{1}{2}ve^u dudv = \left(\int_0^2 e^u du\right)\left(\int_0^2 \frac{v}{2}\right)dv = e^2 - 1$$

6.2.2(2)　積分の変数変換は (1) と同じにとる．

積分域　$E : 0 \leqq u \leqq \pi,\ 0 \leqq v \leqq \pi$

被積分関数　$u^2\sin v$

積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u|dudv = (1/2)dudv$

$$\iint_E \frac{1}{2}u^2\sin v dudv = \left(\int_0^\pi \frac{\sin v}{2}dv\right)\left(\int_0^\pi u^2 du\right) = \frac{\pi^3}{3}$$

6.2.2(3)　極座標を少し変形して $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換する．

積分域　D を定義する不等式は $r^2 \leqq 1$ となる．(r, θ) は $(x/a, y/b)$ の極座標なので，$0 \leqq r$ と $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の 2 つの条件を付けくわえる．変数変換後の積分域は $E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である．

被積分関数　$a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta = r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)$

積分要素　$dxdy = |x_r y_\theta - x_\theta y_r|drd\theta = abrdrd\theta$

$$\left(\int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 abr^3 dr\right) = \frac{ab}{4}\frac{a^2+b^2}{2}2\pi = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\pi$$

なお，6.2.2 の各問題では長方形領域での 1 変数関数の積の積分（12 月 17 日の講義メモの 3）を用いている．

本日の講義の要点

1. 重積分の応用 (体積)

2 つの連続関数 $z = f(x, y)$ と $z = g(x, y)$ のグラフが xy 平面の領域 D の上で囲む部分の体積は $f(x, y) \geqq g(x, y)$ という条件のもとに

$$\iint_D f(x, y) - g(x, y) dxdy$$

で与えられる．これは次のような形で理解できる．

- D を有限個の小領域 D_j, $1 \leqq j \leqq N$ に分割する．各 D_j に点 $(x_j, y_j) \in D_j$ をとる．
- 考える立体を D_j によって分割すれば，これは底面 D_j 高さ $f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j)$ の柱体で近似できる．
- 柱体の体積は底面積×高さなので求める体積 V は

$$V \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N} \Big(f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j)\Big)\mu(D_j) \qquad \mu(D_j) = D_j\text{の面積}$$

  である．これは $f(x, y) - g(x, y)$ についてのリーマン和に他ならない．
- $f(x, y) - g(x, y)$ は連続なので積分可能である．よってリーマン和の極限は重積分として与えられる．これは求める立体の体積である．

$$V = \iint_D f(x, y) - g(x, y) dxdy$$

求めたいものを細かく分ける．分けた一つ一つを分かりやすいもので近似する．その和がリーマン和の形になっていれば，分割を細かくしていった時の極限が重積分で求められる．これが応用の考え方だ．リーマン和がカギとなることに注意すること．

例として例題 6.9 を開設した．特にいうことはない．

2. 重積分の応用 (曲面積)

$f(x, y)$ を C^1 級関数とする．$z = f(x, y)$ のグラフは滑らかな曲面であり，その D の上方にある部分を S とおく．S の面積を求めたい．

- D を有限個の小領域 D_j, $1 \leqq j \leqq N$ に分割する．各 D_j に点 $(x_j, y_j) \in D_j$ をとる．
- D_j の上方にある S の部分を S_j とおく．S の面積は S_j の面積の総和である．
- S_j を $(x_j, y_j, f(x_j, y_j))$ における接平面の D_j の上方にある部分 S'_j で近似する．
- 面 S'_j の水平面とのなす角 θ_j はそれぞれの法線ベクトルのなす角に等しい．S'_j の法線ベクトルは $(-f_x(x_j, y_j), -f_y(x_j, y_j), 1)$ なので，水平面の法線ベクトル $(0, 0, 1)$ と内積をとることにより

$$1 = \sqrt{1 + (f_x(x_j, y_j))^2 + (f_y(x_j, y_j))^2} \cos\theta_j$$

- S'_j は D_j をある方向に $1/\cos\theta_j$ 倍に引き伸ばしたものなので

$$\mu(S'_j) = \frac{1}{\cos\theta_j}\mu(D_j) = \sqrt{1 + (f_x(x_j, y_j))^2 + (f_y(x_j, y_j))^2}\mu(D_j)$$

  が成り立つ．ここで $\mu(S'_j)$ は S'_j の面積を表す．$\mu(D_j)$ も同様である．
- 以上を組み合わせれば求める面積は

$$\sum_{j=1}^{N}\mu(S_j) \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N}\mu(S'_j) = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 + (f_x(x_j, y_j))^2 + (f_y(x_j, y_j))^2}\mu(D_j)$$

  だが，最後の式は $\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}$ に関するリーマン和である．

- $f(x,y)$ は C^1 級なので $\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}$ は連続である．よって積分可能であり，分割を細かくしていった時の極限は重積分で与えられる．

$$\mu(S)=\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}dxdy$$

ここでも，面積が求められる根拠として重積分の定義（リーマン和の極限）が使われていることに注意せよ．計算方法ばかり気にしていると，このような応用の根拠を理解できない．

3. 曲面積の計算例

例題 6.10 の解答はテキストに記述してあるので省略する．6.4.2(1) を解説する．求めるものは $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ のグラフの $D: x^2+y^2 \leqq a^2-b^2$ の部分の面積である．

$$1+(z_x)^2+(z_y)^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

より曲面積は

$$\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

で求められる．これは極座標を利用すれば簡単に計算できる．

$$\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}dr\int_0^{2\pi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}d\theta=2\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=2\pi a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{\sqrt{a^2-b^2}}=2\pi a(a-b)$$

今日の講義でこの授業で扱うべき内容はすべて終了した．次回は 3 変数に拡張する場合の注意点の他，試験に向けて学習しておくべき事項の解説を行う．

本日のレポート課題

p.135 の 6.4.1 と 6.4.2 を課題にする．なお，6.4.2(1) は講義で扱ったので解答しなくてよい．

微分積分 II 講義メモ (1 月 21 日)

前回のレポート課題

6.4.1(1)　$z = x^2 + y^2$ のグラフは xz 平面の放物線 $z = x^2$ を z 軸の周りに回転して得られる回転面である．平面 $z = 1$ とで囲む領域は $x^2 + y^2 \leqq 1$ 上で下面を $z = x^2 + y^2$ のグラフ，上面を $z = 1$ とする立体である．よって体積は

$$\iint_D 1 - x^2 - y^2 dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 1$$

で求められる．極座標に変換すれば

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$1 - r^2$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

なので

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r(1 - r^2)dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.4.1(2)　与えられた立体は $D : x^2 + y^2 \leqq b^2$ の上で，上面を $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，下面を $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ とする立体である．xy 平面に関し対称な立体なので，上半分を求めて 2 倍すればよい．

$$2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq b^2$$

これも極座標に変換する．

積分域　$E : 0 \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{a^2 - r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

より

$$2\int_0^b dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{a^2 - r^2} d\theta = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^b = \frac{4\pi}{3}\left(a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}\right)$$

6.4.1(3)　この問題は 3 重積分の問題でありレポート課題にすべきではなかった．申し訳ない．

$$\iiint_D dxdydz \qquad D : 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq y + z \leqq 1,\ 0 \leqq x + z \leqq 1$$

これを $x + y = u,\ y + z = v,\ z + x = w$ とおいて変数変換する．

積分域　$E : 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1,\ 0 \leqq w \leqq 1$

被積分関数　1

積分要素　u, v, w を x, y, z に移す線形写像の行列式が $-1/2$ なので $dxdydz = (1/2)dudvdw$（積分要素の比は行列式の絶対値）

これから 1/2 の 1 辺の長さ 1 の立方体上での積分になるので値は 1/2 である．

6.4.2(2)　立体の考察は 6.4.1(1) と同じである．曲面積は $D : x^2 + y^2 \leqq 1$ の上で $\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ を積分すればよい．

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 1$$

積分域　$E: 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{1+4r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

6.4.2(3)　$D: x^2+y^2 \leqq a^2$ の上で $\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$ を積分すればよい．

積分域　$E: 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

被積分関数　$\sqrt{1+r^2}$

積分要素　$dxdy = rdrd\theta$

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+r^2}dr = 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{2}{3}((1+a^2)^{3/2}-1)$$

本日の講義の要点

今日の講義では 3 重積分の扱いを簡単に紹介した．定義も含めて論理の展開の仕方は 2 重積分の場合と同様なので，実質的に 2 重積分の復習を兼ねている．

- 定義はリーマン和の極限である．2 重積分では領域を縦横に細分するが，3 重積分の場合は縦横に加えて上下にも細分しなくてはならない．ジャガイモをキューブ上に切り分けることをイメージすればよい．
- リーマン和の極限という積分の定義から累次積分が導かれる．
- 変数変換もリーマン和の考えから理解できる．この際，変換前の小立体の体積と，対応する変換後の小立体の体積の比を考えなくてはならない．ここでもこの体積の比はヤコビアン（1 階偏導関数の作る行列式）の絶対値で与えられる．

3 重積分の応用として 6.4.1(3) を解説した．前回のレポート課題の解答例に記述している．

今日で，微分積分 II の授業日程は試験を残すのみになった．範囲は積分のみなので関係するレポート課題をきちんと解いておくこと．どうしても正しい答えにたどり着けないという人は遠慮なく質問に来てほしい．計算ミスのみならいいのだが，ひどい勘違いをしている場合もある．

理系基礎科目「微分積分 II」（工学部機械 2 組）
第 1 回試験（12 月 3 日実施）解答例とコメント

問 1 は各小問に 10 点，問 2 と問 3 に 15 点，問 4 に 10 点の 80 点満点で採点した．受験者は 64 人，最高点は 75 点，最低点は 0 点，平均点は 38.73 点だった．基本的な問題しか出題していないが，基礎レベルの定着ができていないと強く感じた．また計算力も低く，高校まででどんな学習をしていたのか疑問を持たざるを得ないような答案も多かった．

合格点は 25 点とする．第 2 回試験（積分の試験）も不合格の場合は再試験の対象にならないので，日頃の学習をきちんとやっておくように．

1 (1) 次の関数の 2 階までの偏導関数を求めよ．

$$(1) f(x,y) = x^2y - 3xy^3 - 2xy^2 + 2x - y \qquad (2) f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$$

【解答例】 (1) $f_x = 2xy - 3y^3 - 2y^2 + 2$, $f_y = x^2 - 9xy^2 - 4xy - 1$, $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x - 9y^2 - 4y$, $f_{yy} = -18xy - 4x$
(2) $f_x = -2x\sin(x^2 - y^2)$, $f_y = 2y\sin(x^2 - y^2)$, $f_{xx} = -2\sin(x^2 - y^2) - 4x^2\cos(x^2 - y^2)$, $f_{xy} = 4xy\cos(x^2 - y^2)$, $f_{yy} = 2\sin(x^2 - y^2) - 4y^2\cos(x^2 - y^2)$

【コメント】

- f_{xy} の計算をしていない答案がある．2 次の偏導関数は f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の 3 通りある．なお問題にあるような一つの式で定義されている関数は，何回でも微分できるので $f_{xy} = f_{yx}$ を満たす．一方のみ計算すれば十分だ．
- (2) で $\cos(x^2 - y^2) = \cos x^2 \cos y^2 + \sin x^2 \sin y^2$ としてから微分する人がいるが，明らかに計算量は多くなる．
- $f_{xx} = -4x^2\cos(x^2 - y^2)$ とする答案が目立った．積の微分のミスだが単純なことなので間違えないように．

1 (2) 次の極限の点 $(0,0)$ での連続性を調べよ．

$$(1) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + 2y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (2) f(x,y) = \begin{cases} x\log(x^2 + y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

【解答例】 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおけば (1) は $f(x,y) = \cos\theta\sin\theta + 2r\sin^3\theta$ である．θ を一定にしたまま $r \to 0$ とすると極限は $(1/2)\sin 2\theta$ なので，θ の値によって様々な値になる．よって $r \to 0$ のときに一定の値に近づくことはない．収束しないので連続ではない．(2) は $f(x,y) = r\cos\theta\log r^2$ より $|f(x,y)| \leqq 2r|\log r|$ だが $\lim_{r\to+0} r\log r = 0$ なので $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である．$f(0,0) = 0$ と定義されているので $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である．

【コメント】

- (2) で $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を示さなければならない．$r \to 0$ だからでは理由にならないし $|r\log r| \leqq 2r$ では間違いだ．なお解答例のように $r\log r \to 0$ は既知の事実として使ってよい．

- 極座標を利用するがその後の極限を $\theta \to 0$ とする人がいるが，形だけ覚えておこうとしたためだろう．極座標の r が原点からの距離を意味することに注意すれば $r \to 0$ とするのが当たり前に思えるはずだが．考えることを放棄して覚えるだけにするのでは数学の勉強にはならない．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (3) 関数 $z = x^3 + 2xy + 2y^3$ のグラフ（曲面）の $(x, y) = (2, -1)$ での接平面の方程式を求めよ．また $x^3 + 2xy + 2y^3 = 2$ で定義される曲線の $(2, -1)$ における接線の方程式を求めよ．

【解答例】 $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y$ より $f_x(2, -1) = 10$，$f_y(x, y) = 2x + 6y^2$ より $f_y(2, -1) = 10$ である．よって求める接平面の方程式は

$$z = 10(x - 2) + 10(y + 1) + f(2, -1) = 10x + 10y - 8$$

求める接線の方程式は

$$10(x - 2) + 10(y + 1) = 10x + 10y - 10 = 0, \qquad x + y = 1$$

【コメント】

- 平面の方程式，直線の方程式は一次関数だ．1 次関数になっていない答案が目につく．
- 接平面の方程式は基本事項なのに全く定着していなかった．$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線の方程式が $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ になることは高校で学習したはずだ．接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

だが，形式がよく似ていることに注意して覚えてほしい．$f(a, b)$ を落とす人がいたが，接線の方程式で定数項 $f(a)$ を落としたようなものだ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (4) C^1 級関数 $z = f(x, y)$ について $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変換する．次の等式を示せ．

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2$$

【解答例】合成関数の微分により

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y \qquad f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y$$

である．よって

$$(f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2 = (\cos\theta f_x + \sin\theta f_y)^2 + (-\sin\theta f_x + \cos\theta f_y)^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$$

【コメント】

- 合成関数の微分を利用する問題だが，合成関数の微分を全く使えない人が多い．
- 意味不明な記号を使う人が多いが，何かの授業で出てきたものなのだろうか．自分で適当に記号を作っているのだろうか．理解できない．

2 次の関数の極値の候補点を求めるとともに，求めたそれぞれの点について極値の判定を行え．

$$f(x, y) = x^3y + xy^2 - 5xy$$

【解答例】$f_x = 3x^2y + y^2 - 5y = y(3x^2 + y - 5) = 0$ と $f_y = x^3 + 2xy - 5x = x(x^2 + 2y - 5) = 0$ の連立方程式を解く．$f_y = 0$ より $x = 0$ または $x^2 = 5 - 2y$ だが $x = 0$ の場合は $f_x = y(y - 5) = 0$ より解として $(x, y) = (0, 0)$, $(0, 5)$ を得る．$x^2 = 5 - 2y$ の場合は $f_x = y(10 - 5y) = 0$ より解として $(x, y) = (\pm\sqrt{5}, 0)$, $(\pm 1, 2)$ を得る．以上の 6 点が極値の候補点である．

$f_{xx} = 6xy$，$f_{xy} = 3x^2 + 2y - 5$，$f_{yy} = 2x$ より判定は

候補点	A	B	C	$AC - B^2$	判定
$(0, 0)$	0	-5	0	負	極値をとらない
$(0, 5)$	0	5	0	負	極値をとらない
$(\pm\sqrt{5}, 0))$	0	10	$\pm 2\sqrt{5}$	負	極値をとらない
$(\pm 1, 2)$	± 12	2	± 2	正	極小（極大）

よって $(1, 2)$ で極小値 -4，$(-1, 2)$ で極大値 4 をとる．

【コメント】

- 連立方程式を解くことは比較的よくできていた．最も多いミスは $3x^2y + y^2 - 5y = 0$ から $3x^2 + y - 5 = 0$ としてしまうことだ．これは $x = 0$ の場合を無視したことになるので，極値の候補点をすべて求めることができなくなる．
- 2 変数関数の極値問題と陰関数 $f(x, y) = 0$ の極値問題を混同している人が目につく．全く意味の異なる問題なので評価の対象にできない．
- $AC - B^2 < 0$ の場合は極値を取らない（極値ではない）と答えること．何も答えてなければ判定したことにならない．

3 関数 $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ の $D : x^2 + 2y^2 \leqq 4$ における最大最小を求めよ．

【解答例】 $f_x = f_y = 0$ を満たす点は $(0, 0)$ のみである．D の境界上の条件付き極値問題では

$$x^2 + 2y^2 = 4 \qquad 4x(4y) - 2y(2x) = 12xy = 0$$

を連立させれば $x = 0$ のときは $y = \pm\sqrt{2}$，$y = 0$ のときは $x = \pm 2$ である．よって最大最小の候補となる点は $(0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm 2, 0)$ の 5 点である．この 5 点での $f(x, y)$ の値は $0, 2, 8$ なので $(\pm 2, 0)$ で最大値 8，$(0, 0)$ で最小値 0 をとる．

【コメント】

- 領域の内部での最大最小は 2 変数関数の極値問題を考えればよい．境界上での最大最小は条件付き極値問題を考える．両方の候補点をすべて求め，その値を比較するという方法を講義で解説した．微分の範囲で扱う最も高級な議論といえる．
- 被積分関数の形を見れば最小値が 0 であることは直ぐにわかる．最大も D の境界の楕円と $z = f(x, y)$

のグラフの等高線の楕円が接する場合だということに気づけば，解答例のような議論がなくても答えは出せる．

- 条件付き極値問題で境界上にあるための条件 $x^2 + 2y^2 = 4$ を連立させない人がいるが，これでは候補点が決まらない．

$\boxed{4}$ 次の関数の $(0,0)$ における偏微分係数を求めよ．また $(0,0)$ で全微分可能であることの定義を述べるとともに，$(0,0)$ での全微分可能性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

【解答例】偏微分係数の定義により

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2 \qquad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1$$

である．

$(0,0)$ で全微分可能とは $f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$ が $f(x,y)$ の 1 次近似式になっていることをいう．すなわち 2 つの関数の差を $\rho(x,y)$ とおいて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\rho(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．この問題においては $f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 2x - y$ なので，

$$\frac{f(x,y) - 2x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^3 - y^3 - (2x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-2xy^2 + x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

の極限が 0 に収束するか否か考察すればよい．極座標で計算すれば右辺は

$$-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin\theta$$

である．ゆえに値は r によらず，$\theta = 0$ の時は 0，$\theta = \pi/4$ の時は $-\sqrt{2}/4$ である．よって $r \to 0$ で一定の値に近づくとは言えない．微分可能ではない．

【コメント】

- 偏微分計算を行う人が多いが，$(0,0)$ での偏微分係数を求めよという問題なので定義に基づいて考えなければならない．解答例を見れば計算内容は全く簡単なことに気づくだろう．この問題が解けないのは，数学の学習が計算方法の習得にあると思っているためだ．授業でも行ったが，この程度の計算はコンピューターがすべて行ってくれる．
- 全微分可能とは 1 次式で近似できることだ．1 次近似式の係数は偏微分係数で与えられるので，それが求められれば 1 次近似式の候補が決まる．あとはそれが実際に 1 次近似式になることを確認するだけだ．

理系基礎科目「微分積分 II」（工学部機械 2 組）
第 2 回試験（2 月 4 日実施）解答例とコメント

問 1 の各小問と問 2 問 3 問 5 に 10 点，問 4 の各小問に 15 点配点し 100 点満点で採点した．最高点は 93 点，最低点は 8 点，平均点は 53.74 点だった．問 3 までは比較的簡単な計算問題だがこれができないというのは計算練習が足りないというほかない．合格点は 35 点とする．

他の分野なら「よく分からないので自分なりに考えてみました」ということも評価されるかもしれないが，数学は言葉の意味を厳格に扱う学問なので「自分なりに考えてみた」というのは殆どが無意味な作業だ．評価しようがない．また公式や技法も使うためには必ず条件があり，それを無視したらとんでもない結論に至ってしまう．仮定や条件についての厳格な取り扱いも数学の特徴だ．そしてこの厳格さこそが様々な分野で数学が利用される根拠になるのだ．

1 年間，微分積分の学修を通じて皆さんとおつきあいしてきたが，このような数学の特徴を認識し数学に取り組んでもらうというのが最大の目的だ．残念ながらまだまだ本来の合格基準に到達した人は少ない．成績で単位が得られたとしてもそれで納得しないようにしてほしい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の積分の値を求めよ．

$$(1) \quad \iint_D xy\,dxdy,\ D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a$$

【解答例】そのまま累次積分で計算する．

$$\int_0^a dy \int_0^{a-y} xydx = \frac{1}{2}\int_0^a y(a-y)^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2y^2}{2} - \frac{2ay^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{24}a^4$$

【コメント】

- 易しい問題だ．最も深刻な間違いは $\int_0^a dy \int_0^a xydx$ としてしまうものだ．一般の領域での累次積分の考え方が全く理解できていない．
- 半分以上の学生が正解であり，10 点満点で平均 7.85 点だった．

$$(2) \quad \iint_D \sqrt{y^2 - xy}dxdy,\ D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$$

【解答例】 これも累次積分で計算する．x で先に積分したほうが簡単である．

$$\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy}dx = \int_0^1 dy \left[-\frac{2}{3y}(y^2 - xy)^{3/2}\right]_0^y = \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}$$

【コメント】

- (1) よりも若干積分が難しいので，x で積分した時の分母の y を落としたもの，分子に持ってきたものなどが目立った．
- 累次積分は 1 変数の積分の繰り返しなので，それぞれの計算で置換積分は利用できる．ただし累次積分に表してからの話だ．累次積分に表す前に置換積分しようとすると積分範囲の理解は困難だ．

- 10 点満点で採点し平均点は 6.54 点だった．

$$(3)\quad \iint_D (x+y)\log(1+x-y)dxdy,\ D: 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1$$

【解答例】 $x+y=u,\ x-y=v$ として変数変換する．

積分域　$E: 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v, \leqq 1$

被積分関数　$u\log v$

積分要素　$dxdy = |x_u y_v - x_v y_u| dudv = \frac{1}{2}dudv$

$$\iint_E \frac{1}{2}u\log v dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^1 \log(1+v)dv = \frac{1}{4}\left[(1+v)\log(1+v)-v\right]_0^1 = \frac{2\log 2 - 1}{4}$$

【コメント】

- 積分要素の変換で絶対値を落とした人が少しいたが，ほとんどの人は正しく扱っていた．
- $\log(1+v)$ の積分で間違える人が多い．積分ではなく微分したというのは計算ミスとは言わない．
- 10 点満点で採点し平均点は 6.74 点だった．

$$(4)\quad \iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2 \leqq a^2$$

【解答例】 極座標を用いて計算する．$dxdy = rdrd\theta$ に注意せよ．

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r\sin r^2 d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_0^a = \pi(1-\cos a^2)$$

【コメント】

- 典型的な極座標による計算問題，平均点は 8.62 点と比較的よくできていた．
- 積分域の取り方では r の動く範囲を $-a \leqq r \leqq a$ とするものが散見した．極座標では r は原点からの距離であって 0 以上にとるのが大前提だ．距離だという意識がないのだろう．
- $r\sin r^2$ の積分で失敗するものが少なからずいる．$\sin^2 r$ と誤解して $(1-\cos 2r)/2$ にするものもいたが，不注意以上のもの（式の形しかみていない，意味を考えない）を感じる．$1-\cos a^2$ を $\sin a^2$ に書き直すものもいた．公式を意味を考えずに丸暗記してきたつけがたまっているのだろう．こういう勉強をしているうちは数学は絶対にできるようにはならないし面白いとも感じられない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $D: a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ について次の等式が成り立つことを示せ．

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

【解答例】 x で先に積分する形で累次積分を行えば

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x)g(y)dx$$

最初の x による積分では y は定数とみなすので $g(y)$ は積分の外に出してよい．ここで $\int_a^b f(x)dx$ は定数になるのでこれを A と置けば，最初の積分の結果は $Ag(y)$ になる．よって

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_c^d Ag(y)dy = A\int_c^d g(y)dy$$

あとは A をもとの積分の形に戻せばよい．

【コメント】

- ポイントは x で先に積分したとき $g(y)$ が積分の外に出ることだ．このことが言葉あるいは式で明示してあれば正解にした．
- 平均点は 7.13 点だった．

3 累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$ の順序を交換せよ．

【解答例】直線 $y = x+2$ と放物線 $y = x^2$ に挟まれた部分での積分である．y を固定した時の x の動く範囲を考えれば $0 \leqq y \leqq 1$ のときは $-\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$，$1 \leqq y \leqq 4$ のときは $y-2 \leqq x \leqq \sqrt{y}$ である．よって二つの積分に分ける必要がある．

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

【コメント】

- 解答例は式で説明したが図と結果があれば正解にした．
- 2 つの積分に分けていない解答が目につくがそれでは答えられない．図を描きながら何故 2 つに分ける必要があるのか考えてほしい．
- 10 点満点で平均点は 6.77 点だ．

4 座標空間内の曲面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ と 平面 $z=0$ 内の領域 $D : x^2+y^2 \leqq ax,\ z=0$ について
(1) 曲面と $z=0$ に挟まれ，かつ D の上方にある部分の体積を求めよ．

【解答例】（$a>0$ と明示しておくべきだった．$a<0$ でも特に難しくなるわけではないが処理が煩わしい．以下では $a>0$ として解答例を記述する．）体積は

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leqq ax$$

で与えられる．これを極座標で座標変換するが問題は積分域の変換だ．D の条件式を極座標で書き直せば $r^2 \leqq ar\cos\theta$ となる．極座標の意味から $r \geqq 0$ なので $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ を得る．これから $\cos\theta \geqq 0$ でなくてはな

らないので θ の範囲は $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とすればよい．

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}dr &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 - a^3|\sin^3\theta| d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi/2} 1-\sin^3\theta d\theta = \frac{2a^3}{3}\left[\theta + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3\end{aligned}$$

【コメント】

- この計算は極座標で計算すべきだ．極座標の中心を D の中心にとり $x = a/2 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするのも自然な発想だがこれでは積分計算ができない．計算の意味を考えずやっていいこととやってはいけないことの区別がついていない人にはできるできないの判断は困難だろうが.
- 極座標で計算するとき θ の範囲の取り方を考えること．円は $x \geqq 0$ の範囲にしかないことに注意せよ.
- $(\sin^2\theta)^{3/2} = |\sin^3\theta|$ だ．高校でも注意されたはずだが，絶対値を落とす人が多い.
- $\sin^3\theta$ の積分は数学 III でも扱っているのではないか．3 倍角の公式を使うのが標準的だが次のようにやったほうが分かりやすいかもしてない.

$$\int \sin^3\theta d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$$

- $1-\cos^2\theta = 1 - \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ と処理する人が目につく．以前も見た扱いだが今回は多いと感じた．$1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ とおくのが普通だと思うが.
- 15 点を配点し，平均点は 4.05 点だった．残念ながら正解はいなかった.

(2) 曲面の D の上方にある部分の曲面積を求めよ.

【解答例】積分域は (1) と同じであり被積分関数は

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

である．ゆえに極座標に変換すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr &= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta} = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1-|\sin\theta| d\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\pi/2} 1-\sin\theta d\theta = a^2(\pi-2)\end{aligned}$$

【コメント】

- 曲面積の公式を覚えていると思える人には部分点を与えた．他のコメントは (1) と同じなので省略する．計算自体は (1) よりやさしく満点も 2 人いた.
- 15 点配点し，平均点は 4.95 点だった.

5 二つの連続関数のグラフ（曲面）$z = f(x,y)$ と $z = g(x,y)$ （$f(x,y) \geqq g(x,y) \geqq 0$）に挟まれ，かつ xy 平面の領域 D の上方にある部分の体積が $\iint_D f(x,y) - g(x,y)dxdy$ で求められることについてリーマン和の考えを用いて説明せよ．

【解答例】D を縦横に細かく分割し各小領域を D_j, $1 \leqq j \leqq N$ と表す．この分割に基づいて考える立体を D_j を断面とする棒状の部分に分割する．$(x_j, y_j) \in D_j$ をとってこの棒状の部分を断面が D_j で長さが $f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j)$ の柱体で近似する．すると体積は

$$\sum_{j=1}^{N}(f(x_j, y_j) - g(x_j, y_j))\mu(D_j) \qquad \mu(D_j) = D_j\text{の面積}$$

で近似できる．また分割を細かくしていくとき，求める体積になると考えられる．一方これは連続関数 $f(x,y) - g(x,y)$ のリーマン和であり，分割を細かくしていった時の極限は重積分 $\iint_D f(x,y) - g(x,y)dxdy$ で与えられる．よって体積は重積分に等しくなる．

【コメント】

- リーマン和の形が解答にきちんと記述されているかがポイントだ．
- リーマン和による重積分の定義は厳密に扱うのは難しいが直感的には分かりやすいはずだ．例えばジャガイモを縦横に切れば棒状の断片が出てくるが，その体積は断面積に長さをかけたもので近似できる．だからジャガイモの体積はそれらの和で近似できるが，その和こそリーマン和に他ならない．
- こういう問題が苦手なのは知っている．計算で答えが出るものが数学だと思っているのだろう．数学で重要なのは概念の意味であることを知ってほしい．またそれを考えることの重要さを感じてほしい．10 点満点で平均点は 1.03 点だった．