複素関数の講義メモ (9 月 29 日)

微分積分における変数を複素数にすると実数の場合とは全く異なる様々な事実が得られる．一方，計算については実数の場合と同様に行える．この講義ではその事情を詳しく紹介するとともに実積分計算への応用などを解説する．

本日の講義の要点

1. 複素数と複素平面

   複素数と複素平面に関する基本事項をテキストをもとにまとめておく．簡単なことだが正確に理解しておくように．

   - 複素数，実部，虚部，和，差，積，商，零元，単位元（1-1 節）

     すべて高校で習っていることだ．例の計算例は自分でやっておくこと．なお虚部 $\mathrm{Im} z$ は実数であることに注意せよ．この節で最も重要なのは複素数全体の集合で四則演算が自由に行える（もちろん 0 で割ることを除く）ことだ．事実として覚えるのではなく，当たり前のこととして感じられるように．

   - 複素平面，実軸，虚軸，絶対値，共役複素数，三角不等式（1-2 節）

     複素数 $x + iy$ を座標平面の点 (x, y) と対応させたとき複素平面という．簡単なことだ．例 3 は高校でも学習したと思う．証明は $z = x + iy$ とおいて計算するだけだ．積の証明だけでもいいのでやっておくように．

     例 4 は三角不等式だ．図形的に理解する方法，計算で理解する方法があるので両方確認しておくこと．

   - 極形式，偏角，主値，オイラーの公式（1-3 節）

     極座標に対応する複素数の表示だ．なお曲形式はオイラーの公式を利用して $z = re^{i\theta}$ と表してほしい．オイラーの公式により加法定理は指数法則として理解しなおすことができる．

     $$e^{i\theta}e^{i\varphi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}$$

     偏角 $\arg z$ とその主値 $\mathrm{Arg}\, z$ の違いに気をつけること．$\arg(zw) = \arg z + \arg w$ は成り立つが，$\mathrm{Arg}\,(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$ は一般には成り立たない．

   - ド・モアブルの公式，べき乗，べき根（1-4 節）

     $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ より，n 乗根は

     $$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n)}$$

     である．z の偏角 θ は $\theta + 2k\pi$ としても良いので $z^{1/n}$ の偏角は

     $$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

     となる．$z^{1/n}$ の絶対値は $\sqrt[n]{r}$ なので，z の n 乗根は原点を中心とする正 n 角形の頂点となる．0 でない複素数の n 乗根がちょうど n 個あることに注意せよ．

     講義では p.14 の例 2 を考えてもらった．$-8i$ の絶対値と偏角が分かれば簡単なはずだ．テキストの解答も参考に自分で考えてみよ．

   - ε 近傍，領域（1-5 節）

     領域について「有限個の滑らかな曲線で囲まれた集合」と理解することにした．この授業の目的ならこの程度の理解で十分だと思う．

2. 複素変数の関数

この講義では関数 $w = f(z)$ で $z = x + iy$ と $w = u + iv$ がともに複素数であるものを扱う．変数を表す文字の使い分けに注意すること．x, y, u, v は実数であり $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくとき，$u(x, y), v(x, y)$ は実の 2 変数関数である．複素関数は 2 つの 2 変数関数の組として理解できる．例として $w = z^2$, $w = |z|^2$, $w = e^z$ の三つを紹介した．

今日のところは，難しい問題はなかったと思う．レポート課題としては偏角とべき根とに関する問題を与えておく．締め切りは 10 月 2 日 (金)13 時，研究室（理学部 3 号館 4 階 D416）の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい．

本日のレポート課題

課題 1 次の複素数の偏角を求めよ（問 1-21）

$$(a)\, z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} \qquad (c)\, z = (\sqrt{3} - i)^6$$

課題 2 次のべき根を求め図示せよ（問 1-23）

$$(b)(1 - \sqrt{3}i)^{1/2} \qquad (c)(-1)^{1/3}$$

来週の講義のために

2-4 節の導関数と微分公式まで扱う予定である．テキストを眺めておいてほしい．

複素関数の講義メモ (10 月 6 日)

前回のレポート課題について

易しい問題だと思っていたがつまらない誤解をしている人も多い．いくつか注意すべき点をコメントしておく．

- $a+bi$ の偏角を求めるには，(a,b) の座標平面での位置を考えて行うこと．$\tan\theta = b/a$ から議論すると角度は一通りに決まらない．$\tan\theta = -\sqrt{3}$ からは $\theta = 2\pi/3,\ -\pi/3$ のいずれかであることしか導かれない．なお $a+bi$ は座標平面の点 (a,b) に対応する．これを (a,bi) と書かないように．
- $z = a+bi$ の偏角が α のとき z^{-1} の偏角は $-\alpha$ であり z^6 の偏角は 6α だ．α だと勘違いしている人が複数いた．また正数倍しても偏角は変わらないが負数倍すると偏角は $-\alpha$ になる．このように計算によって偏角がどう変わるのかきちんと理解しておくこと．
- z の偏角を $\alpha+2k\pi$ とおき，z^6 の偏角を $6\alpha+12k\pi$ とする人が少なくない．これは厳密には正しくない．$\arg z$ とは一つの決まった値ではなく 2π の整数倍の差は同じものとみなしている．従って

$$\arg z^6 = 6\arg z$$

という等式の両辺は 2π の整数倍の違いを許容した上で成り立つ式だ．$\arg z^6 = 6\alpha$ と書くのは問題ないが $\arg z^6 = 6\alpha + 12k\pi$ と書いてしまうと 12π の整数倍の違いしか許容していないように見える．誤解しやすいので注意してほしい．

一方 $z^{1/2}$ の偏角は $\alpha/2 + k\pi$ としなくてはならない．2π の整数倍の違いは同じ角という前提から，異なる角として得られるのは $\alpha/2$ と $\alpha/2+\pi$ だ．大事なのは形式的な計算ではなく，実際にどういう角度を表しているのか意識することだ．例をあげておこう．

$1+i$ の偏角は $\pi/4$ だ．これを $\pi/4+2k\pi$ として $(1+i)^6$ の偏角を $3\pi/2+12k\pi$ と表記してしまったとする．そしてこの 1/2 乗をとり $((1+i)^6)^{1/2}$ の偏角を $3\pi/4+6k\pi$ としたとする．これは間違いである．

$(1+i)^6 = -8i$ でありその 1/2 は 2 つあって $((1+i)^6)^{1/2} = \pm(-2+2i)$ である．よってその偏角は $3\pi/4+k\pi$ である．

- $(\sqrt{3}-i)^6$ の偏角を求める際に，直接計算して -64 の偏角を求める人がいる．確かに正解だが $(\sqrt{3}-i)^{47}$ の偏角を求めようとするとうまくいかない．やはり $(\sqrt{3}-i)$ の偏角を求め，それを 6 倍する形で答えてほしい．

本日の講義の要点

1. 近傍，内点，開集合，連結，領域，リーマン球，無限大
    - p.14 から 15 の基本的定義を確認したうえで例 1 と例 2 を解説した．この用語は他の授業でも扱うのでここでは直感的理解に止める．
    - 複素数の集合 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた集合を拡張された複素平面という．これは立体射影によって球面（リーマン球）と同一視される．なお，∞ は複素数ではないが，写像によっては定義域と値域に ∞ を含める場合がある．
2. 複素関数の極限と連続性について
    - 前回，簡単に述べたことだが時間がなかったので説明が不十分だったかもしれない．要点は

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

なので，$f(z)$ の極限，連続性を $u(x,y), v(x,y)$ の極限，連続性として理解できることだ．要するに微分積分 II の講義で学習済みだ．

なお，極限と連続性については $\varepsilon\delta$ 論法という定番の議論があるが，これについては実数と論理で扱うのでここでは 1 年次と同様に直感的な理解に止める．

- 実数の場合との大きな違いは無限大 ∞ の扱いだ．次の 2 つの極限を比較してみてほしい．

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{x} = \pm\infty\,(\text{実の場合}) \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty\,(\text{複素の場合})$$

  複素数では正負という考えがないことに注意せよ．

- $z \to z_0$ は $|z-z_0| \to 0$ を意味する．$z\to\infty$ は $|1/z|\to 0$ を意味する．これは $1/z \to 0$ と同値である．

3. 複素関数の微分，導関数，微分公式

微分や導関数の定義は実数の場合とまったく同様だ．しかし極限が複素平面での極限なので大きな違いがある．

- $(z^n)' = nz^{n-1}$ が成り立つ．

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^n - {z_0}^n}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}{z_0}^2 + \cdots + z{z_0}^{n-2} + {z_0}^{n-1} = n{z_0}^{n-1}$$

- $f(z)$ が z_0 で微分可能なら z_0 で連続である．（p.33 の一番下に証明が記述されている．）
- 積の微分法則が成り立つ．（定理 2(p.34) の一部）

  証明は実数の場合と同じである．

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}g(z) + f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

  であるが，右辺の極限は微分可能の仮定から $f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ になる．ただし $g(z)$ の z_0 での連続性を使っている．他の証明も同じようにできるので考えてみると良い．

- $w = |z|^2$ が 0 以外で微分不可能であること (p.33 例 2)

  この例から複素関数としての微分が偏微分や全微分と異なる概念であることが分かる．意外な事実と感じるだろう．

$$\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z-z_0} = \frac{z\bar{z} - z_0\overline{z_0}}{z-z_0} = \bar{z} + z_0\frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$$

  であるが $z - z_0 = re^{i\theta}$ とおけば右辺は $\bar{z} + z_0e^{-2i\theta}$ になる．$z\to z_0$ のとき，$z-z_0$ の偏角は何の制約も受けないので，$e^{-2i\theta}$ は絶対値 1 のあらゆる複素数の値をとることができる．よって $z_0 \neq 0$ の場合は，一定の値に近づくとは言えない．すなわち $z_0\neq 0$ で微分不可能である．

4. コーシー・リーマンの方程式

複素関数の極限は実部虚部の 2 変数関数としての極限である．

$$\lim_{z\to c} f(z) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) + i\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) \quad c = a+ib, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ここで右辺が収束すれば $y = b$ と固定して $x\to a$ とした極限も同じ値に収束する．この考えを微分の定義式に適用して得られるのがコーシー・リーマンの方程式である．ゆえに微分可能ならコーシー・リーマンの方程式が成り立つ．

逆に C^1 級関数 $u(x,y), v(x,y)$ がコーシー・リーマンの方程式を満たせば $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ は微分可能になる．このことの証明は次回与える．

本日のレポート課題

第 2 章章末問題の 2-18 と 2-21(c)(d) を課題にする．どちらも微分可能でないことを示す問題だが 2-18 は微分の定義を使って直接証明してほしい．2-21 はコーシー・リーマンの方程式を利用して示すこと．

複素関数の講義メモ (10 月 13 日)

前回のレポート課題について

2-18　微分可能性の定義により次の極限の収束性を調べる．

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$\Delta y=0$ とおいて 0 に近づければ（実軸に沿って 0 に近づければ）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

である．$\Delta x=0$ とおいて 0 に近づければ (虚軸に沿って 0 に近づければ）

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$$

である．近づけ方によって極限が変わるのでこの極限は存在しない．よって微分不可能である．

2-21(c)　$u=2x,\ v=xy^2$ よりコーシー・リーマンの方程式は

$$2=2xy\ (u_x=v_y)\qquad 0=-y^2\ (u_y=-v_x)$$

である．第 2 式より $y=0$ だがこのとき第 1 式は $2=0$ となり両方が成り立つことはない．いかなる点でもコーシー・リーマンの方程式は成立せず微分不可能である．

2-21(d)　$u=e^x\cos y,\ v=-e^x\sin y$ よりコーシー・リーマンの方程式は

$$e^x\cos y=-e^x\cos y,\qquad -e^x\sin y=e^x\sin y$$

である．いかなる実数 x についても $e^x\neq 0$ なので $\cos y=\sin y=0$ でなくてはならないが三角関数の定義からこのような y は存在しない．よっていかなる点でも微分不可能である．

【コメント】

- この問題を通じて，実 2 変数関数としての微分と複素関数としての微分の意味の違いを確認してほしい．
- 2-18 は微分可能性の定義に基づいて議論するように指示した．複素関数の極限は基本的に 2 変数関数の極限なので近づけ方によって極限が変わってしまうことを言えばよい．なお，解答例と同じ議論を行ってから，最後の理由をコーシー・リーマンの方程式が成り立たないからとした答案が目についたが，これは見当違いだ．
- 2-19 はコーシー・リーマンの方程式を利用して解答するように指示した．ただし
  - $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ が成り立たない．
  - いかなる点でも $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ が成り立たない．

  という二つの主張は全く異なる内容だ．求められているのは後者であり，前者の議論では正解にはならない．

  例えば，2-21(c) ではコーシー・リーマンの方程式は連立方程式 $2=2xy,\ 0=-y^2$ の解が存在しないことを言わなくてはならない．これに理由が必要なことは明らかだろう．単に両辺の式が異なるという話ではない．

本日の講義の要点

1. コーシー・リーマンの方程式と微分可能性（p.37 定理 2）
複素関数が微分可能な時，コーシー・リーマンの方程式が成立することは前回調べた．今回は全微分可能性（教程微分積分 p.123 定義 6.3）を仮定してこの逆を示した．証明方法は基本的にテキストに記述してあるものと同じ方法である．なお，全微分可能でないときは逆は成立しない（演習問題 2-26）．
関数 $w = e^z = e^x e^{iy}$ はいたるところコーシー・リーマンの方程式を満たす．C^1 級であることは明らかなので e^z はすべての点で微分可能である．
2. 複素関数の正則性
$f(z)$ が z_0 で正則であるとは，z_0 の近傍の各点で微分可能なことを言う．$f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ で微分可能だが正則ではない．定義から $f(z)$ が正則になるような点の集合は開集合である．この事実は距離空間・位相空間に関する用語になれれば簡単なことだが，今の段階では分かりづらいだろう．今後，ある開集合で正則な関数を考察の対象にするが，決して特別な状況を仮定しているのではないことを知っておいてほしい．
なお $f(z)$ が閉円板 $D : |z| \leqq 1$ で正則であるとは D を含む開集合で正則な関数に拡張できることを言う．
正則関数の例としては $w = z^n$ と $w = e^z$ がある．これらは $\mathbb{C}$ 上正則であるが，このように複素平面全体で正則な関数を整関数という．
3. 正則関数の和差積商合成
ある開集合で正則な 2 つの関数の和，差，積は正則である．また商は分母が 0 にならない範囲で正則だし，合成は定義できる範囲（の内部）で正則である．これらの事実は p.34 の微分公式が成り立つことによる．証明も実関数の場合と基本的に同じである．
4. 正則関数と調和関数
$z = f(z)$ が正則な時，その実部と虚部は実 2 変数関数として調和関数になる（p.41 定理 3）．証明は C^2 級であることを仮定して与えた．偏微分の順序交換（教程微分積分 p.132 定理 6.7）を利用しているが 1 年次のテキストを確認しておくこと．
5. 指数関数
$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である．これについて指数法則が成り立つことは結果のみ紹介したがここに証明をつけておく．$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおく．
$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i\cos y_1 \sin y_2 + i \sin y_1 \cos y_2) \\ &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_2)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$
実関数の場合の指数法則と加法定理が使われていることに注意せよ．
指数関数について例 3(p.50) を解説した．$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -1$ なので，連立方程式 $e^x \cos x = -1,\ e^x \sin y = 0$ を解けばよい．難しくないので考えておくように．
6. 三角関数
オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ より $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,\ \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ を得る．この x を複素数に置き換えた式を (複素) 三角関数の定義式にする．
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
指数関数は整関数なのでこの 2 つの関数も整関数である．また例 1 にまとめた様々な性質も得られる．確認してみると良い．

$\cos z$ を実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned}2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} = e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\\ &= \cos x(e^{y} + e^{-y}) - i\sin x(e^{y} - e^{-y}) = 2\cos x\cosh y - 2i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

である．ここで $\cosh x = (e^{x} + e^{-x})/2,\ \sinh x = (e^{x} - e^{-x})/2$ であり，双曲線関数と呼ばれる．コサインハイパボリックのように読んでほしい．

双曲線関数と三角関数はとても類似した関数であり，三角関数の各公式に対応する双曲線関数の公式が作れる．難しくはないがここで深入りするのは避ける．

講義では例 4（p.53）を解説したがテキストの説明を読んでおいてほしい．

本日のレポート課題

第 2 章章末問題の 3-3 と 3-9 を課題にする．どちらも $z = x + iy$ とおいて書き下し，実部と虚部から連立方程式を作って考えるとよい．

複素関数の講義メモ (10 月 20 日)

前回のレポート課題について

一つの考え方は絶対値と偏角を考える方法である．(a) について $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ より e^z の絶対値は $e^x > 0$ 偏角は y である．-2 は絶対値 2 偏角 $\pi + 2n\pi$ なので $e^z = 2$ は

$$e^x = 2 \qquad y = \pi + 2n\pi$$

となる．ゆえに $z = x + iy = \log 2 + (2n+1)\pi i$ である．なお両辺の偏角が等しいという式をたてるときは一方のみ $2n\pi$ を足して一般表示にすれば十分だ．

次の考え方は実部と虚部を利用する方法で (b) について $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ から

$$e^x \cos y = 1 \qquad e^x \sin y = \sqrt{3}$$

という連立方程式を解く方法である．ただしこれから x を消去して $\tan y = \sqrt{3}$ としてしまうと失敗する．これを満たす角は $\pi/3 + k\pi$ だが k が奇数のときは $\cos y < 0$ となり連立方程式を満たさない．一般に未知数の消去は「ならば」という一方向の論理であって逆が成り立たないからだ．最初の方法を使えば $1 + \sqrt{3}i$ が絶対値 2，偏角 $\pi/3 + 2n\pi$ なので

$$e^x = \log 2 \qquad y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

を解く．このほうが簡単だ．

ただし 3-9 は 2 番目の方法が良い．$w =$ 実数 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, w = 0$,　$w =$ 純虚数 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w = 0$, かつ $w \neq 0$ だからだ．偏角は 2 通りあるので最初の方法だと両方考えないといけない．なお $|e^z| = e^x > 0$ なので $e^z = 0$ となることはない．

$$e^z = \text{実数} \Longleftrightarrow e^x \sin y = 0 \Longleftrightarrow \sin y = 0 \Longleftrightarrow y = n\pi$$

$$e^z = \text{純虚数} \Longleftrightarrow e^x \cos y = 0 \Longleftrightarrow \cos y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

どちらも必要十分条件であることが容易に見て取れる．

なお解を求めるときには複素数として表示してほしい．(c) で $x = 1/2,\ y = k\pi$ としても間違いではないが $z = 1/2 + k\pi i$ のように表すこと．

本日の講義の要点

1. 前回の補足
   - 指数関数・三角関数の導関数
     $w = f(z) = e^z$ を実部と虚部に分ければ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ となる．これからコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ がすべての点で成り立つことが簡単に確かめられる．すなわち

     $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z}$$

     は収束する．ここで $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ で $\Delta y = 0$ とおいてから $\Delta x \to 0$ としても同じ極限に収束する．これは y を固定して x で微分することに他ならないので偏微分である．すなわち

     $$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

     であり $(e^z)' = e^z$ を得る．

     $\cos z,\ \sin z$ の定義式 (p.50 下から 3 行目) とこの結果から三角関数の導関数も計算できる．(p.51 (2) 式)

- 双曲線関数
  双曲線関数は 1 年次のテキストに載っていなかった．定義式 (p.54 (21) 式) が三角関数の定義式とよく似ていることに気づいてほしい．なお実数 x について $\cosh x$, $\sinh x$ は実数であり $(\cosh x, \sinh x)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点になる．双曲線関数と呼ぶのも納得できるだろう．

2. 対数関数

$z \neq 0$ について $e^w = z$ を満たす $w = u + iv$ を求めれば $e^u = |z|$, $v = \arg z$ である．そこで

$$\log z = \ln|z| + i \arg z$$

と定める．ln は自然対数を表す記号[*1]でこの講義では実の自然対数を表すものとする．なお $z = 0$ については対数は定義できない．$\log z$ において $z \neq 0$ は前提だ．

- 対数関数は多価関数
  複素数の偏角は 2π の整数倍の違いで定まらないので $\log z$ は通常の意味での関数ではなく多価関数である．ただし主値をとって

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

  とおけば関数になる．$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2k\pi i$ に注意せよ．

- 対数関数の微分可能性
  $z = x + iy$ で $x \neq 0$ のとき

$$\log z = \log|z| + i \arg z = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \tan^{-1}\frac{y}{x} + 2k\pi i$$

  だ．これからコーシー・リーマンの方程式が成り立つことが簡単に分かる．またその微分は

$$(\log z)' = u_x + iv_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}$$

  である．$\log z$ は多価関数だがその微分は 1 価関数であることに注意せよ．

- 対数関数は指数関数の逆関数（p.58〜59 例 3，例 4）
  $e^{\log z} = z$ は常に成り立つ．$e^{2k\pi i} = 1$ なので $\log z$ は多価でも合成したものは 1 価になる．しかし $\log(e^z) = z$ は一般に成り立たない．$\log(e^z) = z + 2k\pi i$ だ．後から対数をとっているので対数関数の多価性がそのまま現れてくる．

- べきの対数関数による表示（p.60 (13)(14)）

$$e^{n\log z} = e^{n\ln|z| + in\arg z} = e^{n\ln|z|} + e^{in\arg z} = |z|^n e^{in\arg z} = z^n$$

  である．ただし左辺は $z = 0$ では定義できない．なお，$\log z$ の多価性は指数をとることにより解消されている．
  これを n 乗根で考えてみる．

$$e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}\ln|z| + i\frac{1}{n}\arg z} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} + e^{i\frac{1}{n}\arg z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\arg z}$$

  これが z の n 乗根であることは簡単に分かる．ただし $\log z$ の多価性は

$$\frac{1}{n}\arg z = \frac{1}{n}(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi i) = \frac{1}{n}\mathrm{Arg}\, z + \frac{2k}{n}\pi i$$

  となるので，$k = 0, 1, \ldots (n-1)$ に応じて n 個の値が出る．$z^{1/n}$ は n 価の関数になっている．

[*1] 常用対数をよく使う分野で区別のために使われる記号だ．関数電卓でも log 常用対数，ln 自然対数という使い分けが行われる．数学では常用対数はほとんど使わないのですべて log で済ませるのが普通だ．

3. 一般のべき関数
指数関数も対数関数も正則なので，それらの合成として記述される $z^{1/n}$ も正則である．これを一般化して $c \in \mathbb{C}$ に対して
$$z^c = e^{c \log z}$$
と定める．これも正則であり導関数は
$$(z^c)' = e^{c \log z} c \frac{1}{z} = c e^{c \log z} \frac{1}{e^{\log z}} = c e^{(c-1) \log z} = c z^{c-1}$$
である．
この定義によって i^{-2i} の値を計算した．$e^{-2i \log i}$ なので $\log i$ をきちんと記述すればよい．
$$\log i = \ln |i| + i \arg i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) = i(\pi/2 + 2k\pi)$$

4. 逆三角関数，逆双曲線関数
$z = \cos w = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$ より $2e^{iw}$ をかけて整理すれば
$$(e^{iw})^2 - 2z e^{iw} + 1 = 0$$
を得る．これを 2 次方程式として解けば
$$e^{iw} = z + (z^2 - 1)^{1/2} = z + i(1 - z^2)^{1/2}$$
となる[*2]．ここで 1/2 乗が 2 価の関数なので e^{iw} も二つの値を持つ．この対数をとって
$$iw = \log(z + i(1 - z^2)^{1/2}) + 2k\pi i \quad w = \cos^{-1} z = -i \log(z + i(1 - z^2)^{1/2}) + 2k\pi$$
これが逆三角関数の定義式になる．なお，実数の場合と異なり標準的な主値の取り方はないので無限多価関数である．式の表示から正則であることはすぐに分かる．
以上，初等関数を複素関数の世界で定義しなおしたが，微分に関する諸性質は実の初等関数とまったく変わらない．

5. 複素関数の積分
$w(t) = u(t) + iv(t)$ の積分を解説した．定義式は実質的に 1 変数関数の通常の積分を利用している．これから p.71 の定理の (2) 式は簡単に得られる．(3) 式もテキストを読んで確認しておくこと．煩雑かもしれないが難しくはない．(4) の証明は若干の技巧を要する．これも p.71 に記述されているので読んでおくこと．

本日のレポート課題

3-31 と 3-37 を課題にした．どちらも定義式を具体的な数値であてはめる問題だ．

[*2] 講義では最後の工夫をしなかったのでテキストの表示（p.65(2) 式）と見かけが変わってしまった．

複素関数の講義メモ (10 月 27 日)

前回のレポート課題について

3-31 は対数関数の値を求める問題である．対数関数の多価性は偏角の多価性に由来するので，解は $2n\pi i$ を含んだ形で表す．なお，$\log z$ を求めるには z を極形式で表す必要がある．絶対値と偏角を考えること．

$$\log e = \log ee^{2n\pi i} = \ln e + 2n\pi i = 1 + 2n\pi i$$

$$\log i = \log 1e^{(\pi/2+2n\pi)i} = \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$$

$$\log(-1 + \sqrt{3}i) = \log 2e^{(2\pi/3+2n\pi)i} = \ln 2 + (2\pi/3 + 2n\pi)i$$

3-37 はべき関数の値を求める問題だ．$z^c = e^{c\log z}$ という定義式と対数関数の値を利用する．

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+(\pi/4+2n\pi)i)} = e^{-(\pi/4+2n\pi)}e^{i(\ln 2)/2}$$

$$(-1)^{1/\pi} = e^{(1/\pi)\log(-1)} = e^{(1/\pi)(2n+1)\pi i} = e^{i(2n+1)}$$

解はいずれも極形式で与えた．なお，$i\ln 2 = \ln 2^i$ とした解答があったが，ln は実の自然対数なのでこのような記述は許されない．対数関数の記号の使い分けに注意せよ．

本日の講義の要点

1. 複素平面上の曲線 (4-2 節)
   ジョルダン弧，ジョルダン曲線，滑らか，区分的に滑らかという用語の意味を確認した．なお，滑らかの条件に $z'(t) \neq 0$ がつけられていることに注意せよ．曲線の長さについては 1 年次の微分積分で学習済みだ．
2. 線積分 (4-3 節)
   定義式は (2) だ．同様な式により $\int_C udx$, $\int_C udy$ も定義される．テキストには明示されていないので注意せよ．なお，曲線 C のパラメーターの取り換えについてテキストには記述されていないので補っておく．$t = t(s)$ により t を s に変換すれば置換積分により

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(s)))\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}ds = \int_\alpha^\beta f(z(s))\frac{dz}{ds}ds$$

   ここで $\alpha < \beta$ の場合は C のパラメーターを s に取り換えたものの線積分の定義に他ならない．しかし $\alpha > \beta$ の場合は積分範囲の上下を入れ替えないと線積分の定義式にならない．これは始点と終点が入れ替わるためである．始点と終点を入れ替えないパラメーターによる曲線は元の曲線と同じ曲線とみなしやはり C で表す．入れ替える場合は元の曲線の向きを変えたものとみなし $-C$ と表す．p.76 の定理の (5) 式はそのように理解してほしい．
   講義では定理（線積分の性質）の (9) を証明した．テキストに詳しく書いているので読んでおくこと．また単位円の上で $1/z$ を積分した．

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

3. コーシーの積分定理
   この定理からいよいよ複素関数に対する本格的な議論に入る．コーシーの積分定理は $f'(z)$ の連続性を仮定すると u, v が C^1 級になるのでグリーンの定理が提供できる．するとコーシー・リーマンの方程式からコーシーの積分定理を簡単に導くことができる．

講義ではグリーンの定理を積分域の形状に仮定（縦線集合，1 年次の微分積分のテキスト p.163）をつけて示した．テキストにないのでここに記述しておく．

縦線集合 $D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \phi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$ 上で P_y を積分すると

$$\begin{aligned}\iint_D P_y(x, y)dxdy &= \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} P_y(x, y)dy = \int_a^b dx\,[P(x, y)]_{\phi(x)}^{\psi(x)} \\ &= \int_a^b P(x, \psi(x))dx - \int_a^b P(x, \phi(x))dx = -\int_C Pdx\end{aligned}$$

ここで最後の線積分では D の境界をなす閉曲線 C の向きを反時計回りに取っている．また C の左右は一般に垂直方向の線分だが，垂直な直線では x は一定なので曲線に沿って $x'(t) = 0$ であり，線積分には寄与しない．上下のグラフ部分の線積分で全体の線積分の値が求められる．

4. コーシーの積分定理の考察

D が単連結な領域 (p.84) のとき D 内の任意の閉曲線 (自己交差が有限個だとしておく) C について

$$\int_C f(z)dz = 0$$

となる．これは C を自己交差点で切り分けてからつなぎ合わせることにより，有限個のジョルダン曲線の集まりにできるからだ．講義で紹介した例は若干複雑だが，テキストの例 (p.84 図 4-7) は簡単ですぐに理解できるだろう．

単連結でない場合も，D をハサミで切り開くことによって単連結な図形にできる (テキスト p.86 図 4-9，ただし L_3 は不要)．講義では定理 5 (p.85) と引き続く (6) の等式に触れた．一般の証明というより具体的な図形の上で考察してほしい．

正則関数の閉曲線上での積分では，積分路を変形しても値が変わらない．これがコーシーの積分定理から得られる帰結であり，この講義で最も基本的な事項である．次回もこの考察をさらに深めていくのできちんと考えておいてほしい．なお，曲線や図形に関する用語は感覚的に捉えてくれれば十分だ．厳密さにはあまりこだわらないように．

本日のレポート課題

4-8 と 4-15 を課題にした．線積分の定義に従って計算してみること．

複素関数の講義メモ (11 月 10 日)

前回のレポート課題について

4-8 は 0 から 2 に至る二通りの曲線に沿って $z-1$ を積分する．(a) は $z(\theta)=1+e^{i\theta}$ なので

$$\int_C z-1dz=\int_{\pi}^{2\pi} e^{i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{2\pi} e^{2i\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left[e^{2i\theta}\right]_{\pi}^{2\pi}=0$$

(b) は $z=x,\ 0\leqq x\leqq 2$ なので

$$\int_C z-1dz=\int_0^2(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=0$$

4-15 は正則でない関数の線積分である．なおこの曲線は $y=\sqrt{1-x^2}$ より単位円の上半分になる．

$$\int_C \bar{z}dz=\int_{-1}^{1}\left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-i\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=-i\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-i[\sin^{-1}x]_{-1}^{1}=-i\pi$$

【コメント】

- この問題を通じて線積分の計算の基本を確認してほしい．
- $e^{i\theta}$ は絶対値 1 偏角 θ の複素数だ．$e^{4\pi i}=1$ は $\cos,\sin$ を利用せずに分かってほしい．
- 4-8(b) の曲線は実軸に含まれる．この被積分関数は実軸上では実数値関数なので，(b) の線積分は通常の積分と変わらない．これは一般に成り立つ事実である．
- (a) の曲線で進んで (b) の曲線で戻れば，0 を始点終点とするジョルダン曲線になる．$z-1$ は全平面で（したがってこのジョルダン曲線の内部で）正則なのでコーシーの積分定理により (a) の積分値から (b) の積分値を引いたものは 0 になる．すなわち (a) の結果と (b) の結果は等しくなる．この関係は p.78 の例 1 と例 2 でも確認できる．
- 4-15 の曲線は単位円の上半分を左から右に進む曲線だ．これを $z=e^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq\pi$ と表すと向きが逆になる．
- $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x$ は 1 年次の数学で学んだ基本公式だ．この講義でも使うのできちんと思い出しておくこと．

本日の講義の要点

1. コーシーの積分定理から導かれること

   一つは単連結でない場合への拡張（定理 5）で p.86 の (6)(7) の式が重要だ．もう一つは単連結領域での正則関数の線積分の値が，始点と終点で決まること（定理 4）だ．講義ではこれらの事実がコーシーの積分定理からどのように導かれるかを解説した．重要な結果なのできちんと覚えておくように．
2. 代数学の基本定理の証明

   代数学の基本定理とは「複素数を係数とする n 次方程式は複素数の範囲で解を持つ」ことを言う．数学のもっとも基本的な定理の一つであり，有理関数の積分における部分分数展開の可能性の証明にも利用される．この定理の証明には多くの方法があり，そのいくつかは他の講義でも紹介されるだろう．ここではコーシーの積分定理の応用した証明法を解説した．証明はテキスト p.88 にあるが，整理するためステップに分ける．

- 実係数多項式について必ず解を持つことが示せたとする．多項式 $P(z)$ について $P(z)\overline{P}(z) = 0$ は実係数方程式なので解を持つ．その解を α とおけば

$$P(\alpha)\overline{P}(\alpha) = P(\alpha)\overline{P(\overline{\alpha})} = 0$$

なので，α と $\overline{\alpha}$ の少なくとも一方は $P(z) = 0$ の解になる．よって $P(z) = 0$ は解を持つ．

- $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ を実係数の n 次多項式で，すべての z について $P(z) \neq 0$ を満たすとする．
- $Q(z) = z^n P(z+z^{-1})$ とおくと，これは $2n$ 次多項式であり，$z \neq 0$ について $Q(z) \neq 0$ であり，$Q(0) = a_n \neq 0$ である．よって $z^{n-1}/Q(z)$ は全平面で正則である．
- 単位円 $C : z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 上積分すると

$$\int_C \frac{z^{n-1}}{Q(z)} dz = \int_C \frac{1}{zP(z+z^{-1})} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta} P(2\cos\theta)} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(2\cos\theta)} d\theta$$

- コーシーの積分定理によりこの積分値は 0 である．一方 $P(2\cos\theta)$ は 0 にならない実数値連続関数なので常に正または常に負である．これは矛盾である．

コーシー・グルサの定理の証明は難しいのでこの講義では扱わない．ただ上の証明を見れば証明を与えたコーシーの積分定理で十分なので代数学の基本定理の厳密な証明が与えられたことになる．

3. 原始関数と線積分

$F'(z) = f(z)$ が成り立つとき F を f の原始関数という．原始関数が存在するとき

$$\int_C f(z) dz = f(\text{終点}) - f(\text{始点})$$

である．線積分は始点終点のみの値で決まり，通る経路によらない．

単連結領域で正則な関数には原始関数が存在する．p.85 定理 4 と p.95 定理 2 を合わせればよい．（p.97 定理 4）なお，p.95 の定理 2 は極限に関して $\delta\varepsilon$ 論法を使う．この講義では極限は直感的にしか解説していないので分かりづらかったかもしれない．テキストの証明を見ておいてほしい．

4. 原始関数と積分計算の例

$m \neq -1$ を満たす整数 m について，$f(z) = z^m$ の原始関数は $\frac{1}{m+1} z^{m+1}$ である．m が負のときは単連結領域での正則関数ではないが原始関数は存在する．積分値は始点と終点で決まるし，単位円上の積分は 0 になる．

$f(z) = z^{-1}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則関数であるが，原始関数を持たない．ただし定義域を $\mathbb{C}$ から実軸の 0 および負の部分を除いたものに制限すれば，それは単連結であり原始関数を持つ．それが $\mathrm{Log}\, z$ である．なお原始関数が一つあればそれに定数を加えたものも原始関数である．

なお C を単位円 $z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とするとき

$$\int_C z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

である．$m \leqq -2$ のときは原始関数の存在による．

次回はコーシーの積分公式を扱う．ある種の線積分が，内部のある点での関数の値で記述できるという不思議な結果である．

本日のレポート課題

章末問題の 4-21 を課題にする．なおどの関数も 1 価なので，どの範囲で定義できるのかを考えること．その曲線の内部で正則関数として定義できればコーシーの積分定理で 0 になることが分かる．

複素関数の講義メモ (11 月 17 日)

前回のレポート課題について

4-21 を出題した．$f(z)$ が正則なるような範囲を求めることとコーシー・グルサの定理が適用できることを確認することが課題だが，後半は何を言えばよいのか良くわかっていない人が目立つ．コーシー・グルサの定理の内容を確認することが出発点だ．【コメント】

- 正則性を示すのは，正則な関数の和差積商と合成で表されていることをみればよい．特に微分する必要はないしコーシー・リーマンの方程式を確認する必要もない．1 変数の場合とまったく同じだ．テキストにおける初等関数の正則性についての議論の流れをまとめておく．
  - z^n は正則である（p.34 定理 1）．
  - 正則関数の和差積商・合成は正則である（p.34 定理 2，定理 3）．
    以上 2 項目は微分の定義により証明できる．議論は実関数の場合とまったく同じである．以上から有理関数は分母が 0 でない範囲において正則である．
  - e^z は正則である（p.38 例 3）．
  - $\cos z$, $\sin z$ は正則である．指数関数で定義されているので e^z の正則性が使える．
  - $\tan z$ は $\cos z \neq 0$ の範囲で正則である．（p.54）
  - $\operatorname{Log} z$ は $z \neq 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ の範囲で正則である．（p.57 定理 1）
    テキストでは極座標によるコーシー・リーマンの方程式を利用しているが，講義では通常のコーシー・リーマンを使った．
  - 複素数べき z^c は，対数関数と指数関数を組み合わせて定義した（p.62 (1) 式）．よって正則関数の合成なので正則である．
  - 逆三角関数は対数関数とべきを使って定義した（p.64，65）．これらも正則である．
  - 以上から初等関数（多項式，べき関数，指数関数，三角関数，逆三角関数の式として表される関数）はすべて正則である．ただし，正則になる範囲は注意すること．
- $\tan z$ が定義できなくなるのは $\cos z = 0$ の場合だ．ただし，複素三角関数なので注意が必要だ．$z = \pi/2 + n\pi$ で正解だが，実関数として述べたのなら論理は間違いだ．ここはきちんと示すべきだ．なお p.53 の (15) 式を引用しても良い．

  $$2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} = (e^{-y} + e^{y})\cos x + i(e^{-y} - e^{y})\sin x = 0$$

  より $\cos x = 0$ と $e^y = e^{-y}$ を得るが，これから $x = \pi/2 + n\pi$, $y = 0$ を得る．よって $z = \pi/2 + n\pi$ である．
- $\operatorname{Log} z$ は $z \neq 0$ について $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ で定義される．ただし，$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$ なので $\operatorname{Arg} x = \pi$ となる z では不連続である．すなわち実軸の原点より左側で不連続であり，この半直線を除いた部分で正則である．よって $\operatorname{Log}(z+2)$ は実軸の -2 より左側の部分を除いて正則である．
- この範囲を $z + 2 < 0$ と記述する人が目につくが，複素数では不等式は意味を持たない．z は複素数なのでこの式は許されない．
- コーシー・グルサの定理を適用するためには C の周上及び内部で $f(z)$ が正則であることをみればよい．要するに前半で求めた正則でなくなる点がすべて C の外側にあることを言えばよい．前半で正則でなくなる点 (定義できない点）を求めたのだから簡単だ．
- 単に「成り立つ」と書いても何が成り立つのか分からない．

本日の講義の要点

1. コーシーの積分公式（p.100 定理 1）
ジョルダン曲線 C について $f(z)$ が C 上および C の内部で正則ならば C の内部の点 z_0 について
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$
が成り立つ．これをコーシーの積分公式という．
証明はテキスト p.101 から記述されているのでここではポイントのみ箇条書きしよう．
   - 被積分関数は $z \neq z_0$ で正則なので，積分路の変形原理（p.87 (7) 式）により z_0 を中心とする半径 r の円周 C_r（C_r は C の内部にとる）での積分と等しくなる．
   - $\frac{1}{z-z_0}$ の C_r 上での積分は $2\pi i$ なので
$$\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - \int_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i f(z_0)$$
   - r を小さくしていけば C_r 上の点 z について $|f(z)-f(z_0)|$ はいくらでも小さくなるので，上の積分の左辺はいくらでも小さくなる．
2. コーシーの積分公式の拡張
コーシーの積分公式の重要な応用は p.103 の定理 2 である．定理 2 の証明もテキストを読んでほしい．
   - コーシーの積分公式を利用して
$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i\Delta z}\int_C f(s)\left(\frac{1}{s-z-\Delta z}-\frac{1}{s-z}\right)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}ds$$
   - ここで $\Delta z \to 0$ とすれば
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}ds$$
を得る．右辺の Δz を 0 にしただけだが，厳密な議論はテキスト p.104 に記述されている．
   - 同様な議論で
$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^3}ds$$
を得る．f'' が存在するので f' は正則である．f が正則ならその導関数も正則であるという事実が示せたので，これを繰り返し使えば f は何回でも微分でき，$f^{(n)}$ は正則であることが示される．
   - 正則関数は無限回微分可能であり，その n 次導関数はコーシーの積分公式の拡張（p.105 (7) 式）で記述できる．
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$
3. コーシーの積分定理の積分計算への応用
例 1（p.101）と例 3（p.106）を解説した．いずれも被積分関数は C の内部に唯一つの正則でなくなる点を持つ．そこでその点を z_0 と見立ててコーシーの積分公式を利用する．難しいことではないので，きちんと考えてみること．
4. モレラの定理
連続関数 $f(z)$ について，任意のジョルダン曲線上で線積分の値が 0 であれば $f(z)$ は正則である．これをモレラの定理と呼ぶ．

- ジョルダン曲線上での線積分が 0 であることから，線積分の値は始点と終点で決まる．（p.85 定理 4 と同じ議論）
- これから $f(z)$ は原始関数 $F(z)$ を持つ．（p.96 定理 3）
- 原始関数は $F'(z) = f(z)$ を満たすので正則である．よって $F'(z) = f(z)$ も正則である．

5. 時間が若干余ったのでべき級数の収束半径を解説した．テキストには書いてないので補足しておこう．

   命題 べき級数 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ について，$|z_0| < |z_1|$ とする．このとき，$S(z_1)$ が収束すれば $S(z_0)$ も収束する．また $S(z_0)$ が発散すれば $S(z_1)$ も発散する．

   証明には極限についての次の基本的事実を使う．実数と論理など他の授業で証明を扱うはずだ．なお実数の場合も複素数の場合も以下の事実についてはまったく変わらない．

   - $\sum a_n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．
   - 収束する数列は有界である．すなわち $|a_n| \leqq M$ が常に成り立つような正数 M が存在する．
   - $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．これを絶対収束するという．

   証明 $\sum a_n {z_1}^n$ が収束すれば $\{a_n {z_1}^n\}$ は 0 に収束する．ゆえに $|a_n {z_1}^n| \leqq M$ となるような $M > 0$ が存在する．$r = |z_0|/|z_1| < 1$ とおけば

   $$|a_n {z_0}^n| \leqq M \left|\frac{z_0}{z_1}\right|^n = Mr^n$$

   なので $\sum |a_n {z_0}^n|$ は収束する．ゆえに $\sum a_n {z_0}^n$ も収束する．

   この命題によりべき級数はある半径の円板内で収束し，その外部で発散する．この半径を収束半径と呼ぶ．この説明は若干大雑把な説明になり過ぎたかもしれない．級数については次回から本格的に扱うことにしよう．

今回で前半の話題は終了した．12 月 1 日に今回までの範囲で第 1 回の試験を行うので勉強しておくこと．

本日のレポート課題

演習問題 4-34 の (b) と (c)，および 4-36 を出題する．C の内部で常に正則ならコーシーの積分定理，正則でない点が 1 つあればコーシーの積分公式を使う．

複素関数の講義メモ (11 月 24 日)

前回のレポート課題について

4-34 の (b)(c) および 4-36 を出題した．いずれもコーシーの微積分公式を利用してジョルダン曲線上の線積分を計算する問題である．計算方法を覚えておくことは当然だが，この公式が成立する理由も理解するようにしておくこと．

4-34(b)　被積分関数の特異点（正則でなくなる点）は $\pm 2i$ だ．このうち C 内のあるのは $2i$ なので $f(z) = \dfrac{1}{(z+2i)^3}$, $z_0 = 2i$ としてコーシーの微積分公式を利用する．

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^3} = \int_C \frac{f(z)}{(z-2i)^3}dz = \pi i f''(2i)$$

$f''(z) = (-3)(-4)(z+2i)^{-5}$ より

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^3} = 12\pi i \frac{1}{(4i)^5} = \frac{3\pi}{256}$$

4-34(c)　被積分関数の特異点は 0 のみでありそれは C の内部にある．$f(z) = \sin z e^{-z}$, $z_0 = 0$ とみてコーシーの微積分公式を適用する．

$$\int_C \frac{\sin z}{e^z z^2}dz = \int_C \frac{f(z)}{z^2}dz = 2\pi i f'(0)$$

$f'(z) = \cos z e^{-z} - \sin z e^{-z}$ より $f'(0) = 1$ なので

$$\int_C \frac{\sin z}{e^z z^2}dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i$$

4-36　z が C の内部にあるときはコーシーの微積分公式により

$$\int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}ds = \frac{2\pi i}{2} f''(z) = 6\pi i z$$

z が C の外部にあるときはコーシーの積分定理により 0 である．

本日の講義の要点

1. べき級数（p.119）

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

が $D : |z-z_0| < R$ で収束するとする．このとき $S(z)$ は D 上連続な関数になる（定理 4）．なおこの定理の証明は N を z によらずにとる必要があるがその点についての言及がない．講義では若干記述を変更して証明を与えた．

定理 $S(z_1)$ が収束するとする．$R = |z_1 - z_0|$ とおくとき $S(z)$ は $D : |z-z_0| < R$ 上の連続関数を定める．

証明 $z_0 = 0$ として証明すれば十分である．このとき $|z_1| = R$ である．まず 無限級数 $S(z_1)$ が収束するので $\lim a_n {z_1}^n = 0$ であり，$|a_n {z_1}^n| = |a_n| R^n \leqq M$ となる正数 M が存在する．よって $|z| < |z_1|$ を満たす z について $|z|/|z_1| = r < 1$ とおいて

$$|a_n z^n| \leqq |a_n||z_1|^n \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqq M r^n$$

であり $\sum Mr^n$ が収束することから $S(z)=\sum a_n z^n$ は収束する．

$r<1$ をとり $D_r:|z|<rR$ とおく．$z\in D_r$ について

$$S(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n=S_N(z)+\rho_N(z)$$

とおく．

$$|\rho_N(z)|\leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n z^n|\leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|r^nR^n\leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}Mr^n=Mr^{N+1}\frac{1}{1-r}$$

なので任意の $\varepsilon>0$ について N を $Mr^{N+1}\frac{1}{1-r}<\varepsilon$ となるようにとれば，$z,w\in D_r$ について

$$|S(z)-S(w)|\leqq|S_N(z)-S_N(w)|+|\rho_N(z)|+|\rho_N(w)|<|S_N(z)-S_N(w)|+2\varepsilon$$

$S_N(z)$ は多項式であり連続なので z を w に近づけていけば $|S_N(z)-S_N(w)|<\varepsilon$ とできる．ゆえに $|S(z)-S(w)|<3\varepsilon$ となり $S(z)$ は w で連続である．

以上から $S(z)$ は D_r 上の連続関数になる．$z\in D$ は $|z|<R$ であり $r=(R+|z|)/(2R)<1$ について $z\in D_r$ になる．よって $S(z)$ は収束し z において連続である．

2. テイラー展開

テイラー展開は 1 年次の微分積分で学習した．ここではコーシーの微積分公式を使って正則関数の場合に証明した．

- $D:|z-z_0|<R$ について $f(z)$ は D の閉包 $\overline{D}:|z-z_0|\leqq R$ を含む開集合で正則とし，C を円周 $|z-z_0|=R$ を正の向きに 1 周するジョルダン曲線とする．コーシーの積分公式により $z\in D$ について次が成り立つ．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{s-z}ds$$

- 等比級数の和

$$1+\frac{z}{s}+\left(\frac{z}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{s}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{s}}=\frac{s}{s-z}-\frac{z^{n+1}}{s^n(s-z)}$$

より

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s}+\frac{f(s)}{s^2}z+\cdots+\frac{f(s)}{s^{n+1}}z^n+\frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}z^{n+1}$$

- この式の両辺に $2\pi i$ をかけ，C で線積分すればコーシーの微積分公式より

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}z^n+2\pi i\int_C\frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}dsz^{n+1}$$

- $s\in C$ より $|s|=R,\ |s-z|\geqq R-|z|$ である．また C 上での $|f(z)|$ の最大値を M とおけば

$$\left|\int_C\frac{f(s)}{s^{n+1}(s-z)}dsz^{n+1}\right|\leqq\int_C\frac{M}{r^{n+1}(r-|z|)}|dz||z|^{n+1}=2\pi r\frac{M}{r-|z|}\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n+1}$$

となる．これは各 z について $n\to\infty$ で 0 に収束する．

実関数の場合のテイラー展開は，テイラーの定理を証明し，その剰余項が 0 に収束することによってテイラー展開を示すことができた．正則関数の場合は $f(z)$ が正則になる領域を考えればどの範囲で収束するか簡単に決定できる．この事情は例で見てほしい．

3. テイラー展開の例

- $f(z) = e^z$ は $f^{(n)}(z) = e^z$ なので $f^{(n)}(0) = 1$ である．よって

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

  $f(z) = e^z$ は全平面で正則なのでこの等式はすべての $z \in \mathbb{C}$ で成立する．

- $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ は $n \geqq 1$ について $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}$ である．

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

  $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ が正則でない点は実軸の -1 より左側なので $|z| < 1$ では正則であり，この級数は $|z| < 1$ で収束する．

- $f(z) = \cos z$ の $z = \pi/2$ におけるテイラー展開を求めるには $f^{(n)}(\pi/2)$ を求めればよい．$f^{(2k)}(z) = (-1)^k \cos z$, $f^{(2k+1)}(z) = (-1)^{k+1} \sin z$ なので $f^{(2k)}(\pi/2) = 0$, $f^{(2k+1)}(\pi/2) = (-1)^{k+1}$ より

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (z - \pi/2)^{2k+1}$$

  これもすべての z で収束する．

- 一般に関数をべき級数として表示できればそれはテイラー展開である（後ほど証明する）．このことを利用してテイラー展開を求めることができる．

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

  左辺は $|z| < 1$ で正則なので，この等式は $|z| < 1$ で成立する．

4. べき級数の収束性について

講義で証明せずに使ったことを補足しておく．

- 無限級数 $\sum a_n$ が収束するとは部分和の数列 $\{S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ が収束することを言う．
- 数列 $\{S_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.t.} \quad n, m \geqq N \Longrightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．これをコーシーの収束判定条件という．

- 無限級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.t.} \quad n > m \geqq N \Longrightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots a_n| < \varepsilon$$

- 無限級数 $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．これを絶対収束するという．これは次の三角不等式と上の無限級数に対するコーシーの収束判定条件を組み合わせればよい．

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leqq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|$$

- 各項が正数の級数 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ について $a_n \leqq b_n$ が成り立つとき，$\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する．なぜなら $a_n \geqq 0$ より部分和の数列 $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ は単調増加になること，また

$$S_n \leqq b_0 + b_1 + \cdots + b_n \leqq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

  より上に有界になることから示される．

- 以上を組み合わせれば無限級数 $\sum a_n$ について，$|a_n| \leqq b_n$ で $\sum b_n$ が収束するものがとれれば $\sum |a_n|$ は収束するので $\sum a_n$ も収束する．

本日のレポート課題

演習問題 5-10 と 5-11 を課題にする．なお来週は試験なので締め切りは来週の金曜日（12 月 4 日）の 13 時とする．なおヒントを与えておく．

- 5-10(a) については $\cosh z$ の n 次導関数を求める必要がある．なお，p.54 の (22) 式を見れば結果は簡単だ．
- 5-11 についてはべき級数の形を見れば (a) は -1 でのテイラー展開，(b) は 2 でのテイラー展開である．ゆえに $f(z) = 1/z^2$ について $f^{(n)}(z)$ を求め，$f^{(n)}(-1)$, $f^{(n)}(2)$ を求めればよい．なお収束域の考察も行うこと．

複素関数の講義メモ (12 月 8 日)

前回のレポート課題について

5-10 および 5-11 を出題した．

5-10(a)　$(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$ より n が奇数の時は $f^{(n)}(z) = \sinh z$，偶数の時は $f^{(n)}(z) = \cosh z$ である．$\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$ より

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

【コメント】テキストの解答に n が奇数の時 $f^{(n)}(z) = 0$ と記述されていた．高校の教科書は基本的に誤植はないが大学の教科書では良くあることだ．教科書に書いてあるからと言って鵜呑みにしてはいけない．そもそも $f^{(n)}(z) = 0$ ならそれ以上何回微分しても 0 にしかならない．定数関数なのだから当たり前だ．教科書に問題があるのではなく，鵜呑みにした自分の理解度が足りないと認識すること．

なお，双曲線関数は分からないからテキストの解答をそのまま使ったのかもしれない．しかし，分からなければ調べればよい．英語で分からない単語が出てくれば辞書で調べるはずだ．なぜ数学でそれをやらないのか．記号や概念の意味を知らなければ数学が分かるはずがない．

5-10(b)　$\cosh z = \cos(iz)$ より

$$\cosh z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m i^{2m} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

【コメント】$\cos z$ のテイラー展開は 1 年次で学習したはずだ．これはそのまま使ってよい．

5-11　$f(z) = z^{-2}$ について $f^{(n)}(z) = (n+1)!(-1)^n z^{-n-2}$ である．(a) は $f^{(n)}(-1) = (n+1)!$ より

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

(b) は $f^{(n)}(2) = (n+1)!(-1)^n 2^{-n-2}$ より

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n \frac{1}{2^{n+2}} (z-2)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$$

である．なお，左辺は 0 以外で正則なので，$|z+1| < 1$ で正則である．よって (a) の級数は $|z+1| < 1$ で収束する．2 を中心とした場合は $|z-2| < 2$ で正則なので (b) の級数は $|z-2| < 2$ で収束する．

【コメント】一般に z^α の n 次導関数はきちんと求められるようにしておくこと．1 年次の微分積分でも学習したと思う．級数の収束半径について考察のない答案が目立ったがこれでは肝心なことが落ちてしまう．p.120 のテイラーの定理は半径 R の円の内部で正則なら，その範囲でテイラー展開できることを主張している．この定理の意味と解答を比較して考えてほしい．

本日の講義の要点

1. ローラン展開

p.127 のローランの定理は円環領域 $0 \leqq R_0 < |z - z_0| < R_1 \leqq \infty$ で正則な関数 $f(z)$ について

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを保証する．ただし C は円周 $|z-z_0|=r,\ R_1<r<R_2$ を正の向きに 1 周するジョルダン曲線である．テキストの p.128 の (4)(5) の表示だが，応用上は境界である 2 つの円周 $|z-z_0|=R_0, R_1$ 上での正則性は仮定しないほうが良い．ローランの定理について二つ注意した．

- c_n を $|z|=r$ 上での線積分により定めているが，この値は r に依存しない．積分路の変形原理（p.87）を確認すること．
- ローランの定理の特殊な場合としてテイラーの定理を示せる．$n \leqq -1$ について $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ も正則なので，コーシーの積分定理により $c_{-n}=0,\ n\in\mathbb{N}$ である．また $n\geqq 0$ について，コーシーの微積分公式により
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$
負べきの項はなく，正べきの係数は $f^{(n)}(z_0)$ で表されるのでテイラーの定理の表示に他ならない．

2. ローラン展開の例
テキストの p.129 の例 2 と例 3 をコメントした．なおこの例での展開は係数を積分で求めたわけではない．その意味で定理を使ってはいない．次節で正則関数が $\sum c_n(z-z_0)^n$ の形に展開できれば，それはテイラー展開（ローラン展開）になることを示すが，この事実を先取りして使ったことになる．

3. ローランの定理の証明
$z_0=0$ として証明した．一般の場合は $g(z)=f(z+z_0)$ と置けばよい．z を円環領域内の点とし $R_0<r_0<|z|<r_1<R_1$ を満たすように r_0, r_1 をとる．この r_0, r_1 についてテキストのローランの定理の仮定が満たされていることに注意せよ．あとはテキストの証明と同一の証明を与えたのでここでは省略する．なお $z_0=0$ としているので
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{s^{n+1}}ds$$
が定理の表示であることに注意すること．

4. べき級数による関数
べき級数で表される関数 $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ を考える．べき級について $|z|<R$ で収束するような最大の R を収束半径と呼ぶ．収束半径については，p.131 のような公式があるがここでは深入りしない．数学コースに進学する学生は解析概論 I で紹介されるはずだ．
一般に極限をとることと積分することの順序は交換できない．すなわち $\lim\int_C f_n(z)dz \neq \int_C \lim f_n(z)dz$ となる場合がある．ただし極限がべき級数の場合（部分和の定める関数列の極限の場合）は交換できる．テキストではこれを補助定理としてまとめているが，その証明には若干問題がある．この講義では補助定理は証明なしに用いることにする．補助定理の応用として
   - べき級数で定義される関数の正則性
   $g(z)=1$ として補助定理を使えば $\int_C S(z)dz=0$ が得られる．任意のジョルダン曲線上での線積分が 0 なので $S(z)$ は正則である（モレラの定理）．
   - べき級数で定義される関数の微分が項別微分で求められること
   $g(z)=\frac{1}{2\pi i(s-z)^2}$ として補助定理を用いる．あとはコーシーの微積分公式を用いる．
   - 項別微分を何度も繰り返すことにより
   $$S^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_nn(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)z^{n-k}\qquad S^{(k)}(0)=k!a_k$$
   を得る，ゆえに $S(z)$ のテイラー展開が $\sum a_nz^n$ であることを述べている．

本日のレポート課題

演習問題 5-12 と 5-13 を課題にする．5-12 は C を単位円として

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

をコーシーの微積分公式を利用して計算してみよ．もっと簡単にやるには

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z}\frac{1}{1-(z/4)}$$

として無限等比級数の和の公式を利用するとよい．二つの方法で求めてみるとちょうどいい練習問題だ．

5-13 は $1/z$ の級数にするのがポイントだ．公比 $-1/z$ の無限等比級数を考えてみるとよい．

複素関数の講義メモ (12 月 15 日)

前回のレポート課題について

5-12 および 5-13 を出題した．いずれも無限等比級数の和の公式を使えば簡単に求められるが，それがローラン展開であることは展開の一意性を示して初めて分かることだ．前回の講義ではテイラー展開の一意性は示したがローラン展開については話していない．

この問題の解答では無限等比級数を利用しても問題はないが，このような論理的な問題は認識しておいてほしい．ここではローランの定理における係数の積分による表示と，コーシーの微積分公式を利用した解答例を記述しておく．

5-12 円環領域 $0 < |z| < 4$ におけるローラン展開なので，係数は $C : |z| = 1$ として

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+2}}\frac{1}{4-z}dz$$

で求められる（p.128(5) 式）．$n \geqq -1$ のときは右辺に $g(z) = (4-z)^{-1}$ に関するコーシーの微積分公式を利用して

$$c_n = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(n+1)!(4-z)^{-n-2}\right]_{z=0} = \frac{1}{4^{n+2}}$$

を得る．$n < -1$ のときは被積分関数が $z = 0$ でも正則になるのでコーシーの積分定理により $c_n = 0$ である．

$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+2}} z^n$$

【コメント】被積分関数は $0, 4$ 以外では正則なので，$0 < |z| < 4$ の内部で正則なことは直ぐにわかる．これからこの円環領域においてローラン展開ができることは一般論として証明済みである．なおローラン展開の係数の表示における積分の積分路 C は円環領域の内部に取る必要がある．

5-13 この問題では $1 < |z| < \infty$ でのローラン展開なので $C : |z| = 2$ とでも取ればよい．

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz$$

$n \leqq -1$ のときは C 内の特異点（正則でない点）は -1 のみなのでコーシーの積分公式により

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-n-1}}{z+1}dz = \left[z^{-n-1}\right]_{z=-1} = (-1)^{n+1}$$

$n \geqq 0$ のときは，特異点は $0, -1$ の 2 つあるので $C_0 : |z| = 1/4,\ C_1 : |z+1| = 1/4$ ととって（多重連結な場合のコーシー・グルザの定理（p.87(6)））

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz$$

となる．第 2 項の値は前と同じで $(-1)^{n+1}$ である．第 1 項の積分は，コーシーの微積分公式を利用する．$((1+z)^{-1})^{(n)} = (-1)^n n!(1+z)^{-n-1}$ なので

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{1+z}dz = \frac{1}{n!}(-1)^n n! = (-1)^n$$

となるので 2 つの項の和は 0 である．

本日の講義の要点

1. ローラン展開の一意性
ローラン級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(z-z_0)^{-m}$ が $R_0 < |z| < R_1$ で収束するとは，第 1 項が $|z| < R_1$ で，第 2 項が $1/|z| < 1/R_0$ で収束することに他ならない．この級数についても p.132 の補助定理が成り立つ．この事実を使えば，テイラー展開の一意性の証明と同様な議論でローラン展開の一意性が証明できる．
2. べき級数の積
2 つのテイラー級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ がともに $|z| < R$ で収束するとする．$f(z)$, $g(z)$ はともに開円板 $|z| < R$ 上の正則関数なので $f(z)g(z)$ も $|z| < R$ でテイラー展開できる．ライプニッツの公式[*1]
$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)$$
より
$$\frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
なので
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$
が成り立つ．この式はべき級数の積を多項式の積のように求めて構わないことを表している．さらに収束性についても保証されているので安心して使うことができる．これを応用して関数の展開の最初の数項を求めることができる．例えば

例　$f(z) = \tan z$ としよう．分母の $\cos z$ が 0 になるのは $z = \pi/2 + n\pi$ なので $|z| < \pi/2$ で正則である．よって $|z| < \pi/2$ で収束するべき級数 $\sum c_n z^n$ に展開できる．$\sin z = \tan z \cos z$ をべき級数で書けば
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)$$
となるが，右辺を展開して左辺の係数と比較することにより
$$c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 - \frac{c_0}{2} = 0 \quad c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \quad c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24} = 0 \quad c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120}$$
となるので
$$c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{1}{3} \quad c_4 = 0 \quad c_5 = \frac{2}{15}$$
を得る．すなわち
$$\tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots$$
である．なお，奇数べきの項しか現れないことを使うともっと簡単に求められる．
3. 正則関数の零点
正則関数 $f(z)$ について $f(z_0) = 0$ のとき z_0 を $f(z)$ の零点という．$f(z)$ を z_0 の近傍でテイラー展開
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

[*1] 1 年次のテキストには記述されていないが本来は 1 年次の微分積分で扱うべき公式である．証明は 2 項定理の証明と同様に数学的帰納法による．

すれば $a_0 = 0$ である．ここで $a_m \neq 0$ となる最小の整数 m を零点の位数，z_0 を m 位の零点と呼ぶ．このとき

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z)$$

とおけば $g(z)$ は $g(z_0) = a_m \neq 0$ を満たす正則関数である．これから $f(z)$ の零点は孤立していることが分かる．

4. 孤立特異点と留数，留数定理

$f(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則なとき z_0 を孤立特異点という．$f(z_0$ は必ずしも定義されている必要はない．この時ローランの定理により

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad 0 < |z| < R$$

と展開できる．この展開の $(z - z_0)^{-1}$ の係数 c_{-1} を $f(z)$ の孤立特異点 z_0 における留数という．

留数に関して留数定理（p.151）が成り立つ．定理の主張についてはテキストを確認すること．この証明を簡単にまとめておく．

- 各特異点 z_j を中心とする円周 C_j を C_j の内部が C の内部に含まれ，かつ互いに重ならないように取る．p.87 の (6) 式により

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$

- C_j での積分を $0 < |z - z_j| < r$ でのローラン展開を利用して計算する．

$$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_j)^k dz$$

- p.132 の補助定理（項別積分）を利用して

$$\int_{C_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_j)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{C_j} (z - z_j)^k dz$$

- $k \neq -1$ のときは $(z - z_j)^k$ は C_j 上で正則な原始関数 $\frac{1}{k+1}(z - z_j)^{k+1}$ を持つので積分の値は 0 である．これは原始関数を持つ関数の線積分が原始関数の終点での値と始点での値の差で与えられること（p.93 定理 1），および C_j はジョルダン曲線なので始点と終点が一致することによる．
- $k = -1$ のときは C_j を $z = z_j + re^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ と表示して

$$\int_{C_j} \frac{1}{z - z_j} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

  以上を組み合わせて

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i R(z_j)$$

  ただし $R(z_j)$ は $f(z)$ の z_j における留数である．

今回で今年の授業は終了した．次回は年明けの 1 月 12 日である．今回のレポート課題は出さないが，今まで授業で扱った内容をじっくり復習しておいてほしい．特にコーシーの積分定理，コーシーの積分公式，コーシーの微積分公式，テイラー展開，ローラン展開，留数定理にいたる系譜は証明の概略も含めて理解しておくように．

複素関数の講義メモ (1 月 12 日)

本日の講義の要点

1. 孤立特異点の分類

   留数定理により，ジョルダン曲線 C の周上および内部において，内部の有限個の点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を除いて正則な関数 $f(z)$ について $\int_C f(z)dz$ は z_i における留数の和 (の $2\pi i$ 倍) として求められる．有限個なので，特異点は孤立している．すなわち孤立特異点のみが現れている．孤立特異点での留数を求めるために，ローラン展開の形によって特異点を分類する．

   - z_0 を $f(z)$ の孤立特異点とする．正数 $R > 0$ を $f(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則になるように取る．（このような R の存在が孤立の意味だ.）
   - ローランの定理により $0 < |z - z_0| < R$ において $f(z)$ はローラン展開できる.
   $$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$
   - ローラン展開の負べきの項の和を $f(z)$ の主要部と呼ぶ.
   $$f(z) \text{ の主要部} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots$$
   - 主要部が存在しないとき除去可能特異点（除ける特異点）と呼ぶ.
   $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$
   このとき，$f(z_0) = c_0$ と定義しなおしてやれば $f(z)$ は $|z - z_0| < R$ で正則になる．この操作を特異点を除去すると呼ぶことにする.

     例として $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ をあげた．0 は特異点であるが，$\sin z$ のテイラー展開は 1 次の項から始まるので z で割っても負べきの項は現れない．0 は除去可能特異点であり，特異点を除去すれば（$z = 0$ での値を 1 と定義しなおしてやれば）0 の周りで（この場合は全平面で）正則になる．なお $\frac{\sin z}{z}$ の $z = 0$ での値が 1 だと主張しているわけではない．正則にするには特異点を除去しなくてはならない.
   - 主要部が 1 個以上の有限個の項からなるとき，極という．$c_{-k} \neq 0$ となる最大の k を m とおくとき，m を極の位数と呼ぶ．また z_0 を $f(z)$ の m 位の極と呼ぶ.
   $$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_k(z - z_0)^k + \cdots$$
   - 主要部が無限個の項からなるとき真性特異点と呼ぶ.

2. 極と零点

   z_0 が $f(z)$ の位数 m の極とはローラン展開が $-m$ 次の項から始まることを意味する．このとき
   $$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_k(z - z_0)^k + \cdots = (z - z_0)^{-m} f_0(z)$$
   とおけば $f_0(z)$ は $f_0(z_0) = c_{-m} \neq 0$ を満たす正則関数である.

   z_0 が $f(z)$ の位数 m の零点であるとはテイラー展開（ローラン展開の特殊な場合）が m 次の項から始まることをいう．このとき
   $$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m f_0(z)$$

とおけば $f_0(z)$ は $f_0(z_0) = c_m \neq 0$ を満たす正則関数である．

このように見れば極と零点は非常によく似た概念であることが分かる．次の性質はテキストにはないが重要である．

- $f(z)$ が z_0 で m 位の零点の時，$1/f(z)$ は z_0 で m 位の極になる．
- $f(z)$ が z_0 で m 位の極であるとき，$1/f(z)$ は z_0 で除去可能特異点であり，特異点を除去すれば m 位の零点になる．
- $f(z)$ と $g(z)$ が z_0 でそれぞれ m 位，n 位の零点であるとき $f(z)/g(z)$ は z_0 において $n > m$ のときは $n-m$ 位の極，$n < m$ のときは特異点を除去することにより $m-n$ 位の零点，$m = n$ のときは零点でも極でもない正則な点になる．なお，0 位の零点を零点でないこと，すなわち $f(z_0) \neq 0$ であることとして解釈すれば後半の 2 つの主張は 1 つにまとめられる．

z_0 が $f(z)$ の極であれば $1/f(z)$ の零点である．これは $\lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$ を意味する．ゆえに

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$$

である．これは極の基本的な性質である．なお，真性特異点においてはこの事実は成り立たない．例えば $f(z) = e^{1/z}$ について 0 は真性特異点（p.153 例 11）であるが，$f(-1/n) = e^{-n}$ は 0 に収束するので無限大に発散しない．

3. 極における留数の求め方

z_0 が $f(z)$ の m 位の極であるとき，

$$f_0(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & z \neq z_0 \\ c_{-m} & z = z_0 \end{cases}$$

は $|z - z_0| < R$ で正則になる．$f(z)$ の留数は $f_0(z)$ のテイラー展開の $m-1$ 次の項の係数に他ならない．すなわち

$$R(z_0) = \frac{f_0{}^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z\to z_0}((z-z_0)^m)f(z))^{(m-1)}$$

もちろん極限の中身が z_0 でも定義できるときは代入するだけでよい．また $m = 1$ の場合は

$$R(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

4. 留数の計算例

p.154 例 1，p.156 例 3 を解説した．ここでは省略する．p.156 に分数関数という項目があるが，これは覚えなくてもよい．テキストの記号のもとに $f(z) = p(z)/q(z)$ で分子は零点でなく（0 位の零点）分母は 1 位の零点なので $f(z)$ は 1 位の極である．よって留数は

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{q(z)}p(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

だが，この計算は積の左側の部分にロピタルの定理を使ったと思えばよい．

本日のレポート課題

p.174 の 6-7 を課題にする．極はいずれも分母が 0 になる点だ．なお $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ である．

複素関数の講義メモ (1 月 19 日)

前回のレポート課題

留数計算の問題をやってもらった．計算方法と合わせて解説しておく．

6-7(1)　最も優しい基本的な問題である．まず分母分子とも全平面で正則なので特異点は分母が 0 となる点，すなわち $z=-1$ である．分母は -1 で 1 位の零点，分子は -1 で零点でないので，$f(z)$ は $z=-1$ で 1 位の極である．留数の求め方から

$$R(-1)=\left[(z+1)f(z)\right]_{z=-1}=\left[z^2+2\right]_{z=-1}=3$$

なお，$z=-1$ でのローラン展開は $z+1=w$ とおいて

$$f(z)=f(w-1)=\frac{(w-1)^2+2}{w}=\frac{w^2-2w+3}{w}=\frac{3}{w}-2+w=\frac{3}{z+1}-2+(z+1)$$

と求められる．留数は -1 乗の項の係数なので 3 である．

6-7(2)　【基本的な用語の意味に基づいた素朴な考え方】分母は $2z+1$ になっているがローラン展開は $z+1/2$ のべきで考えなくてはならない．$z+1/2=w$ とおけば

$$f(z)=f(w-1/2)=\frac{(w-1/2)^3}{8w^3}=\frac{1}{8w^3}\left(-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}w-\frac{3}{2}w^2+w^3\right)=-\frac{1}{64}\frac{1}{w^3}+\frac{3}{24}\frac{1}{w^2}-\frac{3}{16}\frac{1}{w}+\frac{1}{8}$$

ここで $w=z+1/2$ と z に戻してやれば $z=-1/2$ におけるローラン展開が得られる．

$$f(z)=-\frac{1}{64}(z+1/2)^{-3}+\frac{3}{24}(z+1/2)^{-2}-\frac{3}{16}(z+1/2)^{-1}+\frac{1}{8}$$

ローラン展開は -3 乗の項から始まるので $-1/2$ は 3 位の極である．また留数は $w^{-1}=(z+1/2)^{-1}$ の項の係数なので $-3/16$ である．

【学習事項を活用した考え方】分母は $-1/2$ で 3 位の零点であり，分子は $-1/2$ で 0 でないので $f(z)$ は $-1/2$ で 3 位の極である．よって $g(z)=(z+1/2)^3f(z)=z^3/8$ とおけば留数は

$$R(-1/2)=\frac{1}{2!}[g^{(2)}(z)]_{z=-1/2}=\frac{1}{16}[6z]_{z=-1/2}=-\frac{3}{16}$$

【注意】$(2z+1)^3$ をかけてしまう人が目についた．これだと留数は 8 倍になってしまう．

6-7(3)　$\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$ である．分母分子とも全平面で正則なので，特異点は分母の零点である．$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$ より零点は $e^z=e^{-z}$ すなわち $e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^{-x-iy}=e^{-x}e^{-iy}$ を満たす点である．りょうへんの絶対値が等しいことから $e^x=e^{-x}$，すなわち $x=0$ である．また両辺の偏角が等しいことから $y=-y+2n\pi$ すなわち $y=n\pi$ である．よって分母の零点は $n\pi i$ である．これは 1 位の零点なので（あとで説明する）$n\pi i$ は $f(z)=\coth z$ の 1 位の極である．

$$R(n\pi i)=\left[(z-n\pi i)\frac{\cosh z}{\sinh z}\right]_{z=n\pi i}=\lim_{z\to n\pi i}\frac{z-n\pi i}{\sinh z}\cosh z=\frac{1}{\cosh n\pi i}\cosh n\pi i=1$$

ここで $n\pi i$ は代入できないので極限で考えている．また極限の左側の部分はロピタルの定理で考えている．

なおこの関数は p.156 の 3（分子が 0 点でなく分母が 1 位の零点である場合）が使える形になっている．分母の微分は $\cosh z$ なので

$$R(n\pi i)=\left[\frac{\cosh z}{(\sinh z)'}\right]_{z=n\pi i}=1$$

命題 正則関数 $f(z)$ が $z = c$ で m 位の零点であることは次と同値である．

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0$$

証明　$f(z)$ が m 位の零点であればテイラー展開が m 次の項から始まる．テイラー展開の k 次の項の係数は $f^{(k)}(c)/k!$ なので $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0$ である．この議論を逆にたどれば逆の証明も得られる．

ゆえに 2 位以上の零点は $f(z)$ と $f'(z)$ の共通零点である．$\sinh z$ の導関数は $\cosh z$ であり，$\cosh^2 z - \sinh^2 z - 1$ なのでともに 0 になることはないので 2 位以上の零点は存在しない．

6-7(4)　分子の $e^z = e^x e^{iy}$ は絶対値が e^x なので 0 になることはない．分母は $(z + i\pi)(z - i\pi)$ なので $\pm i\pi$ で 1 位の零点である．よってこの関数は $\pm i\pi$ で 1 位の極である．

$$R(\pm i\pi) = [(z \mp i\pi)f(z)]_{z=\pm i\pi} = \left[\frac{e^z}{z \pm i\pi}\right]_{z=\pm i\pi} = \frac{-1}{\pm 2i\pi} = \pm\frac{i}{2\pi}$$

【注意】この問題では $i\pi$ と $-i\pi$ を複号を使って同時に扱っている．このような式では複号は同順で扱わなければならないが，その意識があまり感じられない答案が目につく．きをつけること．

6-7(5)　分母の $\cos z$ の零点は $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ より $e^{iz} = -e^{-iz}$ である．$z = x + iy$ とおいて

$$e^{-y} = e^{y} \qquad e^{ix} = -e^{-ix}$$

より $y = 0$ と $x = -x + (2n+1)\pi$ を得る．すなわち $z = (n + 1/2)\pi$ である（これは実関数としての $\cos z$ の零点と一致）．$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ と $(\cos z)' = -\sin z$ より 2 位以上の零点は持たないのでこれらはすべて 1 位の零点である．この零点で分子の z は 0 でないので，与えられた関数は $z = (n + 1/2)\pi$ で 1 位の極を持つ．また零点でない関数を 1 位の零点をとる関数で割った形なので，156 ページの 3 が使える．

$$R((n + 1/2)\pi) = \left[\frac{z}{-\sin z}\right]_{z=(n+1/2)\pi} = (-1)^{n+1}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

6-7(6)　分子の $z^{1/4}$ は 4 価の関数である．すなわち

$$z^{1/4} = (re^{i\theta})^{1/4} = \sqrt[4]{r}e^{i\theta/4}$$

なので，z の偏角の取り方を θ, $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, $\theta + 6\pi$ と変えていくと 4 乗根として 4 つの異なる値が出てくる．テキストの条件 $0 < \arg z < 2\pi$ は $z^{1/4}$ の偏角を 0 から $\pi/2$ の範囲にとることを指定している．これによって $z^{1/4}$ は複素平面から実軸の正方向の部分を原点を含めてより除いた集合上での正則関数になる．分母の零点は -1 だが

$$(-1)^{1/4} = (e^{i\pi})^{1/4} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq 0$$

なので -1 は 1 位の極である．留数は

$$[(z+1)f(z)]_{z=-1} = [z^{1/4}]_{z=-1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

本日の講義の要点

1. 実関数の積分への応用（有理関数の広義積分）
   $p(x), q(x)$ を実係数多項式とし有理関数 $p(x)/q(x)$ を考える．

- $q(x)=0$ は実数解を持たない．
- 分子 $p(x)$ の次数は 分母 $g(x)$ の次数より 2 以上小さい．（$p(x)$ の次数 $+2 \leqq q(x)$ の次数）

を満たすとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} R(z_j)$$

が成り立つ．ただし z_j, $1 \leqq j \leqq N$ は $q(x)=0$ の解のうち実部が正であるもの，$R(z_j)$ は $f(z)=p(z)/q(z)$ の z_j における留数である．

2. 実関数の積分への応用（有理関数に $\cos x$（または $\sin x$）をかけたものの広義積分

$p(x), q(x)$ を実係数多項式とし有理関数 $p(x)/q(x)$ を考える．

- $q(x)=0$ は実数解を持たない．
- 分子 $p(x)$ の次数は 分母 $g(x)$ の次数より 1 以上小さい．（$p(x)$ の次数 $+1 \leqq q(x)$ の次数）

を満たすとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} (\cos x + i \sin x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} R(z_j)$$

が成り立つ．ただし z_j, $1 \leqq j \leqq N$ は $q(x)=0$ の解のうち実部が正であるもの，$R(z_j)$ は $f(z)=p(z)/q(z)e^{iz}$ の z_j における留数である．

3. 上の二つが成り立つ理由

どちらも証明のアイデアは同じである．$f(z)$ を実軸の $[-r, r]$ の部分と半円 $C_r : z = re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ をつないだ積分路 C で積分すれば，留数定理からその和は内部の特異点における留数の和になる．

$$\int_C f(z) dz = \int_{-r}^{r} f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz$$

ここで実軸の部分 $[-r, r]$ では z は実数なので x と書いている．ここで r を十分大きくすれば，$f(z)$ の虚部正の特異点をすべて含むので，積分値は留数の総和から求められる．さらに $r \to \infty$ とすれば第 1 項は求める広義積分になる．よって $r \to \infty$ のとき $\int_{C_r} f(z) dz \to 0$ が成り立つことを示せばよい．

- 十分大きな $r > 0$ について C_r 上 $|f(z)| < M(1/r^2)$ が成り立つ場合

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leqq \int_{C_r} |f(z)||dz| < \frac{M}{r^2} \int_{C_r} |dz| = \frac{M\pi}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$

- 十分大きな $r > 0$ について C_r 上 $|f(z)| < M(1/r)e^{-y}$ が成り立つ場合

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leqq \int_{C_r} |f(z)||dz| < \frac{M}{r} \int_{C_r} e^{-y} |dz| = M \int_0^{\pi} e^{-r \sin\theta} d\theta < \frac{M\pi}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$

  ここでジョルダンの不等式（p.165）を使っている．

4. 講義で扱った計算例

p.159 の例 1，p.160 の例 2，p.166 の例 7 を扱った．テキストに出してない問題では

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

を扱った．まず被積分関数は偶関数なので，$-\infty$ から ∞ の範囲での積分にして 2 で割ればよい．また分子の次数が分母の次数より 2 小さいので，留数定理が利用できる．上半平面での特異点は i のみである．

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \pi i R(i)$$

i は 2 位の極なので $(z-i)^2$ をかけた関数の導関数の i での値を求める．

$$(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{z^2}{(z+i)^2} \qquad \left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)'=\frac{2z(z+i)^2-2(z+i)z^2}{(z+i)^4}$$

より i を代入すれば $-i/4$ になる．よって積分値は $(\pi i)(-i/4)=\pi/4$ である．

5. 上の関数でなぜ 2 位の極かわからないという質問があったので解説しておこう．
極の位数とはローラン展開が何次の項から始まるかを見ればよいのだがローラン展開を求めるのは難しい．
実用的には次のように考えるといい．
   - $f(z)$ が α で m 位の極をとるとき，$g(\alpha)\neq 0$ を満たす正則関数をかけても極の位数は変わらない．すなわち $f(z)g(z)$ も α で m 位の極をとる．
   - $f(z)$ が α で m 位の零点をとるとき，$1/f(z)$ は α で m 位の極をとる．

   例えば $(z-i)^2$ は i で 2 位の零点をとる．よって $1/(z-i)^2$ は i で 2 位の極である．よってこれに $z^2/(z+i)^2$ をかけた $z^2/(z^2+1)^2$ も i で 2 位の極をとる．

本日のレポート課題

p.175 の 6-14 と 6-15 を課題にする．量が多いのでできる範囲でかまわない．

複素関数の講義メモ (1 月 26 日)

前回のレポート課題

6-14 は有理関数の広義積分である．留数定理を利用できる条件は，

- 分母の次数が分子の次数より 2 以上大きいこと
- 実軸上に特異点を持たないこと，すなわち方程式「分母 = 0」が実数解を持たないこと

の二つである．最初の条件は被積分関数を見ればすぐにわかる．2 番目の条件を見るには被積分関数の特異点（分母 = 0 を満たす点）を求めればよい．なお既約な有理関数（共通因数があれば約分しておく）の特異点はすべて極であり，極の位数は分母の零点の位数である．なお 1 位の極についての分数式の留数は p.154 の (1) 式よりも p.156 の (4) 式を使ったほうがはるかに簡単だ．簡単になる理由は

- p.154 の (1) を使う際には $(z-z_0)p(z)/q(z)$ の約分が必要になるが p.156 の (4) では不要.
- p.154 の (1) では $z = z_0$ での値を考える関数 $(z-z_0)f(z)$ が特異点ごとに変わるが p.156 の (4) では $p(z)/q'(z)$ とすべて同じ関数である．

特に 2 つ目の理由は複数の 1 位の極を持つ場合に有効である．ただし 2 位の極については使えない．この場合は (1) 式の拡張である p.155 の (2) 式を使うしかない.

(a) $x^4+1=0$ の解は $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$ なので，実数解は存在しない．このうち上半平面にあるのは $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}$ である．これらは重解ではないので零点の位数は 0 であり，被積分関数の極の位数も 1 である．

$$R(e^{i\pi/4}) = \left[\frac{1}{(z^4+1)'}\right]_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$R(e^{i\pi/4}) = \left[\frac{1}{(z^4+1)'}\right]_{z=e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

偶関数の $[0,\infty)$ での積分なので，留数で得られる $(-\infty,\infty)$ での積分値を 2 で割る．（すなわち留数の和の πi 倍にする）

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \pi i(R(e^{i\pi/4}) + R(e^{i3\pi/4})) = \pi i\frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(b) 分母の零点は 6 つあり，それらは重解ではないので零点の位数は 1 である．上半平面では，絶対値が 1 で偏角が $\pi/6, \pi/2$, $5\pi/6$ の 3 つである．留数は

$$R(e^{i\pi/6}) = \left[\frac{z^2}{(z^6+1)'}\right]_{z=e^{i\pi/6}} = \left[\frac{1}{6}z^{-3}\right]_{z=e^{i\pi/6}} = \frac{1}{6}\left(e^{i\pi/6}\right)^{-3} = -\frac{i}{6}$$

$$R(e^{i\pi/2}) = \frac{1}{6}e^{-i3\pi/2} = \frac{i}{6} \quad R(e^{i5\pi/6}) = \frac{1}{6}e^{-i5\pi/2} = -\frac{i}{6}$$

(c) 極は $\pm i$ であり位数は 2 である．上半平面での極，i における留数は

$$R(i) = \left[\left((z-i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\right)'\right]_{z=i} = \left[-2(z+i)^{-3}\right]_{z=i} = \frac{1}{4i}$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi i R(i) = \frac{\pi}{4}$$

(d) 上半平面での極は $2i$ と $3i$ でいずれも 1 位の極である．p.156 の (4) を使って留数を求めるが，点に応じて分母の見方を変える．

$$R(2i) = \left[\frac{z^2/(z^2+9)}{(z^2+4)'}\right]_{z=2i} = \left[\frac{z^2}{2z(z^2+9)}\right]_{z=2i} = \frac{-4}{20i} = -\frac{1}{5i}$$

$$R(3i) = \left[\frac{z^2/(z^2+4)}{(z^2+9)'}\right]_{z=3i} = \left[\frac{z^2}{2z(z^2+4)}\right]_{z=3i} = \frac{-9}{-30i} = \frac{3}{10i}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx = \pi i\left(-\frac{1}{5i}+\frac{3}{10i}\right) = \frac{\pi}{10}$$

6-15 は有理関数に $\cos x$ または $\sin x$ をかけたものの広義積分である．留数定理を使える条件は分母の次数が分子の次数より 1 以上大きいことなので必ずチェックすること．

(a) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ について上半平面の極は ai, bi でありいずれも 1 位の極である（$0 < b < a$）．留数は

$$R(ai) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+b^2)}\right]_{z=ai} = \frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} \qquad R(bi) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+a^2)}\right]_{z=bi} = \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}$$

求める広義積分は $\cos x$ をかけた式なので実部をとる．

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \mathrm{Re}\ (2\pi i(R(ai)+R(bi))) = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{be^b}-\frac{1}{ae^a}\right)$$

本日の講義の要点

1. 実軸に特異点がある場合の留数定理の応用

   例 8（p.167）例 9（p.168）例 10（p.169）を解説した．いずれも積分路を特異点を避けるように取らなくてはならない．典型的な計算例であり味わっておくとよい．なお例 10 では被積分関数 $f(z) = \dfrac{z^a}{1+z}$ の理解の仕方が問題になる．解答例では $0 \leqq \arg z \leqq 2\pi$ の範囲に取り $z^a = r^a e^{ia\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ と定めている．テキストの図 6-8 の記号を使えば線分 PQ では第 1 象限の縁と考え $z^a = x^a$ としている．線分 SR では第 4 象限の縁と考え $z^a = x^a e^{2\pi ai}$ としている．この理解で留数定理が利用できる．

   講義での解説はテキストと同じなので省略する．
2. 三角関数の有理式の積分，例 11（p.172）

   単位円周上において $z = e^{i\theta}$ により

$$\int_C F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

   が成り立つ．左辺に被積分関数は有理関数であり，単位円上に極を持たなければ積分値は留数定理で計算できる．このことについて，うまく説明できないまま授業時間が終わってしまったのでここにまとめておく．

$$\int_C \frac{1}{1+a\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{1}{iz}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin\theta}d\theta$$

   後は左辺の被積分関数の極と位数，留数を求めればよい．あとの計算はテキストを見ること．

今日の講義ですべての内容を終えた．留数を応用した実積分の計算は従来の積分計算と全く異なるので興味深いと思う．自分で計算しておくように．

「複素関数」第 1 回試験（12 月 1 日実施）解答例とコメント

問 1 から問 6 まで各 10 点，問 7 は (1)(2) のそれぞれに 10 点配点し 80 点満点で採点した．受験者は 72 人で，最高点は 75 点 (2 人)，最低点は 0 点 (2 人)，平均点は 36.25 点だった．きちんと日頃から勉強していれば 30 点は取れる問題である．合格点は 25 点とし，それに満たない 21 人を不合格とする．なお，もう 1 回試験を行うが両方とも不合格になった場合は再試験の対象としないので，不合格だった人は授業に向き合う姿勢を根本から改めるようにしてほしい．特に問 1 と問 2 はこの授業の論理的背景にかかわる問題だ．解答例を読んできちんと理解するようにしておくこと．問 7 の計算だけはできたという人もいるが，計算だけでは合格点には達しない．日頃から数学の論理をきちんと考える習慣を身に着けること．

問 1 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ が $z = c = a+bi$ で微分可能，すなわち $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ のとき $\dfrac{f(c+\Delta z) - f(c)}{\Delta z}$ が収束するとする．このとき u, v は $(x,y) = (a,b)$ で偏微分可能で $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ が成り立つことを示せ．（ヒント；$\Delta z \to 0$ で収束するので $(\Delta x, 0) \to (0,0)$ でも当然同じ値に収束する．）

【解答例】 $\Delta y = 0$ とおき $\Delta x \to 0$ とすれば

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(a+\Delta x, b) - u(a,b)}{\Delta x} + i\frac{v(a+\Delta x, b) - v(a,b)}{\Delta x}$$

となるが，左辺は $f'(c)$ に収束するので，右辺も収束する．これは u, v が (a,b) で x について偏微分可能で $f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b)$ が成り立つことを意味する．
$\Delta x = 0$ として $\Delta y \to 0$ とすれば

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(c+i\Delta y) - f(c)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(a, b+\Delta y) - u(a,b)}{i\Delta y} + i\frac{v(a, b+\Delta y) - v(a,b)}{i\Delta y}$$

となるが，同様に u, v は (a,b) で y について偏微分可能で $f'(c) = v_y(a,b) - iu_y(a,b)$ が成り立つ．ゆえに $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ である．
【コメント】

- 微分可能性からコーシー・リーマンの方程式を導く問題だ．（複素関数での）微分の定義と偏微分の定義を利用する．基本的な議論でありきちんと理解しておくこと．
- 極限の記号を書かない人がいるが極限の中身と極限値は異なる概念であり等しくはない．記号の扱いにはもう少し神経を使うこと．
- 問題では $c = a+ib$ での微分可能性しか仮定していないので これを x, y と書いてはいけない．ただしこの部分は減点していない．

問 2 ジョルダン曲線 C の周上および内部で正則な関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ について，$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = 0$ となることを示せ．ただし u, v は C^1 級であるとし，グリーンの定理 $\int_C Pdx+Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$ は既知の公式として用いて良い．

【解答例】線積分を実部と虚部に分けて

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

これにグリーンの定理を適用すれば

$$\int_C f(z)dz = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy$$

となるが，これはコーシー・リーマンの方程式により 0 になる．

【コメント】

- グリーンの定理をとコーシー・リーマンの方程式を使う問題だ．コーシー・リーマンの方程式は問 1 で示しているので 2 つの問いでこの講義の最も基本的な部分を理解してほしい．結果を覚えるだけでは何にもならない．
- $f(z)dz$ の展開をきちんとできない人，グリーンの定理を正確に利用できない人は何故できなかったのかきちんと考えておくこと．コーシー・リーマンの方程式に思いが至らない人が散見するが，基本事項なので勉強不足としか言いようがない．

問 3 複素数に関する対数関数 $\log z$ と $\mathrm{Log}\,z$ の定義を述べよ．また $\mathrm{Log}\,(zw) = \mathrm{Log}\,z + \mathrm{Log}\,w$ について正しければ証明し，間違いであれば反例を与えよ．

【解答例】$\log z = \in |z| + i\arg z$ である．ここで偏角をその主値にとったものが $\mathrm{Log}\,z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,(z)$ である．偏角の主値とは $-\pi < \mathrm{Arg}\,(z) \leqq \pi$ の範囲にとった z の偏角である．$z = w = -1 + i$ とおけば $\mathrm{Arg}\,(z) = \mathrm{Arg}\,(w) = 3\pi/4$ だが，$zw = -2i$ の偏角は $\mathrm{Arg}\,(zw) = -\pi/2 \neq \mathrm{Arg}\,(z) + \mathrm{Arg}\,(w) = 3\pi/2$ である．よって

$$\mathrm{Log}\,(zw) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2} \neq \mathrm{Log}\,z + \mathrm{Log}\,w = \ln 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

【コメント】

- 対数関数の定義はきちんと理解しておくこと．偏角の前の i を落とす人が見受けられるがこのような間違いは繰り返さないこと．
- 偏角の主値の範囲は $-\pi < \mathrm{Arg}\,z \leqq \pi$ だ．主値の取り方は一通りではないがこの講義ではこの方法で統一している．なお，$-\pi < \mathrm{Arg}\,z < \pi$ としてしまうと $\mathrm{Arg}\,(-1)$ が定義できなくなる．また両方とも $\leqq$ にしてしまうと $\mathrm{Arg}\,(-1)$ が定まらなくなる．どちらも主値の取り方としては不適切である．
- 反例は具体的に与えるのが基本である．$\mathrm{Arg}\,z = 2/3\pi$, $\mathrm{Arg}\,w = 3/4\pi$ とすれば確かに反例になるが $z = -\sqrt{3} + i$, $w = -1 + i$ のように具体的に与えたほうが良い．
- 偏角が $\pi/2$ であることを $z = \pi/2$ と書く人がいるが，これでは z は正数（偏角 0）だ．繰り返しになるが，数式にはもう少し神経を使うこと．

問 4 $f(z) = f(x + iy) = |z|^2 = x^2 + y^2$ について正則か否か理由をつけて答えよ．

【解答例 1】 $u = x^2 + y^2$, $v = 0$ より $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ だが $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つのは $(0, 0)$ のみである．正則とはその近傍で微分可能になっていることなので $(0, 0)$ も含めてすべての点で正則にはならない．

【解答例 2】 微分可能とは次が収束することである．

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$\Delta y = 0$ として極限をとれば $2x$ に収束する．$\Delta x = 0$ として極限をとれば $-i2y$ に収束する．よって $(x, y) \neq (0, 0)$ のときはこの極限は収束せず微分可能ではない．よって $(0, 0)$ も含め $\mathbb{C}$ 上で正則ではない．

【コメント】

- $z = c$ で正則とは $z = c$ の近傍で微分可能ということである．この問題では $z = 0$ で微分可能だが，$z = 0$ で正則と言ってはいけない．
- この関数が正則でないことは講義でも注意した．複素関数としての微分可能性と，2 変数関数としての微分可能性の違いを認識するための基本的例である．正則と答えた人はこの解答例をよく読んで正則でないことを理解してほしい．
- 絶対値の処理がきちんとできない人が目につく．$|z|^2 = |x^2 + 2ixy - y^2|$ としても間違いではないが分かりづらくしている．$|z|^2 = x^2 + y^2$ は常識だろう．

問 5 $(1 + i)^{2i}$ の値を求めよ．

【解答例】 $z^w = e^{w \log z}$ より

$$2i \log(1 + i) = 2i(\ln \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi)) = -(1/2 + 4n)\pi + i \ln 2$$

$$(1 + i)^{2i} = e^{-(1/2+4n)\pi}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$$

【コメント】

- 複素数は $a + bi$ または $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ の形に表すべきだ．$2^i e^{-(1/2+4n)\pi}$ では値を求めたとは言えない．
- $4n$ と書くべきところを $2n$ とする答案があった．これは $\arg z = \alpha + 2n\pi$ のとき $\arg z^2 = 2 \arg z = 2\alpha + 4n\pi$ としてはいけないと注意したことを覚えていたためだろう．偏角が等しいという主張は常に 2π の整数倍の差は無視したうえで等しいと言っているからだ．しかし，ここで扱っている式は複素数の等式であって偏角の等式ではない．注意してほしい．
- $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ は正しい．ただしべきの多価性は偏角の多価性に由来するので，これでは求める値を正確に求められない．

問 6 曲線 $C(t) = \cosh t + it,\ 0 \leqq t \leqq 1$ について $\int_C dz$ および $\int_C |dz|$ を求めよ．

【解答例】

$$\int_C dz = \int_0^1 \frac{dC}{dt} dt = \int_0^1 \sinh t + i dt = [\cosh t + it]_0^1 = \cosh 1 + i - 1$$

$$\int_C |dz| = \int_0^1 \left|\frac{dC}{dt}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{\sinh^2 t + 1} dt = \int_0^1 \cosh t dt = \sinh 1$$

【コメント】

- 双曲線関数の定義は $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ だ．この z を iz にする人がいたがそれは三角関数の定義だ．双曲線関数と三角関数はよく似た性質があるのできちんと見ておいてほしい．

- 前半は 1 の積分なので正則関数の積分であり原始関数 z の終点から始点での値を引けばよい．

$$\int_C dz = \int_{C(0)}^{C(1)} dz = [z]_{C(0)}^{C(1)} = C(1) - C(0) = \cosh 1 + i - \cosh 0$$

- 後半の積分は C の長さを求めることに他ならない．$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ なので $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ だ．

$$\int_C |dz| = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

だがこれが 1 年次に学習した曲線の長さの求め方に他ならないことに注意せよ．

問 7 コーシーの微積分公式を利用して以下の積分の値を求めよ．ただし積分路の円周は反時計回りの向きにとる．

$$(1) \int_C \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3} dz, \quad C : |z| = 2 \qquad (2) \int_C \frac{z+1}{(z^2+1)^2} dz, \quad C : |z-i| = 1$$

【解答例】 (1) i は C の内部にあるので $f(z) = e^{\pi z}$ として $n = 2$ の場合のコーシーの微積分公式を用いる．$f''(z) = \pi^2 e^{\pi z}$ より

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi^3 i e^{i\pi} = -i\pi^3$$

(2) 分母が 0 になる点は $\pm i$ だがこのうち C の内部にあるのは i のみである．そこで $f(z) = (z+1)/(z+i)^2$ として $n = 1$ の場合のコーシーの微積分公式を用いる．$f'(z) = (-z - 2 + i)/(z+i)^3$ より

$$\int_C \frac{z+1}{(z^2+1)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) = \frac{\pi}{2}$$

【コメント】

- コーシーの微積分公式を利用する問題だが (2) は何が $f(z)$ なのかきちんと明示しなくてはならない．$(z^2 + 1) = (z + i)(z - i)$ という因数分解が行えないようでは話にならない．
- (1) で $e^{i\pi}$ のまま計算結果にしている人がいるが $e^{i\pi} = -1$ は使うべきだ．

「複素関数」第 1 回試験（12 月 1 日実施）解答例とコメント

各問 10 点（問 6 はそれぞれに 10 点）の 80 点満点で採点した．最高点は 67 点，最低点は 0 点，平均点は 30.44 点だった．かなり甘いとは思うが，合格点は 20 点にした．再試については別途 Moodle 上に掲載する（ホームページには掲載しない）．

1 枚目が留数定理に至る論理の流れを確認する問題だ．どれもきちんと理解しておいてほしいことだが，覚えてはいるが何故かまでは考えていないという人が多いのではないか．「何故か」を考えることをやめてしまったら，数学の学修は成立しない．結果の如何にかかわらず，解答例をきちんと読んでみてほしい．数学コースではこの授業の発展として 3 年次に複素解析の授業がある．その授業の受講には 1 枚目の問題をきちんと分かっておくことが必要だ．

留数定理による積分計算は楽しんでいただけただろうか．1 年次の積分計算とは全く異なる手法であり物理学など他分野でもよく使われる方法だ．計算問題については，自分でやってみることが必要不可欠だが，それを怠って試験を受けた人が目につく．残念である．

問 1 $|z-\alpha| < R$ で正則な複素関数 $f(z)$ は $z=\alpha$ の周りでテイラー展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ できることが知られている．またこのような級数について，項別微分（級数で表された関数の微分が各項の微分の級数に等しくなること）できることが知られている．このことを利用して $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ が成り立つことを示せ．またテイラー展開は一通りである理由を簡単に述べよ．

【解答例】 項別微分により両辺を k 回微分すれば

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left((z-\alpha)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-\alpha)^{n-k}$$

である．両辺に α を代入すれば

$$f^{(k)}(\alpha) = k! c_k$$

であり，$c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ を得る．c_k の値は $f^{(k)}(z)$ によって決まるのでテイラー展開は一通りである．

【コメント】

- $\sum$ 記号の使い方がでたらめな人が多い．解答例では $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}$ としているが，n はあらゆる 0 以上の整数を動くのであり特定の値ではない．この表記のまま $f(z)$ を n 回微分すると意味がつかなくなる．解答例のように k と文字を切り替える必要がある．この注意の意味が分からないという人は要注意だ．
- 微分するたびに最低次の項から消えていく．k 回微分した時の最低次の項は $c_k k!$ になっている．次の項からは $(z-\alpha)^{n-k}$ がかかるので $z=\alpha$ を代入したら 0 になる．このことをきちんと認識できている答案を正解にした．
- 一回項別微分しただけで結論を書いても，結論は問題文に明示されているので評価しようがない．
- テイラー展開の係数が $\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ であることは 1 年次で学習した．しかしそれを使ったら解答にならない．問題はべき級数に展開できることと項別微分を使えという趣旨だ．
- テイラー展開の一意性についてはどう答えればいいか戸惑う人もいるだろう．ただし，きちんと理解できれば的確な解答が記述できるはずだ．答え方はいろいろあるが解答例を参考にしてほしい．
- 前半に 7 点，後半に 3 点配点した．平均点は 3.08 点だった．

問 2 $0<|z-\alpha|<R$ で正則な複素関数 $f(z)$ は $z=\alpha$ の周りでローラン展開 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n$ できることが知られている．またこのような級数について，項別積分（級数で表された関数の積分が各項の積分の級数に等しくなること）できることが知られている．ジョルダン曲線 C を円周 $|z-\alpha|=r<R$ を正の向きに一回りする曲線とするとき $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz$ が成り立つことを示せ．また $f(z)$ の $z=\alpha$ における留数 $R(\alpha)$ の定義を述べるとともに $\displaystyle\int_C f(z)dz=2\pi iR(\alpha)$ が成り立つことを示せ．

【解答例】$f(z)(z-\alpha)^{-k-1}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-\alpha)^{n-k-1}$ の両辺を C 上で積分すれば項別積分により

$$\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_C(z-\alpha)^{n-k-1}dz$$

が成り立つ．ここで $n-k-1\neq-1$ のときは $(z-\alpha)^{n-k-1}$ は $z\neq\alpha$ で定義された原始関数 $\frac{1}{n-k}(z-\alpha)^{n-k}$ を持つ．線積分の値は原始関数の始点と終点での値の差になるが，C はジョルダン曲線（閉曲線）なので始点と終点は同じ点であり，積分の値は 0 になる．よって

$$\int_C f(z)(z-\alpha)^{-k-1}dz=c_k\int_C(z-\alpha)^{-1}dz=c_k[\log(z-\alpha)]_{\alpha+r}^{\alpha+re^{2\pi i}}=2\pi ic_k$$

留数は $R(\alpha)=c_{-1}$ なので $k=-1$ として次を得る．

$$\int_C f(z)dz=2\pi ic_{-1}=2\pi iR(\alpha)$$

【コメント】

- 示すべき等式が $f(z)(z-\alpha)^{-k-1}$ の線積分なのだから，これを級数で表して項別積分すればよい．自然な発想のはずだ．$f(z)$ の線積分を考える人が多いのに驚かされる．何が問題なのかきちんと意識しているのだろうか．
- C 上の線積分は不定積分ではない．この講義で不定積分を使ったことは殆どないはずだ．$(z-\alpha)^n$ の線積分を $\frac{1}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$ としている答案が目につくが，そもそも何の授業を受けているのか理解していない．
- 整数 n について $(z-\alpha)^n$ を α を中心とする円周上で線積分することは，この講義の最も基本的な計算である．$z=\alpha+re^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq2\pi$ とおいて

  $$\int_C(z-\alpha)^ndz=\int_0^{2\pi}r^ne^{in\theta}rie^{i\theta}d\theta=ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\theta}d\theta$$

  $n\neq-1$ のときは，$\sin(n+1)\theta$, $\cos(n+1)\theta$ の $[0,2\pi]$ 上の積分なので 0，$n=-1$ のときは $2\pi i$ である．簡単なことだ．
- 平均は 1.29 点だった．

問 3 α が $f(z)$ の m 位の極であることの定義を述べよ．また α における留数が次で与えられることを示せ．

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{(m-1)!}\{(z-\alpha)^mf(z)\}^{(m-1)}$$

【解答例】 ローラン展開が $-m$ 乗の項から始まるときすなわち

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k \qquad c_{-m} \neq 0$$

のとき，m 位の極という．両辺に $(z-\alpha)^m$ をかければ

$$(z-\alpha)^m f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_{h-m} (z-\alpha)^h$$

であり右辺はテイラー展開なので α は除去可能特異点である．左辺を $g(z)$ とおき $g(\alpha) = c_{-m}$ と定めればこれは正則関数であり，$f(z)$ の留数 c_{-1} は $g(z)$ のテイラー展開の $(z-\alpha)^{m-1}$ の係数になっているので

$$R(\alpha) = c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \{(z-\alpha)^m f(z)\}^{(m-1)}$$

なお $f(\alpha)$ は定義されていないので，$f(z)$ による表示においては，$z \to \alpha$ での極限としている．

【コメント】

- 極の定義をきちんと覚えていない人が多い．定義は数学を学ぶときにまず確認しなくてはならない事項だ．
- 平均は 2.97 点だった．

問 4 $\sin z$ の零点はすべて 1 位の零点であることを示せ．また $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ の極とその点における留数を求めよ．

【解答例】 $(\sin z)' = \cos z$ と $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ より $\sin z = (\sin z)' = 0$ を満たす点は存在しない．よってテイラー展開が 2 次の項から始まることはないので零点はすべて 1 位の零点である．

$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ より

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Longleftrightarrow e^{ix-y} = e^{-ix+y}$$

であり，絶対値が等しいことから $e^{-y} = e^{y}$ を得る．すなわち $y = 0$ である．$e^{ix} = e^{-ix}$ より $e^{2ix} = 1$ であり $2x = 2n\pi$ である．よって零点は $n\pi$ である．

分子の零点は 0 のみで 1 位の零点である．よって $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ において 0 は極にならない（除去可能特異点）．$n \neq 0$ のとき $n\pi$ は $f(z)$ の 1 位の極である．留数は

$$R(n\pi) = \left[\frac{z}{\cos z}\right]_{z=n\pi} = (-1)^n n\pi$$

【コメント】

- $\sin z = 0$ の解は $z = n\pi$ だが，z が実数なら既知としてよいが z は複素数なので理由が必要だ．ただしこの点については減点しなかった．
- 1 位の零点であるとは，テイラー展開が 1 次の項から始まることだ．零点において微分（テイラー展開の 1 次の項の係数）が 0 にならないことを言えばよい．的確に理由が述べられた人は少なかった．

- 0 では分母分子ともに 1 位の零点なので，極にならない．このことに気づいた人は殆どいなかった．
- 平均は 1.98 点だった．

問 5 $\displaystyle\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$ の値を $C : |z-1| = 1$ と $C : |z-1-i| = 2$ の 2 つの場合について求めよ．

【解答例】被積分関数は 2 位の極 1 と 1 位の極 $\pm 2i$ をもつ．$|z-1| = 1$ 内の極は 1 のみなので

$$\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i R(1) = 2\pi i \left[\left(\frac{2z^2+1}{z^2+4}\right)'\right]_{z=1} = 2\pi i \frac{14}{25} = \frac{28}{25}\pi i$$

$|z-1-i| = 2$ の内部には 1 の他 $2i$ が入る．

$$\int_C \frac{2z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i(R(1)+R(2i)) = 2\pi i\left(\frac{14}{25} + \left[\frac{2z^2+1}{(z-1)^2}\frac{1}{2z}\right]_{z=2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{14}{25} - \frac{28+21i}{100}\right) = \frac{21+28i}{50}\pi$$

【コメント】

- 複素数の計算の答えは実部と虚部がきちんと分かるような形で表すこと．分母に i の式が入っているときは，共役複素数を分母分子にかけて分母を実数にすること．
- C 内の極をきちんと考えること．$-2i$ は曲線の中に含まれていない．
- 極は円の中心だと思い込んでいる人がいる．$1+i$ は極ではない．
- 平均点は 3.74 点だった．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}dx$

【解答例】分母が実軸で 0 にならないこと，分母の次数は分子の次数より 3 大きいことから留数定理が利用できる．$f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}$ の上半平面での極は i, $-2+i$ でありそれぞれ位数は 1 である．留数は

$$R(i) = \left[\frac{z}{2z(z^2+4z+5)}\right]_{z=i} = \frac{1}{2(4+4i)} = \frac{1-i}{16}$$

$$R(-2+i) = \left[\frac{z}{(z^2+1)(2z+4)}\right]_{z=-2+i} = \frac{-1+3i}{16}$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}dx = 2\pi i(R(i)+R(-2+i)) = -\frac{\pi}{4}$$

【コメント】

- この計算は実軸上の区間 $[-R, R]$ を直径とする半円（上側）の周上の線積分を考えることにより正当化される．半円内の極は上半平面内の極に限られる．極 $-i, 2-i$ での留数は考えてはいけない．
- 実積分なので結果は実数である．複素数になってしまったらおかしいと感じてほしい．計算ミスでも結果が複素数になったものは多めに減点している．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

【解答例】$f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$ について留数定理が利用できる．この関数の上半平面での極は i と $2i$ であり偶関数なので

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}2\pi i(R(i) + R(2i))$$

が成り立つ．i は 2 位の極なので

$$R(i) = \left[\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\right]_{z=i} = -\frac{5}{36}i$$

$2i$ は 1 位の極なので

$$R(2i) = \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2 2z}\right]_{z=2i} = \frac{1}{9}i$$

よって

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx = -\pi i\frac{1}{36}i = \frac{\pi}{36}$$

【コメント】

- i が 2 位の極なので留数の求め方は解答例の方法になる．簡単な分数式の微分だが，まじめにやると結構大変だ．私の感覚としては商の微分を使うよりも積の微分のみで攻めたほうが簡単に思える．

$$\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)' = \frac{2z}{(z+i)^2(z^2+4)} - 2\frac{z^2}{(z+i)^3(z^2+4)} - \frac{2z^3}{(z+i)^2(z^2+4)^2}$$

  この形のまま i を代入すればよい．
- 平均点は 5.62 点だった．

問 6 次の積分の値を求めよ．
(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

【解答例】$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ とおいて留数定理を使う．cos なので実部をとればよい．

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \mathrm{Re}\ (\pi i(R(i) + R(2i)))$$

極の i と $2i$ はいずれも 1 位の極であり

$$R(i) = \left[\frac{e^{iz}}{2z(z^2+4)}\right]_{z=i} = \frac{e^{-1}}{6i} \quad R(2i) = \left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)2z}\right]_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{-12i}$$

よって

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \pi\left(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}\right)$$

【コメント】

- 留数も計算しやすく比較的よくできていた．
- 分子を $\cos z$ として留数を求める人がいるが，これは間違いだ．留数定理が実の広義積分の計算に使えるためには，半径 R の上半円での線積分が $R\to\infty$ で 0 にいくことが必要だが $\cos z$ のままではその条件が出てこない．

  $$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}, \qquad |\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| \geqq \frac{|e^{-iz}|-|e^{iz}|}{2} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

  だが上半平面では $y>0$ なので $|e^{iz}|\leqq 1$ は成り立つ．しかし $|\cos z|$ は y を大きくしていくと無限大に発散してします．
- この問題では実部をとるまでもなく $\pi i(R(i)+R(2i))$ は実数になっている．

  $$\frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} + i\frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

  だが第 2 項の $(-\infty,\infty)$ 上での積分は奇関数の積分なので 0 になってしまうからだ．結果的に実部をとることを意識しなくても正しい答えが出てしまった．
- 平均点は 5.95 点だった．