

幾何概論 I および同演習の講義メモ (4月7日)

今日の講義では、実数と論理で扱った事項のうち、この講義でも頻繁に使われる事項を解説した。今回の授業の事後学習として一つ一つの項目を講義メモに従って考察しておくこと。なお、テキスト（ホームページに掲載中）の番号を利用するのでテキストと比較しながら学習するように。

本日の講義の要点

1. 写像の像と逆像

写像の像と逆像の定義は 1.1.2 を確認すること。これについて講義では例 1.1 と命題 1.2 を解説した。また演習では 命題 1.3 の前半に取り組んでもらうとともに、その後半をレポート課題にした。

例 1.1 $x \in f^{-1}([a, b])$ は $f(x) = 0 \in [a, b]$ と書き直せるので真偽は x によらない。常に真（全体集合 $\mathbb{R}$ ）か、常に偽（空集合 $\emptyset$ ）である。

命題 1.2 要素 1 つのみの集合の逆像を考えている。 f が全射ということは $\forall y \in Y$ について $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在することだが、これは $x \in f^{-1}(\{y\})$ ということに他ならない。ゆえに $\forall y$ について $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ である。逆に $\forall y$ について $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ならば $x \in f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ をとることにより $f(x) = y$ となる。ゆえに全射である。

$f^{-1}(\{y\})$ が二つ以上の要素を持つときは、その要素を x_1, x_2 と置くと $f(x_1) = y = f(x_2)$ を得る。すなわち単射にならない。単射であれば $f^{-1}(\{y\})$ の要素の個数は 1 個または 0 個である。逆に f が単射でなかったとすると、異なる 2 点 $x_1 \neq x_2$ で $f(x_1) = f(x_2)$ となるものが存在する。 $y = f(x_1)$ とおけば $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ であり $f^{-1}(\{y\})$ は 2 個以上の要素を含む。

全単射については上記二つの結果から導かれる。

命題 1.3 まず前半の結論は $f^{-1}(f(A)) \supset A$ である。テキストの包含関係の向きが逆になっているので訂正しておくこと。包含関係の証明なので $x \in A$ をとる。像の定義から $f(x) \in f(A)$ だが、逆像の定義により $x \in f^{-1}(f(A))$ となる。

後半はレポート課題にした。 $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ の証明だが、両方の向きの包含関係を示すようにしてほしい。

2. 否定命題の作り方

全称記号、存在記号、「ならば」を使った命題の意味とその否定命題の作り方を解説した。数学の論理の理解に欠かせない内容なのでおぼろげに分かるのではなく当たり前のことと感じられるまで考えてほしい。講義では連続性の定義の主張の否定命題を記述した。

- $\neg(\forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)))$

まずは連続の定義に否定記号 $\neg$ をつけた。これを $\neg(\forall \varepsilon > 0; (Q))$ とみると

- $\exists \varepsilon > 0; \neg(\exists \delta > 0; (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$

となる。 $\neg$ 以下の部分を $\exists \delta > 0; (R)$ とみればこれは

- $\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; \neg(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$

ここで「ならば」を使った命題の否定を考える。 $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ は $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x について、 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つという意味なので、この否定は $|x - a| < \delta$ を満たす x の中に $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ を満たすものがあるということになる。すなわち $|x - a| < \delta$ と $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ の両方を満たす x が存在するということだ。すなわち

- $\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (|x - a| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)))$

この最後の主張が $f(x)$ が $x = a$ で連続でないことの定義になる。この理解は距離空間の議論でもう一

度出会うことになる。じっくり考えておくこと。

演習では問題 1.6(2) をやってもらった。この主張は $f(x)$ が $x = a$ の周りで正であることを表している。レポート課題は問題 1.6(3) を出題した。命題の意味も含めて考えてほしい。

3. 集合の濃度

定義 1.1 を述べた後、命題 1.7(2) と $\aleph_{\mathbb{N}} = \aleph_{\mathbb{Q}} < \aleph_{\mathbb{R}}$ という 2 つの結果のみ述べた。証明は実数と論理で扱ったはずなので確認しておいてほしい。ここでは命題 1.9 の証明および講義で触れなかった命題 1.8 の証明をまとめておく。

命題 1.8 の証明 X が可算無限集合なので $\mathbb{N}$ から X への全単射が存在する。それを $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ とおき、 $f(n) = x_n$ とおけば $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と表される。同様に $Y = \{y_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ と表す。 $X \times Y = \{(x_n, y_m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ と表されるが、これらのすべての要素は

- $n + m$ が小さいものから順に並べる。
- $n + m$ が等しいもの同士は n が小さいものから順に並べる。

という 2 つの方針で 1 列に並べることができる。よって $X \times Y$ は可算無限集合である。

命題 1.9 の証明 写像 $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ をとり $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ と定める。ここで $f(a) = A \in \mathcal{P}(X)$ となる $a \in X$ が存在したとする。

- $a \in A$ とすれば $a \notin f(a) = A$ であり矛盾である。
- $a \notin A$ とすれば $a \in f(a) = A$ でありやはり矛盾である。

いずれにしても矛盾が生じるので $f(a) = A$ となる $a \in X$ は存在しない。よって $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は全射ではない。結局 X から $\mathcal{P}(X)$ の全射は存在せず、 $\aleph_X < \aleph_{\mathcal{P}(X)}$ となる。

命題 1.9 により、無限の濃度も無数の種類があることが分かる。なおこの項目は演習では扱わなかった。

4. 無限個の集合の合併、共通部分

無限個の集合の和集合（講義では合併といったが和という場合も多い）と共通部分の定義は全称記号と存在記号を使って記述できる。命題 1.10 の証明は基本的な否定命題の作り方を利用すれば簡単だ。これを含めて講義と演習で解説した証明を記述しておく。

命題 1.10 の第 1 式 $x \in (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})^c$ とは $x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$ の否定が成り立つことに他ならない。すなわち $\forall \lambda; x \in A_{\lambda}$ の否定が成り立つということなので $\exists \lambda; x \notin A_{\lambda}$ が成り立つ。これは $\exists \lambda; x \in A_{\lambda}^c$ と書き直せるので $x \in \bigcup_{\lambda} (A_{\lambda})^c$ となる。

命題 1.11 の第 1 式 $x \in B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ とする。 $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$ が成り立つ。 $x \in B$ のときは任意の λ について $x \in B \subset B \cup A_{\lambda}$ なので $x \in \bigcap_{\lambda} (B \cup A_{\lambda})$ である。 $x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$ のときは、任意の λ について $x \in A_{\lambda} \subset B \cup A_{\lambda}$ となるので $x \in \bigcap_{\lambda} (B \cup A_{\lambda})$ である。以上から $B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}) \subset \bigcap_{\lambda} (B \cup A_{\lambda})$ を得る。

逆に $x \in \bigcap_{\lambda} (B \cup A_{\lambda})$ とする。任意の λ について $x \in B \cup A_{\lambda}$ が成り立つ。ここで $x \in B$ の場合はもちろん $x \in B \subset B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ が成り立つ。 $x \notin B$ の場合は $x \in B \cup A_{\lambda}$ より $x \in A_{\lambda}$ となるので $x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda} \subset B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ が成り立つ。いずれにしても $x \in B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ であり $\bigcap_{\lambda} (B \cup A_{\lambda}) \subset B \cup (\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ が示された。

命題 1.12 の左下の等式 まず第 1 行目の B_{μ} は B_{σ} とすべきだ。訂正しておいてほしい。この等式の証明は逆像の定義と共通部分の定義を組み合わせるだけなので易しい。

$x \in f^{-1}(\bigcap_{\sigma} B_{\sigma})$ とする。逆像の定義からこれは $f(x) \in \bigcap_{\sigma} B_{\sigma}$ と同値である。これを共通部分の定義を使って書き直せば $\forall \sigma; f(x) \in B_{\sigma}$ となる。さらに逆像の定義によって $\forall \sigma; x \in f^{-1}(B_{\sigma})$ と書き直せる。これは共通部分の定義により $x \in \bigcap_{\sigma} f^{-1}(B_{\sigma})$ に他ならない。

解説もせずレポート課題にもしなかった問題も沢山あるが、時間の許す範囲で証明に取り組んでみてほ

しい.

あらためて今日の講義で出題したレポート課題をまとめておく. 提出締め切りは4月10日(金)12時まで, 提出は私の部屋(理学部3号館D416)の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい. 締め切りに間に合わなかった場合は部屋の入り口の郵便受けに入れておくこと.

本日のレポート課題

課題1 命題 1.3 の後半 $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ を示せ.

課題2 問題 1.6(3)

課題3 命題 1.12 の左上の式 $f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}) \subset_{\lambda} f(A_{\lambda})$ を示せ.

課題4 命題 1.11 の第2式 $B \cap (\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}) = \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda})$ を示せ.

次回は距離空間の節に入る. 2.1 節を眺めておいてほしい.

幾何概論Ⅰのレポート課題（4月7日）の解答例とコメント

前回のレポート課題

3番目の課題は講義で命題 1.12 の左下の式を解説したときに、左上の式はレポート課題と述べたと思う。私の思い込みかもしれないが、講義メモにはレポート課題として明記している。これを解かずに提出した人が多かったが講義メモを読まずにレポート課題に取り組んだということだろうか。

もしそうだとしたら、この講義の進め方をまったく理解していない。レポート課題に取り組むのは講義メモを参考に授業内容を復習した後だ。講義内容を理解しないままレポート課題に取り組んだら課題を難しいと感じるのは当たり前だ。効果の少ない非効率な学習法だと思うのだが如何だろうか。

レポート課題に取り組むのは授業で何をやったのか、どういう点が強調されたのかじっくり考えた後だ。このことを意識して学習を進めてほしい。

課題 1 命題 1.3 の後半 $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ を示せ。

【解答例】 $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(X)$ について

$y \in f(f^{-1}(B))$ をとる^{*1}。像の定義より $y = f(x)$, $x \in f^{-1}(B)$ を満たす x が存在する。逆像の定義により $y = f(x) \in B$ である。 $f(x) \in f(X)$ と合わせて $y \in B \cap f(X)$ を得る。

逆向きの包含関係については $y \in B \cap f(X)$ をとる。 $y \in f(X)$ より $y = f(x)$ を満たす要素 x が存在する。 $f(x) = y \in B$ より $x \in f^{-1}(B)$ である。 よって $y \in f(f^{-1}(B))$ が成り立つ。

【コメント】

- $y \in f(f^{-1}(B))$ において議論を始めること。 像の要素だから $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ と議論を始めた場合、 $x \in f^{-1}(B)$ である保障はない。 像の定義は $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(B)$ が存在することであり、 $y = f(x)$ を満たす x が $x \in f^{-1}(B)$ を満たすということではない。
- 逆写像 f^{-1} が存在するわけではないので、 $f^{-1}(y)$ は定義されていない。 逆像は逆写像による像ではない。
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ によって $f(X) \subset Y$ が定まる。 いっぽう $B \subset Y$ はそれとはまったく無関係に定まる。 $B \subset f(Y)$ というような記述があるが、こんな式が議論の中で出てくることはあり得ない。 おかしいと感じてほしい。
- 数学の論理は $\implies$ で演繹的に進めるのが基本だ。 しかし、 $\iff$ を無感覚に使う人が多すぎる。 $\exists x \in f^{-1}(B); y = f(x) \iff f(x) \in B$ とするのはおかしい。 左は y についての命題であるのに右には y が現れていない。 命題として同じわけがない。 もちろん $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$ なので $f(x) \in B$ と続けるのは正しい。 もう少し論理の流れには神経質になってほしい。
- 「かつ」は論理記号で $\wedge$, 「または」は論理記号で $\vee$ である。 講義では使わなかったがレポートの解答では使っている（ように思える）ものがあつた。 しかし集合演算の $\cap \cup$ とは違うので記号をはっきり使い分けること。

課題 2 問題 1.6(3)

【解答例】 すべての A の要素 x について $r > 0$ をうまくとることにより $|y - x| < r$ を満たすすべての y について $y \in A$ となるようにできる。

この否定命題は

$$\exists x \in A; (\forall r > 0; (\exists y; (|y - x| < r \text{ かつ } y \notin A)))$$

^{*1} なにげなく要素をとることは多いが、集合が空集合ならとること自体ができない。ただし、包含関係を示す場合は空集合はあらゆる集合の部分集合なのでもちろん成り立っている。特に「空集合の場合」を記述しなくてもよい。

【コメント】

- 日本語で表現することはできるようだ。第1関門突破というところだろうか。
- 否定命題については「ならば」の部分で失敗している人が多い。講義でも言ったように $P(x) \implies Q(x)$ とは「 $P(x)$ が真となるすべての x について、 $Q(x)$ が真となる」という意味だ。論理記号を使って書き直せば $\forall x, P(x); Q(x)$ ということになる。これを否定するには「 $P(x)$ が真だからと言って、 $Q(x)$ が真とは限らない」と言えばよい。すなわち $P(x)$ が真となる x で $Q(x)$ が偽となるものが存在するということだ。論理記号を使って書けば $\exists x, P(x); \neg Q(x)$ となる。 x について $P(x)$ と $\neg Q(x)$ が成り立つので $\exists x, P(x)$ かつ $Q(x)$ となる。重要なことなのでもう一度考えてほしい。

この問題では $|y - x| < r \implies y \in A$ の否定なので $\exists y; (|y - x| < r \text{ かつ } y \notin A)$ となる。単に $|y - x| < r$ かつ $y \notin A$ として、 $\exists y; (|y - x| < r \implies y \notin A)$ としてするのは誤りだ。

課題3 命題 1.12 の左上の式 $f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}) \subset \bigcap_{\lambda} f(A_{\lambda})$ を示せ。

【解答例】 $y \in f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ をとる。 $x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$ で $y = f(x)$ となるものをとる。任意の λ について $x \in A_{\lambda}$ なので $y = f(x) \in f(A_{\lambda})$ である。よって $y \in \bigcap_{\lambda} f(A_{\lambda})$ が成り立つ。

【別解答例】 任意の $\mu \in \Lambda$ について $\bigcap_{\lambda} A_{\lambda} \subset A_{\mu}$ である。ゆえに $f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}) \subset f(A_{\mu})$ である。 μ は任意なので $f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}) \subset \bigcap_{\mu} f(A_{\mu})$ が成り立つ。

【コメント】

- この問題は演習の時間には触れなかったので解答をした人が少なかった。講義メモを読んでからレポート課題に取り組んだ人はきちんと解答していたようだ。この問題を答えた人のほうが全体のできが良いように感じるのは私の錯覚だろうか。
- $y \in f(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda})$ を論理記号で記述すると $\exists x; (\forall \lambda; (x \in A_{\lambda})) \text{ かつ } y = f(x)$ となる。一方 $y \in \bigcap_{\lambda} f(A_{\lambda})$ を論理記号で書くと $\forall \lambda; (\exists x; (x \in A_{\lambda}) \text{ かつ } y = f(x))$ となる。要するに $\forall \lambda$ と $\exists x$ が入れ替わっている。前者は x を λ によらずにとらなくては行けないが、後者は λ ごとに変えてよい。結局前者のほうが後者より強い主張であり、前者が成り立てば後者も成り立つ。

課題4 命題 1.11 の第2式 $B \cap (\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}) = \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda})$ を示せ。

【解答例】 $x \in B \cap (\bigcup_{\lambda} A_{\lambda})$ をとる。 $x \in (\bigcup_{\lambda} A_{\lambda})$ より $x \in A_{\lambda}$ となる λ が存在する。 $x \in B$ でもあるので $x \in B \cap A_{\lambda}$ が成り立つ。よって $x \in \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda})$ である。

逆に $x \in \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda})$ をとる。 $x \in B \cap A_{\lambda}$ となる λ が存在する。 $x \in A_{\lambda}$ より $x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ が成り立つ。 $x \in B$ でもあるので $x \in B \cap (\bigcup_{\lambda} A_{\lambda})$ が成り立つ。

【コメント】

- この証明は

$$\begin{aligned} x \in B \cap \left(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \right) &\iff x \in B \text{ かつ } x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \iff x \in B \text{ かつ } (\exists \lambda; x \in A_{\lambda}) \\ &\iff \exists \lambda; (x \in B \text{ かつ } x \in A_{\lambda}) \iff x \in \bigcup_{\lambda} (B \cap A_{\lambda}) \end{aligned}$$

と済ませる場合も多いだろう。ポイントは $x \in B$ を $\exists \lambda$ の条件の中に繰り込むところだ。ただこれが明らかなことかという疑問だ。証明すべき式が $B \cap$ を中に入れることで、上の議論で当たり前に使ったことと本質的には同等だ。やはり解答例のようにきちんと考えたほうが良いのではないか。

幾何概論 I および同演習の講義メモ (4月14日)

今回の授業から距離空間の解説に入る。

本日の講義の要点

1. 距離の公理, 距離空間

従来から親しんできた距離について, 距離の公理が成り立つことは明らかだ. ここではこの距離の公理から議論を始める. 距離の具体的なイメージは平面の距離で構わない. ただし, 議論はイメージではなく距離の公理に基づいて行わなくてはならない. それによって様々な集合に距離を定めることができる.

2. 距離空間の例

例 2.1 について三角不等式以外の性質は簡単にチェックできる. 三角不等式 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ については $x = z$ のときは右辺が 0 なので明らかだ. $x \neq z$ のときは右辺は 1 だが, $x \neq y, z \neq y$ の少なくとも一方は成り立つので左辺は 1 以上である. ゆえに三角不等式は成り立っている.

例 2.2 と例 2.4 については線形空間のノルムの概念を使うと統一的に証明できる. (実または複素) 線形空間 V において $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ がノルムであるとは

- $\|\vec{x}\| \geq 0, \quad \|\vec{0}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
- $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (三角不等式)

が成り立つことを言う. ノルムが定められている線形空間をノルム空間という. ノルム空間において $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ が距離になることは次のようにすればよい.

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(-1)(\vec{y} - \vec{x})\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = d(\vec{y}, \vec{x})$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 0$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| \geq \|\vec{x} - \vec{z}\| = d(\vec{x}, \vec{z})$

例 2.2 が距離の例であることを確認するには, $\mathbb{R}^n$ において

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_j| \mid 1 \leq j \leq n\}$$

のそれぞれがノルムであることを言えばよい. このうち $\|\mathbf{x}\|_2$ については $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関するノルムなのですでに学習済みである. 他の 2 つについて三角不等式以外は簡単なので省略する. 三角不等式についても具体的に書き下してみればすぐに分かるはずだ. 演習の時間に考えてもらい, 解説も付けたがここでも記述しておこう.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j + y_j|\} \leq \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j| + |y_j|) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\} + \max_{1 \leq j \leq n} \{|y_j|\} = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

例 2.4 も同様に $\|\cdot\|_2$ は内積由来のノルムであり, ノルムであることの証明は線形数学で紹介した. 他のノルムについても三角不等式のみが問題になる. この証明についてはレポート問題にした.

3. 命題 2.3 と命題 2.5 (d_1, d_2, d_∞ に関する不等式)

これらの不等式はノルムの段階で示したほうが簡単である．まず $\mathbb{R}^n$ のノルムについて $\max\{|x_j| = |x_{j_0}|\}$ となる番号を j_0 において

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_{j_0}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2} = \|\mathbf{x}\|_2, \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_{j_0}| = n|x_{j_0}| = n\|\mathbf{x}\|_\infty$$

$d_2 \leq \sqrt{n}d_1$ を示すには，内積に関するコーシー・シュワルツの不等式を利用する． $\mathbf{x}$ について $\mathbf{y} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $\mathbf{z} = (1, 1, \dots, 1)$ において $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle| \leq \|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{z}\|_2$ に代入すれば

$$\left| \sum_{j=1}^n |x_j| \right| \leq \|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{z}\|_2$$

左辺は $\|\mathbf{x}\|_1$ に他ならず， $\|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{n}$ を使えば $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$ を得る．

例 4 の連続関数の集合についてもノルムについての不等式が得られる．このことについてはレポート課題にした．

4. 部分距離空間，単射によって誘導される距離

距離空間 (X, d) と単射 $f: Y \rightarrow X$ が与えられたとき

$$d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$$

は X の距離になる．これを f により誘導された距離という．これが距離であることは，距離の公理を一つずつ確かめればよい．演習の時間に取り組んでもらったが簡単な問題だ．

- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) = d(f(y_2), f(y_1)) = d_f(y_2, y_1)$
- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \geq 0$
- $d_f(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) = 0 \implies f(y_1) = f(y_2)$ だが f が単射なので $y_1 = y_2$
- $d_f(y_1, y_2) + d_f(y_2, y_3) = d(f(y_1), f(y_2)) + d(f(y_2), f(y_3)) \geq d(f(y_1), f(y_3)) = d_f(y_1, y_3)$

0 になるときが $y_1 = y_2$ の時に限ることの証明に単射性を使っている．それ以外は単射でなくても成り立つ．

部分距離空間は包含写像 $i: A \rightarrow X$ に関し X から誘導された距離のことである．包含写像は単射である．講義ではユークリッド空間内の単位球面を部分空間とみた時の距離についてコメントした．2 点の距離は 2 点を結ぶ線分の長さなので，北極と南極の距離は 2 になる．これは球面に沿った道の長さの最小値としての距離とは異なる．

5. 直積空間

2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) について，その直積集合に

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

として距離を定めたものを直積距離空間という．これが距離になることは三角不等式以外は簡単である．三角不等式は次のように示す．

まず式が長くなることを避けるため $d_X(x_1, x_2) = a$, $d_X(x_2, x_3) = b$, $d_Y(y_1, y_2) = c$, $d_Y(y_2, y_3) = d$ とおく．2 項列ベクトル ${}^t(a, c)$ と ${}^t(b, d)$ についての三角不等式は

$$\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} = d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{X \times Y}((x_2, y_2), (x_3, y_3))$$

である． d_X に関する三角不等式により $a+b \geq d_X(x_1, x_3)$, d_Y に関する三角不等式により $c+d \geq d_Y(y_1, y_3)$ なので

$$\text{左辺} \geq \sqrt{d_X(x_1, x_3)^2 + d_Y(y_1, y_3)^2} = d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_3, y_3))$$

であり $d_{X \times Y}$ に関する三角不等式が得られる．

6. 点列の収束と極限の一意性

点列の収束の定義はテキストを確認すること．距離空間の一般論は抽象的で分かりづらいかもしれないが， $\varepsilon\delta$ で記述してみると実数と論理で学習した極限の定義と何ら変わるところはない．イメージで考えるのではなく，論理で考える手法の強力さを感じてほしい．この定義に基づき極限の一意性（命題 2.4）が示せる．ここに証明を記述しておく．

点列 $\{a_n\}$ が 2 つの異なる点 b_1, b_2 に収束したとする． $b_1 \neq b_2$ より $\varepsilon = d(b_1, b_2)/2 > 0$ とおく． $a_n \rightarrow b_1$ の極限の定義から N_1 を

$$n \geq N_1 \implies d(a_n, b_1) < \varepsilon$$

となるようにとる．同様に $a_n \rightarrow b_2$ の極限の定義から

$$n \geq N_2 \implies d(a_n, b_2) < \varepsilon$$

となるようにとる．すると $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ について

$$2\varepsilon = d(b_1, b_2) \leq d(b_1, a_n) + d(a_n, b_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となるので矛盾が生じる．よって 2 つの異なる点に収束することはあり得ない．

7. 距離の同値性

定義 2.4 の式は $Kd_1 \leq d_2 \leq Hd_1$ に訂正しておいてほしい．ここで導入された距離の同値が実際同値関係であることは演習の時間に解説した．

- 反射律については $K = H = 1$ として $Kd \leq d \leq Hd$ が成り立つので成立する．
- 対称律については仮定 $d_1 \sim d_2$ より正数 K, H を $Kd_2 \leq d_1 \leq Hd_2$ となるようにとる． $(1/H)d_1 \leq d_2 \leq (1/K)d_1$ となるので $d_2 \sim d_1$ となる．
- 推移律については仮定 $d_1 \sim d_2, d_2 \sim d_3$ より正数 K, H, K', H' を $Kd_2 \leq d_1 \leq Hd_2, K'd_3 \leq d_2 \leq H'd_3$ が成り立つようにとる． $d_1 \leq Hd_2 \leq HH'd_3$ と $d_1 \geq Kd_2 \geq KK'd_3$ より $KK'd_3 \leq d_1 \leq HH'd_3$ となるので $d_1 \sim d_3$ である．

同値な距離に関して収束の概念が同じになることまで話をしたかったが時間が足りず同値の定義で終わってしまった．これについては次回扱うことにする．次回は点列の収束性の続きと写像の連続性，一様連続性について解説する．実数と論理で学習した連続性や一様連続性について復習しておくように．

さて，今日の講義で出題したレポート課題をまとめておく．提出締め切りは 4 月 16 日 (木)16 時半まで，提出は私の部屋 (理学部 3 号館 D416) の前に提出箱を置いておくのでその中に入れてほしい．レポート提出箱は 4 月 20 日の朝まで置いておくので，締め切りに間に合わなかった人がその中に入れておいて構わない．

本日のレポート課題

課題 1 $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合 V について

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

のそれぞれについて三角不等式が成り立つことを示せ．すなわち次が成り立つことを示せ．

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

($\|f\|_2$ に関する三角不等式については内積由来のノルムなので線形数学で紹介済み)

課題 2 上のノルムについて $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ を示せ．

【ヒント】 $|f(x)|$ の最大値を $|f(c)| = M$ とおいて考えると良い．なお， $d_1 \leq d_2$ についてはコーシー・シュワルツの不等式 $|(g, h)| \leq \|g\|_2 \|h\|_2$ を利用する． $g = |f|$, $h = 1$ として考えてみよ．

課題 3 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義された次の関数が $\mathbb{R}$ の距離になるか否かを考察せよ．

$$(1) d(x, y) = |x^3 - y^3| \quad (2) d(x, y) = |x^4 - y^4|$$

次回は距離空間の節に入る．2.1 節を眺めておいてほしい．

幾何概論Ⅰのレポート課題（4月14日）の解答例とコメント

レポート課題

課題1 $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合 V について

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

のそれぞれについて三角不等式が成り立つことを示せ. すなわち次が成り立つことを示せ.

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

【解答例】

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(x) + g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| + |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$$\|f + g\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) + g(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

課題2 上のノルムについて $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ を示せ.

【解答例】 $g = |f|$ と $h = 1$ についてコーシー・シュワルツの不等式 $|(g, h)| \leq \|g\|_2 \|h\|_2$ を適用する.

$$(g, h) = \int_0^1 g(x)h(x) dx = \int_0^1 |f(x)| dx = \|f\|_1$$
$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx} = \|f\|_2 \quad \|h\|_2 = \sqrt{\int_0^1 1 dx} = 1$$

より $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ を得る.

$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = M$ とおく. $|f(x)| \leq M$ なので

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 M^2 dx} = M = \|f\|_\infty$$

【コメント】 コーシー・シュワルツの不等式をどう使うのかあいまいな解答が目立つ. ここに掲げた解答例と自分の解答を比較してほしい.

課題3 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義された次の関数が $\mathbb{R}$ の距離になるか否かを考察せよ.

$$(1) d(x, y) = |x^3 - y^3| \quad (2) d(x, y) = |x^4 - y^4|$$

【解答例】 (1)(2) とともに $d(x, y) = d(y, x)$ と $d(x, y) \geq 0$ は自明だ. 三角不等式も

$$|x^k - y^k| + |y^k - z^k| \geq |x^k - z^k|$$

より成り立つ. 問題は $d(x, y) = 0$ が $x = y$ の場合に限るかということである.

(1) では $d(x, y) = |x^3 - y^3| = 0$ から $x = y$ が出るので距離である. しかし (2) では $d(x, y) = |x^4 - y^4| = 0$ からは $x = \pm y$ しか出てこない. 実際 $d(1, -1) = 0$ となるので距離ではない.

【コメント】 $\mathbb{R}$ の距離だから x, y は実数である. 複素数で考えている人がいたが注意せよ.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (4月21日)

本日の講義の要点

1. 同値な距離が同じ点列の収束概念を定めること (定理 2.9)

テキストは重複があるので講義では命題 2.12 から証明した。証明は単なるはさみうちなので易しいがテキストに記述していないので書いておく。

【命題 2.12 の証明】 $\{a_n\}$ を d_2 収束する点列とし、その極限を b とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき $d_2(a_n, b) \rightarrow 0$ である。一方仮定から

$$0 \leq d_1(a_n, b) \leq \frac{1}{K} d_2(a_n, b) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので $d_1(a_n, b) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は b に d_1 収束する。

【定理 2.9 の証明】 $Kd_1 \leq d_2$ より d_2 収束する点列は同じ極限に d_1 収束する。また $(1/H)d_2 \leq d_1$ より d_1 収束する点列は同じ極限に d_2 収束する。ゆえに収束概念は同じである。

命題 2.3 より例 2.2 の 3 つの距離はどれも互いに同値なので、収束概念は共通である。 $\mathbb{R}^n$ での収束概念は以前の講義で学習したもののみ考えていけばよい。

2. 関数の集合における様々な収束概念 (例 2.12, 命題 2.13)

関数の集合における距離 (例 2.4) はどれも互いに同値ではない。これは例 2.12 によって具体的な関数列を考察することによって議論した。この例での距離の計算は簡単な積分計算なので省略する。また、例 2.14 の $\{f_n\}$ を使って同様の考察をしたがこれも省略する。さて、例 2.4 の距離に関する関数列の収束と、各点収束と一様収束の関係をまとめておく。関数列 $\{f_n(x)\}$ について

- 関数列 $\{f_n\}$ が関数 $g(x)$ に各点収束するとは各 x について数列 $\{f_n(x)\}$ が $g(x)$ に収束することを使う。数列の極限に帰着して考えるため分かりやすいが、何かの距離に関する収束ではないため扱いづらい。
- 一様収束は d_∞ 収束と同値である (命題 2.13) ここに証明を記述しておく。
関数列 $\{f_n\}$ が g に一様収束するとは $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$n \geq N \implies |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数 N を x によらずに取れることをいう (各 x に対して N が取れることは各点収束に他ならない)。さて結論の不等式はすべての x について成り立っているのだから

$$d_\infty(f_n, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ。ゆえに $\{f_n\}$ は g に d_∞ 収束する。逆は同じように議論をすればよいので省略する。ノルム $\|f\|_\infty$ を一様ノルムという。一様ノルムによる収束が一様収束である。

- d_∞ 収束する関数列は一様収束するので各点収束している。しかし d_1 収束, d_2 収束では各点収束するとは言えない。これについては例 2.14 を見ればよい。しかし殆どいたところでは各点収束することが分かっている (「殆どいたところ」に数学的定義を与えるのはこの講義では扱わない)。点ごとに極限を求めることは関数列の極限を知るための手掛かりになる。

3. 直積空間での点列の収束

テキストに記述していないので命題として述べておく。

命題 直積距離空間 $X \times Y$ の点列 $\{(a_n, b_n)\}$ が (α, β) に収束することと、それぞれの成分の作る点列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ がともに収束することは同値である。

証明 X の場合を書くが Y の場合も同様である．まず次の不等式は簡単である．

$$0 \leq d_X(a_n, \alpha) \leq d_{X \times Y}((a_n, b_n), (\alpha, \beta)) = \sqrt{d_X(a_n, \alpha)^2 + d_Y(b_n, \beta)^2} \leq d_X(a_n, \alpha) + d_Y(b_n, \beta)$$

$\{(a_n, b_n)\}$ が (α, β) に収束すれば，左の不等式から $\{a_n\}$ は α に収束する． $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が α と β に収束すれば右の不等式から $\{(a_n, b_n)\}$ は (α, β) に収束する．

4. 集積点

写像の極限を定義する前にまず，距離空間 X の部分集合 $A \subset X$ について集積点を定義した．

定義 a が A の集積点であるとは $\forall \varepsilon > 0$ について $0 < d(x, a) < \varepsilon$ となる x が存在することを言う．

この定義から $0 < d(x, a) < \varepsilon$ を満たす x は無限個あることが分かる．何故ならそのような x が有限個 $(x_j, 1 \leq j \leq N)$ だったとすると $d(x_j, a)$ たちの最小値が取れる．最小値の半分を $\varepsilon > 0$ とおけば $0 < d(x, a) < \varepsilon$ を満たす x は存在しない．これは集積点の定義に矛盾する．よって a から ε の距離に A の点が無数に存在することになり，集積点という言葉も納得できる．

5. 写像の極限

テキストとは設定を変えて $A \subset X$ について写像 $f: A \rightarrow Y$ の極限を考察した．その際 $x \rightarrow a$ での $f(x)$ の極限を定めるには a は A の集積点でなくてはならない．なおこれさえ押さえておけば，極限の定義は関数の場合と変わらない．命題の証明は論理だけで行うのでなじみのある実関数の場合もこの講義での距離空間の間の写像の場合も全く変わらない．

6. 写像の連続性

定義はテキストの 9 ページに記述してある．良く極限を使って $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ を a での連続性の定義にするが，極限を考える際の a は集積点でないといけなないので若干注意が必要である． a が孤立点 (A の点であるが A の集積点ではない点) の場合は極限は定義できないが，連続の定義は満たしている．写像は孤立点では連続である．例えば例 2.1 ではすべての点が孤立点なのでどんな写像も連続になる．

7. 合成写像の連続性 (定理 2.16)

写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ について $y = f(x)$ が $x = a$ で $z = g(y)$ が $y = b = f(a)$ で連続なら合成写像 $g \circ f$ は $x = a$ で連続である．この証明は基本的なのでじっくり考えておくと良い．

証明 任意に正数 $\varepsilon > 0$ をとる． $z = g(y)$ の連続性から $\delta_1 > 0$ を

$$d_Y(y, b) < \delta_1 \implies d_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる．この δ_1 に対して $y = f(x)$ の連続性から $\delta > 0$ を

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$$

が成り立つようにとる．このとき $y = f(x)$, $b = f(a)$ とおけば $d_Y(y, b) < \delta_1$ なので

$$d_Z(g \circ f(x), g \circ f(a)) = d_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $g \circ f$ の a における連続性を述べている．

ただし単なる極限については上のような事実は (一般には) 成り立たない．講義の時間の最後にこのことを述べようとして失敗した．ここで補足しておく．例の考察なので通常の場合として考えて差し支えない．

考察 単に $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$ のときは $y = f(x)$, $b = f(a)$ が $x = a$ で連続であっても $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$ とは言えない．何故なら $x \rightarrow a$ の極限なので $x \neq a$ は前提だが， $f(x) \neq b$ とは限らない． $f(x) = b$

となる x については $g \circ f(x) = g(b)$ だが極限の仮定だけでは $g(b) \neq c$ の場合もある． $f(x) = b$ となる x が a の周りに無数にあれば， $g \circ f(x) = g(b) \neq c$ となる x が無数にあることになる．ゆえに極限は c にならない．

8. 連続でないことの定義と命題 2.16

演習の時間に解説した内容である．講義のみの受講者には申し訳ない．まず写像が $x = a$ で連続でないことの定義を記述した．この作り方は第 1 回の授業で扱った．

$$\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon)))$$

さて， δ は任意なので $\delta = 1/n$ とおき，それに対して上の主張から定まる x を x_n とおく． $d_X(x_n, a) < 1/n$ および $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ が成り立つ．これから x を a に近づけても $f(x)$ は $f(a)$ に近づいていくとは言えないことが分かるだろう．

次に命題 2.16 であるが連続なら $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束することは合成写像の連続性の証明とほぼ同じなので自分で証明できるようになってほしい．念のため書き下しておく．

任意の $\varepsilon > 0$ について $f(x)$ の $x = a$ での連続性から $\delta > 0$ を

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる．この $\delta > 0$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ の定義から N を

$$n \geq N \implies d_X(x_n, a) < \delta$$

が成り立つようにとる．すると $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ であり $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つ．逆の証明はレポート課題にした．

本日のレポート課題

課題 1 例 2.14 の関数列 $\{g_n\}$ が d_1 については収束するが d_2 については発散することを示せ．

課題 2 区間 $[0, 1]$ 上の関数列 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ の例 2.4 のそれぞれの距離に関する極限を調べよ．

課題 3 写像 $f: X \rightarrow Y$ について，任意の a に収束する X の点列 $\{x_n\}$ に対して $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束すれば f は $x = a$ で連続であることを示せ．

課題 2 は余分だったかもしれない．課題 3 については背理法を使うこと．連続でないことを仮定するので講義での議論を思い出せばよい．

来週の講義について

少し時間をかけすぎた．次回は一樣連続の概念を紹介した後位相の話に入る．開集合，閉集合という言葉聞いたことがあるだろうか．あるならそれを復習しておいてほしい．距離空間の位相はその距離空間での一般化である．なお，リプシッツ連続の話は演習の時間に行おう．講義のみの履修者には申し訳ないが，分かりやすい課題なので講義メモを参考に自習しておいてほしい．

幾何概論Ⅰのレポート課題（4月21日）の解答例とコメント

レポート課題

課題1 例2.12の $\{g_n\}$ の収束性を例2.4の各距離に関して調べること

$$d_1(g_n, 0) = \|g_n\|_1 = \int_0^1 |g_n(x)| dx = \int_0^1 \sqrt{n} x^n dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{g_n\}$ は d_1 に関して0に収束する。ここで $\{g_n\}$ が d_2 に関し $h(x)$ に収束したとすると、 d_1 についても $h(x)$ に収束するので極限の一意性から $h(x) = 0$ でなくてはならない。ゆえに0との距離が0に収束するか否かを考えればよい。

$$d_2(g_n, 0) = \|g_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (g_n(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 n x^{2n} dx} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

これは0に収束しないので $\{g_n\}$ は d_2 に関し発散する。ゆえに d_∞ に関しても発散する。

【コメント】

- 何故ノルムの極限をとるのかコメントしていない答案が多い。自分の解答と上の解答例を比較し、何が欠けているか考察すること。この問題では極限が存在すれば定数関数0なので、 g_n のノルムを計算すれば十分である。しかし、「極限が存在すれば定数関数0」ということが分からなければ、 g_n のノルムを計算しても $\{g_n\}$ の収束性は分からない。
- 解答例では $\|g_n\|_\infty$ は計算せず、 d_2 について発散するから d_∞ についても発散するという議論を行った。命題2.12を利用したわけである。もちろん $\|g_n\|_\infty$ を実際に計算しても良い。 g_n の最大値は $x=1$ でとるので $\|g_n\|_\infty = \sqrt{n}$ であり、0に収束しない。

課題2 区間 $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x) = nx(1-x)^n\}$ の極限を調べること

$$d_1(f_n, 0) = \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{f_n\}$ は d_1 に関し定数関数0に収束する。ゆえに d_2, d_∞ に関し収束すればその極限はやはり定数関数0なので0との距離、すなわち f_n のノルムを計算する。

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 n^2 x^2 (1-x)^{2n} dx} = \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\|f_n\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} \{nx(1-x)^n\} = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} = \frac{n}{1+n} \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\{f_n\}$ は d_2 に関して0に収束するが d_∞ については定数関数0に収束しない。よって発散する。

【コメント】

- 前の問題より積分計算はだいぶ大変になるが、 $1-x=u$ とおいて置換積分すればいいのでこの程度の問題は正しく答えてほしい。
- $\|f_n\|_\infty$ の極限を1とするものが多かった。この極限は 1^∞ 型の不定形であり、中身が1に収束するからと言って全体が1に収束するとは言えない。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e$ は基本公式なのでこれを使うことぐらい思いついてほしい。

課題3 命題 2.16 の逆の証明

$f(x)$ が $x = a$ で不連続として矛盾を導く．不連続であることの定義から

$$\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon))$$

が成り立つ．ゆえにそのような $\varepsilon > 0$ を一つ取り ε_0 とおく．

$$\forall \delta > 0; (\exists x; (d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0)$$

が成り立っている． δ は任意なので特に $\delta = 1/n$ とし，それに対して上の条件を満たす x を一つ取って x_n とおく． x_n は

$$d_X(x_n, a) < 1/n \text{ かつ } d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0$$

を満たしている．最初の条件から $\{x_n\}$ は距離空間 (X, d_X) において a に収束する．一方次の条件から $\{f(x_n)\}$ は距離空間 (Y, d_Y) において $f(a)$ に収束しない．これは仮定に矛盾する．

【コメント】

- 背理法による証明だが背理法とは対偶を示すことと同じである． $P \implies Q$ を示す時に Q が成り立たないとする P に矛盾するというのが背理法だが，これは $\neg Q \implies \neg P$ を示したことに他ならない．意識しておくといい．
- 「すべての a に収束する点列 $\{x_n\}$ について $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束する」と矛盾する事実は「 a に収束する点列 $\{x_n\}$ で $\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束しないものがある」ということだ．そのような条件を満たす点列の存在が示すべきことであり，それをどのように作るのかが課題といえる．こう考えると講義（前回の講義メモの8）でほぼ解説済みであることに気付くはずだ．考えておくこと．

幾何概論 I および同演習の講義メモ (4 月 28 日)

本日の講義の要点

このメモを作成していて、講義内容の一部を演習の時間に補ったこともあり、量が多くなってしまったことを感じた。消化不良に陥った人も少ないかと思うが、一つ一つの言葉の意味を確実に理解していけば決して難しい話ではない。GW 中にじっくり考えてほしい。

1. 一様連続

距離空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が X 上連続であるとは X の各点 x で f が連続になるということだ。すなわち $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$d_X(x', x) < \delta \implies d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在することだ。この δ は x ごとに取ればいい。一方、 X 上一様連続であること（定義 2.7）では δ は x によらずにとる必要がある。当然、一様連続のほうがきつい条件で、一様連続ならば連続になる（命題 2.8）。

ただし連続であっても一様連続とは限らない。講義では次のような例を紹介した。

$f: (0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ を $f(x) = 1/x$ で定義する。もちろんこの関数（写像）は $(0, 1]$ 上連続である。一方一様収束でないことの定義は

$$\exists \varepsilon > 0; (\forall \delta > 0; (\exists x, x'; (|x - x'| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)))$$

が成り立つことだ。例えば $\varepsilon = 1$ として $\forall \delta > 0$ に対し n を $1/\delta$ より大きく取って $x = 1/n$, $x' = 1/(n+1)$ とおけば

$$|x - x'| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(x) - f(x')| = |n - (n+1)| = 1$$

が成り立つ。すなわち一様連続ではない。

2. リプシッツ連続

リプシッツ連続については演習の時間に解説した。簡単な事項なので講義のみの受講者も学習しておいてほしい。定義は定義 2.8 にまとめられている。 $\varepsilon\delta$ を使わないので扱いやすい。リプシッツ連続なら一様連続であることは、 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon/L$ とおくことにより次のように簡単に示せる。

$$d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') < L\delta = \varepsilon$$

しかし、一様連続であっても連続とは限らない。例としては $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x}$ を考えればよい。平均値定理により

$$|f(x) - f(0)| = |f'(c)||x - 0|$$

となる c が $0 < c < x$ の範囲に存在するが $f'(c) = (2\sqrt{c})^{-1}$ なので x を 0 に近づけていけば $|f'(c)|$ はいくらでも大きくなる。ゆえに $|f(x) - f(0)| \leq L|x - 0|$ となる定数 L は存在しない。リプシッツ連続なら一様連続、一様連続なら連続であるがそれぞれの逆は成り立たない。

3. リプシッツ連続による連続写像の例

最も基本的な例は点 a からの距離関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$ であろう。三角不等式の変形バージョン $d(a, b) \geq |d(a, c) - d(b, c)|$ から

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$$

だがこれは $L = 1$ とした時のリプシッツ連続の条件に他ならない.

面白い例として V を $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合とし, 距離を例 2.4 の d_1 でとれば

$$\phi: V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

は

$$|\phi(f) - \phi(g)| = \left| \int_0^1 f(x) - g(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = d_1(f, g)$$

より $L = 1$ としてリプシッツ連続の条件を満たす. 特に関数列 $\{f_n\}$ が d_1 について g に収束すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n) = \phi(g), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

が成り立つ. これは極限と積分の交換と呼ばれ, 通常一様収束 (d_∞ 収束) の仮定で証明されるがそれよりはるかに弱い d_1 収束の仮定で成立している.

この話題に関するレポート課題として命題 2.22 の証明を課した. 直積空間の距離の定義を確認すれば $L = 1$ としてリプシッツ連続の条件を満たすことが分かるだろう.

4. 内点, 外点, 境界点, 内部, 外部, 境界

まず準備として $B_r(p)$ という記号を導入した. p を中心とする半径 r の開球体ということだが, 感覚的にもつかみやすいだろう. さてこの記号を使って, 内点と外点を定義した. A を平面内の領域の時に内点外点がどういうことを意味するのかきちんと考えておくように. さて, 内点と外点の定義が両立しえないことは分かるだろう. さらに境界点の定義は内点でも外点でもないということなので, X の点は A の内点, 境界点, 外点のいずれか一つのみの条件を満たす. 内点全体を内部 (A°), 外点全体を外部 (A^e), 境界点全体を境界 (∂A) と定めたので $X = A^\circ \cup \partial A \cup A^e$ と互いに交わらない合併集合になる.

p が A の補集合 A^c の内点であることは $\exists r > 0; B_r(p) \subset A^c$ と記述されるが, $B_r(p) \subset A^c$ は $B_r(p) \cap A = \emptyset$ という意味なので A の外点に他ならない. これから $(A^c)^\circ = A^e$ を得る. また A を A^c に置き換えれば $(A^c)^e = A^\circ$ も得られる. これから $\partial A = \partial(A^c)$ (命題 2.31) である.

A が平面内のある曲線に囲まれた領域なら, 内部, 外部, 境界は直観的にも分かりやすい. ただし $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の時は $\partial A = \mathbb{R}$ である. なぜなら $x \in \mathbb{R}$ について $B_r(x) = (x-r, x+r)$ には有理数も無理数も含まれることから $x \in \partial A$ である.

5. 開集合, 閉集合

$\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = (A^e)^c$ を A の閉包と呼ぶ. $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ である. $A = A^\circ$ を満たす集合を開集合, $A = \bar{A}$ を満たす集合を閉集合と呼ぶ (定義 2.10).

開集合は要素の条件によって命題 2.33 で特徴づけられる. これを開集合の定義とする場合もあり, ここで証明を与えておこう.

命題 2.33 の証明: $A^\circ \subset A$ は常に成り立つので開集合であることは $A \subset A^\circ$ と同値である. これは

$p \in A$ について $p \in A^\circ$ が成り立つことと同値なので, $\forall p \in A; \exists r > 0; B_r(p) \subset A$ に他ならない.

一方 A が閉集合であることは $\bar{A} = A$ が成り立つことだがこれは $\bar{A} \subset A$ と同値である. すなわち $x \in \bar{A} \implies x \in A$ が成り立つことだ. この対偶は $x \notin A \implies x \notin \bar{A}$ であるが, $x \in A^c \implies x \in (\bar{A})^c = A^e = (A^c)^\circ$ と書き直せる. これは A^c が開集合であることに他ならない (命題 2.34).

6. 開集合の基本性質 (定理 2.35)

証明を与えておこう. まず, 空集合と全体集合は開集合である. これは定義を満たすことによっても確認できるが, 定義の一部と思っても差支えない.

次に開集合の合併が開集合になることだが, $x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ は $\exists \lambda; x \in A_{\lambda}$ という意味なので λ_0 を $x \in A_{\lambda_0}$ となるようにとる. A_{λ_0} が開集合であることから $r > 0$ を $B_r(x) \subset A_{\lambda_0}$ となるようにとる.

$$x \in B_r(x) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$$

なので x は $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ の内点になる. ゆえに $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ は開集合である.

有限個の開集合の共通部分が開集合になることについては $x \in \bigcap_{k=1}^N A_k$ はすべての k について $x \in A_k$ ということなので, A_k が開集合であることから $r_k > 0$ を $B_{r_k}(x) \subset A_k$ となるようにとれる. ここで $r > 0$ を $r_1, r_2, \dots, r_N$ の最小値と置けば

$$\forall k; B_r(x) \subset B_{r_k}(x) \subset A_k \quad \text{より} \quad B_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^N A_k$$

を得る. ゆえに $\bigcap_{k=1}^N A_k$ は開集合である.

一般に無限個の開集合の共通部分は開集合になるとは限らない. 例 2.37 にその例をあげている. 1 はすべての自然数 k について $1 \in (0, 1 + 1/k)$ という条件を満たしており, 共通部分の要素になっている.

7. 距離の同値性と開集合族 (定理 2.36)

この定理の証明で少し混乱してしまった. 申し訳ない. まず定理 2.36 の内容を次のように変更しておく.

定理 X の 2 つの距離 d_1, d_2 について $Kd_1 \leq d_2$ を満たす正数 K が存在すれば $O_{d_1}(X) \subset O_{d_2}(X)$ が成り立つ. 特に d_1 と d_2 が同値ならば $O_{d_1}(X) = O_{d_2}(X)$ である.

証明 $U \in O_{d_1}(X)$ をとる. $p \in U$ について $B_r^{d_1}(p) \subset U$ となる $r > 0$ が存在する. $x \in B_{r/K}^{d_2}(p)$ とすれば $Kd_1(p, x) \leq d_2(p, x) < rK$ より $d_1(p, x) < r$ を得る. ゆえに $x \in B_r^{d_1}(p)$ であり

$$B_{r/K}^{d_2}(p) \subset B_r^{d_1}(p) \subset U$$

が成り立つ. ゆえに $U \in O_{d_2}(X)$ であり $O_{d_1}(X) \subset O_{d_2}(X)$ が成り立つ. 同値の場合は両方の包含関係が成り立つので一致する.

8. 演習 (命題 2.27 の証明)

$p \in \bar{A} \setminus A$ は A の集積点であることを考えてもらった. 仮定は $p \in \bar{A}$ と $p \notin A$, 結論すべきことは $\forall r > 0; ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset)$ だ. $p \in \bar{A}$ は $\forall r > 0; (B_r(p) \cap A \neq \emptyset)$ なので, これと $p \notin A$ を組み合わせれば集積点の条件が得られる.

後半は孤立点に関する事実だがこれはレポート課題にした.

9. 演習 (集合演算子としての内部)

$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ が成り立つことを考えてもらった. ちょうど手頃な演習問題だ. まず集合の等式を示すには双方向の包含関係として認識し, 要素をとって議論することが基本になる. これはきちんと理解してほしい.

$(A \cap B)^{\circ} \subset A^{\circ} \cap B^{\circ}$ を示す. $p \in (A \cap B)^{\circ}$ をとる. p は内点なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset (A \cap B)$ となるようにとる. $B_r(p) \subset (A \cap B) \subset A$ より $p \in A^{\circ}$, 同様に $B_r(p) \subset (A \cap B) \subset B$ より $p \in B^{\circ}$ が成り立つ. ゆえに $p \in A^{\circ} \cap B^{\circ}$ が成り立つ.

次に $(A \cap B)^{\circ} \supset A^{\circ} \cap B^{\circ}$ を示す. $p \in A^{\circ} \cap B^{\circ}$ をとる. $p \in A^{\circ}$ より $r_1 > 0$ を $B_{r_1}(p) \subset A$ となるようにとれる. 同様に $p \in B^{\circ}$ より $r_2 > 0$ を $B_{r_2}(p) \subset B$ となるようにとれる. ここで $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ とおけば $B_r(p) \subset A \cap B$ が成り立つ. よって $p \in (A \cap B)^{\circ}$ を得る.

もう一つ、 $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ を取り上げた。これは A の内点が A° の内点であることを示せばよい。これについてはレポート課題にした。

10. 補足（ド・モルガンの法則の利用）

閉集合は開集合の補集合なので定理 2.35 とド・モルガンの法則を組み合わせれば次が簡単に示せる。

- 空集合 $\emptyset$ と全体集合 X は閉集合である。
- 閉集合の共通部分（非可算無限個でも可）は閉集合である。
- 有限個の閉集合の合併は閉集合である。

無限個の閉集合の合併は閉集合になるとは限らない。例として $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$ をあげた。合併の定義からこの集合に 1 は含まれない。

もう一つ、閉包が補集合の内部の補集合であること（この講義メモの 5 を参照）を利用して集合演算子としての閉包の性質を導いた。

$$\overline{(A \cup B)} = (((A \cup B)^\circ)^\circ)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = \bar{A} \cup \bar{B}$$

本日のレポート課題とヒント

来週はこどもの日で休みなので次回は 5 月 12 日になる。レポート課題は 5 月 7 日（木）12 時半までに提出してほしい。もちろん評価のためのレポートではないので遅れても受け取る。

課題 1 命題 2.22 を示せ。ヒント：直積空間の距離の定義と、この場合のリプシッツ連続であることの条件（ $L = 1$ でよい）を比較してみよ。

課題 2 命題 2.27 の後半を証明せよ。ヒント：集積点の定義の否定を作ることにより集積点でないことの定義が得られる。これと孤立点の定義を比較せよ。

課題 3 p が A の内点であれば A° の内点であることを示せ。ヒント： $p \in A^\circ$ より $r > 0$ を $B_r(p) \subset A$ となるようにとれる。証明すべきことは $B_r(p) \subset A^\circ$ である。 $x \in B_r(p)$ とし $B_s(x) \subset A$ となる x を見つける。三角不等式の利用がカギになる。

次回の講義について

次回は連続写像の開集合による特徴づけを行う。その後、完備性に入る。実数の完備性は実数と論理で学習しているはずなので復習しておくように。

幾何概論Ⅰのレポート課題(4月28日)の解答例とコメント

レポートの提出がだいぶ減ってしまった。解答例を読んで理解するのも良いが、一度は自分で証明を考えたほうが良い。その努力によって徐々に証明力が付いてくる。解答例を読んでも分からないという人は一度話に来たほうがいいかもしれない。

課題1 命題 2.22 を示せ。

【解答例】 $(x_1, y_1) \in X \times Y$ と $(x_2, y_2) \in X \times Y$ について

$$d_X(p_X(x_1, y_1), p_X(x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) \leq \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} = d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

が成り立つがこれは $p_X: X \times Y \rightarrow X$ がリプシッツ連続 ($L=1$) であることに他ならない。

【コメント】

- $f: X \rightarrow Y$ がリプシッツ連続であるとは、定義域 X の要素 x_1, x_2 について $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2)$ が成り立つこと。だから $p_X: X \times Y \rightarrow X$ がリプシッツ連続であることを示すには、まず定義域である $X \times Y$ の要素を2つ取らなければならない。これが意識できれば証明は自然なはずだ。条件式は設定に応じて自由に書き換える必要がある。基本的なことなので慣れてほしい。
- もちろん証明では直積距離 $d_{X \times Y}$ の定義を使う。定義の確認は怠ってはならない。

課題2 命題 2.27 の後半を証明せよ。

【解答例】 $p \in A$ をとる。これが A の集積点でないとは

$$\exists r > 0; ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset)$$

が成り立つことである。これと $p \in A$ を組み合わせれば、 $B_r(p) \cap A = \{p\}$ であり p は A の孤立点である。

【コメント】

- $p \in A$ と集積点でないことの定義を組み合わせるだけの問題。この程度の議論で十分だろう。この部分を証明しようとすれば

$$\{p\} = \{p\} \cup \emptyset = \{p\} \cup ((B_r(p) \setminus \{p\}) \cap A) = (\{p\} \cup (B_r(p) \setminus \{p\})) \cap (\{p\} \cup A) = B_r(p) \cap A$$

とすればよい。

課題3 p が A の内点であれば A° の内点であることを示せ。

【解答例】 p は A の内点なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset A$ となるようにとる。 $x \in B_r(p)$ をとる。 $d(p, x) < r$ より $s = r - d(p, x) > 0$ とおく。 $y \in B_s(x)$ について

$$d(p, y) \leq d(p, x) + d(x, y) < d(p, x) + s = r$$

より $y \in B_r(p)$ を得る。よって $B_s(x) \subset B_r(p) \subset A$ より x は A の内点である。よって $B_r(p) \subset A^\circ$ であり p は A° の内点である。

【コメント】

- 内点の定義で $B_r(p) \subset A$ となる r をとった後、 $x \in B_r(p)$ が A の内点であることを示せばよい。ノート上に円を書いて考えれば、 x を中心とする十分小さな円が $B_r(p)$ 内に含まれることが想像できるはずだ。 x を中心とする円の半径は $r - d(x, p)$ 以下にすればよいことも図から想像がつく。このように直観で考察したことを如何に厳密に示すかが課題だ。
- 証明は三角不等式を使う。これによって直観を排した証明ができたことになる。

幾何概論 I および同演習の講義メモ (5月12日)

本日の講義の要点

1. 連続性の開集合による特徴づけ (定理 2.38)

この事実は「連続であること」の必要十分条件は「開集合の逆像が開集合であること」と理解してほしい。証明を与えておく。

f は連続であるとする。 Y の開集合 V について $p \in f^{-1}(V)$ をとる。逆像の定義から $f(p) \in V$ である。 V は開集合なので $\varepsilon > 0$ を $B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \subset V$ となるようにとる。この ε に対して f の p での連続性により $\delta > 0$ を

$$d_X(x, p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

となるようにとる。ここで $B_r(p)$ の定義から $d_X(x, p) < \delta$ は $x \in B_\delta^{d_X}(p)$ と同値であり、また $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ は $f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))$ と同値である。よって $x \in B_\delta^{d_X}(p)$ であれば $f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \subset V$ であり $x \in f^{-1}(V)$ となる。ゆえに $B_\delta^{d_X}(p) \subset f^{-1}(V)$ であり p は $f^{-1}(V)$ の内点である。よって $f^{-1}(V)$ は開集合である。

逆に、開集合の逆像が開集合になったとする。 $p \in X$ について $B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))$ は Y の開集合なので $f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ は X の開集合である。 $p \in f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ より $\delta > 0$ を $B_\delta^{d_X}(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)))$ となるようにとる。

$$d_X(x, p) < \delta \implies x \in f^{-1}(B_\varepsilon^{d_Y}(f(p))) \iff f(x) \in B_\varepsilon^{d_Y}(f(p)) \iff d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

であり f は p で連続である。

一般に開集合の像が開集合になるとは限らない。例 2.40 に具体例を記述してあるので考えておくこと。この定理の応用として、連続写像の合成写像が連続であること (命題 2.39) を示した。この証明は次のようにすればよい。

$f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ がともに連続であるとする。 Z の開集合 W について、 g の連続性から $g^{-1}(W)$ は Y の開集合である。さらに f の連続性から $f^{-1}(g^{-1}(W))$ は X の開集合である。逆像の定義から $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ であり、 $g \circ f$ は連続である。

写像が連続であることは、「閉集合の逆像が閉集合である」とも読み替えられる。これは閉集合の補集合が開集合であること、補集合の逆像が逆像の補集合であることの2つを組み合わせれば、「閉集合の逆像が閉集合である」とことと「開集合の逆像が開集合である」とことの同値性が出る。具体的には

閉集合の逆像が閉集合だったとする。 Y の開集合 B について B^c は閉集合なので $f^{-1}(B^c)$ は閉集合である。 $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ なので $f^{-1}(B)$ は開集合である。よって開集合の逆像は開集合である。逆は「閉」と「開」を入れ替えるだけだ。

補集合の逆像が逆像の補集合であることは次のように示す。

$$x \in f^{-1}(B^c) \iff f(x) \in B^c \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(B)^c$$

2. 開集合, 閉集合の例

開集合の逆像が開集合であることを利用して、様々な開集合の例を作れる。

- $A = \{(x, y) \mid -1 < x^2 + xy - y^2 < 1\}$ は開集合である。なぜなら $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ は連続関数なので $A = f^{-1}((-1, 1))$ は开区間 (開集合) の逆像となり開集合である。

- n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ とみなす. 正則行列は行列式が 0 でない行列であること, 行列式は成分の多項式なので $\mathbb{R}^{n^2}$ 上の連続関数 (f で表そう, $f(A) = |A|$ である.) であることから, 正則行列全体の集合

$$GL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

は開集合である.

- 上の例について $f^{-1}(\{1\})$ は閉集合である. これは行列式が 1 になる行列全体であり $SL(n, \mathbb{R})$ と表せる. $f^{-1}(\{0\})$ は行列式が 0 になる行列全体であり, 正則でない行列の集合である. これが閉集合なので, 正則行列全体の集合は開集合である.

3. Cauchy 列と完備性

定義については定義 2.11 と定義 2.12 を見る. 実数の数列については 2 年次の実数と論理で学習したはずであり, ここではそれを距離空間での概念として定義しなおした. 講義では最初に収束する点列が Cauchy 列であることを証明した.

点列 $\{a_n\}$ が a に収束したとする. $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$n \geq N \implies d(a_n, a) < \varepsilon$$

となる自然数 N をとれる. この N について

$$n, m \geq N \implies d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < 2\varepsilon$$

となるので $\{a_n\}$ は Cauchy 列である.

実数全体の集合が完備であることは実数と論理の講義で学習したのでここでは述べない. 復習しておくこと.

4. 完備性と直積空間, 部分空間

完備距離空間の直積は完備である (定理 2.46). このことは直積距離の定義を使うだけだ.

$\{(a_n, b_n)\}$ を直積空間 $X \times Y$ の Cauchy 列とする.

$$d_X(a_n, a_m) \leq d_{X \times Y}((a_n, b_n), (a_m, b_m))$$

より $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列になる. X の完備性から X の点列 $\{a_n\}$ は収束するのでその極限を a とおく. 同様に $\{b_n\}$ は Y の Cauchy 列であり収束するのでその極限を b とする.

$$d_{X \times Y}((a_n, b_n), (a, b)) \leq d_X(a_n, a) + d_Y(b_n, b)$$

より左辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので $X \times Y$ の点列 $\{(a_n, b_n)\}$ は (a, b) に収束する.

部分空間については閉集合という条件が必要である (命題 2.49).

距離空間の部分空間 $A \subset X$ について, 距離は同一なので A の Cauchy 列は X の Cauchy 列でもある. よって X の完備性から X の点 p に収束する. ここで A が閉集合なら $p \in A$ であり, A は完備になる. ゆえに完備距離空間の閉部分空間は完備である.

一方, A が閉集合でなければ $p \in \overline{A} \setminus A$ をとる. 命題 2.27 より p は集積点なので p に収束する A の点列 $\{a_n\}$ が存在する (命題 2.25). これは X の収束する点列なので Cauchy 列である. よって A の点列としても Cauchy 列であるが, その極限 p は A に属さない. よって集合 A においては収束せず, A は完備ではない.

5. 完備距離空間の例

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備なので、その直積 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ も完備である。 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ より、 $\mathbb{R}^n$ は完備である。よって $\mathbb{R}^n$ の閉部分空間は完備である。

もう一つの重要な例は連続関数全体の集合の d_∞ に関する完備性 (例 2.48) である。コメントしておこう。

V を $[0, 1]$ 区間上の連続関数全体の集合とし、距離を d_∞ (例 2.4) で定める。 $\{f_n\}$ を V の Cauchy 列とすれば $0 \leq a \leq 1$ について

$$d_\infty(f_n, f_m) = \max |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(a) - f_m(a)|$$

より $\{f_n(a)\}$ は Cauchy 数列なので収束する。その極限を $f(a)$ と定めることにより $[0, 1]$ 区間上の関数 $f(x)$ が定まる。

$$\forall \varepsilon > 0; (\exists N; (m, n \geq N \implies |f_m(x) - f_n(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

において $m \rightarrow \infty$ とすれば

$$\forall \varepsilon > 0; (\exists N; (n \geq N \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon))$$

となり N は x によらないので $\{f_n\}$ は f に一様収束する。連続関数の一様収束極限は連続 (解析概論 I で学ぶはずだ) なので $f \in V$ であり、 $\{f_n\}$ は f に d_∞ について収束する。Cauchy 列が収束したので完備である。

6. (演習) 集合からの距離

$A \subset X$ について $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ で定める。この関数について命題 2.43 を考えてもらった。

$x \in A$ とする。下限の定義から $b \in A$ について

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, b)$$

であるが $b = x$ とできるので $0 \leq d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ となり $d(x, A) = 0$ を得る。

逆に $d(x, A) = 0$ とする。下限の定義から $\varepsilon > 0$ は下界ではないので $0 \leq d(x, b) < \varepsilon$ となる、 A の要素 b が存在する。すなわち $b \in B_\varepsilon(x)$ となる b が存在するので $b \in A \cap B_\varepsilon(x)$ であり $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ を得る。すなわち $x \in \bar{A}$ であり A が閉集合であることから $x \in A$ となる。

講義でふれるのを忘れたが、 $f(x) = d(x, A)$ は X 上の連続関数になる。この証明を補足しておく。

正数 $\varepsilon > 0$ をとる。上限の定義から $a \in A$ を $d(x, a) < d(x, A) + \varepsilon$ となるようにとる。 $d(y, A) \leq d(y, a)$ と合わせて

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, a) - d(x, a) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon$$

を得るが、 x, y を入れ替えても同じ議論ができるので

$$|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(x, y) + \varepsilon$$

を得る。 ε は任意なので $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ であり、 $f(x) = d(x, A)$ はリプシッツ連続である。

7. (演習) 命題 2.32

A° は A に含まれる最大の開集合であることの証明を考えてもらった。すなわち $B \subset A$ で B が開集合なら $B \subset A^\circ$ となることの証明を考えてもらった。簡単な証明なので自分でできるようになってほしい。

$x \in B$ とする. B は開集合なので $B_r(x) \subset B$ となる正数 $r > 0$ が存在する. $B \subset A$ より $B_r(x) \subset A$ なので x は A の内点である. よって $x \in A^\circ$ であり $B \subset A^\circ$ が成り立つ.

この事実は $A \subset B$ から $A^\circ \subset B^\circ = B$ とすれば簡単に示せる. ただし $A \subset B$ から $A^\circ \subset B^\circ$ がなぜかと問われると戸惑うだろう. 上の証明はこの包含関係も含めて示したことになる.

閉集合についても考察したがここでは省略する. 自分で考えてみると良い.

本日のレポート課題とヒント

課題 1 連続写像の合成が連続であることの証明で使った等式 $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ を示せ.

【ヒント】逆像の定義を使うだけ, 易しいはずだ.

課題 2 n 次直交行列全体の集合 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の閉集合であることを示せ.

【ヒント】直交行列であることの必要十分条件は $A^t A = E$ である. このことを利用して $O(n)$ をある連続写像の (閉集合の) 逆像として見直せばよい.

課題 3 命題 2.44 を示せ.

【ヒント】連続関数の和差積商は定義される範囲で連続であることは使ってよい. 命題 2.43 の結果を利用すること.

次回の講義について

次回は点列コンパクト集合の解説をする. その後で位相空間に入る. 定理 2.52 は実数と論理で学習したと思うのだが如何だろうか. 復習しておいてほしい.

幾何概論 I のレポート課題 (5 月 12 日) の解答例とコメント

決して難しい問題ではないのだが提出者が減っている。曖昧な理解のまま放置しているので授業内容についてこれないのではないかと。曖昧な理解を確実なものにするのは家庭学習が基本だが、家庭学習で分からない場合は周りに聞いてほしい。私のところに質問に来てても良い。

課題 1 連続写像の合成が連続であることの証明で使った等式 $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ を示せ。

【解答例】

$$x \in f^{-1}(g^{-1}(W)) \iff f(x) \in g^{-1}(W) \iff g(f(x)) \in W \iff (g \circ f)(x) \in W \iff x \in (g \circ f)^{-1}(W)$$

【コメント】

- 逆像の定義と合成写像の定義を使うだけ。この程度の証明は 5 分以内にできてほしい。

課題 2 n 次直交行列全体の集合 $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の閉集合であることを示せ。

【解答例】 $M_n(\mathbb{R})$ を n 次正方行列全体とする。これは $\mathbb{R}^{n^2}$ に他ならないので通常の距離で距離空間になっている。写像 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ を $f(A) = {}^tAA$ で定義する。 $f(A)$ の各成分は A の成分の 2 次多項式なのでこの写像は連続である。一方直交行列とは $f(A) = {}^tAA = E$ を満たす行列なので $O(n) = f^{-1}(\{E\})$ である。一点からなる集合 $\{E\}$ は閉集合なので $O(n)$ は閉集合である。

【コメント】

- 直交行列とは何かを考えることが出発点だ。講義での解説は行列式を利用していたがそれは役に立たないことに気付いてほしい。意味を考えずに真似をしても数学の力はつかない。
- 解答は $M_n(\mathbb{R})$ を距離空間とみなす方法から書いたが、これは別に省略しても良い。ただ、この程度のことはきちんと意識しておくべきだ。

課題 3 命題 2.44 を示せ。

【解答例】 A からの距離は 0 以上なので $d(x, A) + d(x, B) = 0$ となるのは $d(x, A) = d(x, B) = 0$ の時に限る。 A, B が閉集合であることからこれは $x \in A$ かつ $x \in B$ の場合である。しかし $A \cap B = \emptyset$ であるからこのような x は存在しない。よってすべての x について $d(x, A) + d(x, B) > 0$ が成り立つ。 $g(x)$ は連続関数を正值連続関数で割ったものだから連続である。

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, A) + d(x, B) \text{ より}$$

$$0 \leq g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \leq 1$$

である。また $g(x) = 0$ は $d(x, A) = 0$ の場合に限るので $g(x) = 0 \iff x \in A$ である。また $g(x) = 1$ は $d(x, B) = 0$ の場合に限るので $g(x) = 1 \iff x \in B$ である。

【コメント】

- 殆どが分母が正であることに言及していなかった。この証明の最重要ポイントである。なお、距離空間においても連続関数の商は定義できる範囲で連続である。証明も全く同じなので省略する。
- 他の部分の証明は易しい。特にいうことはない。

幾何概論 I および同演習の講義メモ (5月19日)

本日の講義の要点

1. 点列コンパクト集合

距離空間 (X, d) について $K \subset X$ が点列コンパクト集合とは K に点列が K の点に収束する部分列を持つことを言う。まず、点列コンパクト集合が有界閉集合^{*1}であることを証明した。

K が有界でなかったとしよう。 $\forall r > 0$ について $K \not\subset B_r(p)$ なので $K \setminus B_r(p) \neq \emptyset$ である。よって $a_n \in K \setminus B_n(p)$ をとる。 $\{a_n\}$ は K の点列であり $d(a_n, p) \geq n$ を満たす。 K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ の収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ をとれる。この極限を a とおけば $\lim_{k \rightarrow \infty} d(a_{n_k}, p) = d(a, p)$ であるが、これは $d(a_{n_k}, p) \geq n_k \geq k$ に矛盾する。よって K は有界である。

次に K が閉集合でなかったとする。 $\bar{K} \neq K$ なので $p \in \bar{K} \setminus K$ を取ることができる。このとき p は K の集積点 (命題 2.27, 4月28日の講義メモ 8) なので K の点列 $\{a_n\}$ を p に収束するようにとれる (命題 2.25)。 K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は K の点に収束する部分列を持つはずだが、その極限は p 以外の点にはなり得ないので $p \notin K$ から矛盾が生じる。よって K は閉集合である。

2. $\mathbb{R}^m$ の点列コンパクト集合

$\mathbb{R}^m$ においては有界閉集合は点列コンパクトになる。これを示す前にまず有界な数列が収束する部分列を持つことを示した。この事実は実数と論理で学習したはずだが改めて証明を与えておく。

$\{a_n\}$ を有界な実数列とする。 $L \leq a_n \leq K$ となる実数 L, K が存在する。

$$N(r) = \{n \mid a_n > r\} \subset \mathbb{N}$$

とおけば $N(L-1) = \mathbb{N}$ であり $N(K) = \emptyset$ である。また $s < r$ であれば $N(r) \subset N(s)$ である。よって $l = \inf\{r \mid N(r) \text{ は有限集合}\}$ とおけば $\forall \varepsilon > 0$ について $N(l+\varepsilon)$ は有限集合、 $N(l-\varepsilon)$ は無限集合である。よって

$$N(l-\varepsilon) \setminus N(l+\varepsilon) = \{n \mid l-\varepsilon < a_n \leq l+\varepsilon\}$$

は無限集合である。 $n_1 \in N(l-1) \setminus N(l+1)$ をとり、以下 $n_k \in N(l-1/k) \setminus N(l+1/k)$ を $n_k > n_{k-1}$ となるようにとる。 $\{a_{n_k}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列であり、 $l-1/k < a_{n_k} \leq l+1/k$ より l に収束する。

この事実を使って $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合 K が点列コンパクトであることを証明する。

$\{a_n\}$ を K の点列とする。 $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ とおくと m 個の数列 $\{a_{jn}\}$, $1 \leq j \leq m$ はすべて有界である。そこで第1成分の数列 $\{a_{1n}\}$ から収束する部分列 $\{a_{1n_k}\}$ を選ぶ。この部分列に対応する $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ を考えれば第1成分は収束している。そこで、さらにその第2成分が収束するように部分列を選ぶ。すると第1成分はすでに収束しているので、第1成分と第2成分がともに収束するような部分列が取れる。そこからさらに第3成分が収束するように部分列をとるという形で議論を進めれば、最終的にすべての成分が収束するような部分列、すなわち収束する $\{a_n\}$ の点列が得られる。ここまでは有界性のみを使ったことに注意せよ。

部分列の各項は K の点なので極限は K の閉包に含まれる。 K は閉集合なので極限は K の点である。よって K の点列は K の点に収束する部分列を持つ。

3. 点列コンパクト集合上の連続関数

^{*1} K が有界であるとは、 $K \subset B_r(a)$ となる $a \in X$ と $r > 0$ が存在することを言う。半径 r の球に含まれるということだと理解してほしい。

距離空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について、点列コンパクト集合の像は点列コンパクト集合である (命題 2.53). 開集合や閉集合の場合は逆像だったがここでは像であることに注意してほしい. 証明は易しい.

A を X の点列コンパクト集合とし, $f(A)$ の点列 $\{b_n\}$ を考える. $b_n \in f(A)$ より $a_n \in A$ を $b_n = f(a_n)$ となるようにとる. $\{a_n\}$ は A の点列なので収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ をとる. $\lim a_{n_k} = a \in A$ とおく. f の $a \in A$ での連続性から $\lim f(a_{n_k}) = f(a) \in f(A)$ である. ゆえに部分列 $\{b_{n_k}\} = \{f(a_{n_k})\}$ は $f(A)$ の点に収束する.

この事実を使えば, 点列コンパクト集合上の連続関数の値域 ($\mathbb{R}$ の部分集合, $f(A)$ とおく) は点列コンパクトなので有界閉集合である. 有界なので上限下限が存在し, 閉集合なので上限下限^{*2}は $f(A)$ に含まれる. よって最大最小であり, 点列コンパクト集合上の連続関数は最大値および最小値を持つ.

4. 集合への距離を実現する点 (演習)

A を距離空間 X の点列コンパクト集合とする. このとき $d(p, A) = \inf\{d(p, x) \mid x \in A\}$ を実現する A の点が存在することの証明を考えてもらった. ポイントは

- $f(x) = d(p, x)$ が連続関数であること. (4月28日の講義メモ3)
- A は点列コンパクト集合なので f は A 上で最小値を持つこと.
- f が $a \in A$ において最小値をとるとすると, $d(p, a) = \min\{f(x) \mid x \in A\} = \inf\{d(p, x) \mid x \in A\} = d(p, A)$ となる.

5. 一様連続な写像が Cauchy 列を Cauchy 列に移すこと. (演習)

写像 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続であるとし, $\{a_n\}$ を X の Cauchy 列とする. このとき $\{f(a_n)\}$ は Y の Cauchy 列になる. 証明は以下のようにすればよい.

- $\varepsilon > 0$ をとる. f は一様連続なので

$$d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する.

- $\{a_n\}$ は Cauchy 列なので

$$n, m \geq N \implies d_X(a_n, a_m) < \delta$$

となる自然数 N が存在する.

- $n, m \geq N$ のとき $d_Y(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$ が成り立つ. ゆえに $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列である.

6. 点列コンパクト集合上の連続写像の一様連続性

A を距離空間 X の点列コンパクト集合とし $f: A \rightarrow Y$ を A 上の連続写像とする. このとき f は一様連続である. 証明は背理法を用いる.

- f が一様連続でないとすれば $\varepsilon_0 > 0$ で

$$\forall \delta > 0; (\exists x, x' \in A; (d_X(x, x') < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon_0))$$

を満たすものが存在する.

- $\delta = 1/n$ について, 上の主張における x, x' を x_n, x'_n とおけば次が成り立つ.

$$x_n \in A, \quad x'_n \in A, \quad d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$$

^{*2} 上限を α とすれば $\alpha - \varepsilon$ は上界ではないので $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ を満たす $f(A)$ の要素が存在する. よって α は $f(A)$ の触点である. $f(A)$ は閉集合なので α は値域 $f(A)$ に含まれる.

- $\{x_n\}$ は A の点列なので A の点 a に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ がとれる．その部分列による点列 $\{x'_{n_k}\}$ からさらに収束する部分列 $\{x'_{n_{k_l}}\}$ を選びその極限を $a' \in A$ とおく．
- $d_X(x_{n_{k_l}}, x'_{n_{k_l}}) < 1/(n_{k_l})$ より $l \rightarrow \infty$ として $d_X(a, a') = 0$ を得る．よって $a = a'$ である．
- $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$ より $d_Y(f(a), f(a')) \geq \varepsilon_0$ である．最後の 2 つの主張は矛盾する．
- よって f は一様連続である．

本日のレポート課題とヒント

課題 1 A, B を X の点列コンパクト集合とすると $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ を実現する $a \in A$ と $b \in B$ が存在することを示せ．

【ヒント】 $f(x) = d(x, B)$ とおけば f は連続である（5 月 12 日の講義メモ 6）． A は点列コンパクトなので A 上の最小値を持ち，それを $f(a) = d(a, B)$ とおく．さらに講義の議論（この講義メモ 4）を使えばよい．

課題 2 距離空間 X の部分集合 A で定義された一様連続写像 $f: A \rightarrow Y$ を考える． $p \in \overline{A} \setminus A$ をとる．さらに Y は完備とする．このとき p に収束する任意の A の点列 $\{a_n\}$ について $\{f(a_n)\}$ は収束することを示せ．

【ヒント】 収束する点列は Cauchy 列であることに注意せよ．後はこの講義メモの 5 を使えばよい．なお，この事実から $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ は収束する．すなわち $f(p)$ をこの極限值と定めることによって f を p で連続になるように拡張できる．（命題 2.16 参照）

次回の講義について

来週は位相空間の連続写像についての考察を続ける．再来週は距離空間の範囲での試験を行う．

幾何概論 I のレポート課題 (5 月 19 日) の解答例とコメント

課題 1 A, B を X の点列コンパクト集合とすると $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ を実現する $a \in A$ と $b \in B$ が存在することを示せ.

【解答例】 $f(x) = d(x, B)$ とおけば f は連続である (5 月 12 日の講義メモ 6). A は点列コンパクトなので A 上の最小値を持ち, それを $f(a_0) = d(a_0, B)$ とおく. a_0 について $g(y) = d(a_0, y)$ を考える. $g(y)$ は連続であり B は点列コンパクトなので g は B 上最小値を持つ. それを $g(b_0)$ とおく. 任意の $a \in A, b \in B$ について

$$d(a_0, b_0) = d(a_0, B) \leq d(a, B) \leq d(a, b)$$

となるので $d(a_0, b_0)$ は $\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ の最小値であり $d(a_0, b_0) = d(A, B)$ である.

【コメント】

- よせられた解答では $d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B)$ を用いたものが多かった. 確かに

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) = \inf_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right) = \inf_{x \in A} d(x, B)$$

であるが, 自明とまでは言えない.

- これから証明しようとする事実を記載するときは, それが明確に分かるように記述してほしい. 議論の流れが読み取れない解答があった.

課題 2 距離空間 X の部分集合 A で定義された一様連続写像 $f: A \rightarrow Y$ を考える. $p \in \overline{A} \setminus A$ をとる. さらに Y は完備とする. このとき p に収束する任意の A の点列 $\{a_n\}$ について $\{f(a_n)\}$ は収束することを示せ.

【解答例】 p は集積点なので p に収束する A の点列をとり $\{a_n\}$ とおく. $\{a_n\}$ は収束するので Cauchy 列である (命題 2.45 5 月 12 日の講義メモ 3). f は一様連続なので $\{f(a_n)\}$ も Cauchy 列になる (5 月 19 日の講義メモ 5). Y は完備なので $\{f(a_n)\}$ は収束する.

【コメント】

- 命題 2.50 を示すには $\{f(a_n)\}$ の極限の一意性を言う必要がある. これは背理法を使って次のように示せばよい.

$\{b_n\}$ を p に収束する別の A の点列とすれば同じ議論で $\{f(b_n)\}$ も収束する. これが $\{f(a_n)\}$ と異なる極限に収束したとすると, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を交互に並べた点列 $\{c_n\}$ について $\{f(c_n)\}$ が収束できなくなる. $\{c_n\}$ はやはり p に収束する A の点列なのでこれは矛盾である.

この議論は一意性を示す際によく使われる議論だ. よく考えてみてほしい.

- $p \notin A$ なので $f(p)$ は定義されていない. $f(p)$ という記号を使った答えは間違いである.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (5 月 26 日)

前回の講義メモは距離空間までの事項しかまとめていなかった。実際には位相空間の話に入っていたので不十分なものを掲載してしまったことになる。今回の講義メモでは、前回の内容も含めて位相空間の初めからまとめることにする。

本日の講義の要点

1. 位相およびその例

位相とは「連続性」を定義できるようにするための構造である。様々な集合に位相を定めることによって、考察の対象を幾何学的に扱うことが可能になる。距離よりもはるかに分かりづらい概念であるが、議論は単純になっている。この講義では位相を開集合系によって定めた (定義 3.1)。最も基本的な方法である。位相を一つ定めた集合を位相空間という。

位相の例としては、距離空間における開集合系 (位相とはこれを一般化したものといえる) が最も基本的である。他につまらない例として離散位相 (例 3.4) と密着位相 (例 3.5) がある。このうち密着位相は距離による位相としては実現できない。

興味深い位相の例として例 3.6 を紹介した。

2. 連続写像

2 つの位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは、 Y の開集合の逆像が X の開集合になることを言う。距離空間の間の写像の連続性の開集合による特徴づけ (定理 2.38) を確認せよ。なお、「 $a \in X$ で連続」という概念は (定義できないわけではないが) 考える必要はない。

この定義から連続写像の合成が連続であることは簡単に示せる。命題 2.39 の証明 (5 月 12 日の講義メモ) とまったく同じである。

3. 位相の強弱

x の 2 つの位相について強弱を考えた。同じ集合であっても位相が違えば連続の概念も変わってくことに注意せよ。例えば $f: X \rightarrow Y$ において X の位相が離散位相なら f は連続である。 $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ は無条件に成り立つからだ。一方 Y の位相が密着位相の時も X の位相の取り方によらず連続になる。 Y の開集合は Y および $\emptyset$ だけなので $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ はいずれも X の開集合である (命題 3.9)。

命題 3.10 も簡単だが証明を書いておく。 i は恒等写像なので $i^{-1}(V) = V$ であることに注意せよ。

恒等写像 i が連続だとする。 $V \in \mathcal{O}_2(X)$ について $i^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_1(X)$ となる。ゆえに $\mathcal{O}_2(X) \subset \mathcal{O}_1(X)$ であり $\mathcal{O}_2(X)$ は $\mathcal{O}_1(X)$ より弱い位相である。逆に $\mathcal{O}_2(X) \subset \mathcal{O}_1(X)$ であれば $\forall V \in \mathcal{O}_2(X)$ について $i^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_1(X)$ が成り立つ。ゆえに $i: (X, \mathcal{O}_1(X)) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2(X))$ は連続である。

4. 内点と内部

テキストに書き忘れていたので補足しておく。位相空間 X と $A \subset X$ について

定義 x が $A \subset X$ の内点であるとは $x \in U \subset A$ となる開集合 U が存在することを言う。 A の内点全体の集合を A° とおき、 A の内部と呼ぶ。

距離空間での概念を位相空間に拡張したものである。 $B_r(x)$ が意味を持たないので代わりに $x \in U$ を満たす開集合を利用している。これについて次が成り立つ。

命題 A° は A に含まれる最大の開集合である。すなわち A° は開集合であり、 $U \subset A$ を満たす開集合は $U \subset A^\circ$ を満たす。

証明 開集合 U が $U \subset A$ を満たせば $x \in U$ について $x \in U \subset A$ が成り立つ。 U は開集合なので $x \in A^\circ$ である。よって $U \subset A^\circ$ が成り立つ。

$x \in A^\circ$ について $U_x \in \mathcal{O}(x)$ を $x \in U \subset A$ となるようにとる. 開集合の合併は開集合なので

$$\bigcup_{x \in A^\circ} U_x \subset A$$

は開集合である. 前半で示したことからこの集合は A° の部分集合になる. 一方 $x \in A^\circ$ は $x \in U_x$ を満たすので

$$A^\circ \subset \bigcup_{x \in A^\circ} U_x \subset A^\circ$$

よって A° は開集合 U_x たちの合併集合になるので開集合である.

5. 閉集合, 触点と閉包

距離空間の場合と同様に開集合の補集合を閉集合と呼ぶ. 開集合の性質とド・モルガンの法則 (命題 1.10) から次を得る.

- 命題** (1) 全体集合と空集合は閉集合である.
 (2) 閉集合の (無限個の) 共通部分は閉集合である.
 (3) 閉集合の有限個の合併は閉集合である.

補集合の内部の補集合を閉包と呼ぶ. $\bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$

命題 $x \in \bar{A}$ であることと次が成り立つことは同値である.

$$\forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U; U \cap A \neq \emptyset$$

証明 $x \in \bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$ は $x \in (A^c)^\circ$ が成り立たないということなので, 内点であることの否定命題により

$$\forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U; U \not\subset A^c$$

が成り立つ. ここで $U \not\subset A^c$ とは A^c に含まれないということだから A と交わることと同値である. すなわち $A \cap U \neq \emptyset$ と同値である.

この条件を満たす x を A の触点と呼ぶ. 閉包 $\bar{A}$ とは A の触点全体の集合である.

命題 A の閉包 $\bar{A}$ は A を含む閉集合である. 閉集合 F が $F \supset A$ を満たすとき $F \supset \bar{A}$ である. すなわち $\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

証明 $(A^c)^\circ$ は開集合なのでその補集合 $\bar{A}$ は閉集合である. 次に F を $F \supset A$ を満たす閉集合とする. $F^c \subset A^c$ であるが F は閉集合なので F^c は開集合である. よって $F^c \subset (A^c)^\circ$ が成り立つ. 両辺の補集合をとれば包含関係の向きが変わるので $F \supset ((A^c)^\circ)^c = \bar{A}$ を得る.

触点の定義は距離空間の時にきちんと与えておかねばならなかった. 距離空間では開集合の代わりに開球が使えるので

$$x \in \bar{A} \iff \forall r > 0; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

が触点と閉包の定義である. 補足しておく.

6. 相対位相

位相空間の部分集合に定義 3.6 により位相を定めることができる. これが実際位相になることは次のようにすればよい.

$V_\lambda \in \mathcal{O}(Y)$, $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ を $V_\lambda = U_\lambda \cap Y$ となるようにとる.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda} (U_\lambda \cap Y) = \left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda \right) \cap Y$$

だが、開集合系の公理から $\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ なので右辺は $\mathcal{O}(Y)$ に属する。 Y の開集合の合併は開集合であることが示された。他の主張は省略する。なお、上の変形で命題 1.11 を使っていることに注意せよ。

この位相を相対位相と呼ぶ。部分集合に相対位相を入れた位相空間を部分（位相）空間と呼ぶ。

相対位相は包含写像 $i: Y \rightarrow X$ を連続にするような Y の最弱の位相である（命題 3.18）。このことの証明の概略は以下の通り。

$i: Y \rightarrow X$ が連続であるためには任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1}(U)$ が Y の開集合になっていないといけない。 $i^{-1}(U) = U \cap Y$ なので $U \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ でなくてはならないが、相対位相はちょうどこのような集合だけを開集合と定めたのであるから i は連続であり、かつ i を連続にする位相は相対位相を含んでいなくてはならない。

もう一つ重要な事実は命題 3.19 である。 i は連続なので $i \circ f$ 連続なら f が連続であることのみ示せばよい。

$V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる。 $U \in \mathcal{O}(X)$ を $V = U \cap Y$ となるようにとる。 $i \circ f$ の連続性から

$$(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(Z)$$

であるが、 $i^{-1}(U) = U \cap Y = V$ なので $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ を得る。よって f は連続である。

7. p.6 の例 2.1 の距離による位相（演習）

この距離空間において 1 点からなる集合が開集合になることを考察してもらった。異なる点との距離は常に 1 なので $B_{1/2}(x) = \{x\}$ と 1 点のみからなることが分かる。距離空間では $B_r(x)$ は開集合（例 2.29）なので $\{x\}$ は開集合である。任意の集合は 1 点のみからなる集合の合併で表されるので開集合の性質からすべての集合が開集合になる。ゆえにこの距離による位相は離散位相である。

一方、2 点以上持つ距離空間では全体集合でも空集合でもない開集合が存在する。この証明はレポート課題にした。この事実から位相空間の中には距離に由来しないものが存在することが分かる。距離空間はすべて位相空間を定めるが、位相空間は必ずしも距離に由来するものばかりではない。

8. 距離の関係と位相の強弱（演習）

X の 2 つの距離の間に $d_1 \leq Kd_2$ という関係があるとき $\mathcal{O}_{d_1}(X)$ は $\mathcal{O}_{d_2}(X)$ より弱い位相になる。このことの証明を解説した。

$U \in \mathcal{O}_{d_1}(X)$ をとる。 $x \in U$ について $r > 0$ を $B_r^{d_1}(x) \subset U$ となるようにとる。 $z \in B_{r/K}^{d_2}(x)$ をとれば $d_2(z, x) < r/K$ より $d_1(z, x) \leq Kd_2(z, x) < r$ が成り立つ。よって $z \in B_r^{d_1}(x)$ であり $z \in U$ を得る。 $B_{r/K}^{d_2}(x) \subset U$ となるので $U \in \mathcal{O}_{d_2}(X)$ である。よって $\mathcal{O}_{d_1}(X) \subset \mathcal{O}_{d_2}(X)$ が成り立つ。

この主張から同値な距離は同じ位相を定める。

9. 内部を取ることと合併、共通部分の関係（演習）

$(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成立しない。例えば $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ とでもおいてみればよい。 $(A \cup B)^\circ = (-1, 1) \supsetneq A^\circ \cup B^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$ である。もっと極端な例としては A を有理数全体の集合、 B を無理数全体の集合として見ればよい、 $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ であるが $A \cup B = \mathbb{R}$ なので $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$ である。対称的に $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つ。これはレポート課題にする。

10. 上半連続（演習）

位相空間から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_l(\mathbb{R}))$ への連続写像を上半連続関数と呼ぶ。 X が距離空間の時は次の命題が成り立つ（テキストにミスがあるので訂正しておいてください）。

命題 距離空間上の関数が上半連続であることと次が成り立つことは同値である.

$$\forall a \in X, \forall \varepsilon > 0; (\exists \delta > 0; (d(x, a) < \delta \implies f(x) > f(a) - \varepsilon))$$

命題 3.11 の不等式は間違いなので訂正しておいてください.

証明 $\forall a \in X$ をとる. $\forall \varepsilon > 0$ について $f(a) \in (f(a) - \varepsilon, \infty) \in O_l(\mathbb{R})$ である. f の上半連続性から $f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ は X の開集合である. この集合は a を含むので $\delta > 0$ を

$$d(x, a) < \delta \implies x \in f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$$

が成り立つようにとれる. これは $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, \infty)$ すなわち $f(x) > f(a) - \varepsilon$ に他ならない. 逆に

$$d(x, a) < \delta \implies f(x) > f(a) - \varepsilon$$

は $x \in B_\delta(a) \implies x \in f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ を意味する. これは

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$$

であり $f^{-1}((f(a) - \varepsilon, \infty))$ が開集合であること, すなわち f が上半連続であることが分かる.

本日のレポート課題とヒント

来週は試験なので今回のレポート課題の提出締め切りは試験終了後の6月5日13時とする.

課題1 2点以上含む距離空間 X について $U \neq X$ かつ $U \cap \emptyset = \emptyset$ を満たすものがあることを示せ.

【ヒント】異なる点を x, y とおけば $d(x, y) > 0$ である. ここで x を含み y を含まないような開集合 ($B_r(x)$ の形で考えると良い) を作ってみよ.

課題2 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ を示せ.

【ヒント】 $(A \cap B)^\circ$ とは $A \cap B$ に含まれる最大の開集合である. 右辺が開集合であることは明らかなのでこれが $A \cap B$ に含まれることと $(A \cap B)^\circ$ を含むことを示せばよい.

次回の講義について

来週は試験なので授業 (演習を含めて) は行わない. 再来週は直積位相, 等化位相の紹介から始める.

幾何概論 I のレポート課題 (5 月 26 日) の解答例とコメント

課題 1 2 点以上含む距離空間 X について $U \neq X$ かつ $U \neq \emptyset$ を満たすものがあることを示せ.

【解答例】 x, y を X の異なる 2 点としその距離を $r = d(x, y) > 0$ とおく. $U = B_r(x)$ とおけば, U は開集合であり (例 2.29) $x \in U$ を満たす. ゆえに $U \neq \emptyset$ である. 一方 $d(x, y) = r$ より $r \notin B_r(x) = U$ なので $U \neq X$ である.

【コメント】

- やさしい問題だ. なお, $B_r(x)$ が開集合であることを使ったが, その証明は与えていなかったようだ. 簡単なので考えてみてほし.
- この事実から 2 点以上の要素を持つ距離空間の位相は密着位相にはならない. 距離に由来しない位相空間の存在が分かる.

課題 2 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ を示せ.

【解答例】 内部の定義を使った証明

$x \in A^\circ \cap B^\circ$ とする. $x \in A^\circ$ より $x \in U \subset A$ となる開集合 U が存在する. 同様に $x \in V \subset B$ となる開集合 V が存在する. よって $x \in U \cap V \subset A \cap B$ であり $U \cap V$ は開集合なので x は $A \cap B$ の内点である. $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ が成り立つ.

逆に $x \in (A \cap B)^\circ$ をとる. $x \in (A \cap B)^\circ \subset A^\circ$, 同様に $x \in B^\circ$ より $x \in A^\circ \cap B^\circ$ であり $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である. 以上を合わせて $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である.

【解答例】 A° とは A に含まれる最大の開集合であることを使った証明

A°, B° はともに開集合なので $A^\circ \cap B^\circ$ も開集合である. また $A^\circ \subset A$ かつ $B^\circ \subset B$ なので $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$ である. よって $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ である.

一方 $(A \cap B)^\circ \subset A \cap B \subset A$ より $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ である. 同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ も成り立つので $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である. 以上を合わせて $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である.

【コメント】

- 議論で $B_r(x)$ のような記号を使った人が目についてが, これは距離空間での議論である. この問題では使ってはいけない.
- 一般に $A \subset B$ ならば $A^\circ \subset B^\circ$ である. この証明も簡単に行えるようになってほしい.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (6月9日)

本日の講義の要点

1. 開基

開基の定義は p.14 の定義 3.15 をみること。ただし開基に関する議論は次の命題が基本である。講義で解説したことを整理しておく。

- 命題 3.13 の証明

$\mathcal{B}$ が開基であれば空でない開集合 U は $U = \bigcup_{\lambda} V_{\lambda}$, $V_{\lambda} \in \mathcal{B}$ と表せる。ゆえに $x \in U$ について $x \in V_{\lambda}$ となる λ が存在するが、これは $x \in V_{\lambda} \subset U$ を満たす $\mathcal{B}$ の要素である。

逆に空でない開集合 $U \in \mathcal{O}(X)$ が $\forall x \in U; (\exists V \in \mathcal{B}; (x \in V \subset U))$ を満たしたとする。 $x \in U$ についてこの条件を満たす $V_x \in \mathcal{B}$ をとれば、 $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ となる。よって U は $\mathcal{B}$ の要素の合併で表すことができ、 $\mathcal{B}$ は開基である。

- 命題 3.14 の簡略化

距離空間 (X, d) について $\{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ は $\mathcal{O}_d(X)$ の開基である。これは距離空間における開集合の特徴づけ (命題 2.33) と命題 3.13 の主張を比較すればよい。

- 与えられた集合族を開集合とする最弱の位相

$\mathcal{B}_0$ を X の部分集合の族とする。もちろんこれは開集合の公理を満たさない。そこで、これを含む最小の開集合系を構成する。まず

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_0 \text{ の有限個の要素の共通部分全体の集合} \} \cup \{X\}$$

とおく。そして

$$\mathcal{O}(X) = \{\mathcal{B} \text{ の (一般には非可算無限個の) 要素の和集合全体の集合} \} \cup \{\emptyset\}$$

とおく。これは位相であり $\mathcal{B}$ はその開基である。

証明 (1) $X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{O}(X)$ より $X \in \mathcal{O}(X)$ である。また定義から $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$ である。

(2) $\mathcal{O}(X)$ の定義から $\mathcal{O}(X)$ の要素の和集合は $\mathcal{O}(X)$ に属する。

(3) 2 個の $\mathcal{O}(X)$ の要素の共通部分が $\mathcal{O}(X)$ に属することを示せば十分である (n 個の集合の共通部分は 2 個の集合の共通部分を取る操作を $n-1$ 回繰り返せばよい)。 $\mathcal{O}(X)$ の要素は $\mathcal{B}$ の要素の和集合なので $U_{\alpha} \in \mathcal{B}$, $V_{\beta} \in \mathcal{B}$ について

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_{\alpha} \cap V_{\beta})$$

が成り立つ。 $U_{\alpha} \cap V_{\beta} \in \mathcal{B}$ なのでこれは $\mathcal{O}(X)$ の要素である。

2. 直積位相

定義 3.7 をみよ。なお、

$$\bigcap_{j=1}^N (U_j \times V_j) = \left(\bigcap_{j=1}^N U_j \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^N V_j \right)$$

なので $\mathcal{B}$ の有限個の共通部分は $\mathcal{B}$ に他ならない。それゆえ $\mathcal{B}$ を含む最弱の位相は $\mathcal{B}$ を開基とする位相でありそれが直積位相である。

- 命題 3.20 は命題 3.13 を直積位相に関し書き直したものである。 $U \times V \in \mathcal{B}$ に注意せよ。
- 命題 3.21 の証明

(1) $U \in \mathcal{O}(X)$ について $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $p_Y^{-1}(V) = X \times V$ である。ゆえに直積位相のもとで p_X, p_Y はともに連続である。

逆に p_X, p_Y がともに連続であれば, $U \times Y, X \times V$ は $X \times Y$ の開集合でなければならない。よって $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ より $\mathcal{B}$ の要素はすべて開集合になる。この位相は直積位相を含む。すなわち直積位相より強い位相である。

(2) $p_X \circ f$ と $p_Y \circ f$ はともに連続だとする。 $U \in \mathcal{O}(X)$ について $(p_X \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p_X^{-1}(U))$ は Z の開集合だがこれは $f^{-1}(U \times Y) \in \mathcal{O}(Z)$ を意味する。同様に $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $f^{-1}(X \times V) \in \mathcal{O}(Z)$ であり, 2つの共通部分をとって $f^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{O}(Z)$ を得る。 $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ は $W = \bigcup_{\lambda} (U_{\lambda} \times V_{\lambda})$, $U_{\lambda} \in \mathcal{O}(X), V_{\lambda} \in \mathcal{O}(Y)$ と表されるので命題 1.12 より

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \times V_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(U_{\lambda} \times V_{\lambda}) \in \mathcal{O}(Z)$$

となる。ゆえに f は連続である。

- 講義ではきちんと述べなかったが, 距離空間の直積空間の位相は, 位相空間としての直積空間の位相と一致する。すなわち $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}(X \times Y)$ は $\mathcal{O}_{d_X}(X)$ と $\mathcal{O}_{d_Y}(Y)$ の直積位相である。これについては次回補足しよう。

3. 等化位相

定義 3.8 で等化位相を定めた。これが位相になることは命題 1.12 を利用して開集合の公理を一つずつチェックすればよい。

- 位相空間 X に同値関係 $\sim$ を与えた時, その商集合に射影 $p: X \rightarrow X/\sim$ による等化位相を入れたものを商空間という。部分集合に相対位相をいれた部分空間, 直積集合に直積位相を入れた直積空間, 商集合に等化位相を入れた商空間が位相の導入の仕方の最も基本的なものである。

- 命題 3.23 の証明

(1) $\mathcal{O}(Y)$ の定義から f の連続性は明らかであり, またこれ以上開集合を増やすと連続でなくなることも明らかである。(1) は自明である。

(2) $g \circ f$ が連続だとする。 $W \in \mathcal{O}(Z)$ について $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{O}(X)$ だがこれは $g^{-1}(W) \in \mathcal{O}(Y)$ を意味している。ゆえに g は連続である。

4. 直積集合の内部 (演習)

直積空間 $X \times Y$ において $(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ}$ が成り立つことを考えてもらった。使うことは内点であることと条件

$$x \in A^{\circ} \iff \exists U \in \mathcal{O}(X); x \in U \subset A$$

である。この理解により $(A \times B)^{\circ} \subset A^{\circ} \times B^{\circ}$ は次のように自然に証明できる。

- $(x, y) \in (A \times B)^{\circ}$ をとる。
- 内点であることから $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ を $(x, y) \in W \subset A \times B$ となるようにとる。
- 直積位相についての命題 3.20 から $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ を $(x, y) \in U \times V \subset W$ となるようにとる。
- $x \in U \subset A$ より $x \in A^{\circ}$, $y \in V \subset B$ より $y \in B^{\circ}$ を得る。ゆえに $(x, y) \in A^{\circ} \times B^{\circ}$ である。

逆の包含関係も同様に示せるが, $A^{\circ} \times B^{\circ} \in \mathcal{O}(X \times Y)$ と $A^{\circ} \times B^{\circ} \subset A \times B$ および $(A \times B)^{\circ}$ が $A \times B$ に含まれる最大の開集合であることを組み合わせても簡単に分かる。

5. 対角線写像の連続性 (演習)

位相空間 X とその直積空間 $X \times X$ について, 対角線写像 $f: X \rightarrow X \times X, f(x) = (x, x)$ の連続性を考えてもらった. 解答は直積位相の定義を利用して開集合の逆像が開集合であることを示す方法 (レポート課題にした) と, 命題 3.21(2) を利用する方法がある. なお射影を p_X と書いてしまうと両方同じになってしまうので $p_1(x_1, x_2) = x_1, p_2(x_1, x_2) = x_2$ と表すと良い. これにより $p_1 \circ f$ と $p_2 \circ f$ はともに恒等写像になるので連続である.

6. 等化位相の特徴づけ (演習)

位相空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続, 全射, 開写像のとき $O(Y)$ は f による等化位相 $O^*(Y)$ と一致することを考えてもらった. なお, 開写像とは開集合の像が開集合であること, すなわち

$$U \in O(X) \implies f(U) \in O(Y)$$

が成り立つことをいう.

- f は連続なので命題 3.23(1) より $O(Y)$ は $O^*(Y)$ より弱い. すなわち $O(Y) \subset O^*(Y)$ である.
- $V \in O^*(Y)$ をとる. 等化位相の定義から $f^{-1}(V) \in O(X)$ である.
- f は開写像なので $f(f^{-1}(V)) \in O(Y)$ である.
- $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$ と f が全射であることから $V = f(f^{-1}(V))$ が成り立つ.
- ゆえに $V \in O(Y)$ であり $O^*(Y) \subset O(Y)$ を得る. よって $O(Y) = O^*(Y)$ である.

本日のレポート課題とヒント

課題 1 直積空間 $X \times Y$ において $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ が成り立つことを示せ.

【ヒント】 集合の相等なので一方の要素が他方の要素になることを言えばよい. なお次を基本事項として使うこと.

$$x \in \overline{A} \iff \text{「} x \in U \in O(X) \implies U \cap A \neq \emptyset \text{」}$$

課題 2 位相空間 $(X, O(X))$ について $f: X \rightarrow X \times X$ を $f(x) = (x, x)$ で定める. このとき $W \in O(X \times X)$ について $f^{-1}(W) \in O(X)$ となることを示せ.

【ヒント】 $f^{-1}(W) = \emptyset$ の場合は確かに開集合になっている. 空でない場合に $x \in f^{-1}(W)$ をとって直積位相の定義を使い $x \in U \subset f^{-1}(W)$ となる開集合を見つければよい.

課題 3 $\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \cap V_\beta)$ を示せ.

次回の講義について

次回は第二可算公理と可分について解説する. 位相空間はあまりに一般的な概念なので, それだけではなかなか使えない. そこで実際に位相空間を扱う場合はなにがしかの不可的性質をつけて扱う. その最初の例が次回扱う概念である.

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 9 日) の解答例とコメント

課題 1 直積空間 $X \times Y$ において $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 まず $(a, b) \in \overline{A \times B}$ をとる. $a \in U \in \mathcal{O}(X)$ および $b \in V \in \mathcal{O}(Y)$ を満たす U, V をとれば $(a, b) \in U \times V \in \mathcal{O}(X \times Y)$ なので $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$ である.

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset$$

より $U \cap A \neq \emptyset$ と $V \cap B \neq \emptyset$ を得る. よって $a \in \overline{A}$ かつ $b \in \overline{B}$ であり $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ である.

逆に $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ とする. $(a, b) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ について $(a, b) \in U \times V \subset W$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ がとれる. $a \in \overline{A}$ より $A \cap U \neq \emptyset$ である. 同様に $b \in \overline{B}$ より $B \cap V \neq \emptyset$ である. よって $W \cap (A \times B) \supset (U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset$ であり $(a, b) \in \overline{A \times B}$ である.

【コメント】

- 前半の証明で最初に $(a, b) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ なる W をとってしまうと $U \times V \subset W$ となる U, V は任意にとったものではなくなる. $a \in \overline{A}$ の証明には使えない.
- $(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B)$ は $x \in U$ かつ $y \in V$ かつ $x \in A$ かつ $y \in B$ である. 4つの命題を「かつ」で結んでいるので順序はなんでもかまわない. 証明で使った事実はこのことから理解できる.

課題 2 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ について $f: X \rightarrow X \times X$ を $f(x) = (x, x)$ で定める. このとき $W \in \mathcal{O}(X \times X)$ について $f^{-1}(W) \in \mathcal{O}(X)$ となることを示せ.

【解答例】 $f^{-1}(W) = \emptyset$ のときは定義より開集合である. $f^{-1}(W) \neq \emptyset$ とし $x \in f^{-1}(W)$ をとる. $f(x) = (x, x) \in W \in \mathcal{O}(X \times X)$ である. ゆえに $U, V \in \mathcal{O}(X)$ で $(x, x) \in U \times V \subset W$ を満たすものが存在する.

$y \in U \cap V$ について $f(y) = (y, y) \in (U \cap V) \times (U \cap V) \subset U \times V \subset W$ より $y \in f^{-1}(W)$ である. よって $x \in U \cap V \subset f^{-1}(W)$ であり $U \cap V \in \mathcal{O}(X)$ と合わせて $f^{-1}(W) \in \mathcal{O}(X)$ を得る.

【コメント】

- $(x, x) \in U \times U \subset W$ とした答案が目立ったが, なぜ同じ U に取れるのかは注意が必要だ. 間違いとまでは言い切れないが.

課題 3 $\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right) = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_{\alpha} \cap V_{\beta})$ を示せ.

【解答例】 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right)$ をとる. $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ かつ $x \in \bigcup_{\beta \in B} V_{\beta}$ である. 合併の定義から $x \in U_{\alpha_0}$ を満たす $\alpha_0 \in A$ をとる. 同様に $x \in V_{\beta_0}$ を満たす $\beta_0 \in B$ をとる. $x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0} \subset \bigcup_{\alpha, \beta} (U_{\alpha} \cap V_{\beta})$ より $\subset$ の包含関係を得る.

逆に $x \in \bigcup_{\alpha, \beta} (U_{\alpha} \cap V_{\beta})$ をとる. 合併の定義から $x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}$ を満たす α_0, β_0 を取ることができる. $x \in U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ および $x \in V_{\beta_0} \subset \bigcup_{\beta \in B} V_{\beta}$ より $x \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0} \subset \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} V_{\beta} \right)$ であり $\supset$ の包含関係を得る.

【コメント】

- 定義を組み合わせるだけで, 易しい証明であることを理解してほしい.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (6月16日)

本日の講義の要点

1. 第二可算公理

位相空間についての議論は、さらに付加的な条件を付けて展開することが多い。この不可的な条件を数回に分けて解説していく。今日の講義では可算性に関する2つの性質を紹介した。公理というが、自明な事実というわけではない。さて、第二可算公理とは、可算個の開集合からなる開基が存在することを言う。これについて以下の事実を紹介した。

- 第2可算公理を満たす位相空間の部分空間が第2可算公理を満たすこと (命題 3.24(1))

証明 Y を X の部分空間とし、 X の可算開基を $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく。 $\forall V \in \mathcal{O}(Y)$ について、相対位相の定義から $V = Y \cap U$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X)$ が存在する。 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(X)$ の開基なので

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$$

と表せる^{*1}。 $V = U \cap Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_{n_k} \cap Y)$ だが $B_n \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ なので、これは $\mathcal{B}_0 = \{B_n \cap Y \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathcal{O}(Y)$ の開基であることを意味する。

- 第2可算公理を満たす2つの位相空間の直積空間が第2可算公理を満たすこと (命題 3.24(2))

証明 $\mathcal{B}_X = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{O}(X)$ の可算開基、 $\mathcal{B}_Y = \{C_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ を $\mathcal{O}(Y)$ の可算開基とする。このとき

$$\mathcal{B} = \{B_n \times C_m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$$

が $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基になることを示せばよい (添え字集合 $\mathbb{N}^2$ は加算集合であることに注意せよ)。これは開基の特徴づけとして命題 3.13 を利用して証明する。

$\emptyset \neq W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ および $(x, y) \in W$ をとる。直積位相の定義から

$$(x, y) \in U \times V \subset W, \quad U \in \mathcal{O}(X), V \in \mathcal{O}(Y)$$

を満たす U, V が存在する。 $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ は開基なので

$$x \in B_{n_0} \subset U, y \in C_{m_0} \subset V, \quad B_{n_0} \in \mathcal{B}_X, C_{m_0} \in \mathcal{B}_Y$$

となる n_0, m_0 をとることができる。ゆえに

$$(x, y) \in B_{n_0} \times C_{m_0} \subset U \times V \subset W$$

であり $B_{n_0} \times C_{m_0} \in \mathcal{B}$ なので $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基である。

2. 稠密

$A \subset X$ について $\forall U \in \mathcal{O}(X); A \cap U \neq \emptyset$ と $X = \bar{A}$ が成り立つことは同値である。この条件が成り立つ集合を稠密集合という。

同値性の証明 $\forall U \in \mathcal{O}(X); A \cap U \neq \emptyset$ が成り立つとする。 $x \in X$ と $x \in U \subset \mathcal{O}(X)$ をとるとき $U \cap A \neq \emptyset$ なので $x \in \bar{A}$ である (5月26日の講義メモの5参照)。ゆえに $X = \bar{A}$ が成り立つ。逆に $X = \bar{A}$ とし、 $U \in \mathcal{O}(X)$ を空でない開集合とする。 $x \in U$ について $x \in \bar{A}$ から $A \cap U \neq \emptyset$ である。

^{*1} 有限個の合併になることもあるが、場合分けがわずらわしいので無限個の合併として記述した。有限個の場合は表記の仕方が変わるだけだ。

稠密集合の代表的な例としては $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ がある。 $\mathbb{R}$ の空でない開集合 U は开区間を含むが、开区間の中には必ず有理数が属している。すなわち $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ である。

3. 可分

位相空間が可算稠密集合を持つとき可分であるという。

- 2つの可分な位相空間の直積空間は可分である。(命題 3.27(1))

証明 A を X の可算稠密集合, B を Y の可算稠密集合とする。6月9日のレポート課題1より

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = X \times Y$$

となるので $A \times B$ は $X \times Y$ の稠密集合である。

- 全射連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について X が可分なら Y も可分である。特に可分な位相空間から作られる等化位相は可分である。(命題 3.27(2))

証明 A を X の稠密集合とする。 $\forall V \in \mathcal{O}(Y), V \neq \emptyset$ について $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ であり、かつ全射なので $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である*2。よって A の稠密性から $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である。 $x \in A \cap f^{-1}(V)$ をとれば $f(x) \in V$ であり、かつ $f(x) \in f(A)$ である。よって $f(A) \cap V \neq \emptyset$ であり $f(A)$ は Y の稠密集合である。 A は可算なので $f(A)$ も可算であり Y は可分である。

4. 第2可算公理と可分の関係

- 命題 第2可算公理を満たす位相空間は可分である。

証明 $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を X の可算開基とし $B_n \neq \emptyset$ としておく。 $x_n \in B_n$ をとり $A = \{x_n\}$ とおく。このとき A が稠密集合であることを示す。

$U \in \mathcal{O}(X), U \neq \emptyset$ をとる。 $x \in U$ について $x \in B_{n_0} \subset U$ となる B_{n_0} をとる。 $x_{n_0} \in B_{n_0} \cap A \subset U \cap A$ より $U \cap A \neq \emptyset$ なので A は稠密である。

- 距離により定めた位相についてはこの逆が成立する。(命題 3.28)

証明 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を可算稠密集合とする。可算個の開集合の族

$$\mathcal{B} = \{B_{1/m}(x_n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$$

が開基になることを示す。 U を X の空でない開集合とし $x \in X$ をとる。自然数 m_0 を $B_{1/m_0}(x) \subset U$ となるようにとる。 A が稠密であることから、自然数 n_0 を $x_{n_0} \in B_{1/(2m_0)}(x) \cap A$ となるようにとる。

$$y \in B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \iff d(x_{n_0}, y) \leq \frac{1}{2m_0} \implies d(x, y) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \frac{1}{2m_0} + \frac{1}{2m_0} = \frac{1}{m_0}$$

より $y \in B_{1/m_0}(x) \subset U$ であり $B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \subset U$ を得る。また $d(x, x_{n_0}) < 1/(2m_0)$ も成り立つので

$$x \in B_{1/(2m_0)}(x_{n_0}) \subset U$$

を得る。命題 3.13 より $\mathcal{B}$ は開基である。

5. $f: X \rightarrow Y$ が連続であれば $B \subset Y$ について $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ が成り立つこと (演習)

演習の時間に扱った事項なので、いかに自然に証明ができるのかを理解するようにしてほしい。

- 包含関係の証明なので $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ を仮定して $x \in f^{-1}(\overline{B})$ を導く。
- いうべきことは $f(x) \in \overline{B}$ なので、5月26日の講義メモの5を示すために $f(x) \in V$ を満たす開集合 $V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる。

*2 講義ではこのことに注意するのを忘れていました。補足しておきます。

- $x \in f^{-1}(V)$ と f の連続性より $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ なので、仮定 $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ から $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ が成り立つ.
 - 命題 1.12 より $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(V \cap B) \neq \emptyset$ なので $V \cap B \neq \emptyset$ である.
 - $f(x) \in \overline{B}$ となるので $x \in f^{-1}(\overline{B})$ が得られた.
6. $f: X \rightarrow Y$ が開写像 (すなわち, 開集合の像が常に開集合になるような写像) とするとき, $A \subset X$ について $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$ が成り立つこと (演習)
- $y \in f(A^\circ)$ をとる. $f(x) = y$ と $x \in A^\circ$ を満たす x が存在する.
 - $x \in A^\circ$ より開集合 $U \in \mathcal{O}(X)$ で $x \in U \subset A$ を満たすものが存在する.
 - f は開写像なので $f(U) \in \mathcal{O}(Y)$ である. また $y = f(x) \in f(U) \subset f(A)$ が成り立つ.
 - これは $y \in (f(A))^\circ$ を意味するので, $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$ が成り立つ.

今日, 演習の時間に扱った 2 つの問題は, 一瞬難しそうに見えるが, 連続 (開写像) の定義と内点触点の定義 (5 月 26 日の講義メモ 4 と 5) を組み合わせるだけで, 証明の単純さを感じ取るようにしてほしい.

本日のレポート課題とヒント

課題 1 $f: X \rightarrow Y$ を連続とする. このとき $B \subset Y$ について $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つことを示せ.

課題 2 $f: X \rightarrow Y$ を閉写像とする (閉集合の像が常に閉集合になるような写像をいう). このとき $A \subset X$ について $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ が成り立つことを示せ.

【ヒント】 どちらの問題も今日やった 2 つの命題と同じように証明できる. なお, 「 A の閉包とは A を含む最小の閉集合である」「 A の内部とは A に含まれる最大の開集合である」という事実を使うと簡単に証明できるが, ここではこの講義メモに書いた証明の方針をまねて考えること.

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 16 日) の解答例とコメント

課題 1 $f: X \rightarrow Y$ を連続とする. このとき $B \subset Y$ について $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 $x \in f^{-1}(B^\circ)$ をとる. $f(x) \in B^\circ$ なので $V \in \mathcal{O}(Y)$ で $f(x) \in V \subset B$ を満たすものが存在する. $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(B)$ であり f の連続性から $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ なので $x \in (f^{-1}(B))^\circ$ である. よって $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ が成り立つ.

【コメント】 手ごろな問題なのでよくできていた. 特にコメントすべきことはない.

課題 2 $f: X \rightarrow Y$ を閉写像とする (閉集合の像が常に閉集合になるような写像をいう). このとき $A \subset X$ について $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ が成り立つことを示せ.

【解答例】 $y \in \overline{f(A)}$ をとり, $y \notin f(\overline{A})$ として矛盾を満ちびく. $\overline{A}$ は閉集合であり, f は閉写像なので $f(\overline{A})$ は閉集合である. よってその補集合は開集合になる. $y \in (f(\overline{A}))^c \in \mathcal{O}(Y)$ と $y \in \overline{f(A)}$ より $f(A) \cap (f(\overline{A}))^c \neq \emptyset$ であるが $f(A) \subset f(\overline{A})$ より $(f(\overline{A}))^c \subset (f(A))^c$ なので $f(A) \cap (f(A))^c \neq \emptyset$ を得る. これは矛盾である. よって $y \in f(\overline{A})$ が成り立つ.

【コメント】

- 難しかったようだ. 閉写像という条件をどう使うかが課題だが, 背理法を使うことに気付かないとなかなかうまくいかない.
- $y \in \overline{f(A)}$ から $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ を満たす V をとって $f^{-1}(y) \in f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ とする答案が目についたが f^{-1} は写像として定められているわけではないので $f^{-1}(y)$ という書き方は許されない. $f^{-1}(\{y\})$ とするとこれは集合なので $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V)$ と書かなくてははいけない. $\in$ は使えない.
- 閉写像の定義は問題文中に記述しておいた. これを理解していない答案が目についた.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (6月23日)

本日の講義の要点

1. 分離公理

テキストにはハウスドルフしか記述しなかったが、分離公理には以下の4種類がある。

公理	分離の対象	分離の仕方
T_1	異なる2点 $p \neq q$	$\exists U \in \mathcal{O}(X); (p \in U, q \notin U)$
T_2	異なる2点 $p \neq q$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset)$
T_3	点 p と閉集合 $F, p \notin F$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (p \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset)$
T_4	2つの閉集合 $F, G, F \cap G = \emptyset$	$\exists U, V \in \mathcal{O}(X); (F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset)$

T_2 がハウスドルフ

フの分離公理である。

2. 1点のみの集合は閉集合になるか (命題 3.30)

密着位相を考えれば1点のみの集合が閉集合とは必ずしも言えない。しかし、分離公理 T_1 を満たせば閉集合になる。テキストではハウスドルフ (T_2) で記述している。証明を記しておく。

証明 $p \in X$ をとる。 $X \setminus \{p\}$ が開集合であることを言えばよい。そこで $q \in X \setminus \{p\}$ をとれば $p \neq q$ である。そこで T_1 により $U \in \mathcal{O}(X)$ を $q \in U, p \notin U$ となるようにとる。 $q \in U \subset X \setminus \{p\}$ より $q \in (X \setminus \{p\})^\circ$ となる。よって $X \setminus \{p\}$ は開集合である。

T_2 を満たす位相空間をハウスドルフ空間という。 T_3 と T_1 を満たす位相空間を正則空間という。正則空間はハウスドルフである。 T_4 と T_1 を満たす位相空間を正規空間と呼ぶ。正規空間は正則空間である。

3. 分離公理の部分空間への伝播 (定理 3.32)

公理 T_1, T_2, T_3 については部分空間に伝播する。すなわち X が $T_i, i = 1, 2, 3$ を満たせばその部分空間 Y も $T_i, i = 1, 2, 3$ を満たす。 T_1 と T_2 については易しいので講義では T_3 について証明した。

証明 $p \in Y$ と Y の閉集合 F で $p \notin F$ を満たすものをとる。相対位相の定義から X の閉集合 G で $F = G \cap Y$ を満たすものが存在する。 $p \notin F = G \cap Y$ と $p \in Y$ より $p \notin G$ なので X が T_3 を満たすことから $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X)$ で $p \in U_1, G \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるように選ぶ。 Y との共通部分をとれば

$$p \in U_1 \cap Y, G \cap Y \subset U_2 \cap Y, (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset$$

である。これは p と F が $U_1 \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ と $U_2 \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ で分離されることを意味する。

T_4 については一般には伝播しない。 Y の二つの閉集合 $F_1, F_2, F_1 \cap F_2 = \emptyset$ について、 $F_1 = G_1 \cap Y, F_2 = G_2 \cap Y$ となるような X の閉集合 G_1, G_2 をとった時に、 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ となる保証がないからだ。ただし、 Y が X の閉集合のときには $F_i = G_i \cap Y$ が X の閉集合になるので $G_i = F_i$ として差支えないことになる。すなわち Y が閉部分空間の場合には X が T_4 を満たせば Y も T_4 を満たす。証明を考えてみよ。

4. 分離公理の直積空間への伝播 (定理 3.32)

T_1 と T_2 の公理が直積空間に伝播することは易しい。 T_2 の場合が定理 3.32 でありこの証明を与えておく。

命題 X, Y が T_2 を満たす時、 $X \times Y$ も T_2 を満たす。

証明 $X \times Y$ の異なる2点 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ をとる。 $p_1 \neq p_2$ のときは X が T_2 を満たすことから $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X)$ を $p_1 \in U_1, p_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるようにとれる。 (p_1, q_1) と (p_2, q_2) は $U_1 \times Y$ と $U_2 \times Y$ で分離される。

$p_1 = p_2$ のときは $q_1 \neq q_2$ なので, q_1, q_2 を分離する開集合 $V_1, V_2 \in \mathcal{O}(Y)$ をとれば X と Y を入れ替えた形で全く同じ議論ができる. いずれにしても開集合で分離できるので T_2 を満たす. ハウスドルフである.

T_3 も伝播するがそれは後ほど.

5. 対角線集合が閉集合であることとハウスドルフ空間であることとの同値性 (定理 3.31)

対角線集合とは $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ をいう.

証明 X がハウスドルフ空間であるとし, D^c が開集合であることを示す. $(p, q) \in D^c$ とは $p \neq q$ ということなので T_2 より $U, V \in \mathcal{O}(X)$ を $p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$ となるようにとれる. $U \cap V = \emptyset$ より $U \times V \cap D = \emptyset$ である. よって $(p, q) \in U \cap V \subset D^c$ なので D^c は開集合である. よってその補集合 D は閉集合である.

6. 距離空間は正規空間である. すなわち T_1 と T_4 を満たす. (例 3.29)

T_1 については $d(p, q) = r$ とおき, $U = B_{r/2}(p)$ とおけばよい.

T_4 については距離空間 X の 2 つの閉集合 $F < G$ を $F \cap G = \emptyset$ となるようにとる. 命題 2.44 (証明は 5 月 12 日のレポート課題の解説を見よ.) より

$$g(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, G) + d(x, F)}$$

は X 上の連続関数になる. $F = g^{-1}(\{0\})$ と $G = g^{-1}(\{1\})$ より F と G は開集合 $U = g^{-1}((-\infty, 1/3))$ と $V = g^{-1}((2/3, \infty))$ で分離できる.

7. 分離公理 T_3 の言い換え

命題 X が T_3 を満たすことと次の条件 T'_3 が成り立つことは同値である.

$$(T'_3) \quad \forall p \in X, p \in \forall U \in \mathcal{O}(X); (\exists V \in \mathcal{O}(X); (p \in V \subset \bar{V} \subset U))$$

証明 X が T_3 を満たすとし, $p \in U \in \mathcal{O}(X)$ なる U をとる. U^c は閉集合であり, かつ $p \notin U^c$ なので開集合 V, W で $p \in V, U^c \subset W, V \cap W = \emptyset$ を満たすものが存在する. $V \subset W^c$ と W^c が閉集合であることから $\bar{V} \subset W^c$ であり

$$p \in V \subset \bar{V} \subset W^c \subset U$$

が成り立つ. ゆえに T'_3 が成り立つ.

逆に T'_3 が成り立つとし $p \in X$ と $p \notin F$ を満たす閉集合 F をとる. $p \in F^c \in \mathcal{O}(X)$ より T'_3 により $p \in V \subset \bar{V} \subset F^c$ を満たす V がとれる. $F \subset (\bar{V})^c \in \mathcal{O}(X)$ より, p と F は V と $(\bar{V})^c$ で分離される. よって T_3 が成り立つ.

この命題を利用して T_3 が直積空間に伝播することが示せるがこれはレポート課題にした.

8. (演習) T_1 を満たし T_2 を満たさない位相空間の例

X を無限集合とし $\mathcal{O}(X) = \{U \subset X \mid U^c \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ と定める. これは位相空間であることを示せ. また T_1 を満たすことを示せ.

証明 (1) X の補集合は有限集合 (空集合) なので $X \in \mathcal{O}(X)$ である. また定義から $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$ である.

(2) 開集合の合併 $\bigcup U_\lambda$ を考える. $(U_\lambda)^c$ は有限集合または全体集合である.

$$\left(\bigcup U_\lambda\right)^c = \bigcap (U_\lambda)^c$$

であるが, これは有限集合または全体集合である, よって $\bigcup U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ が成り立つ.

(3) 有限個の開集合の共通部分を考える.

$$\left(\bigcap_{n=1}^N U_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^N (U_n)^c$$

なのでこれは有限集合かまたは全体集合である. よって $\bigcap_{n=1}^N U_n$ も有限集合か全体集合であり $O(X)$ に属する. 以上から $O(X)$ は開集合の公理を満たす.

T_1 を満たすことについては $U = X \setminus \{q\}$ とおけば $p \in U, q \notin U$ であり T_1 が成り立つ.

9. (演習) Y がハウスドルフであるとき, 2つの連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ について $A = \{x | f(x) = g(x)\} \subset X$ は閉集合であることを示せ.

A^c が開集合であることを示す. $p \in A^c$ をとる.

- $p \notin A$ より $f(p) \neq g(p)$ である.
- Y はハウスドルフなので $V_1, V_2 \in O(Y)$ を $f(p) \in V_1, g(p) \in V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となるようにとる.
- $p \in f^{-1}(V_1) \in O(X)$ と $p \in g^{-1}(V_2) \in O(X)$ より $U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ とおく. $p \in U \in O(X)$ である.
- $x \in U$ をとる. $x \in U \subset f^{-1}(V_1)$ より $f(x) \in V_1$ である. また $x \in U \subset g^{-1}(V_2)$ より $g(x) \in V_2$ である. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ なので $f(x) \neq g(x)$ であり $x \notin A$ を得る. $x \in A^c$ であり $U \subset A^c$ が得られた.
- A^c は開集合なので A は閉集合である.

本日のレポート課題とヒント

課題1 X, Y が T_3 を満たす時, 直積空間 $X \times Y$ も T_3 を満たすことを示せ.

課題2 無限集合 X の位相を「 $U \in O(X) \iff U = \emptyset$ または U^c は有限集合」で定めるとき, $U, V \in O(X)$ で $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ ならば $U \cap V \neq \emptyset$ であることを示せ.

課題3 Y がハウスドルフ空間であるとき, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ についてそのグラフ $G = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$ は閉集合であることを示せ.

【ヒント】課題1 は今日の講義メモの7の T_3 の言い換え T'_3 を利用する. $(p, q) \in W \in O(X \times Y)$ として, 直積位相の定義および6月9日出題の課題1を利用する.

課題2 は易しい. 補集合をとって考えよ.

課題3 は G^c が開集合であることを示す. $(x, y) \in G^c$ をとると $y \neq f(x) \in Y$ なので, ここに Y がハウスドルフであることを利用する. この問題は少しむづかしめだが考えてみてほしい.

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 23 日) の解答例とコメント

課題 1 X, Y が T_3 を満たす時, 直積空間 $X \times Y$ も T_3 を満たすことを示せ.

【解答例】 6 月 23 日の講義メモ 7 にある T_3 の言い換え T'_3 を利用して証明する. $(p, q) \in X \times Y$ と, それを含む開集合 $(p, q) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる. 直積位相の定義により $(p, q) \in U \times V \subset W$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ と $V \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する. $p \in U \in \mathcal{O}(X)$ と $q \in V \in \mathcal{O}(Y)$ なので, X, Y が T'_3 を満たすことを使えば

$$p \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset U, \quad q \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$$

を満たす $U_0 \in \mathcal{O}(X), V_0 \in \mathcal{O}(Y)$ がとれる. よって

$$(p, q) \in U_0 \times V_0 \subset \overline{U_0} \times \overline{V_0} \subset U \times V \subset W$$

である. ここで 6 月 9 日のレポート課題 1 より $\overline{U_0} \times \overline{V_0} = \overline{U_0 \times V_0}$ なので $X \times Y$ が T'_3 を満たすことが分かる. よって T_3 も満たす.

【コメント】

- $X \times Y$ が T'_3 を満たすことを示したいので, $(p, q) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ について $(p, q) \in W_0 \subset \overline{W_0} \subset W$ を満たす $W_0 \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をどうとるか具体的に示すのが課題である. 解答例では
 - $(p, q) \in U \times V \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X), V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる (直積位相の定義).
 - $p \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset U, \quad q \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$ を満たす $U_0 \in \mathcal{O}(X), V_0 \in \mathcal{O}(Y)$ をとる. (X, Y が T'_3 を満たすこと)
 - $W_0 = U_0 \times V_0$ が求めるものである.
- 上の議論で W を直積 $U \times V$ とおいてはいけない. 特殊な W のみ考えたことになるからだ. しかし, 最後の W_0 は直積の形で良い. 存在を示すのだから一つの例を与えれば十分である.

課題 2 無限集合 X の位相を「 $U \in \mathcal{O}(X) \iff U = \emptyset$ または U^c は有限集合」で定めるとき, $U, V \in \mathcal{O}(X)$ で $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ ならば $U \cap V \neq \emptyset$ であることを示せ.

【解答例】 U, V はともに空集合ではないので $\mathcal{O}(X)$ に属することから U^c, V^c はともに有限集合である. よって $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ も有限集合である. X は無限集合なので $U \cap V$ は無限集合であり空集合ではない.

【コメント】

- この位相では空でない開集合の補集合は有限集合だ. このことに着目すれば証明は難しくない.

課題 3 Y がハウスドルフ空間であるとき, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ についてそのグラフ $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ は閉集合であることを示せ.

【解答例】 $(p, q) \in G^c$ をとる. $q \neq f(p)$ よりこの 2 点を開集合で分離する.

$$q \in V \in \mathcal{O}(Y), \quad f(p) \in W \in \mathcal{O}(Y), \quad V, W \in \mathcal{O}(Y), \quad V \cap W = \emptyset$$

次に $(x, y) \in f^{-1}(W) \times V \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる.

$$f(x) \in W, \quad y \in V, \quad W \cap V = \emptyset$$

より $y \neq f(x)$ なので $(x, y) \in G^c$ であり $f^{-1}(W) \times V \subset G^c$ が成り立つ. $(p, q) \in f^{-1}(W) \times V$ から (p, q) は G^c の内点であり, G^c は開集合である. よって G は閉集合である.

【コメント】

- $f(x) \in W, y \in V, W \cap V = \emptyset$ より $y \neq f(x)$ を導くのがポイントだ. よく考えてみるように.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (6月30日)

本日の講義の要点

1. 連結性

位相空間 X が連結であるとは, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \in \mathcal{O}(X)$ ならば U, V の一方が全体集合 (従って他方は空集合) になることだ (定義 3.12). これに関してまず次の命題を紹介した.

命題 位相空間 X について次の 3 つの主張は同値である.

(1) X は連結である.

(2) X の開集合かつ閉集合である部分集合は X と $\emptyset$ に限る.

(3) X から離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像は定値写像に限る.

証明 「(1) $\implies$ (2)」 U は閉集合かつ開集合であるとする. U^c も開集合なので $X = U \cup U^c$, $U \cap U^c = \emptyset$ より $U = X$ または $U = \emptyset$ である.

「(2) $\implies$ (3)」 離散空間においてはすべての集合が開集合かつ閉集合なので $U = f^{-1}(\{1\})$ も開集合かつ閉集合である. $U = X$ の場合は 1 に値をとる定値写像, $U = \emptyset$ の場合は 2 に値をとる定値写像である.

「(3) $\implies$ (1)」 X の開集合 U, V で $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものをとる. 写像 $f: X \rightarrow \{1, 2\}$ を

$$x \in U \text{ について } f(x) = 1, \quad x \in V \text{ について } f(x) = 2$$

と定める. $f^{-1}(\{1, 2\}) = X$, $f^{-1}(\{1\}) = U$, $f^{-1}(\{2\}) = V$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ より離散空間 $\{1, 2\}$ の 4 つの開集合 (4 つの部分集合) の逆像はすべて開集合なので f は連続である. (3) より f は定値写像になるが, これは $U = X$, $V = \emptyset$ または $U = \emptyset$, $V = X$ であることを意味する.

2. 連結集合の像の連結性

位相空間 X の部分集合 A が連結であることの定義は定義 3.12 の後半に記述している. これについて定理 3.34 を紹介した. 証明しておく.

定理 3.34 の証明 A を X の連結集合とし, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ による A の像を $f(A)$ とおく. 連続写像 $g: f(A) \rightarrow \{1, 2\}$ を考える. 包含写像を $i: A \rightarrow X$ とおけば $g \circ f \circ i: A \rightarrow \{1, 2\}$ は連結空間からの連続写像なので定値写像である. 仮に $g \circ f \circ i(x) = g(f(x)) = 1$, $x \in A$ とおけば, 任意の $y \in f(A)$ について, $y = f(x)$, $x \in A$ とかけるので $g(y) = g \circ f(x) = 1$ である. よって g は定値写像であり $f(A)$ は連結である.

この事実の系として中間値の定理 (系 3.35) が得られる. それには次を示せばよい.

命題 B を $\mathbb{R}$ の連結集合とする. $a, b \in B$, $a < b$ ならば $[a, b] \subset B$ である.

定理 3.34 から $f(A)$ は $\mathbb{R}$ の連結集合になるので, $f(a), f(b) \in f(A)$, $f(a) < f(b)$ について $[f(a), f(b)] \subset f(A)$ となる. これを言い換えれば系 3.35 の主張になる.

系 3.35 でさらに $X = \mathbb{R}$, $A = [a, b]$ としたものが通常の中間値定理である.

3. 連結成分

まず次の事実を示した.

命題 $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を連結集合の族とする. $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$ なら $A = \bigcup A_\lambda$ は連結である.

この事実から $x \in X$ について, x を含む連結集合で最大のものが存在する. それを C_x と表し (x の属する) 連結成分という. ここで $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ とすると, $C_x \cup C_y$ も連結集合になるが, C_x は x を含む最

大の連結集合なので $C_x = C_x \cup C_y$ である. 同様に $C_y = X_x \cup C_y$ も成り立つので $C_x = C_y$ を得る. X の各点はただ一つの連結成分に属しており, X は連結成分の互いに交わらない合併集合になる.

4. 弧状連結性

定義 3.13 に記述した. 2 点が曲線で結べるという意味なので, 直感的に理解しやすいだろう. この概念について弧状連結ならば連結であること (命題 3.36) を証明した.

証明 X を弧状連結な位相空間とする. X の 2 つの開集合を $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ となるようにとる. ここで $U \neq \emptyset$ かつ $V \neq \emptyset$ とし $p \in U$, $q \in V$ をとる. X の弧状連結性から $C : [0, 1] \rightarrow X$ を $C(0) = p$, $C(1) = q$ ととる. $A = C^{-1}(U) \subset [0, 1]$ とおく. また $\sup A = \alpha$ とおく. A は開集合なので $\alpha \notin A$ である. $[0, 1] = C^{-1}(X) = C^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ なので $\alpha \in f^{-1}(V)$ だが, $f^{-1}(V)$ も開集合なので $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset C^{-1}(V)$ である. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ なので, α の周りに $A = f^{-1}(U)$ の点はないことになり, $\alpha = \sup A$ に矛盾する.

講義では $[0, 1]$ の連結性に帰着させて証明したが, $\mathbb{R}$ の連結性を示すのに「弧状連結ならば連結」という事実を利用したので循環論法になってしまう. ここでは証明を上限を使ったものに修正している.

5. $\mathbb{R}$ の連結集合 (演習)

A を $\mathbb{R}$ の連結集合とし, $a, b \in A$, $a < b$ をとる. このとき $[a, b] \subset A$ が成り立つことについて考えてもらった.

- 背理法を使って $[a, b] \not\subset A$ と仮定しよう.
- $x \in [a, b]$ であっても $x \in A$ とは限らないという意味だから $x \in [a, b]$ で $x \notin A$ なるものをとる.
集合の包含関係を要素によって書き直すことは基本である. このような言い換えができない人が多かったが, 当たり前のことと実感できるまで考えてほしい.
- $a, b \in A$ より $a < x < b$ である. $U = (-\infty, x)$, $V = (x, \infty)$ とおく.
- $A \subset U \cup V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成り立つので A の連結性から $A \subset U$ または $A \subset V$ が成り立つ.
- $A \subset U$ は $b \in A$, $x < b$ に矛盾する. $A \subset V$ は $a \in A$, $a < x$ に矛盾する.
- 背理法の仮定 $[a, b] \not\subset A$ は偽であり, $[a, b] \subset A$ が成り立つ.

6. 連結集合の閉包が連結であること (演習)

A を連結集合とし, 離散空間への連続写像 $f : \bar{A} \rightarrow \{1, 2\}$ を考える. A は連結なので f は A 上定値写像でありその値を 1 としておく. $x \in \bar{A} \setminus A$ について $f(x) = 2$ だったとして矛盾を導こう.

- $\{2\}$ は開集合なので $U = f^{-1}(\{2\}) \in \mathcal{O}(X)$ である.
- $x \in U$ と $x \in \bar{A}$ から $A \cap U \neq \emptyset$ である.
- $y \in A \cap U$ をとると $y \in A$ より $f(y) = 1$ である. また $y \in U = f^{-1}(\{2\})$ より $f(y) = 2$ である. これは矛盾である.

よって $x \in \bar{A} \setminus A$ についても $f(x) = 1$ であり, f は 1 に値をとる定値写像である. よって $\bar{A}$ は連結である.

7. 連結性の伝播 (演習)

連結空間の部分空間が連結とは限らないことは少し考えれば簡単に分かるはずだ. 連結空間からの全射によって作られる等化空間が連結になることは連結集合の連続写像による像が連結であることからすぐに分かる. 連結空間の直積空間が連結になることについてはレポート課題にした.

8. $\mathbb{R}$ の連結性 (演習)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ について $C(t) = (1-t)a + tb$ においてみれば弧状連結であることは簡単に分かる. 直感

的にも明らかだろう。

本日のレポート課題とヒント

課題 1 連結成分は閉集合であることを示せ。また連結成分の個数が有限個のとき、連結成分は開集合かつ閉集合であることを示せ。

課題 2 2 つの連結空間の直積空間は連結であることを示せ。

【ヒント】 課題 1 は今回の講義メモの 6 を使うと良い。簡単だ。課題 2 は直積空間から離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像を考えてみる。 $X \times \{y\}$ が $X \times Y$ の連結集合であることを利用する。

幾何概論 I のレポート課題 (6 月 30 日) の解答例とコメント

課題 1 連結成分は閉集合であることを示せ. また連結成分の個数が有限個のとき, 連結成分は開集合かつ閉集合であることを示せ.

【解答例】 C_x を x の属する連結成分とする. $\overline{C_x}$ も x を含む連結集合なので (6 月 23 日の講義メモ 6) 連結成分の定義から $C_x \supset \overline{C_x}$ である. ゆえに $C_x = \overline{C_x}$ であり C_x は閉集合である.

次に連結成分の個数が有限個だとして, C_x の補集合を考える, X は連結成分の互いに交わらない合併集合なので C_x の補集合は C_x 以外の連結成分の合併である. 連結成分は閉集合なので, その有限個の合併も閉集合であり, その補集合 C_x は開集合になる. よって C_x は開集合かつ閉集合である.

【コメント】

- 前半は連結集合の閉包が連結であることを使えば簡単だ. 後半も X が連結成分の互いに交わらない合併になることを使えば簡単に示せる. 問題を考えるときは, 講義で扱った事実を確認することから始めてほしい.
- 連結成分が無限に多くある場合には連結成分が開集合になるとは限らない. 例えば $X \subset \mathbb{R}$ を

$$X = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right] \right)$$

とすれば $C_0 = \{0\}$ は開集合ではない.

課題 2 2 つの連結空間の直積空間は連結であることを示せ.

【解答例】 X, Y を連結な位相空間とする. $b \in Y$ について $f: X \rightarrow X \times Y$ を $f(x) = (x, b)$ で定めるとき, $p_X \circ f: X \rightarrow X$ は恒等写像, $p_Y \circ f: X \rightarrow Y$ は b への定値写像なので連続である. よって f は連続である. X が連結であることと, 連結集合の連続写像による像が連結であることから, $f(X) = X \times \{b\} \subset X \times Y$ は連結である. 同様に $\{a\} \times Y$ も連結である.

離散空間への連続写像 $g: X \times Y \rightarrow \{1, 2\}$ を考える. $X \times \{b\}$ は連結なので g は $X \times \{b\}$ 上で定値写像である. よって $g(x, b) = g(a, b)$ である. 同様に g は $\{x\} \times Y$ 上で定値写像なので $g(x, b) = g(x, y)$ である. ゆえに $g(x, y) = g(a, b)$ がすべての $(x, y) \in X \times Y$ について成り立つので g は $X \times Y$ 上の定値写像になる. よって $X \times Y$ は連結である. 【コメント】

- 離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像を利用すると比較的簡単に証明できる. なお解答例では $\{a\} \times Y$ の連結性の証明も含めたので若干長くなっている.

幾何概論 I および同演習の講義メモ (7月7日)

本日の講義の要点

1. コンパクト性

定義 3.14 に, 開被覆とコンパクト集合, コンパクト位相空間の定義がある. 密着位相と離散位相においてコンパクト集合が何を意味するかを例 3.38 で与えた.

2. ハウスドルフ空間のコンパクト集合が閉集合であること (命題 3.39)

証明 K を X のコンパクト集合とし, $p \in K^c$ をとる. 各 $x \in K$ について $x \neq p$ なのでハウスドルフを使って

$$U_x, V_x \in \mathcal{O}(x), \quad p \in U_x, \quad x \in V_x, \quad U_x \cap V_x = \emptyset$$

を満たす U_x, V_x をとる. $x \in V_x$ より $\{V_x, x \in K\}$ は K の開被覆である. よって K のコンパクト性から有限個の x をとって

$$K \subset \bigcup_{k=1}^N V_{x_k}$$

とできる. ここで $U = \bigcap_{k=1}^N U_{x_k}$ とおく. U は開集合の有限個の共通部分なので開集合である. またすべての x について $p \in U_x$ なので $x \in U$ である.

$$U \cap K \subset U \cap \left(\bigcup_{k=1}^N V_{x_k} \right) = \bigcup_{k=1}^N (U \cap V_{x_k}) \subset \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \cap V_{x_k} = \bigcup_{k=1}^N \emptyset = \emptyset$$

より $U \subset K^c$ である. よって p は K^c の内点であり, K^c は開集合である. ゆえに K は閉集合である.

3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトであること (命題 3.42)

閉集合とコンパクト集合の関係を整理しておこう.

証明 X をコンパクト空間とし, A をその閉集合とする. $\{U_\lambda\}$ を A の開被覆とすれば $\bigcup U_\lambda \supset A$ なので $\{U_\lambda\} \cup A^c$ は X の開被覆になる. よって有限部分被覆 $\{U_{\lambda_j}\} \cup A^c$ が存在する.

$$A = A \cap X = A \cap \left(A^c \cup \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \right) = (A \cap A^c) \cup \left(A \cap \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \right) = A \cap \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j}$$

より $A \subset \bigcup_j U_{\lambda_j}$ なので A の有限部分被覆が取れる. ゆえに A はコンパクトである.

4. 距離空間のコンパクト集合は有界閉集合であること

証明 K を距離空間 X のコンパクト集合とする. $a \in X$ を一つ取れば

$$K \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$$

なので $\{B_n(a), n \in \mathbb{N}\}$ は K の開被覆になる. ゆえに K は有限個の $B_n(a)$ で覆えるが, 有限個の n の最大を N とすれば $K \subset B_N(a)$ を得る. よって K は有界である.

$a \in K^c$ をとる. $U_n = \{x \mid d(x, a) > 1/n\}$ とおけば $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \{a\} \supset K$ である. K はコンパクトなので有限個の U_n で K を覆うことができる. その有限個の n の最大を N とすれば $K \subset U_N$ である. よって $B_{1/N}(a) \subset K^c$ であり a は K^c の内点になる. 任意の点が内点になるので K^c は開集合であり, K は閉集合となる.

この命題から点列コンパクトとコンパクトはよく似た概念であることが分かる．このことについては次回扱う．

5. コンパクト集合の連続写像による像がコンパクトになること (定理 3.41)

証明 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ とコンパクト集合 $K \subset X$ をとる． $\{V_\lambda\}$ を $f(K)$ の開被覆とする．

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} V_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(V_{\lambda})$$

なので $f^{-1}(V_{\lambda}) \in \mathcal{O}(X)$ より $\{f^{-1}(V_{\lambda})\}$ は K の開被覆になる．よって K のコンパクト性から

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N f^{-1}(V_{\lambda_j})$$

となるように $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ がとれる．

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^N f^{-1}(V_{\lambda_j})\right) = \bigcup_{j=1}^N f(f^{-1}(V_{\lambda_j})) \subset \bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}$$

となり有限部分被覆が取れたので $f(K)$ はコンパクトである．

この命題からコンパクト空間から作られる等化空間はコンパクトである．

6. コンパクト集合上の連続関数が最大値および最小値を持つこと

証明連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と X のコンパクト集合 K について $f(K)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．

これは有界なので上限，下限を持ち，閉集合なので上限下限は最大最小である．よって f は最大値および最小値を持つ．

7. コンパクト集合の直積がコンパクトになること (命題 3.40)

この命題の証明は難しい．証明の細部ではなく，証明の基本的な考え方を読み取るようにしてほしい．有限個のものを有限個集めてもやはり有限個だということだ．

証明 $A \times B$ の開被覆 $\{W_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ をとる．各 $(x, y) \in A \times B$ について $(x, y) \in W_\lambda$ となる W_λ を 1 つ取り，直積位相の定義から

$$(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset W_\lambda, \quad U_{x,y} \in \mathcal{O}(X), \quad V_{x,y} \in \mathcal{O}(Y)$$

をとる．各 x について $\{V_{x,y}, y \in B\}$ は B の開被覆なので B のコンパクト性から有限個の y_{xj} をとって $B \subset \bigcup_j V_{x,y_{xj}}$ とできる．ここで $U_x = \bigcap_j U_{x,y_{xj}}$ とおけば，これは x を含む X の開集合である．ゆえに $\{U_x, x \in A\}$ は A の開被覆であり， A のコンパクト性から有限個の x_i をとって $A \subset \bigcup_i U_{x_i}$ とできる．

$$A \times B \subset \left(\bigcup_i U_{x_i}\right) \times B = \bigcup_i (U_{x_i} \times B) \subset \bigcup_i U_{x_i} \times \left(\bigcup_j V_{x_i,y_{xij}}\right) = \bigcup_{ij} U_{x_i} \times V_{x_i,y_{xij}} \subset \bigcup_{ij} U_{x_i,y_{xij}} \times V_{x_i,y_{xij}}$$

となり， $A \times B$ は有限個の $U_{x,y} \times V_{x,y}$ で覆うことができる．これらの集合についてそれを含む W_λ を一つ取れば， $A \times B$ を有限個の W_λ で多くことができる．よって $A \times B$ はコンパクトである．

8. コンパクト集合の合併がコンパクトになること (演習)

証明 K, H を X のコンパクト集合とし， $\{U_\lambda\}$ を $K \cup H$ の開被覆とする． $\{U_\lambda\}$ は K の開被覆でもあるので， K を有限個の U_λ で覆うことができる．同様に H も有限個の U_λ で覆うことができる．二組の有限個の U_λ を寄せ集めれば $K \cup H$ の有限部分被覆が得られる．

9. コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_3 を満たすこと (演習)

証明 K を X の閉集合とし, $p \notin K$ を一つ取る. X はコンパクトなので K はコンパクト集合である. $x \in K$ についてハウスドルフ性より $U_x, V_x \in \mathcal{O}(X)$ を $x \in U_x, p \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$ となるようにとる. $\{U_x, x \in K\}$ は K の開被覆なので, コンパクトであることから有限個の $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ をとって $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} = U \in \mathcal{O}(X)$ とできる. このとき $p \in \bigcap_{j=1}^N V_{x_j} = V \in \mathcal{O}(X)$ であり

$$U \cap V = \left(\bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \right) \cap V = \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \cap V \subset \bigcup_{j=1}^N U_{x_j} \cap V_{x_j} = \emptyset$$

が成り立つので p と K が開集合で分離できた.

同様な議論を繰り返せば T_4 も示せる. これについてはレポート課題にする.

10. コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な全単射について, 逆写像が連続になること. (演習)

証明 全単射連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について X はコンパクト, Y はハウスドルフとする. 逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ の連続性を示すために X の閉集合 F をとる. X はコンパクトなので F は X のコンパクト集合である. F の f^{-1} による逆像は f による像に他ならないが f の連続性から $f(F)$ は Y のコンパクト集合になる. Y はハウスドルフなので $f(F)$ は閉集合である. 結局, 閉集合 F の f^{-1} による逆像は閉集合になるので f^{-1} は連続である.

このように連続な全単射で逆も連続な時, 同相写像という. なお, 連続な全単射だが逆は連続にならない例として

$$f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad f(t) = e^{it}$$

をあげておく. 逆写像は $1 \in S^1$ で連続ではない.

本日のレポート課題とヒント

課題 1 ハウスドルフ空間において, 2 つのコンパクト集合の共通部分はコンパクトになることを示せ.

課題 2 コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_4 を満たすことを示せ.

【ヒント】 課題 1 はコンパクト集合が閉集合, したがってその補集合は開集合になることを利用する. 課題 2 は講義メモの 2 と 9 で行った議論を使う.

幾何概論Ⅰのレポート課題(7月7日)の解答例とコメント

課題1 ハウスドルフ空間において, 2つのコンパクト集合の共通部分はコンパクトになることを示せ.

【解答例】 K, H をハウスドルフ空間 X のコンパクト集合とする. $K \cap H$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる. H はハウスドルフ空間のコンパクト集合なので閉集合である. ゆえに $K^c \in \mathcal{O}(X)$ である.

$$K \subset K \cup H^c = (K \cap H) \cup H^c \subset \left(\bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \right) \cup H^c$$

より $\{U_\lambda\} \cup \{H^c\}$ は K の開被覆になる. よって K がコンパクトであることから有限個の λ を選んで

$$K \subset \left(\bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j} \right) \cup H^c$$

とできる. ゆえに

$$K \cap H \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\lambda_j}$$

であり $K \cap H$ はコンパクトである.

【コメント】

- 証明において H は閉集合であることしか使われていない. ハウスドルフ空間においてはコンパクト集合と閉集合の共通部分はコンパクトである.
- $K \cap H$ のコンパクト性を示すのだからまず $K \cap H$ の開被覆をとること. 問題はこの開被覆が K, H の開被覆になっていないことだ. 解答例では H^c を付け加えることによって K の開被覆を作っている. 自然な発想だと思うのだが如何だろうか.

課題2 コンパクトハウスドルフ空間は分離公理 T_4 を満たすことを示せ.

【解答例】 X をコンパクトハウスドルフ空間とし, X の空でない閉集合 F, G を $F \cap G = \emptyset$ となるようにとる. X はハウスドルフなので F, G は閉集合である. またコンパクトハウスドルフなので分離公理 T_3 を満たす. そこで, $x \in F$ について

$$x \in U_x, G \subset V_x, U_x \cap V_x = \emptyset, U_x \in \mathcal{O}(X), V_x \in \mathcal{O}(X)$$

となる U_x, V_x をとる. $\{U_x \mid x \in F\}$ は F の開被覆なので F のコンパクト性から $x_1, x_2, \dots, x_N$ を

$$F \subset \bigcup_{j=1}^N U_{x_j}$$

が成り立つようにとる. そして

$$U = \bigcup_{j=1}^N U_{x_j}, \quad V = \bigcap_{j=1}^N V_{x_j}$$

とおく. これは開集合であり $F \subset U, G \subset V$ を満たす. また

$$U \cap V = \bigcup_{j=1}^N (U_{x_j} \cap V) \subset \bigcup_{j=1}^N (U_{x_j} \cap V_{x_j}) = \emptyset$$

であり T_4 が成り立つことが分かる.

【コメント】

- 添え字に λ を使っている場合は添え字は単なる記号であって意味はない。しかし、この証明においては添え字は $x \in F$ にしている。意味を与えるときはそれを明示しなくては議論にならない。
- 仮定はハウスドルフだが、 T_3 が成り立つことまでは講義で示したので、 T_3 を使って記述する。 $x \in F, y \in G$ ととってハウスドルフ性を使うと $x \in U_x, y \in V_y$ とは書けない。 x, y を分離する開集合は x, y の両方によって決まるからだ。

幾何概論 I および同演習の講義メモ (7月14日)

本日の講義の要点

1. 距離空間のコンパクト集合は点列コンパクトであること.

(X, d) を距離空間とする. 点列 $\{a_n\}$ について

定義 p が $\{a_n\}$ の集積点であるとは次が成り立つことを言う.

$$\forall r > 0; (\{n \mid d(a_n, p) < r\} \text{ は無限集合})$$

集積点について次の命題を示した.

命題 $\{a_n\}$ が p に収束する部分列を持つことと p が $\{a_n\}$ の集積点であることは同値である.

証明 $\{a_n\}$ が p に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持てば, $\forall r > 0$ について

$$\exists K \in \mathbb{N}; (k \geq K \implies d(a_{n_k}, p) < r)$$

となるがこれは $\{n \mid d(a_n, p) < r\} \supset \{n_K, n_{K+1}, n_{K+2}, \dots\}$ を意味する. 右辺は無限集合なので p は $\{a_n\}$ の集積点である.

逆に p が $\{a_n\}$ の集積点であるとし, $n_1 \in \{n \mid d(a_n, p) < 1\}$ をとる. 以下帰納的に n_{k-1} が定まった時に

$$n_k \in \{n \mid d(a_n, p) < 1/k\}, \quad n_k > n_{k-1}$$

と n_k をとる. 無限集合なのでこのような n_k は必ず取ることができる. こうしてとった n_k について $\{a_{n_k}\}$ は $d(a_{n_k}, p) < 1/k$ なので p に収束する部分列である.

集積点を使えば, K が点列コンパクトであるとは K の点列が K に集積点を持つといいなおすことができる. ゆえに点列コンパクトであることを示すには K に集積点が存在しないとして矛盾を導けばよい.

$x \in K$ は集積点ではないので $r_x > 0$ を $\{n \mid d(a_n, x) < r_x\}$ が有限集合であるようにとれる. $\{B_{r_x}(x) \mid x \in K\}$ は K の開被覆なので, K がコンパクトであることから有限個の点 $x_1, x_2, \dots, x_N$ を選んで

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N B_{r_{x_j}}(x_j)$$

となるようにとれる. ところが右辺の要素となる a_n は有限集合の有限個の集まりなので有限個しかない. これは $\{a_n\}$ が K の点列であることに矛盾する.

2. 点列コンパクト距離空間は全有界であること.

距離空間 X の部分集合 K が全有界とは $\forall r > 0$ について $x_1, x_2, \dots, x_N \in K$ をとって $K \subset \bigcup_{j=1}^N B_r(x_j)$ が成り立つようにできることを言う. ここでは, 点列コンパクト集合が全有界であることを示す.

証明 K が全有界でなかったとしよう. すなわち有限個の $B_r(x)$ で K を覆えないような $r > 0$ が存在したとする. $a_1 \in K$ をとり, 以下帰納的に

$$a_n = K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_r(a_j) \right)$$

をとる. 背理法の仮定により右辺の集合は空集合ではないので, すべての n について $a_n \in K$ を取ることができる. 点列 $\{a_n\}$ は任意の m, n について $d(a_n, a_m) \geq r$ となる. ゆえにその任意の部分列も同じ条件を満たすので収束しえない. ゆえに $\{a_n\}$ は収束する部分列を持たず K は点列コンパクトではない.

3. 距離空間の部分集合 K が全有界であれば、 K は部分空間として可分である。

証明 K を全有界なし、自然数 n について K を有限個の半径 $1/n$ の球で覆う。その中心を $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,N_n}$ とおく。このとき

$$A = \{x_{n,j_n} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq j_n \leq N_n\} \subset K$$

とおくと、これは有限集合の可算個の合併なので可算集合である。

次に $K \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ としそこから $x \in K \setminus \overline{A}$ をとる。 $r > 0$ を $B_r(x) \cap A = \emptyset$ となるようにとれる。 $r > 1/n$ と自然数 n を選べば $K \subset \bigcup_j B_{1/n}(x_{n,j_n})$ より $x \in B_{1/n}(x_{n,k})$ を満たす k が存在する。 $x_{n,k} \in A$ であり $x_{n,k} \in B_{1/n}(x) \subset B_r(x)$ なのでこれは $x \notin \overline{A}$ に矛盾する。

K は部分空間として可算稠密集合を持つので可分である。また距離空間においては可分ならば第二可算公理を満たす（命題 3.28 6月16日の講義メモ4）。よって K は第二可算公理を満たす。

4. 位相空間が第二可算公理を満たせば、任意の開被覆に可算部分被覆が存在する。

$\mathcal{B} = \{B_n, |n \in \mathbb{N}\}$ を K の可算開基とする。また K の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる。 $x \in K$ について $x \in U_\lambda$ となる λ を一つ取り λ_x とおく。また $x \in B_n \subset U_{\lambda_x}$ となる n を一つ取り $n_x \in \mathbb{N}$ とおく。 n_x と表せる自然数全体の集合を M とし、各 $n \in M$ について $n = n_x$ となる x を一つ取る。この x について $x \in B_n = B_{n_x} \subset U_{\lambda_x}$ となる λ_x を λ_n とおく。

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{n_x} = \bigcup_{n \in M} B_n \subset \bigcup_{n \in M} U_{\lambda_n}$$

となる。 $\{U_{\lambda_n}, |n \in M\}$ は $\{U_\lambda\}$ の可算部分被覆である。

5. 点列コンパクト集合はコンパクトである。

$\{U_\lambda\}$ を点列コンパクト集合 K の開被覆とし、その可算部分被覆 $\{U_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ をとる。すべての自然数 n について $K \not\subset \bigcup_{m=1}^n U_{\lambda_m}$ が成り立つとする。 $a_n \in K \setminus \bigcup_{m=1}^n U_{\lambda_m}$ をとる。 K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持つ。その極限を $p \in K$ とおく。

$p \in K$ より $p \in U_{\lambda_m}$ となる m が存在する。一方、 $\{a_n\}$ の取り方から $n > m$ について $a_n \notin U_{\lambda_m}$ である。 U_{λ_m} は開集合なので $r > 0$ を $B_r(p) \subset U_{\lambda_m}$ となるようにとる。 $n > m$ について $a_n \notin B_r(p)$ なので $d(a_n, p) \geq r$ であり、 $\{n \mid d(a_n, p) < r\}$ は m 以下の自然数のみからなるので有限集合である。 p は集積点ではなく、 p に収束する部分列が存在することに矛盾する。

以上から $K \subset \bigcup_{m=1}^n U_{\lambda_m}$ となる n が存在する。すなわち有限部分被覆が取れたので K はコンパクトである。

今日の講義では距離空間においてコンパクト性と点列コンパクト性が同値であることを示した。証明は難しいので理解できなくても仕方がないが、基本的な事実なのでじっくり考えてみてほしい。来週は試験を行う。今日の講義で扱ったことは試験範囲に含めないで、前回までの内容をきちんと学習しておいてほしい。なお、試験問題には基本的な定義等は明記しておく。丸暗記をする必要はない。定義が何かをきちんと考えておくことは必要だ。数学の勉強は覚えることではないことに留意せよ。

「幾何概論 I」第 1 回試験（6 月 2 日実施）解答例とコメント

各問に 10 点の 80 点満点で採点した。最高は 80 点，最低は 0 点 (3 人)，平均は 39.66 点だった。30 点未満の 17 人を不合格とする。不合格者が 2 回目の試験に合格できなかった場合は再試験の対象にならない。意識して後半の学習を進めてほしい。

問 1 写像 $f: X \rightarrow Y$ と Y の部分集合の族 $\{V_\lambda \subset Y \mid \lambda \in \Lambda\}$ について $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ が成り立つことを示せ。

【解答例】 $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right)$ をとる。逆像の定義から $f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ である。合併の定義から $f(x) \in V_{\lambda_0}$ となる λ_0 が存在するのでそのようなものを一つ取り λ_0 とおく。 $f(x) \in V_{\lambda_0}$ であり $x \in f^{-1}(V_{\lambda_0})$ を得る。よって $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ となるので $\subset$ が成り立つ。

逆については $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$ をとる。合併の定義から $x \in f^{-1}(V_{\lambda_0})$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ がとれる。逆像の定義から $f(x) \in V_{\lambda_0}$ であり、 $f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ をえる。ゆえに $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right)$ であり $\supset$ も成立する。

【コメント】

- 合併の定義をきちんと理解しておくこと。合併とはどれかの集合に入っている要素の集まりなので $\exists \lambda \in \Lambda; x \in V_\lambda$ とすればよい。
- V_λ と書いているのに V_1 などと自然数を添え字に書き直す人がいるが、添え字は自然数とは限らないので注意せよ。

問 2 集合 X 上の実数値有界関数全体の集合 $B(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists K; |f(x)| \leq K\}$ において $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$ は $B(X)$ 上の距離を定めることを示せ。

【解答例】 絶対値は 0 以上なので $d(f, g) \geq 0$ である。また $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ より $d(f, g) = d(g, f)$ も成り立つ。さて、 $d(f, g) = 0$ とする。

$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup |f(x) - g(x)| = d(f, g) = 0$$

より、任意の $x \in X$ について $|f(x) - g(x)| = 0$ である。ゆえに $f(x) = g(x)$ であり $f = g$ を得る。最後に三角不等式を示す。 $x \in X$ について

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \sup\{|f(x) - g(x)|\} + \sup\{|g(x) - h(x)|\} = d(f, g) + d(g, h)$$

が成り立つがこれは $d(f, g) + d(g, h)$ が $\{|f(x) - h(x)|\}$ の上界であることを意味している。ゆえに $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ が成り立つ。

【コメント】

- 上限を使った等式（不等式）の処理を気楽にやる人が多いが感心しない。正しい処理なので間違いにはしていないが、少なくとも成り立つ理由をすぐに答えられなくてはいけない。例えば $\sup(f(x) + g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x)$ は成り立つが $=$ にはならない。解答例はそのような曖昧な処理は一切行っていない。味わってみよ。

問3 距離空間 (X, d) の部分集合 $A \subset X$ について $p \in X$ が A の触点であるとは、任意の $r > 0$ について $A \cap B_r(p) \neq \emptyset$ が成り立つことを言う。 p が A の触点であることと A の点列 $\{a_n\}$ で p に収束するものが存在することとは同値であることを示せ。

【解答例】 p が A の触点であるとする。自然数 n について $A \cap B_{1/n}(p) \neq \emptyset$ なので、 $a_n \in A \cap B_{1/n}(p)$ をとる。 $a_n \in A$ と $d(a_n, p) \leq 1/n$ より $\{a_n\}$ は p に収束する A の点列である。

逆に p に収束する A の点列 $\{a_n\}$ が存在したとする。任意の $r > 0$ について n を十分大きく取れば $d(a_n, p) < r$ となる。 $a_n \in A \cap B_r(p)$ であり $A \cap B_r(p) \neq \emptyset$ を得る。 よって p は A の触点である。

【コメント】

- p に収束する点列の存在を示すには、それを具体的にどう作るのかがポイントになる。解答例の構成の仕方は集積点に収束する点列を作る際に使った議論であり、よく使われる議論なのできちんと考えておくこと。
- 逆を背理法で示そうとする人が多いが解答例のように素直な証明のほうが分かりやすいと思う。論理は仮定から順に展開していくのが基本だということを忘れないでほしい。

問4 集合 A の内点全体の集合を内部と呼び A° と表す。 $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ を示せ。

【解答例】 内点の定義から A° の内点は A° の点なので $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$ が成り立つ。ゆえにこの等式を示すには $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$ が成り立つことを示せばよい。そこで $x \in A^\circ$ をとる。

$r > 0$ を $B_r(x) \subset A$ が成り立つようにとる。また $y \in B_r(x)$ をとる。 $s = r - d(x, y) > 0$ とおき $z \in B_s(y)$ をとれば

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r$$

となるので $z \in B_r(x)$ である。よって $B_s(y) \subset B_r(x) \subset A$ であり $y \in B_r(x)$ は A の内点である。よって $B_r(x) \subset A^\circ$ であり x は A° の内点である。すなわち $x \in (A^\circ)^\circ$ が成り立つ。

【コメント】

- 三角不等式を利用して証明した。距離空間では基本的な考え方だ。
- $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$ を使うと証明は簡単になる。 $B_r(x) \subset A$ から $B_r(x)^\circ \subset A^\circ$ が得られること、 $B_r(x)$ は開集合なので $B_r(x)^\circ = B_r(x)$ であることを組み合わせれば $B_r(x) \subset A^\circ$ を得る。なお、 $B_r(x)$ が開集合であることの証明に解答例のような三角不等式を利用した議論を使う。

問5 収束する点列は Cauchy 列であることを示せ。

【解答例】 収束する点列を $\{a_n\}$ とおきその極限を p とおく。 $\forall \varepsilon > 0$ について

$$n \geq N \implies d(a_n, p) < \varepsilon/2$$

となるように自然数 N をとる。 $n, m \geq N$ について

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(p, a_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つので $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。

【コメント】

- $n \geq N_1 \implies d(a_n, p) < \varepsilon$, $m \geq N_2 \implies d(a_m, p) < \varepsilon$ と N_1, N_2 をとった答案が目立ったが, N は点列に対して定めるもので, 添え字を n, m のどの文字を使うかで変わるものではない. 間違いとは言えないが理解不足を露呈した解答といえる. 点列が異なるときは分けて定める必要がある.
- $d(a_n, p) < \varepsilon$ で $p = a_m$ とおくという答案も多かった. p は点列の極限であり a_m とおけるはずがない. 全く無意味な解答である.
- Cauchy 列なので $|a_n - a_m|$ というような差の絶対値として表す答案もあったが, 距離空間を扱っているので間違いである. 減点した.
- 解答例では極限の定義式を補正して $< \varepsilon/2$ とし, 最後が $< \varepsilon$ となるようにした. このような補正をせずに $d(a_n, a_m) < 2\varepsilon$ という不等式になっても何の問題もない. 右辺がいくらでも小さくなれることが重要だ.

問 6 2 つの完備距離空間の直積空間は完備であることを示せ.

【解答例】 $X \times Y$ の Cauchy 列 $\{a_n, b_n\}$ をとる. 直積距離の定義から

$$d_X(a_n, a_m) \leq \sqrt{(d_X(a_n, a_m))^2 + (d_Y(b_n, b_m))^2} = d_{X \times Y}((a_n, b_n), (a_m, b_m))$$

であり $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列である. 同様に $\{b_n\}$ は Y の Cauchy 列である.

X, Y の完備性により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束するのでその極限を p, q とする.

$$0 \leq d_{X \times Y}((a_n, b_n), (p, q)) \leq d_X(a_n, p) + d_Y(b_n, q)$$

より右辺は 0 に収束するので左辺も 0 に収束する. よって $\{(a_n, b_n)\}$ は (p, q) に収束するので $X \times Y$ も完備である.

【コメント】

- 完備であるとは Cauchy 列が収束することを言う. この問題は $X \times Y$ が完備であることを示すのだから, まず $X \times Y$ の Cauchy 列をとらなくてはならない. X, Y の Cauchy 列から始めても証明はできない. 点列すらとっていない答案は完備性を知らないということだ.
- 距離の不等式はこの証明で本質的だ. これを書かずに $\{(a_n, b_n)\}$ が $X \times Y$ の Cauchy 列だから $\{a_n\}$ は X の Cauchy 列と主張しても正解にはならない. 証明を事細かに記述する必要はないが, 肝心な部分は落としてはならない.
- 収束することを示す際に $\varepsilon\delta$ 論法ではなく, 極限で考えても構わない. 解答例の最後の部分を参考にすること.

問 7 $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像とする. K を X の点列コンパクト集合とすると, $f(K)$ は Y の点列コンパクト集合になることを示せ.

【解答例】 $f(K)$ の点列 $\{b_n\}$ をとる. $b_n \in f(K)$ なので $a_n \in K$ を $f(a_n) = b_n$ となるようにとる. K は点列コンパクトなので $\{a_n\}$ は K の点に収束する部分列を持つ. それを $\{a_{n_k}\}$, その極限を $p \in K$ とおく. f の p での連続性から $\{f(a_{n_k})\} = \{b_{n_k}\}$ は $f(p) \in f(K)$ に収束する. よって $f(K)$ は点列コンパクトである.

【コメント】

- 点列コンパクトの定義をきちんと理解していない人が多い。 K が点列コンパクトとは K の任意の点列が収束する部分列を持つことだ。「点列は収束する部分列である」「任意の点に収束する点列が存在する」など似て非なる理解をしている人が少なくない。
- 点列コンパクトを理解できている人でも K の点列からとってしまって失敗する人がいる。 $f(K)$ が点列コンパクトであることを示すのだからまず $f(K)$ の点列をとり、それから収束する部分列をどう作るか述べなくてはならない。

問 8 $f: X \rightarrow Y$ は一様連続であるとする。 $\{x_n\}$ を X の Cauchy 列とすると $\{f(x_n)\}$ は Y の Cauchy 列になることを示せ。

【解答例】 $\varepsilon > 0$ をとる。 f の一様連続性から $\delta > 0$ を

$$d_X(x, x') \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

が成り立つようにとる。この $\delta > 0$ について、 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であることから、自然数 N を

$$n, m \geq N \implies d_X(x_n, x_m) < \delta$$

が成り立つようにとる。 $\delta > 0$ の取り方から $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ となるので $\{f(x_n)\}$ は Y の Cauchy 列である。

【コメント】

- Cauchy 列と収束する点列は同じ概念ではない。Cauchy 列をとったとき極限をとってはいけない。なお、収束する点列を収束する点列に移すのは f が連続であればよい。
- 一様連続を $d_X(x, a) \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ と記述する人を見かけるが、間違いとは言わないが好ましくはない。 a が固定されていて x だけの条件に見えるからだ。記号の使い分けはきちんと意識したほうが良い。

「幾何概論 I」第 2 回試験（7 月 21 日実施）解答例とコメント

問 1 のみ 15 点，他はすべて 10 点の 85 点満点で採点した．最高点は 85 点，最低点は 5 点，平均点は 39.62 点だった．印象としてよく理解できている人と全く理解できていない人の差が広がっていると感じた．日頃の学習の質の差が現れたのではないかな．良くわからないことは分かるまで考えるようにしてほしい．分からないから覚えておこうというのは数学の学習ではない．

第 1 回と第 2 回の両方とも受験した学生は 45 人，2 回とも合格の学生は 23 人，第 1 回のみ合格の学生が 6 人，第 2 回のみ合格の学生が 5 人，2 回とも不合格の学生が 11 人だった．2 回とも不合格の 11 人は残念ながら再試験の対象にしない．厳しいように感じるかもしれないが，2 回の試験の合計点が 160 点を超えた人も 2 人いる．違いは理解力というより，数学的なものの考え方になじんできた結果だと思う．なじむためにはそれなりの学習量が必要だ．正面から数学に向き合う時間を大切にしてほしい．

問 1 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ を示せ．また $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ が成り立たない例をあげよ．

【解答例】 $A \cap B \subset A$ より $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ である．同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ なので $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ である．逆向きの包含関係を示すために $x \in A^\circ \cap B^\circ$ をとる． $x \in A^\circ$ より $x \in U \subset A$ を満たす開集合 U が存在する．同様に $x \in B^\circ$ より $x \in V \subset B$ を満たす開集合 V が存在する． $x \in U \cap V \subset A \cap B$ であり $U \cap V$ は開集合なので $x \in (A \cap B)^\circ$ である．よって $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ であり $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ が成り立つ．

$\mathbb{R}$ において $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ とすれば $A^\circ \cup B^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$ ，である．また $A \cup B = [0, 2]$ なので $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$ である．

【コメント】

- $x \in A \cap B$ について， $x \in U \cap V \subset A \cap B$ とするのは間違いだ．直積位相の扱いに惑わされているのではないかな．
- 用語の意味を誤解した答えはだいぶ少なくなってきた．それなりに理解は進んでいるのかもしれない．
- 後半の反例については，反例になることの説明がないといけない．結果のみの場合は若干減点した．なお， $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ としたら反例にならない． $A \cup B$ に 1 が属していない．反例にするには A の右端か B の左端の少なくとも一方は集合に含めておかなければならない．

問 2 位相空間 X とその部分位相空間 Y について $i: Y \rightarrow X$ を包含写像とする． $f: Z \rightarrow Y$ が連続であることと $i \circ f: Z \rightarrow X$ が連続であることは同値であることを示せ．

【解答例】 $U \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{O}(Y)$ なので i は連続である．ゆえに f が連続であれば $i \circ f$ も連続である．

逆に $i \circ f$ が連続とする． $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $V = U \cap Y$ となる $U \in \mathcal{O}(X)$ をとる． $i \circ f$ は連続なので $(i \circ f)(U) \in \mathcal{O}(Z)$ だが $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(U \cap Y) = f^{-1}(V)$ なので $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ である．ゆえに f は連続である．

【コメント】

- 講義では X の開集合は U で， Y の開集合は V で記述している．もちろんこれは単に分かりやすくするための工夫なのでやらなかったといって減点の対象になるわけではない．ただ $V \in \mathcal{O}(X)$ について $i^{-1}(V) = V$ としたら論理的な誤りだ． V は X の部分集合であって Y の部分集合になるとは限らない．

- 前半は単に連続写像の合成が連続ということだ．ただし i の連続性については記述した答案と記述していない答案がある．また記述したが間違っただという答案もある．採点では i の連続性の証明も対象に含めた．この証明は不要と思って記述しなかった人もいるだろうが，我慢してほしい．
- $i \circ f$ の連続性から f の連続性を示すには $V \in \mathcal{O}(Y)$ をとって $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(Z)$ を示さなくてはならない． $U \in \mathcal{O}(X)$ をとって $f^{-1}(i^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(Z)$ を示しても $V = i^{-1}(U)$ の場合に示したことにしかならない．もちろん $V \in \mathcal{O}(Y)$ が必ず $i^{-1}(U)$ と表せることに言及していればいいのだがそれには $i^{-1}(U) = U \cap Y$ と相対位相の定義を使わなくてはならない．
- i の連続性についても，後半の証明でも $i^{-1}(U) = U \cap Y$ と相対位相の定義がポイントだ．この事実にもかかわらず気付いていない人も多く，すっきりした議論の展開が不可能になった．
- 連続性の定義が分からない人がいるが，勉強を全くしていないのではないかな．

問3 位相空間 X, Y が第二可算公理を満たす時，その直積位相空間も第二可算公理を満たすことを示せ．

【解答例】 $\mathcal{B}_X = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_Y = \{C_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ をそれぞれ $\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)$ の可算開基とする．

$$\mathcal{B} = \{B_n \times C_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

が直積位相 $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基であることを示せば $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合なので，可算開基になることが分かる．よって $X \times Y$ も第二可算公理を満たす．

$\mathcal{B}$ が開基であることを示すために $(x, y) \in W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとる．直積位相の定義から $(x, y) \in U \times V \subset W$ を満たす $U \in \mathcal{O}(X)$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する． $x \in U \in \mathcal{O}(X)$ より $x \in B_{n_0} \subset U$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ をとる．同様に $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ より $y \in C_{m_0} \subset V$ となる $m_0 \in \mathbb{N}$ をとる．

$$(x, y) \in B_{n_0} \times C_{m_0} \subset U \times V \subset W, \quad B_{n_0} \times C_{m_0} \in \mathcal{B}$$

より $\mathcal{B}$ は直積位相 $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基である．

【コメント】

- まず X, Y の開基を記号を使って記述しなくてはならない．このとき $\mathcal{B}_X = \{U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$ としたら $\mathcal{B}_X = \mathcal{O}(X)$ になってしまう．また， $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ を同じ添え字で記述してはいけない．気をつけること．
- 第二可算公理を満たすということは可算個の開集合からなる開基が存在するということだ．開基をとったらそれが可算個の開集合からなっているという意味ではない． $\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}(X), V \in \mathcal{O}(Y)\}$ は $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基だが，これが可算個の開集合からなるというわけではない．
- $\mathcal{O}(X \times Y)$ の開基であることを示すには， $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ をとり，それが開基に属する開集合の合併になっていること，あるいは開基であることの必要十分条件を満たすことを示す． $U \times V$ のみについて考えている人がいるが解答として不十分である．
- 開基であることの証明は，問題用紙に記述した必要分条件を使うと楽である．本来の定義で示すには $W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ が $U \times V$ の合併として表せること，さらに $U \times V$ が $B_n \times C_m$ の合併で表せることを示す必要がある．分かってくれば難しいことではないのだが．

問4 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射であるとき， X が可分ならば Y も可分であることを示せ．

【解答例】 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を X の可算稠密集合とする． $f(A) = \{f(a_n)\}$ なので $f(A)$ も可算集合である．よって

$f(A)$ が Y の稠密集合であることを示せばよい.

$y \in Y$ をとり $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$ をとる. f は全射なので $f(x) = y$ となる x をとる. $x \in f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ より $x \in \overline{A} = X$ なので $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である. ゆえに

$$f(A \cap f^{-1}(V)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(V)) = f(A) \cap (V \cap f(X)) = f(A) \cap V$$

であるが空集合でない集合の像は空集合にはならないので $f(A) \cap V \neq \emptyset$ を得る. $y \in \overline{f(A)}$ であり $Y = \overline{f(A)}$ を得る. よって $f(A)$ は稠密である.

【コメント】

- 可分の定義をきちんと理解していない答案が多い. これでは答えられるはずがない.
- $f(A)$ が Y の可算稠密集合であることを示せばよいということはすぐ気付くはずだ. これは $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ を使えばすぐ示せるが, この問題ではこの部分も含めて証明してほしい.

問5 位相空間 X がハウスドルフ空間であることと対角線集合 $D = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ が閉集合であることは同値であることを示せ.

【解答例】 X がハウスドルフ空間であると仮定し D の補集合が開集合であることを示す. $(x, y) \in D^c$ とは $x \neq y$ に他ならない. X はハウスドルフなので $x \in U \in \mathcal{O}(X)$, $y \in V \in \mathcal{O}(X)$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす U, V がとれる. $(x', y') \in U \times V$ について $x' \in U$, $y' \in V$ と $U \cap V = \emptyset$ より $(x', y') \in D^c$ である. よって $(x, y) \in U \times V \subset D^c$ より D^c は開集合である.

逆に D が閉集合, すなわち D^c が開集合だとする. $x \neq y$ について $(x, y) \notin D$ より開集合 U, V を $(x, y) \in U \times V \subset D^c$ ととれる. ここで $U \cap V \neq \emptyset$ とすれば共通部分の要素 x について $(x, x) \in U \times V$ となる. これは $U \times V \subset D^c$ に矛盾するので $U \cap V = \emptyset$ である. よって X はハウスドルフ空間である.

【コメント】

- $U \cap V = \emptyset$ と $U \times V \subset D^c$ の同値性を示すのがポイントだ. これを証明せずに使ってはいけない.
- 直積位相において W が開集合であることを $(p, q) \in U \times V \subset W \in \mathcal{O}(X \times Y)$ と記述したので, 答案でも W を使う人が目につく. しかしこの問題では D^c が開集合であるという主張なので W を使う必要はない.
- X の部分集合と $X \times X$ の部分集合の見分けがつかない答案がある. 用語の意味はきちんと意識する習慣をつけるように.

問6 位相空間 X が連結であることと, X の開集合かつ閉集合になる集合が X と $\emptyset$ に限ることとは同値であることを示せ.

【解答例】 X が連結であるとし, U を X の開集合かつ閉集合であるとする. 閉集合なので U^c も開集合であり $X = U \cup U^c$ および $U \cap U^c = \emptyset$ より連結性から $U = X$ または $U = \emptyset$ となる.

逆に開集合かつ閉集合である集合が X と $\emptyset$ に限るとし $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \in \mathcal{O}(X)$ とする. $V = U^c$ なので U は開集合かつ閉集合である. よって $U = X$ または $U = \emptyset$ なので X は連結である.

【コメント】

- $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ は $V = U^c$ と同値である. このことに気付かないと証明は難しい.

- X が連結であると仮定して、連結の定義を書く人が多い。しかしその表示と離れて U を開集合かつ閉集合として取らないといけない。

問 7 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について X のコンパクト集合 K の像はコンパクトであることを示せ。

【解答例】 $f(K)$ の開被覆 $\{V_\lambda\}$ をとる。 $f(K) \subset \bigcup_\lambda V_\lambda$ である。

$$x \in K \implies f(x) \in \bigcup_\lambda V_\lambda \iff x \in f^{-1}\left(\bigcup_\lambda V_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

より $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$ であり $\{f^{-1}(V_\lambda)\}$ は K の開被覆になる。 K はコンパクトなので有限個の添え字 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ を選んで

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N f^{-1}(V_{\lambda_j})$$

とできる。

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^N f^{-1}(V_{\lambda_j})\right) = \bigcup_{j=1}^N f(f^{-1}(V_{\lambda_j})) \subset \bigcup_{j=1}^N V_{\lambda_j}$$

となるので $f(K)$ はコンパクトである。

【コメント】

- $f(K)$ がコンパクトであることを言いたいのでからまず $f(K)$ の開被覆をとらなくてはならない。 K の開被覆をとって議論を始めると失敗する。 こういう感覚は早く身につけるように。
- 開被覆とは開集合の族である。 だから有限とか可算だとかが意味を持つ。 $\bigcup_\lambda V_\lambda$ は開被覆といわれると気持ち悪い。 減点しなかったが注意してほしい。 ただ $f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda)$ が K の開被覆という言い方は減点した。

問 8 ハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 K は閉集合であることを示せ。

【解答例】 $x \in K^c$ をとる。 $y \in K$ について $x \neq y$ よりハウスドルフであることを使って $U_y, V_y \in \mathcal{O}(X)$ を

$$x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$$

となるようにとる。 $y \in V_y \in \mathcal{O}(X)$ より $\{V_y, y \in K\}$ は K の開被覆になるので有限個の点 $y_1, y_2, \dots, y_N$ を選んで

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N V_{y_j} = V \in \mathcal{O}(X)$$

となるようにとれる。 この有限個の点を使って

$$U = \bigcap_{j=1}^N U_{y_j}$$

とおけば、有限個の開集合の共通部分なので開集合になる。 また $x \in U_{y_j}$ なので $x \in U$ である。 さらに

$$U \cap V = \bigcup_{j=1}^N U \cap V_{y_j} \subset \bigcup_{j=1}^N U_{y_j} \cap V_{y_j} = \emptyset$$

なので $x \in U \subset V^c \subset K^c$ より K^c は開集合になる．よって K は閉集合である．

【コメント】

- コンパクト性の議論で何回か使った議論だ．じっくり考えて理解していればそう難しくはない．なお，解答例で添え字を y にしているのは x は固定して考えていること，ハウスドルフの定義の U, V は y によって変わることを踏まえている．添え字の付け方を間違えるとうまく証明できない．