統合幾何学 A・大域微分幾何学講義ノート

この講義では前半を学部 4 年次科目「統合幾何学 A」として多様体を，後半で大学院前期課程科目「大域微分幾何学」としてリーマン幾何を扱う．講義は一連の内容であり，多様体の基礎からの学習を望む大学院生には，前半からの受講を勧める．また，多様体は数学の基礎事項であるため，それが実際にどのように使われるかを知りたい学部学生には，後半の受講を勧める．評価は出席状況とレポートによって行うが，学部学生と大学院生ではレポート課題が異なることをお断りしておく．また，講義回数の関係で最後の数回は集中講義の形式で行う予定である．

この講義で扱う内容は以下の通りである．第 5 節までが「統合幾何学 A」第 6 節以降が「大域微分幾何学」に相当する．

1 多様体

1.1 多様体の定義，例

多様体とは，曲面を一般次元に拡張した概念である．幾何ばかりではなく解析，確率などにおいても議論を展開する場として頻繁に用いられる．

定義 1.1 (多様体)**.** Hausdorff 位相空間 M の各点が，$\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同相な開近傍をもつとき，M を**位相多様体**という．

位相多様体 M について，その開被覆 $\{U_\alpha\}$ と U_α から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 E_α への同相写像 $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ で

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Longrightarrow \phi_\alpha \circ (\phi_\beta|_{\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)})^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ は } C^\infty \text{ 級写像}$$

を満たすものがある時，M を**可微分多様体**あるいは単に**多様体**という[a]．自然数 m を多様体の**次元**と呼び $\dim M$ と表す．

[a] このままの定義では，座標近傍の取り方に本質的に依存してしまう．それを避けるため、座標近傍系の「極大性」を仮定する必要があるが，議論が煩雑になるため省略する．松島与三「多様体入門」などを参考にすること．

この U_α を**座標近傍**，写像 ϕ_α の成分関数を**座標関数**という．座標近．と座標関数の組を合わせて**局所座標系**という．座標関数を $\{x_i, 1 \leq i \leq m\}$ と書いて局所座標系を $\{U, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ と表すことも多い．

例 1. $\boldsymbol{R}^m$ の開集合はその座標系によって多様体である．閉球 $\{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ は多様体ではない．境界付き多様体として扱われる．

例 2. $\boldsymbol{R}^3$ 内の種数 g の曲面は多様体である．$xy = 0$ で定義される集合（yz 平面と xz 平面の合併）は多様体ではない．

例 3. m 次元球面 $S^m = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ は $U_k^+ = \{\boldsymbol{x} \in S^m \mid x_k > 0\}$, $U_k^- = \{\boldsymbol{x} \in S^m \mid x_k < 0\}$, $\phi_k^{\pm}(\boldsymbol{x}) = (x_0, \ldots, \hat{x}_k, \ldots x_m)$ により多様体になる．

問題 1. $\{(U_k^{\pm}, \phi_k^{\pm}) \mid 0 \leq k \leq m\}$ は S^m 上の微分構造であることを示せ．

命題 1.2. $\boldsymbol{R}^m$ 上定義された C^∞ 級関数 f とその正則値 a[a] について，$f^{-1}(a)$ は $m-1$ 次元多様体になる．(陰関数定理)

[a] $f^{-1}(\{a\})$ が f の特異点を含まないことをいう．

例 4. 行列式が 1 の n 次正方行列全体の集合 $SL(n, \boldsymbol{R})$ は $n^2 - 1$ 次元多様体になる．

1.2 関数，写像の微分可能性

多様体 M 上の関数 f が**微分可能**であるとは，M の任意の座標近傍系 (U, ϕ) について $f \circ \phi^{-1}$ が $\phi(U)$ 上 C^∞ 級であることをいう．

命題 1.3. 関数が C^∞ 級であることは、座標近傍系の取り方によらない．

多様体 M から多様体 N への写像の微分可能性も同様に定義される．M から N への C^∞ 級写像全体の集合を $C^\infty(M, N)$ と表す．定義域が $\boldsymbol{R}$ の区間の場合，微分可能写像を曲線という．微分可能写像について，全単射でかつ逆写像も微分可能になる時，**微分同相写像**(diffeomorphism) という．

位相多様体が与えられたとき，それに本質的に異なる（すなわち，決して互いに微分同相にならない）微分構造が入るかどうかは大きな問題である．これについて 1956 年に J.Milnor は 7 次元球面上に 28 種類の微分構造が存在することを示している．その後，3 次元以下の多様体および $\boldsymbol{R}^n, n \neq 4$ での微分構造の一意性が証明された．驚くべきことに $\boldsymbol{R}^4$ には無数の微分構造が入る．これは 1982 年に S.Donaldson によって，数理物理学的手法を使って証明された．

2 接空間

2.1 $\boldsymbol{R}^m$ の接ベクトルの微分による定義

$\boldsymbol{R}^m$ に点 p を取る．

定義 2.1 (接ベクトル)**.** $C^\infty(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R})$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $v : C^\infty(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{R}^m$ の p における接ベクトルであるとは，次が成り立つことをいう．ただし，$f, g \in C^\infty(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R})$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ である．

$$
\begin{aligned}
v(\lambda f + \mu g) &= \lambda v(f) + \mu v(g) \\
v(fg) &= v(f)g(p) + f(p)v(g)
\end{aligned}
$$

接ベクトル v について次の等式が成り立つ．

$$v(f) = \sum_k v(x_k) \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$$

このことから 接ベクトル v を

$$v = \sum_k v(x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p$$

と表す.

定理 2.2. $\boldsymbol{R}^m$ の p における接ベクトル全体の集合は m 次元線型空間になる．これを $T_p\boldsymbol{R}^m$ と表す．その標準的な基底は

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$$

で与えられる.

$C(t)$ を $C(0) = p$ を満たすなめらかな曲線とする.

$$\dot{C} = \frac{DC}{dt}(f) = \frac{d(f \circ C)}{dt}(0)$$

として定まるベクトル $\dot{C}$ を曲線 C の $C(0) = p$ における接ベクトルとよぶ.

問題 2. $\dot{C}$ は標準的な基底のもとにどのように表されるか.

2.2 接ベクトル，接空間

前小節での v は多様体 M 上でも考えられる．これを接ベクトルと呼ぶ.

定義 2.3. 線形写像 $v : C^\infty(M, \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が M の p における接ベクトルであるとは

$$v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$$

が成り立つことを言う.

p における接ベクトル全体の集合は，m 次元ベクトル空間となり，接空間と呼ぶ．これを T_pM と表す.

M 上の座標近傍 U とその座標関数 $\phi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$$

は U 上の各点 p について T_pM の基底を与える.

2.3 写像の微分

M, N を二つの多様体とし，それぞれの次元を m, n とする．Φ を M から N への微分可能写像とする．線形写像

$$\Phi_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{\Phi(p)}N$$

を N 上の C^∞ 級関数 f について

$$\Phi_{*p}(v)(f) = v(f \circ \Phi)$$

で定める.

問題 3. 局所座標系とそれによる T_pM $T_{\Phi(p)}N$ の基底に関して，Φ_{*p} の行列表示はどうなるか.

2.4 部分多様体

Φ を M から N への微分可能写像とする．M の各点 p について，Φ_{*p} が常に単射であるとき，Φ を**挿入**(immersion) と呼ぶ．さらに，Φ が単射であるとき，**埋め込み**(embedding) と呼ぶ．埋め込みが与えられたとき，M を N の部分集合とみなして**部分多様体**(submanifold) と呼ぶ．部分多様体の位相が，部分空間としての位相と一致するとき正規部分多様体という．次の定理は Whitney による．

定理 2.4. 第 2 可算公理をみたす n 次元多様体は，$\boldsymbol{R}^{2n+1}$ に埋め込むことができる．

例 5. $S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ は埋め込みで正規部分多様体である．$\boldsymbol{R}^m$ からトーラス T^m への自然な射影は挿入だが埋め込みではない．$\boldsymbol{R}$ から T^2 への写像 $f(t) = (e^{it}, e^{ait})$ は a が無理数のとき埋め込みだが正規部分多様体にはならない．

クラインの壷から $\boldsymbol{R}^3$ への挿入は存在するが埋め込みは存在しない．

3 ベクトル場と微分

3.1 ベクトル場

M 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(M)$ と表す．$C^\infty(M)$ 上の線形写像 $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ がライプニッツ則

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

を満たすときベクトル場と呼ぶ．各点 p について

$$X_p : C^\infty(M) \longrightarrow \boldsymbol{R}, \qquad X_p(f) = X(f)(p)$$

と定めれば $X_p \in T_pM$ である．このことから任意の開集合 U において $f(x) = g(x),\ \forall x \in U$ ならば U 上で $f = g$ となる．$X(f)$ は f の局所的振る舞いのみによって決まる．局所座標系 $(U, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ に関して

$$X = \sum X_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

と表せば $X_k = X(x_k)$ であるので，X_k は U 上の C^∞ 級関数になる．M 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と表す．$\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群としての構造をもつ．

問題 4. Φ: $M \longrightarrow N$ が微分同相写像のとき，$X \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$\Phi_* X : C^\infty(N, \boldsymbol{R}) \longrightarrow C^\infty(N, \boldsymbol{R}) \qquad \Phi_* X(f) = X(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$$

は N のベクトル場になることを示せ．Φ が微分同相写像でないときはどうか．

3.2 ベクトル場の積分曲線

曲線 $C : I \longrightarrow M$ について $C(t)$ における接ベクトルを

$$C'(t) \in T_{C(t)}M, \qquad C'(t)(f) = \frac{d(f \circ C)}{dt}(t)$$

で定める．各 t について

$$C'(t) = X_{C(t)}$$

となる時，C を X の**積分曲線**という．$C(0)$ を積分曲線の初期値という．次が成り立つ．

定理 3.1. (1) 任意の ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $p \in M$ に対して，p を初期値とする積分曲線が存在する．
(2) p を初期値とする積分曲線は，定義域の取り方を除いて唯一である．

証明には，各局所座標系のもとで積分曲線の条件が常微分方程式として表されることを示した上で，常微分方程式の解の存在と一意性を用いればよい．

すべての初期値に対して，積分曲線が $(-\infty, \infty)$ 上で存在するとき，完備ベクトル場という．M がコンパクトならすべてのベクトル場が完備になることが知られている．

問題 5. X を M のベクトル場， $\Phi\colon M \longrightarrow N$ を微分同相写像とする．$C(t)$ を X の p を初期値とする積分曲線とする時，$\Phi \circ C(t)$ は $\Phi_* X$ の $\Phi(p)$ を初期値とする積分曲線になることを示せ．

問題 6. ある正数 c について，X の積分曲線が必ず $[-c, c]$ を含む区間で定義されるならば，X は完備であることを示せ．

3.3 1 パラメータ変換群

X を M 上の完備ベクトル場とし，x を初期値とする X の積分曲線の時刻 t での値を $\phi_t(x)$ と表す．

命題 3.2. $\phi_t : M \longrightarrow M$ は微分同相写像でありその逆写像は ϕ_{-t} である．

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_t^{-1} = \phi_{-t}, \quad \phi_0 = Id_M$$

$\{\phi_t | t \in \boldsymbol{R}\}$ は 群であり，ベクトル場 X の生成する **1 パラメータ変換群**と呼ぶ．

問題 7. X を M のベクトル場， $\Phi\colon M \longrightarrow N$ を微分同相写像とする．$\{\phi_t | t \in \boldsymbol{R}\}$ を X の生成する 1 パラメータ変換群とするとき，$\Phi \circ \phi_t \circ \Phi^{-1}$ は $\Phi_* X$ の 1 パラメータ変換群になることを示せ．

3.4 Lie 微分

X を完備ベクトル場[*1]，$\{\phi_t\}$ をその生成する 1 パラメータ変換群とする．Y をベクトル場とすると， $\phi_{t*}Y$ もベクトル場になる．

$$L_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\phi_{-t*}Y - Y)$$

を Y の X による **Lie 微分**という．C^∞ 級関数 f について次が成り立つ．

$$L_X Y(f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

このことから $L_X Y$ を $[X, Y] = XY - YX$ と表し，ブラケット積と呼ぶ．

問題 8. $L_X Y$ を局所座標系によって書き下せ．また，$(L_X Y)_p$ は X, Y の p の周りの振る舞いで決まることを示せ．

問題 9. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ であることを示せ．また次の等式を証明せよ．

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$
(2) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$

[*1] Lie 微分の定義には完備性はいらない．各点 p の周りで充分小さな t について ϕ_t が定義されれば良いからである．

(3)　Φ が微分同相写像のとき $\Phi_*[X,Y] = [\Phi_* X, \Phi_* Y]$

(4)　$[[X,Y],Z] + [[Y,z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

$SL(n,\boldsymbol{R})$ のように群でありかつ多様体であるものを Lie 群と呼ぶ．Lie 群 G においては各 $v \in T_eG$ について $X_g = L_{g*}v$ と定めることによりベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が定義できる．ここで $L_g : G \longrightarrow G$ は $L_g(h) = gh$ であり左移動と呼ばれる．定義からこのベクトル場 X は $L_{g*}X = X$ を満たし左不変ベクトル場と呼ばれる．左不変ベクトル場全体の集合 $\mathfrak{g}$ は T_eG と線形同型であり線形空間である．またブラケット積について閉じており Lie 環と呼ばれる．Lie 環の研究には代数的な様々な手法が使うことができ，微分幾何の研究にも欠かせないものになっている．

4　外微分形式

4.1　双対空間，外積代数

V を n 次元実線型空間とする．V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像全体の集合を V^* と表し，V の双対空間と呼ぶ．$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を V の基底とするとき

$$\omega_j : V \longrightarrow \boldsymbol{R}, \qquad \omega_j(e_k) = \delta_{jk}$$

で定められる $\omega_j \in V^*$ たちは V^* の基底をなす．$\dim V^* = \dim V = n$ であり，$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ を $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ の双対基底と呼ぶ．

α が V 上の p 重線形交代形式であるとは

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{p 個}} \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad \text{多重線形，交代}$$

を言う．V 上の p 重線形交代形式全体の集合を $\bigwedge^p V^*$ と表す[*2]．$\bigwedge^0 V^* = \boldsymbol{R}$，$\bigwedge^1 V^* = V^*$ としておく．

$\alpha \in \bigwedge^p V^*, \beta \in \bigwedge^q V^*$ について，その外積 $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{p+q} V^*$ を

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, \ldots v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

で定める．ここで，σ は $p+q$ 文字の置換，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ はその符号を表す．

命題 4.1. (1) 外積について結合法則が成り立つ．さらに

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_{p+q+r}) = \frac{1}{p!q!r!} \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)})$$

(2) $\bigwedge^p V^*$ は ${}_nC_p$ 次元線型空間であり，その基底は V^* の基底 $\{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ を用いて

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p}, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n$$

と表せる．特に $p > n$ のとき $\bigwedge^p V^* = \{0\}$ である．

線形空間の直和

$$\bigwedge^* V^* = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^p V^*$$

は 2^n 次元線形空間である．和とスカラー倍のほかに外積を持つので V 上の外積代数と呼ぶ．

[*2] この表示はより広い概念であるテンソルの表示に由来する．この講義ではテンソルの一般論は扱わない．

問題 10. (1) $\alpha \in \bigwedge^p V^*$, $\beta \in \bigwedge^q V^*$ のとき，次を示せ．

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$$

(2) $\alpha_i \in V^*$ のとき次を示せ．

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det(\alpha_i(v_j))$$

4.2　余接空間

多様体 M の p における接空間 T_pM の双対空間を T_p^*M と表し，余接空間と呼ぶ．関数 f に対し

$$df_p : T_pM \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad df_p(v) = v(f)$$

は余接空間の要素 (余接ベクトル) になる．これを f の微分と呼ぶ．

命題 4.2. 局所座標系 $(U, \{x_1, x_2, \ldots, x_m\})$ について，座標関数の微分[a]

$$d(x_1)_p, d(x_2)_p, \ldots, d(x_m)_p$$

は T_pM の基底

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p$$

の双対基底を与える．

[a] x_j は U 上の関数なので $d(x_j)$ は余接ベクトルとして単独でも意味を持つ．一方，接ベクトル $\frac{\partial}{\partial x_j}$ は偏微分なので局所座標系について決まるものであり，単独では意味を持たない．このことから，幾何の議論においては接ベクトルよりも余接ベクトルのほうが扱いやすい場合がしばしばある．

問題 11. df_p はこの基底に関し

$$df_p = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_p d(x_k)_p$$

と表せることを示せ．

4.3　微分形式

M を n 次元多様体とする．

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{p 個}} \longrightarrow C^\infty(M), \quad \text{多重 } C^\infty(M) \text{ 線形，交代}$$

を p 次微分形式と呼ぶ．ここで $C^\infty(M)$ 線形とは定数倍だけでなく C^∞ 級関数倍についても ω の外に出ることを表している．すなわち

$$\omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_1, X_2, \ldots, X_p)$$
$$\omega(fX_1 + gX_1', X_2, \ldots, X_p) = f\omega(X_1, X_2, \ldots, X_p) + g\omega(X_1', X_2, \ldots, X_p) \quad f, g \in C^\infty(M).$$

関数倍が ω の外に出ることから各点 $x \in M$ について $\omega(X_1, X_2, \ldots, X_p)(x)$ は $X_j(x) \in T_xM$ にしか依存しない．ゆえに多重線形交代写像

$$\omega_x : \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{\text{p 個}} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を定め $\omega_x \in \bigwedge^p T_x^* M$ となる．局所座標系 $\{U, (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ の定める基底によって表示すれば

$$\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} \omega_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

と表せる．

$$\omega_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\right)$$

であるから，係数の関数は C^∞ 級である．

M 上の p 次微分形式全体の集合を $A^p(M)$ と表す． $A^0(M) = C^\infty(M)$ と定義する．$\alpha \in A^p(M)$, $\beta \in A^q(M)$ に対して外積 $\alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(M)$ は

$$\alpha \wedge \beta(X_1, X_2, \ldots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) \beta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})$$

で定義される．p または q が 0 のときは $\wedge$ を省略するのが普通である．

4.4 微分形式の引き戻し

M, N を多様体とし，$\Phi : M \longrightarrow N$ を M から N への C^∞ 写像[*3]とする．N 上の p 次微分形式 β について

$$\Phi^* \beta(x)(v_1, \ldots, v_p) = \beta(\Phi(x))(\Phi_*(v_1), \ldots, \Phi_*(v_p))$$

と定め β の Φ による引き戻し (pull back) と呼ぶ.

$$\Phi^* : A^p(N) \Longrightarrow A^p(M)$$

$p = 0$ の時は，$\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ と定める．

問題 12. (1) $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^* \alpha \wedge \Phi^* \beta$ を示せ.
(2) p の周りの局所座標系 $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ および $\Phi(p)$ の周りの局所座標系 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ について

$$\Phi^*(dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_p}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_p < m} \Xi^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

とおくとき $\Xi^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ を求めよ.

4.5 外微分

p 次微分形式 α に対して，その外微分 $d\alpha$ を

$$d\alpha(X_1, X_2, \ldots, X_{p+1}) = \sum_j (-1)^{j+1} X_j \alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1})$$

で定める．局所座標では次のように表示される．

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}\right) = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} \sum_k \frac{\partial \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_{p+1}} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial \alpha_{j_1 \ldots \hat{j}_k \ldots j_p}}{\partial x_{j_k}} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p+1}} \end{aligned}$$

[*3] これは微分同相写像である必要はない.

外微分について以下が成り立つ．

定理 4.3.

$$d : A^p(M) \longrightarrow A^{p+1}(M), \quad \boldsymbol{R}\text{線形写像}$$
$$dd\alpha = 0$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$
$$d\Phi^* \beta = \Phi^* d\beta$$

完備ベクトル場 X について X による p 次微分形式 α の Lie 微分を

$$L_X \alpha = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\phi_t^* \alpha - \alpha)$$

で定める．$i_X : A^p(M) \longrightarrow A^{p-1}(M)$ を $(i_X \alpha)(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ で定めれば Lie 微分と外微分には次のような関係がある．

$$L_X \alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X \alpha)$$

5 微分形式の積分

5.1 多様体の向き

n 次元ベクトル空間 V において V の二つの基底が同値であるとは

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \sim \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \Longleftrightarrow f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i, \quad \det(p_{ij}) > 0$$

をいう．この同値関係による同値類はちょうど二つであり，一方を指定することを V に向きを与えるという．指定された同値類に属する基底を正の向きの基底，他方の同値類に属する基底を負の向きの基底と呼ぶ．

n 次元多様体 M がいたるところ消えない n 次微分形式 ω があったとして，それを一つとり固定する．各接空間 T_pM においてその基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が正の向きであることを

$$\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) > 0$$

と定めれば，すべての接空間にいっせいに向きを定めることができる．これを多様体に向きを与えるという．向きを与えることが可能な多様体を向き付け可能という．

定理 5.1. パラコンパクト多様体においては，向き付け可能であることと，いたるところ消えない n 次微分形式が存在することとは同値である．

向き付け可能なとき，いたるところ消えない n 次微分形式を構成すればよい．それには次の 1 の分割を用いる．

補題（1 の分割） パラコンパクト多様体 M の局所有限開被覆 $\{U_\alpha\}$ について次のような C^∞ 級関数が存在する．

$$\phi_\alpha : M \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad 0 \le \phi_\alpha(x) \le 1, \ \overline{\mathrm{Supp}\phi_\alpha} \subset U_\alpha, \ \sum_\alpha \phi_\alpha \equiv 1$$

これを $\{U_\alpha\}$ に従属する 1 の分割という．

ここで $\mathrm{Supp}\phi = \{x \mid \phi(x) \neq 0\}$ であり ϕ の台と呼ばれる．また和は各点の近傍においては有限和なので問題なく定義できる．

5.2　微分形式の積分

向き付けられた多様体 M において n 次微分形式 ω の積分を次のように定める．まず ω の台の閉包が一つの座標近傍 U に含まれているときは

$$\int_M \omega = \int_U \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

で定める．ただし，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は M の正の向きの座標系であり，U はこの座標に関して $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同一視する．またこの座標系において $\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と表されているとする．

一般の n 次微分形式については，座標系による局所有限開被覆 $\{U_\alpha\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{\phi_\alpha\}$ を取って

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega$$

と定めればよい．

5.3　境界つき多様体での積分と Stokes の定理

多様体の定義を境界を持つ場合に拡張する．そのためには座標近傍が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合または $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と 上半空間 $x_n \geq 0$ との共通部分と同相であるとしておけばよい．さて，$\bar{M}$ を境界つき多様体とする．$\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持たない点全体の集合を $\bar{M}$ の境界と呼び ∂M と表す．∂M は $n-1$ 次元多様体になる．また $M = \bar{M} - \partial M$ は n 次元多様体である．

M に向きを与えておく．そのとき境界 ∂M にも自然に向きを与えることができる．$\omega \in A^{n-1}(M)$ が境界まで滑らかに拡張されているとき，次の定理が成り立つ．

定理 5.2 (Stokes の定理)**.**

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

この定理は M の k 次微分形式と k 次元境界つき部分多様体についても成立する．解析学・電磁気学におけるガウスの公式，グリーンの公式などを包括する定理である．

5.4　de Rham コホモロジー

p 次微分形式 α が $d\alpha = 0$ を満たすとき，閉形式 (closed form) という．また，$\alpha = d\beta$ なる $(p-1)$ 次微分形式が存在するとき，完全形式 (exact form) という．M 上の p 次閉形式全体の集合を $Z^p(M)$，p 次完全形式全体の集合を $B^p(M)$ と表す．これらは実数上の線形空間であり，

$$A^p(M) \supset Z^p(M) \supset B^p(M)$$

が成り立つ．

定義 5.3. 商空間 $Z^p(M)/B^p(M)$ を p 次 de Rham コホモロジーと呼び，$H^p_{DR}(M)$ と表す．

de Rham コホモロジーの議論は定義のみで終える．重要なのは，コンパクト多様体について，位相幾何学の立場からホモロジーと双対的に定義されるコホモロジーと de Rham コホモロジーが同型になることである．

6　リーマン多様体

6.1　リーマン計量

多様体 M について各点 p における接空間 T_pM に内積 g_p が定められていて，局所座標系 $(U, \{x_1, \dots, x_m\})$ のもとに

$$p \in M \longmapsto g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)$$

で定められる U 上の関数 g_{ij} が C^∞ 級であるとき，$g = \{g_p | p \in M\}$ を M 上のリーマン計量という．多様体とその上のリーマン計量の組 (M, g) をリーマン多様体という．g は局所座標系により

$$g = \sum g_{ij} dx_i\, dx_j$$

と表される．

例 6. $\boldsymbol{R}^n$ は標準内積 $g_0 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \cdots + (dx_n)^2$ によりリーマン多様体になる．

例 7. $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面 S に局所座標系 $(U, \{u, v\})$ を入れる．これにより U 上の点の座標 $\boldsymbol{x}$ は U 上の 2 変数関数 $\boldsymbol{x}(u, v)$ とみなせる．曲面のリーマン計量は $E = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u$，$F = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v$，$F = \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v$ とおいて

$$g = Edu\, du + 2Fdu\, dv + Gdv\, dv$$

となる．これは ds^2 とも表される．

(N, h) をリーマン多様体とし，$\Phi : M \longrightarrow N$ を挿入とする．

$$g_p(u, v) = h(\Phi_{*p}v, \Phi_{*p}v)$$

と定めれば g は M 上のリーマン計量になる．$g = \Phi^* h$ と表し，Φ による誘導計量 (induced metric) と呼ぶ．

例 8. $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ とする．$(\boldsymbol{R}^{n+1}, g_0)$ から包含写像 $i : S^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n+1}$ により誘導されるリーマン計量 $i^* g_0$ を S^n の標準計量と呼ぶ．

二つのリーマン多様体の間の写像 $\Phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ について $g = \Phi^* h$ が成り立つとき Φ は挿入になる．これを等長挿入 (isometric immersion) と言う．さらに Φ が微分同相写像であるとき等長写像 (isometry) と呼ぶ．

6.2　曲線の長さ，距離

リーマン多様体 (M, g) 内の区分的に滑らかな曲線 $C : [a, b] \longrightarrow M$ に対して

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{dC}{dt}, \frac{dC}{dt}\right)} dt$$

を C の長さという．M の 2 点 p, q に対して

$$d(p, q) = \inf \{L(C) \mid C \text{ は } p \text{ と } q \text{ を両端とする区分的 } C^\infty \text{ 級曲線}\}$$

と定める．

問題 13. d は多様体 M 上の距離になることを示せ．

6.3 リーマン接続

ベクトル場や微分形式を微分するためには平行移動の概念が必要である．逆にベクトル場の微分の概念が導入されれば平行移動は曲線に沿って微分が 0 になるベクトル場として定義される．

定義 6.1. $D:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ を D_XY と表すとき D が多様体 M の線形接続であるとは次が成り立つことをいう．

$$D_{X_1+X_2}Y=D_{X_1}Y+D_{X_2}Y,\quad D_X(Y_1+Y_2)=D_XY_1+D_XY_2,\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$
$$D_{fX}Y=fD_XY,\quad D_X(fY)=X(f)Y+fD_XY,\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$$

この性質により，3.1 節および 4.3 節と同様な議論により，D_XY の p における値 (p での接ベクトル) は $X(p)\in T_pM$ と p の近傍での Y のふるまいにしかよらないことがわかる．

問題 14. 局所座標系 $(U,\{x_1,x_2,\dots x_m\})$ により D は次の表示を得ることを示せ．
$X=\sum X_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\sum Y_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ について

$$D_XY=\sum_i\left(\sum_j X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}+\sum_{jk}X_jY_kD^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

ここで，D^i_{jk} は X,Y によらない U 上の関数であり，接続係数とよばれる．次の式で定義される．

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^n D^i_{jk}\partial x_i$$

線形接続により曲線 $C:(-a,a)\longrightarrow M$ に沿ってベクトル場 $X=\sum X_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を微分すれば

$$D_{\dot C}X=\sum_i\left(\frac{dX_i}{dt}+\sum_{jk}D^i_{jk}X_j\frac{dC_k}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

となる．これが恒等的に 0 になるとき X は C に沿って平行であるという．平行ベクトル場は常微分方程式の解であるので，存在と一意性が分かる．C に沿った平行ベクトル場による $T_{C(t)}M$ から $T_{C(0)}M$ への対応を平行移動と呼ぶ．線形接続の定義より平行移動は線形写像になる．

定義 6.2. 線形接続 D がリーマン多様体 (M,g) のリーマン接続であるとは次が成り立つことをいう．

$$X(g(Y,Z))=g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ),\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$
$$D_XY-D_YX=[X,Y],\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

リーマン接続を ∇ で表す．

最初の性質は平行移動が計量を保存することを，二番目の性質は平行移動に捩じれのないことを表している．

定理 6.3. リーマン多様体 (M,g) にはリーマン接続が唯一存在する．その接続係数は

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_h g^{kh}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h}\right)$$

で与えられる．ここで g^{kh} は 正値対称行列 (g_{ij}) の逆行列の成分を表す．Γ^k_{ij} をクリストッフェルの記号と呼ぶ．

リーマン多様体の共変微分を直接計算するのは大変である．ただし，ユークリッド空間およびその部分リーマン多様体のときは次の命題から簡単に計算できる．

命題 6.4. (1) $\boldsymbol{R}^m$ の通常の計量と直交座標系について $\Gamma_{ij}^k = 0$.
(2) (M, g) を $\boldsymbol{R}^m$ の部分リーマン多様体とする．$v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X$ は $\boldsymbol{R}^m$ での共変微分 $\bar{\nabla}_v X$ を T_pM に直交射影したベクトルである．

6.4　測地線

(M, g) をリーマン多様体，p, q をその 2 点とする．区分的 C^∞ 級曲線の集合

$$\mathfrak{C}_{pq} = \{C : [0,1] \longrightarrow M \mid C(0) = p,\ C(1) = q,\ C \text{ は区分的に滑らか}\}$$

上の 2 つの汎関数

$$E(C) = \int_0^1 g\left(\dot{C}, \dot{C}\right) dt, \quad L(C) = \int_0^1 \sqrt{g\left(\dot{C}, \dot{C}\right)} dt$$

について Cauchy-Schwarz の不等式を使えば次が得られる．

$$E(C) \geq L(C)^2, \quad \text{等号は } \|\dot{C}\| \text{ が一定のときに限り成立}$$

命題 6.5. (1) $\inf\{E(C) \mid C \in \mathfrak{C}_{pq}\} = d(p,q)^2$
(2) C が $E(C)$ の最小値を実現することと，C が p, q を結ぶ最短線であってかつ速度ベクトルの大きさが一定であることは同値である．

$E(C)$ を曲線 C のエネルギーという．この命題から最短線を求めるにはエネルギーを最小にする曲線を求めれば良いことがわかる．

$C \in \mathfrak{C}_{pq}$ について $\{C_s \in \mathfrak{C}_{pq} | -\epsilon < s < \epsilon\}$ が $C_0 = C$ でありかつ

$$\bar{C} : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \longrightarrow M, \quad \bar{C}(s,t) = C_s(t)$$

で定められる写像 $\bar{C}$ が C^∞ 級であるとき C の変分[*4]と呼ぶ．C のあらゆる変分に対して $\left.\dfrac{d}{ds}E(C_s)\right|_{s=0} = 0$ となるとき C を**測地線**という．最短線のパラメーターを等速度になるようにとれば測地線[*5]である．

定理 6.6. (1) $C : [a,b] \longrightarrow M$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\nabla_{\dot{C}} \dot{C} = 0.$$

(2) 任意の接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，$\dot{C}(0) = v$ となる測地線が定義区間の取り方を除いて一意に存在する．

(1) から測地線が局所座標系では二階常微分方程式の解曲線であることが分かる．常微分方程式の一般論から (2) が成り立つ．

例 9. $S^m = \{x \in \boldsymbol{R}^{m+1} | \|x\| = 1\}$ の測地線は大円 (2 次元部分空間と S^m の共通部分) である．

球面の測地線は，長さ π 以下なら最短線になる．一般に測地線は最短線ではないが測地線上の充分近い 2 点の間では最短線になる．

[*4] 直感的には $\mathfrak{C}_{pq}$ において C を通る C^∞ 級曲線のことである．
[*5] ここでの議論は曲線を区間 $[0,1]$ 上で考えているが測地線は一般の区間で定義される．

6.5　曲率

リーマン多様体 (M, g) の三つのベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

と定める．これは次の定理により (1, 3) 型テンソル場[*6]であり曲率テンソルと呼ばれる．

定理 6.7. (1) R は M の各点において多重線形写像

$$R : T_pM \otimes T_pM \otimes T_pM \longrightarrow T_pM$$

を定める．
(2) R について次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} R(u, v)w &= -R(v, u)w \\ R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v &= 0 \\ g(R(u, v)w, t) &= -g(w, R(u, v)t) \\ g(R(u, v)w, t) &= g(R(w, t)u, v) \end{aligned}$$

問題 15. R を局所座標系により

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_l R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

と表すとき，R^l_{ijk} を Γ^a_{bc} を用いて表せ．

曲率テンソルからリーマン多様体の曲率が次のように定義される．

定義 6.8. (1) T_pM の 2 次元部分空間 H に対して，次の $K(H)$ を**断面曲率**という．

$$K(H) = g(R(u, v)v, u), \quad u, v \in H,\ g(u, u) = g(v, v) = 1,\ g(u, v) = 0.$$

(2) T_pM の単位ベクトル v に対して，次の $\mathrm{Ric}(v)$ を v 方向の**リッチ曲率**という．

$$\mathrm{Ric}(v) = \sum_{j=2}^{m} g(R(v, e_j)e_j, v), \quad g(e_i, e_j) = \delta_{ij},\ e_1 = v.$$

(3) $p \in M$ に対して，次の $S(p)$ を点 p での**スカラー曲率**という．

$$S(p) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ric}(e_j), \quad e_j \in T_pM,\ g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

2 次元リーマン多様体においては本質的にすべて同一であり，**ガウス曲率**と呼ばれる．

問題 16. $(-c, c) \times (0, a)$ 上のリーマン計量 $g = dx^2 + f^2(x)dy^2$ のガウス曲率を求めよ．ただし $f(x) > 0$ とする．

[*6] 線形代数の概念であり，定義は省略する．

7　曲率と位相

7.1　完備性，指数写像

リーマン多様体 (M,g) を考える．M 上の点 $x \in M$ と接ベクトル $v \in T_xM$ について v を初期値とする測地線 γ が $[0,1]$ を含む区間で定義されているとき

$$\exp_x(v) = \gamma(1)$$

と定める．$\exp_x$ を点 x における指数写像という．

定理 7.1 (Hopf-Rinow)**.** リーマン多様体 (M,g) について次は同値である．
(1) 距離空間として完備である．
(2) M の任意の接ベクトル v について v を初期値とする測地線は $\boldsymbol{R}$ 上定義される．（測地的完備）

この定理の条件を満たすリーマン多様体を完備リーマン多様体という．連結完備リーマン多様体においては任意の 2 点についてそれを結ぶ最短測地線があることが知られている．Hopf-Rinow の定理の証明は省略し，その一部分を問題にしておく．

問題 17. リーマン多様体が距離空間として完備であるとき，測地線 $\gamma : [0,a) \longrightarrow M$ について $\lim_{t\to a}\gamma(t)$ は収束することを示せ．

例 10. G は群かつ多様体であって，積と逆を取る演算がともに C^∞ 写像であるものとする．このような群を Lie 群と呼ぶ．単位元の接空間 T_eG に内積 g_e を入れておき，$x \in G$ においては

$$g_x(u,v) = g_e\left((L_{x^{-1}})_*u\ ,\ (L_{x^{-1}})_*v\right)$$

で定める．ただし $L_a(x) = ax$ であり，左移動と呼ばれる．こうして定められるリーマン計量については L_a は等長写像になっており，左不変計量と呼ばれる．

直交群 $G = O(n)$ について $T_eG = \{A \mid {}^tA = -A\}$ とみなせる．内積を $g_e(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ で定めれば単位元における指数写像は行列としての指数写像に一致することが知られている．

7.2　指数写像の微分と Jacobi 場

$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ の $v \in T_pM$ における微分を考えたい．そのためには v を通る T_pM 内の曲線（直線）$\{v + sw \mid s \in \boldsymbol{R}\}$ の $\exp_p$ による像曲線の $s = 0$ における接ベクトルを求めればよい．そのため

$$C : (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1] \longrightarrow M, \qquad C(s,t) = \exp_p\left(t(v+sw)\right)$$

を考える．

$$\exp_p(v) = q, \quad \gamma(t) = C(0,t), \quad Y(t) = C_*\frac{\partial}{\partial s}(0,t)$$

とおけば，Y は p と q を結ぶ測地線 γ に沿ったベクトル場である．これについて次の等式が成り立つ．

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

これは 2 階の常微分方程式であり，Jacobi の微分方程式という．またその解を測地線 γ に沿った Jacobi ベクトル場という．上で定めた Y は初期条件

$$Y(0) = 0,\ \nabla_{\dot\gamma}Y(0) = w$$

を満たすので，微分方程式を解けば解が求められる．指数写像の微分は次式で与えられる．

$$(\exp_p)_{*v}(w) = Y(1)$$

さて，指数写像 $\exp_p$ が $v \in T_pM$ で退化しているとき，測地線 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ に沿った Jacobi ベクトル場で p および $q = \exp_p(v)$ で消えるものがある．このとき，q は p と測地線 γ に沿って共役であるという．q を p の共役点という．

命題 7.2. 非正曲率多様体（断面曲率がすべて 0 または負のリーマン多様体）においては，共役点は存在しない．

証明には $Y(0) = 0,\ \nabla_{\dot\gamma}Y \neq 0$ を満たす Jacobi ベクトル場について $\|Y\|^2$ の 2 階微分が非負であることを示せばよい．

完備連結非正曲率多様体において， T_pM は $\boldsymbol{R}^n$ と同相なので $\exp_p$ が被覆写像になる．

定理 7.3 (Cartan-Hadamard)**.** 完備連結非正曲率リーマン多様体 $(M,\ g)$ について，M の普遍被覆は $\boldsymbol{R}^m$ と微分同相である．特に，M の 2 次元以上のホモトピー群はすべて 0 になる．

問題 18. ユークリッド空間内の半径 1 の球面 $S^2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ において，北極 $(0,0,1)$ からみた測地写像を具体的に書き下せ．また北極からの共役点を決定せよ．

7.3 指数形式

(M,g) を完備リーマン多様体とし，pq をその 2 点とする．

$$\gamma : [0,l] \longrightarrow M,\ \gamma(0) = p, \gamma(l) = q$$

を 2 点を結ぶ長さ l の測地線とし，γ に沿った滑らかなベクトル場で，両端で 0 になるもの全体の集合を $\mathcal{V}$ とおく．

$$V \in \mathcal{V} \Longleftrightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M,\ V(0) = 0,\ V(l) = 0\ V \text{ は } C^\infty$$

$\mathcal{V}$ は線型空間であり，その上の二次形式を

$$I(V,W) = \int_0^l \left\langle \nabla_{\dot\gamma}V, \nabla_{\dot\gamma}W \right\rangle + \langle R(V,\dot\gamma)W, \dot\gamma\rangle\, dt$$

と定める．I を指数形式と呼ぶ．

命題 7.4. 指数形式について次が成り立つ．

(1) p と q が γ に沿って共役なことと，すべての $W \in \mathcal{V}$ について $I(V,W) = 0$ となる $V \in \mathcal{V},\ V \neq 0$ が存在することは同値である．すなわち，共役であることと指数形式が退化することは同値である．

(2) $I(V,V) < 0$ となる $V \in \mathcal{V}$ が存在すれば，γ は最短ではない．すなわち，最短ならば指数形式は半正定値である．

証明. (1) は Jacobi 場 V が $I(V,W) = 0$ を満たすことをみればよい．(2) は

$$C(s,t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t), \quad \gamma_s(t) = C(s,t)$$

と定めて，$E(\gamma_s)$ の $s = 0$ における 2 回微分を計算すれば良い．[*7] □

[*7] 指数形式はエネルギー汎関数に関するヘッセ形式として理解できる．

問題 19. 負曲率多様体（断面曲率がすべて負の多様体）では指数形式は正定値であることを示せ．また，指数形式が正定値ならその測地線は最短か．

この講義の終わりに，指数形式の応用として Myers の定理を紹介する．

定理 7.5 (Myers)**.** リーマン多様体 (M, g) について

$$Ric \geq (n-1)H > 0$$

が成り立てば，長さ $\pi/\sqrt{H}$ を越える測地線は最短線ではない．特に，M の任意の 2 点の距離は $\pi/\sqrt{H}$ より小さい．
さらに M が完備連結であれば M はコンパクトでありその基本群は有限群になる．

証明. γ を長さ l の測地線とし，$\{E_i\}$ を γ に沿った平行な正規直交系とする．ただし $E_1 = \dot{\gamma}$ とおく．

$$W_i(t) = \sin(\pi t/l)E_i(t), \qquad 2 \leq i \leq n$$

とおけば，

$$\begin{aligned} I(W_i, W_i) &= -\int_0^l \left\langle W_i, \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}W_i + R(W_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}\right\rangle dt \\ &= \int_0^l (\sin \pi t/l)^2(\pi^2/l^2 - \langle R(E_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, E_i\rangle)dt \end{aligned}$$

であるから，

$$\sum_{i=2}^n I(W_i, W_i) = \int_0^l (\sin \pi t/l)^2((n-1)\pi^2/l^2 - Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))dt$$

となる．ここで，$l > \pi/\sqrt{H}$ とすれば，右辺は負になるので，少なくとも一つの W_i について $I(W_i, W_i)$ は負になる．ゆえに，γ は最短にならない．

M が完備連結であれば，T_pM の半径 $\pi/\sqrt{H}$ の閉球体 $D = \{v \in T_pM \mid \|v\| \leq \pi/\sqrt{H}\}$ について $\exp_p(D) = M$ である．D はコンパクトなので M もコンパクトである．さらに M の普遍被覆もコンパクトになることから基本群は有限群である． □

問題 20. Myers の定理はリッチ曲率がある正数より大きいという条件が必要である．単に正曲率というだけでは多様体はコンパクトになるとは限らないからだ．このことを，$\boldsymbol{R}^3$ 内の凸曲面のガウス曲率が正であることを示すことにより説明せよ．