1　位相空間の定義および例

1.1　基本概念

- 集合 X と X の部分集合の属の対 $(X, \mathcal{O}(X))$ が位相空間 (topological space) であるとは次が成り立つことをいう．$\mathcal{O}(X)$ の要素を X の開集合という．
  (O-1)　$X \in \mathcal{O}(X),\ \emptyset \in \mathcal{O}(X)$
  (O-2)　$U_\lambda \in \mathcal{O}(X) \implies \cup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$
  (O-3)　$U_j \in \mathcal{O}(X)\ 1 \le j \le N \implies \cap_{j=1}^N U_j \in \mathcal{O}(X)$
  これらの性質を開集合系の公理と呼ぶ.
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ と X の点 p について $N \subset X$ が p の近傍であるとは，$p \in U \subset N$ を満たす開集合 U が存在することをいう.
- x が A の内点 $\iff$ 　$\exists U \in \mathcal{O}(X)$ s.t. $x \in U \subset A$
  x が A の触点 $\iff$ 「$x \in U \in \mathcal{O}(X) \implies U \cap A \neq \emptyset$」
- A の内点全体の集合を A の内部（開核）と呼び A° と表す．A の触点全体の集合を A の閉包と呼び $\overline{A}$ と表す．補集合の意味ではないことに注意せよ.
- 位相空間の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるとは，任意の $V \in \mathcal{O}(Y)$ について $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ となることをいう．f，f^{-1} がともに連続なとき，f を同相写像（位相同型写像）という.
- X の二つの位相 $O_1(X)$ と $O_2(X)$ について $O_1(X) \subset O_2(X)$ が成り立つとき，$O_1(X)$ は $O_2(X)$ より弱い位相であるという.

位相空間の定義は，近傍系の公理（定理 1.1），閉集合系の公理（定理 1.4）などによっても可能であるが，この講義では深く立ち入らない.

1.2　命題・例

1. 距離空間は $O_d(X)$ により位相空間になる.（数学概論 7.1 定理）
2. 密着位相と離散位相，距離空間の位相は密着位相にはならない．距離空間は位相空間を定めるが全ての位相空間が距離空間から定まるわけではない.
3. 同値な距離は同じ位相構造を定める.（数学概論 7.1.1）
4. 内部・閉包の性質 （定理 1.2，1.3）
5. 閉集合の性質（定理 1.4）
6. 開集合・閉集合の内部・閉包による特徴づけ（定理 1.5）
7. 距離空間の $\epsilon\delta$ による連続写像の定義は，位相空間としての連続性の定義と一致する.（数学概論 7.2.6）
8. 連続写像の合成写像は連続（定理 2.1）
9. 連続写像の例 （演習問題 [2-1]）
10. 恒等写像 $1_X : (X, O_1(X)) \longrightarrow (X, O_2(X))$ が連続であるためには，$O_1(X)$ が $O_2(X)$ よりも強い位相であることが必要十分である.（定理 3.1）
11. $f : X \longrightarrow Y$ が連続である時，X の位相をより強いものに取り替え，あるいは Y の位相をより弱いものに取り替えても f は連続である.
12. 演習問題 [1-3,4,5]
13. 開写像・閉写像とその例

2　位相の導入

この節では，位相空間の部分集合，直積集合，商集合に位相を入れるための一般的な方法を解説する．

2.1　基本概念

- 位相空間 $(W, \mathcal{O}(W))$ の部分集合 X について

$$\mathcal{O}(X) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{O}(W) \text{ s.t. } V \cap X = U\}$$

  は X の位相構造を定める．この位相を**相対位相**と呼ぶ．部分位相空間（部分空間）．
- 距離空間 (W, d) の部分集合 X について，部分距離空間から定まる位相構造と，部分位相空間としての位相構造は一致する．
- 二つの位相空間 $(X_i, \mathcal{O}(X_i))$，$i = 1, 2$ について

$$\mathcal{O}(X_1 \times X_2) = \{V \subset X_1 \times X_2 \mid \forall (p, q) \in V\ \exists U_i \in \mathcal{O}(X_i), i = 1, 2 \text{ s.t. } p \in U_1,\ q \in U_2, U_1 \times U_2 \subset V\} \cup \{\emptyset\}$$

  は $X_1 \times X_2$ の位相構造を定める．この位相を**直積位相**と呼ぶ．直積位相空間．
- 二つの距離空間 $(X_i, d_i), i = 1, 2$ について，直積距離から定まる直積集合の位相構造と，直積位相は一致する．
- 位相空間 $(W, \mathcal{O}(W))$ と 全射 $f : W \longrightarrow X$ について

$$\mathcal{O}(X) = \{U \subset X \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(W)\}$$

  は X の位相を定める．この位相を写像 f による**等化位相**と呼ぶ．特に，W に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，商集合 $W/\sim$ に射影 $p : W \longrightarrow W/\sim$ による等化位相を入れた位相空間を商空間と呼ぶ．

2.2　命題・例

1. 位相空間 $(W, \mathcal{O}(W))$ とその部分空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ について，包含写像 $i : X \longrightarrow W$ は連続である．また，位相空間 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ から X への写像 $f : Y \longrightarrow X$ について $i \circ f$ が連続であれば f も連続になる．このことから相対位相は包含写像を連続にする X の最弱の位相である．
2. 上と同じ設定で $F \subset X$ が X の閉集合であることと $F = E \cap X$ となる W の閉集合 E が存在することとは同値である．
3. 上と同じ設定で $A \subset X$ について A の X における閉包を $\widetilde{A}$，W における閉包を $\overline{A}$ と表せば $\overline{A} \cap X = \widetilde{A}$ が成り立つ．
4. 直積空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}(X_1 \times X_2))$ について，射影 $p_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$，$i = 1, 2$ は連続である．また，位相空間 Y から $X_1 \times X_2$ への写像 f について $p_1 \circ f$, $p_2 \circ f$ の双方が連続であれば f も連続になる．このことから直積位相は射影を連続にする最弱の位相である．
5. 直積空間において射影は開写像である．
6. 直積空間 $X_1 \times X_2$ の部分集合 $A_1 \times A_2$ について $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ が成り立つ．
7. W を位相空間，X を全射 $f : W \longrightarrow X$ による等化空間とするとき，f は連続である．X から位相空間 Y への写像 $g : X \longrightarrow Y$ について，$g \circ f$ が連続であれば g は連続である．このことから等化位相は f を連続にする Y の最強の位相である．
8. 連続写像 $f : W \longrightarrow X$ が全射で開写像であれば X の位相は等化位相である．

3 位相空間に関する諸概念（可算公理）

この節では、位相空間の性質としてしばしば仮定される性質について、特に可算性に関わるものを扱う。

3.1 基本概念

- 開集合系 $\mathcal{O}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}_0(X)$ が**開基**であるとは、任意の開集合が $\mathcal{O}_0(X)$ の要素の合併として表されることをいう。すなわち

$$\forall U \in \mathcal{O}(X) \quad \exists V_\lambda \in \mathcal{O}_0(X),\ \lambda \in \Lambda, \quad \text{s.t.} \quad U = \cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

  (注) $\mathcal{O}(X)$ 自身も $\mathcal{O}(X)$ の開基である.
- $\mathcal{O}_0(X)$ が開基であるための必要十分条件は次が成り立つことである。(開基の判定条件)

$$\forall U \in \mathcal{O}(X)\ \forall p \in U, \quad \exists V \in \mathcal{O}_0(X) \quad \text{s.t.} \quad p \in V \subset U.$$

  この判定条件から，距離空間 (X, d) において，$\mathcal{O}_0(X) = \{B_{1/n}(x) \mid x \in X,\ n \in \boldsymbol{N}\}$ は $\mathcal{O}_d(X)$ の開基になる.
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が可算個の開集合からなる開基を持つとき、**第 2 可算公理**を満たすという。
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ の部分集合 D が稠密であるとは D の閉包 $\overline{D}$ が X と一致することを言う。
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が可算個の要素からなる稠密集合を持つとき、**可分**という。
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ について開集合の族 $\{U_\alpha\}$ が $A \subset X$ の開被覆であるとは，$A \subset \cup_\alpha U_\alpha,\ U_\alpha \in \mathcal{O}(X)$ が成り立つことを言う.
- 任意の X の開被覆が可算部分被覆を持つとき X を Lindelöf 空間という.

3.2 命題・例

1. $(X, \mathcal{O}(X))$, $(Y, \mathcal{O}(Y))$ を位相空間とする．写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるためには Y の開基に属する開集合について逆像が開集合であることを言えば十分である．また開写像であるためには X の開基に属する開集合について像が開集合であることを言えば十分である.
2. 第 2 可算公理を満たす位相空間の部分空間はやはり第 2 可算公理を満たす。同様に、第 2 可算公理を満たす位相空間の直積空間も第 2 可算公理を満たす。[*1]
3. $f : X \longrightarrow Y$ が連続、全射かつ開写像とする（このとき、Y の位相は等化位相)。X が第 2 可算公理を満たすとすると Y も第 2 可算公理を満たす。
4. 可分な位相空間の直積空間は可分である。可分な位相空間の等化空間も可分である。[*2]
5. 位相空間 X が第 2 可算公理を満たせば可分である。
6. 距離空間 (X, d) の稠密集合 D について $\mathcal{O}_0(X) = \{B_r(x) \mid x \in D,\ r \in \boldsymbol{Q}\}$ は開基である．これから可分な距離空間は第 2 可算公理を満たす。[*3]
7. 特に、可分な距離空間の部分空間は可分である。
8. 位相空間 X が第 2 可算公理を満たすならば Lindelöf 空間であることを示せ.
9. n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ およびその部分空間は可分でありかつ第 2 可算公理を満たす.
10. 離散空間においては，高々可算であること，第 2 可算公理を満たすこと，および可分であることは全て同値である.

[*1] この性質は、等化空間においては一般には成立しない。反例は省略。
[*2] この性質は、部分位相空間においては一般には成立しない。反例は省略。
[*3] 上の命題の逆が距離空間では成立することを述べている。

4 位相空間に関する諸概念（ハウスドルフ性・連結性）

4.1 基本概念

- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が**ハウスドルフ**であるとは，任意の異なる 2 点が開集合で分離できることをいう．すなわち，
$$\forall p, q \in X, \quad \exists U, V \in \mathcal{O}(X), \quad \text{s.t.} \quad p \in U,\ q \in V,\ U \cap V = \emptyset.$$
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が**連結**であるとは，互いに交わらない空でない開集合の合併として表せないことをいう．すなわち，
$$X = U \cup V, \quad U, V \in \mathcal{O}(X),\ U \cap V = \emptyset \Longrightarrow U = X \text{ または } V = X.$$
位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは，相対位相に関して連結なことをいう．すなわち，
$$A \subset U \cup V, \quad U, V \in \mathcal{O}(X),\ (U \cap V) \cap A = \emptyset \Longrightarrow A \subset U \text{ または } A \subset V.$$
- X が連結であることと，開かつ閉な集合が空集合と全体集合に限ることは同値である．また，X から離散空間 $\{1, 2\}$ への連続写像が定値写像に限ることとも同値である．
- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が**弧状連結**であるとは，任意の 2 点が曲線で結べることをいう．すなわち
$$\forall p, q \in X, \quad \exists C : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{s.t.} \quad C(0) = p,\ C(1) = q,\ \text{連続}.$$

4.2 命題・例

1. 距離空間はハウスドルフである．
2. X がハウスドルフならその部分空間もハウスドルフである．また，X, Y がハウスドルフならその直積空間 $X \times Y$ もハウスドルフである．
3. X がハウスドルフであることと，直積空間 $X \times X$ において対角線集合 $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が閉集合であることは同値である．
4. X がハウスドルフなら 1 点のみの集合 $\{p\}$ は閉集合である．このことから，位相空間 X における同値関係で，同値類の中に X の閉集合になっていないものがあれば，商空間はハウスドルフではない．
5. Y がハウスドルフのとき，連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ のグラフは閉集合である．
6. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は連結である．
7. X, Y が連結であればその直積空間 $X \times Y$ も連結である．
8. X を位相空間，A をその連結な部分集合とする．連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ について，$f(A)$ は連結である．特に，X が連結で f が全射であれば Y は連結である．
9. X の連結な部分集合の属 $\{A_\lambda\}$ について $\cap_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$ ならば $\cup_\lambda A_\lambda$ も連結である．
10. x を位相空間 X の点とする．x を含む連結集合全体の合併集合は，上の命題から連結である．これを x を含む連結成分とよび，C_x と表す．連結成分は閉集合であり次を満たす．
$$C_x \cap C_y \neq \emptyset \Longleftrightarrow C_x = C_y.$$
連結成分が有限個であれば各連結成分は開集合かつ閉集合である．
11. $\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合は (有界または非有界の) 区間である．
12. 連結空間上の連続関数について，中間値の定理が成立する．
13. 弧状連結な位相空間は連結である．(逆は成立しない)

5　位相空間に関する諸概念（コンパクト性）

5.1　基本概念

- 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が**コンパクト**であるとは任意の X の開被覆について，その有限部分被覆が存在することをいう．X の部分集合 K がコンパクト集合であるとは相対位相に関してコンパクトであることをいう．このことは次と同値である．

$$\forall\{U_\alpha\},\ U_\alpha \in \mathcal{O}(X),\ K \subset \cup_\alpha U_\alpha,\quad \exists\alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad \text{s.t.} \quad K \subset \cup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$$

- 位相空間 X について，各点がコンパクトな近傍を持つとき，X は局所コンパクトであるという．

$$\forall p \in X,\quad \exists K(\text{コンパクト}),\quad \text{s.t.}\quad p \in K^\circ$$

5.2　命題・例

1. 有限集合はコンパクトである．
2. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである．
3. $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像，K を X のコンパクト部分空間とする．このとき，$f(K)$ もコンパクトである．特に，コンパクト空間の等化空間はコンパクトである．
4. 二つのコンパクト空間の直積はコンパクトである．
5. X がハウスドルフ空間の時，コンパクト集合は閉集合になる．
6. X の二つのコンパクト集合 K，H について $K \cup H$ もコンパクトである．また X がハウスドルフであれば $K \cap H$ もコンパクトである．
7. X をハウスドルフ空間，K, H をそのコンパクト集合で $K \cap H = \emptyset$ を満たすとする．次が成り立つ．

$$\exists U, V \in \mathcal{O}(X),\quad \text{s.t.}\quad K \subset U,\ H \subset V,\ U \cap V = \emptyset.$$

   互いに交わらない二つのコンパクト集合は開集合により分離される．
8. X をコンパクト空間，$f : X \longrightarrow Y$ を連続な全単射とする．このとき Y がハウスドルフであれば逆写像 f^{-1} も連続である．
9. 距離空間 X において，$K \subset X$ がコンパクトなら有界閉集合である．
10. 距離空間 X において，$K \subset X$ がコンパクトなら点列コンパクトである．
11. 点列コンパクト距離空間は第 2 可算公理を満たす．（第 3 節で証明済み）
12. 点列コンパクト距離空間はコンパクトである．
13. $\boldsymbol{R}$ (または $\boldsymbol{R}^n$) の有界な点列は収束する部分列をもつ．
14. $\boldsymbol{R}^n$ において $K \subset \boldsymbol{R}^n$ が有界閉集合であることとコンパクトであることとは同値である．
15. コンパクト集合上の実数に値を持つ連続関数は最大値および最小値をもつ．特に閉区間上連続な関数は最大値および最小値を持つ．実数値連続関数によるコンパクト連結集合の像は閉区間である．
16. 局所コンパクトハウスドルフ空間の一点コンパクト化について
17. 写像空間のコンパクト開位相について

6 ホモトピー

- X から Y への二つの連続写像 $f, g : X \longrightarrow Y$ がホモトピック (homotopic) であるとは次が成り立つことを云う．
$$\exists F : [0,1] \times X \longrightarrow Y \quad \text{s.t.} \quad F(0,x) = f(x),\ F(1,x) = g(x),\ F \text{ は連続.}$$
$f \sim g : X \longrightarrow Y$ と略記する．
- ホモトピックという関係は $F(X,Y)$ の同値関係を定める．この同値類をホモトピー類 (homotopy class) と呼ぶ．ホモトピー類全体の集合（商集合）をホモトピー集合と呼び $\pi(X,Y)$ と表す．同値関係であることの証明には次の命題を用いる．

  命題 位相空間 X が二つの閉集合の合併 $X = A \cup B$ として表されている時，写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるためには，f が A 上および B 上で連続であれば十分である．(p.97 定理 2.6)
- 集合 $F(X,Y) = \{ f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ 連続} \}$ にコンパクト開位相を入れるとき，X が局所コンパクトハウスドルフであれば，ホモトピー類は $F(X,Y)$ 内の弧状連結成分である．
- $\pi(X, D^n)$ は要素一個の集合である．
- $\pi(D^n, X)$ は X の弧状連結成分と 1 対 1 に対応する．
- $\pi(S^1, S^1)$ は整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ と 1 対 1 に対応する．
- (応用) 代数学の基本定理
- 二つの位相空間 X, Y がホモトピー同値とは次が成り立つことをいう．
$$\exists f : X \longrightarrow Y,\ \exists g : Y \longrightarrow X \quad \text{s.t.} \quad f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y,\ g \circ f \sim \mathrm{Id}_X.$$
- X と Y が同相ならホモトピー同値である．
- D^n は一点のみの集合とホモトピー同値である．

7 図形の例

幾何学の対象になる位相空間 (図形) の例を扱う．

7.1 射影空間

- $\boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ に同値関係
$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$$
を入れるとき，その商空間を n 次元実射影空間 (real projective space) と呼び，$\boldsymbol{R}P^n$, $P^n(\boldsymbol{R})$ などと表す．
- 上で，$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{C}$ に置き換えたものを複素射影空間 (copmplex projective space) と呼ぶ．
- 球面から射影空間への写像

7.2 閉曲面

- 2 次元トーラスの導入法
- 種数 g の曲面